УДК 512.623

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

О БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИХ К БАЗЕ ЭЛЕМЕНТАХ

Исследованы свойства бесконечно близких к базе элементов двумерно упорядоченного алгебраически замкнутого поля. Показано, что каждый элемент, являющийся пределом последовательности элементов базы, бесконечно близок к базе или принадлежит ей.

В данной статье мы придерживаемся понятия двумерного порядка и двумерно-упорядоченного поля, введенных в [1, 2]. Другое (неэквивалентное) определение *n*-упорядоченного множества см. в [3]. Верхний конус двумерно упорядоченного поля *P* обозначен через P^u. В двумерно упорядоченном поле верхний конус играет роль, аналогичную роли положительного конуса в линейно упорядоченном поле. Все основные понятия, относящиеся к двумерно упорядоченным полям, определены в [2].

Кольцо бесконечно близких к базе элементов

Теорема 1. Пусть $\left\langle P, P^u \right\rangle$ есть двумерно упорядоченное поле с топологией порядка. Пусть последовательность элементов базы $(\alpha_\tau \mid \tau < \beta)$ сходится к *a*. Тогда *a* или принадлежит базе P_0, или бесконечно близок к P_0.

Доказательство. Если $a \in P_0$, то теорема доказана.

В линейно упорядоченном поле каждая сходящаяся последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

Не уменьшая общности, будем считать, что сходящаяся последовательность $(\alpha_\tau \mid \tau < \beta)$ монотонно возрастает и $a \in \overset{o}{P^u}, a > 0$. Пусть $b \in P_0, 0 < b < a$. Найдётся ординал β_0, такой что $\tau > \beta_0 \Rightarrow a_\tau > b > 0$. Умножение в $\left\langle P, P^u \right\rangle$ непрерывно, поэтому $\lim_{\tau<\beta} a_\tau^k = a^k$. Пусть k – натуральное число. Существует такой $\beta_k > \beta_0$, что при $\tau > \beta_k$ выполнено $a_\tau^k \in V_{\varepsilon_k}(a^k)$. Отсюда

$$\varepsilon^k > a^k - a_\tau^k > -\varepsilon^k, a^k > a_\tau^k - \varepsilon^k > b^k - (\tfrac{b}{2})^k > 0.$$

При всех натуральных *k* выполнено

$$a^k \in \overset{0}{p^u} \cap P^r. \qquad (*)$$

В самом деле, при $k = 1$ (*) верно. Пусть (*) выполнено для некоторого *k*. По лемме 3.4.4 из [2] получаем $a^{k+1} \in P^u$.

Так как $a^k \in P^r$ при всех натуральных *k*, то $a^{k+1} \in \overset{0}{P^u} \cap P^r$.

Пусть $c < a, c \in P_0$. Последовательность $a'_\tau = a_\tau - c$ сходится к $a - c > 0$. Из вышесказанного следует, что $(a-c)^n > 0$.

Итак, если $c < a, c \in P_0$, то для всех натуральных *n* выполнено $(a-c)^n > 0$. Значит, *a* бесконечно близко к базе P_0.

Следствие 2. Все элементы кольца $P_0[\alpha]$ бесконечно близки к базе P_0.

В самом деле, все элементы кольца $P_0[\alpha]$ являются пределами сходящихся последовательностей элементов базы P_0, следовательно, принадлежат базе или бесконечно близки к ней.

Следствие 3. Пусть $x \in P_0[\alpha], x \notin P_0$. Тогда

1. а) для каждого $r \in P_0, r < x$ и каждого натурального *n* выполнено $(x-r)^n \in \overset{0}{P^u}$ или

b) для каждого $r \in P_0, r < x$ и каждого натурального *n* выполнено $(x-r)^n \in (-\overset{0}{P^u})$;

2. а) для каждого $r \in P_0, r > x$ и каждого натурального *n* выполнено $(r-x)^n \in \overset{0}{P^u}$ или

b) для каждого $r \in P_0, r > x$ и каждого натурального *n* выполнено $(r-x)^n \in (-\overset{0}{P^u})$.

Доказательство. 1) См. следствие 2.

2) Пусть $x \in P_0[\alpha], x \notin P_0, r \in P_0, r > x$. Так как $P_0[\alpha]$ – кольцо, то $(-x) \in P_0[\alpha]$ и $(-x) > (-r)$. Теперь, в силу 1. для всех *n* выполнено одно из двух:

а) $(-x-(-r))^n \in \overset{0}{P^u}$, т.е. $(r-x)^n \in \overset{0}{P^u}$;

b) $(r-x)^n \in (-\overset{0}{P^u})$.

Теорема 4. Пусть $\left\langle P, P^u \right\rangle$ есть двумерно упорядоченное поле с топологией порядка. Пусть $a \in \overset{0}{P^u}$ бесконечно близко к P_0 и производит в P_0 симметричное сечение [4]. Тогда

а) если $r \in P_0, r < a$, то для всех натуральных *n* выполнено

$$(a-r)^n \in \overset{0}{P^u};$$

b) если $r \in P_0, r > a$, то для всех натуральных *n* выполнено

$$(r-a)^n \in (-\overset{0}{P^u}).$$

Доказательство а) следует из определения элемента, бесконечно близкого к базе.

Докажем b). Пусть a бесконечно близко к базе P_0 и производит в P_0 симметричное сечение (A, B). Пусть $r \in P_0, r > a$, следовательно, $r \in B$. По свойству симметричного сечения существует такое $\rho \in A$, что $a - \rho < r - a$.

Имеем $a - \rho, (r-a)^{-1} \in \overset{0}{P^u} \cap P^r$. В $p^u \setminus P_0^-$ определено отношение предпорядка $x \prec y$, если $yx^{-1} \in \overset{0}{P^u}$ [2]. Покажем, что $a - \rho \succ r - a$.

Обозначим $\delta = r - \rho$. Имеем $a - \rho < (\rho - a) + \delta$, $2(a - \rho) < \delta$.

Итак, $\frac{\delta}{2} - (a - \rho) > 0$. Так как $\frac{\delta}{2} - (a-\rho) \in -\overset{0}{P^u}$, то и $(\frac{\delta}{2} - (a-\rho))^2 \in -\overset{0}{P^u}$.

Отсюда $\frac{\delta^2}{4} - \delta(a-\rho) + (a-\rho)^2 \in -\overset{0}{P^u}$. Отбрасывая слагаемое из P_0, находим $-\delta(a-\rho) + (a-\rho)^2 \in -\overset{0}{P^u}$, $(a-\rho)(a-\rho-\delta) \in -\overset{0}{P^u}$.

Наконец, $(a-\rho)(r-a) \in \overset{0}{P^u}$,

$$(a-\rho) \succ (r-a)^{-1} \succ 1. \qquad (1)$$

По лемме 3.4.2. из [2] неравенства вида (1) можно почленно умножать на элементы из P / P_0^-, если в полученном неравенстве элементы принадлежат P^u.

Пользуясь этим приёмом, получим для всех натуральных n

$$(a-\rho)^n \succ (r-a)^n \succ 1.$$

Отсюда $(r-a)$ бесконечно близко к базе, что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* *n*-упорядоченные множества // Труды Иркутского государственного университета. 1965. Т. 74, вып. 6. С. 146–169.
2. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск: Томский государственный университет, 2003. 128 с.
3. *Novoa L.G.* On *n*-ordered sets and order completeness // Pacific J. Math. 1965. Vol. 15, № 4. P. 1337–1345.
4. *Пестов Г.Г.* К теории сечений в упорядоченных полях // 2001. Т. 42, № 6. С. 1350–1360.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 1 декабря 2006 г., принята к печати 8 декабря 2006 г.