

УДК 519.872

А.Н. Моисеев, А.А. Назаров

## Асимптотический анализ высокоинтенсивного полумарковского потока событий

Представлено исследование высокоинтенсивного полумарковского потока событий. Показано, что для рассматриваемого потока распределение вероятностей числа событий, наступивших за фиксированный интервал времени, при условии неограниченного роста интенсивности потока может быть аппроксимировано нормальным распределением. В работе получены параметры этого распределения.

**Ключевые слова:** высокоинтенсивный поток событий, полумарковский поток, асимптотический анализ.

Одним из базовых элементов систем и сетей массового обслуживания [1] является входящий поток заявок. Современные телекоммуникационные сети и системы распределенной обработки информации [2] предполагают высокую пропускную способность каналов передачи информации. Таким образом, в этих системах количество пакетов данных, поступающих на обработку в единицу времени, очень высоко. В терминах теории массового обслуживания в таких случаях говорят о высокой интенсивности [3] входящего потока. В частности, в работе [2] модель высокоинтенсивного потока применяется для моделирования потока входящих сообщений многофазной системы распределенной обработки данных.

В работах [3–5] были изучены свойства высокоинтенсивных рекуррентных, ММРР- и МАР-потоков. В настоящей же работе представлен анализ свойств высокоинтенсивного полумарковского (Semi-Markovian, или SM-) потока как наиболее общей модели потоков событий.

**Математическая модель.** Рассмотрим полумарковский поток однородных событий, заданный следующим образом. Пусть  $\{\xi_n, \tau_n\}$  – стационарный двумерный марковский процесс с дискретным временем [6]. Здесь  $\xi_n$  – дискретная компонента, принимающая значения от 1 до  $K$ ,  $\tau_n$  – непрерывная компонента, принимающая неотрицательные значения. Будем полагать, что эволюция процесса определяется элементами так называемой полумарковской матрицы  $\mathbf{A}(x) = \{A_{kv}\}_{k,v=1,K}$  следующим образом:

$$A_{kv}(x) = P\left\{\xi_{n+1} = v, \tau_{n+1} < \frac{x}{N} \mid \xi_n = k\right\}.$$

Здесь  $N$  – некоторая большая величина, которая введена искусственно, чтобы явным образом подчеркнуть малость величин  $\tau_n$ . В теоретических исследованиях будем полагать  $N \rightarrow \infty$  и, таким образом,  $\tau_n \rightarrow 0$ . На практике полученные результаты можно использовать для аппроксимации соответствующих величин при достаточно больших значениях  $N$  (в условии высокой интенсивности потока).

Пусть в момент времени  $t_0 = 0$  произошло изменение состояния процесса  $\{\xi_n, \tau_n\}$ . Последовательность моментов времени  $t_n$ , определяемая рекуррентным выражением  $t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}$  для  $n = 0, 1, \dots$ , называется полумарковским потоком случайных событий, определяемым полумарковской матрицей  $\mathbf{A}(x)$ . Процесс  $\xi_n = \xi(t_n)$  называют вложенной в полумарковский поток цепью Маркова.

Поскольку средняя длина интервалов  $\tau_n$  обратно пропорциональна  $N$ , то при  $N \rightarrow \infty$  интенсивность наступления событий в таком потоке будет неограниченно расти. Такой поток событий будем называть *высокоинтенсивным полумарковским*, или *HISM-потоком* (от High-Intensive Semi-Markovian). Ставится задача нахождения числа событий  $m(t)$ , наступивших в этом потоке в течение интервала времени  $(0, t)$ .

**Вывод уравнений Колмогорова.** Пусть  $z(t)$  – длина интервала времени от момента  $t$  до момента наступления следующего события в потоке;  $k(t)$  – случайный процесс, значения которого на каждом из интервалов  $[t_n, t_{n+1})$ ,  $n = 0, 1, \dots$  постоянны и равны  $\xi_n$ . Тогда многомерный случайный процесс  $\{k(t), m(t), z(t)\}$  будет марковским [7]. Введем обозначение:

$$P(k, m, z, t) = P\left\{k(t) = k, m(t) = m, z(t) < \frac{z}{N}\right\}.$$

Получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для этого распределения. Согласно формуле полной вероятности имеем

$$P(k, m, z, t + \Delta t) = P(k, m, z + N\Delta t, t) - P(k, m, N\Delta t, t) + \sum_{v=1}^K P(v, m-1, N\Delta t, t) A_{vk}(z) + o(\Delta t).$$

Отсюда для  $k = \overline{1, K}$  получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(k, m, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(k, m, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(k, m, 0, t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^K \frac{\partial P(k, m-1, 0, t)}{\partial z} A_{vk}(z) \quad (1)$$

при начальных условиях

$$P(k, m, z, 0) = \begin{cases} \sum_{v=1}^K A_{kv}(z), & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m > 0. \end{cases}$$

Обозначим через  $R_k(z)$  совместное стационарное распределение двумерного марковского процесса  $\{k(t), z(t)\}$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(k, m, z, 0) = P\left\{k(t) = k, z(t) < \frac{z}{N}\right\} = R_k(z).$$

Просуммируем уравнения (1) по  $m$  от 0 до  $\infty$ , при  $t = 0$  получаем

$$0 = R'_k(z) - R'_k(0) + \sum_{v=1}^K R'_v(0) A_{vk}(z).$$

Обозначим вектор-строку  $\mathbf{R}(z) = \{R_1(z), \dots, R_K(z)\}$ , тогда предыдущее уравнение запишется в виде

$$\mathbf{R}'(z) + \mathbf{R}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Отсюда получаем матричное дифференциальное уравнение относительно функции  $\mathbf{R}(z)$ :

$$\mathbf{R}'(z) = \mathbf{R}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)], \quad (3)$$

граничное условие для которого при  $z \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\mathbf{R}'(0) = \lambda \mathbf{r}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  – некоторый коэффициент, вектор-строка  $\mathbf{r}$  есть стационарное распределение состояний вложенной цепи Маркова. Этот вектор является решением уравнения Колмогорова  $\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{A}(z)$  есть стохастическая матрица, определяющая вероятности переходов вложенной цепи

Маркова.

Таким образом, решение уравнения (3) имеет вид

$$\mathbf{R}(z) = \int_0^z \mathbf{R}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] dx. \quad (5)$$

Пусть  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty)$  есть стационарное распределение значений полумарковского процесса  $k(t)$ , тогда при  $z \rightarrow \infty$  из (5) получаем

$$\mathbf{R} = \int_0^{\infty} \mathbf{R}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] dx = \lambda \int_0^{\infty} \mathbf{r}[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] dx = \lambda \mathbf{r} \int_0^{\infty} [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] dx = \lambda \mathbf{r} \mathbf{A}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица с элементами  $A_{kv} = \int_0^{\infty} [P_{kv} - A_{kv}(x)] dx$ . Умножая левую и правую части равенства (6)

на единичный вектор-столбец  $\mathbf{E}$ , получим

$$\mathbf{R}\mathbf{E} = \mathbf{1} = \lambda \mathbf{r}\mathbf{A}\mathbf{E},$$

откуда находим значение коэффициента  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{r}\mathbf{A}\mathbf{E}}. \quad (7)$$

Введем обозначение  $H(k,u,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(k,m,z,t)$ , где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, а  $u$  – некоторая переменная. Умножая (1) на  $e^{jum}$  и суммируя по  $m$  от 0 до  $\infty$ , получаем

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(k,u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(k,u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H(k,u,0,t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^K e^{ju} \frac{\partial H(k,u,0,t)}{\partial z} A_{vk}(z).$$

С учетом обозначения в виде вектор-строки  $\mathbf{H}(u, z, t) = \{H(1, u, z, t), \dots, H(K, u, z, t)\}$  данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(u,0,t)}{\partial z} [e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}]. \quad (8)$$

Дифференциальное матричное уравнение (8) будем решать асимптотически методом [8] в условии неограниченно растущей интенсивности  $\lambda N$  рассматриваемого полумарковского потока, т.е. при  $N \rightarrow \infty$ .

**Асимптотика первого порядка.** Введем обозначения

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u,z,t) = \mathbf{F}_1(w,z,t,\varepsilon).$$

Из (8) получим

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,z,t,\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,z,t,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z} [e^{jw\varepsilon} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}]. \quad (9)$$

*Теорема 1.* Асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(w,z,t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w,z,t,\varepsilon)$  уравнения (9) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w,z,t) = \mathbf{R}(z) e^{jw\lambda t}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{R}(z)$  определяется выражением (5).

*Доказательство.* Выполним в (9) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$0 = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (2). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_1(w, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1(w,z,t) = \mathbf{R}(z) \Phi_1(w,t), \quad (11)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

Выполним в (9) предельный переход  $z \rightarrow \infty$  и просуммируем все компоненты этого уравнения (для этого умножим справа обе его части на единичный вектор-столбец  $\mathbf{E}$ ). Получим

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,\infty,t,\varepsilon)}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z} [e^{j\varepsilon w} \mathbf{P} - \mathbf{I}] \mathbf{E}.$$

Подставим сюда выражение (11), воспользуемся разложением  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , поделим обе части на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w,t)}{\partial t} \mathbf{R} \mathbf{E} = jw \mathbf{R}'(0) \mathbf{P} \mathbf{E} \Phi_1(w,t),$$

откуда с учетом (4) получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w,t)}{\partial t} = jw\lambda \Phi_1(w,t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_1(w, 0) = 1$ , получаем решение

$$\Phi_1(w,t) = e^{jw\lambda t}.$$

Подставим это выражение в (11), получим (10). *Теорема доказана.*

**Асимптотика второго порядка.** Выполним в (8) замену  $\mathbf{H}(u,z,t) = \mathbf{H}_2(u,z,t) e^{ju\lambda N t}$ :

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u,z,t)}{\partial t} + ju\lambda \mathbf{H}_2(u,z,t) = \frac{\partial \mathbf{H}_2(u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}_2(u,0,t)}{\partial z} [e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}]. \quad (12)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u,z,t) = \mathbf{F}_2(w,z,t,\varepsilon). \quad (13)$$

Тогда (12) переписывается в виде

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon) = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} \right]. \quad (14)$$

*Теорема 2.* Асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)$  уравнения (14) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{R}(z)$  определяется выражением (5)

$$\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{E}, \quad (16)$$

вектор-строка  $\mathbf{f}'_0$  удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{f}'_0 [\mathbf{I} - \mathbf{P}] = \lambda [\mathbf{rP} - \mathbf{R}], \\ \mathbf{f}'_0 \mathbf{A} \mathbf{E} = \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \end{cases} \quad (17)$$

$$a_2 = \mathbf{rA}_2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}_2 = \int_0^{\infty} x^2 d\mathbf{A}(x).$$

*Доказательство.* Выполним в (14) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$0 = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (2). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_2(w, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_2(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_2(w, t), \quad (18)$$

где  $\Phi_2(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

Решение уравнения (14) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [\mathbf{R}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}(z)] + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

где  $\mathbf{f}(z)$  – некоторая вектор-функция (строка). Подставляя это выражение в (14) и применяя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , после некоторых преобразований получим

$$j\varepsilon w \lambda \Phi_2(w, t) \mathbf{R}(z) = \Phi_2(w, t) \left\{ \mathbf{R}'(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(z) + \mathbf{R}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] + j\varepsilon w \mathbf{R}'(0) \mathbf{A}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + j\varepsilon w \mathbf{A}(z)] \right\} + O(\varepsilon^2).$$

Учитывая (3)–(4), поделив обе части на  $j\varepsilon w$  и сокращая  $\Phi_2(w, t)$ , получаем

$$\lambda \mathbf{R}(z) = \mathbf{f}'(z) + \lambda \mathbf{rA}(z) + \mathbf{f}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] + O(\varepsilon).$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной вектор-функции  $\mathbf{f}(z)$

$$\mathbf{f}'(z) = \mathbf{f}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)] - \lambda [\mathbf{rA}(z) - \mathbf{R}(z)],$$

интегрируя которое при начальном условии  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$ , получаем выражение

$$\mathbf{f}(z) = \int_0^z \left\{ \mathbf{f}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] - \lambda [\mathbf{rA}(x) - \mathbf{R}(x)] \right\} dx. \quad (20)$$

Будем искать  $\mathbf{f}(z)$  в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \mathbf{f}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] - \lambda [\mathbf{rA}(x) - \mathbf{R}(x)] \right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{f}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{P}] - \lambda [\mathbf{rP} - \mathbf{R}] = 0. \quad (21)$$

Вычитая левую часть этого равенства из подынтегрального выражения (20), с учетом (6) получаем

$$\mathbf{f}(\infty) = \mathbf{f}'(0) \mathbf{A} + \lambda \mathbf{rA} - \lambda \int_0^{\infty} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] dx. \quad (22)$$

Можно показать, что  $\int_0^{\infty} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] dx = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{rA}_2$ , где  $\mathbf{A}_2 = \int_0^{\infty} x^2 d\mathbf{A}(x)$ . С учетом этого, умножая обе

части (22) справа на единичный вектор  $\mathbf{E}$ , получим

$$[\mathbf{f}'(0)\mathbf{A} - \mathbf{f}(\infty)]\mathbf{E} = \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \quad (23)$$

где  $a_2 = \mathbf{rA}_2\mathbf{E}$ . Полагая, что  $\mathbf{f}(\infty)\mathbf{E} = 0$  и обозначая  $\mathbf{f}'_0 = \mathbf{f}'(0)$ , из (21) и (23) получаем систему уравнений (17).

Выполним в (14) предельный переход  $z \rightarrow \infty$  и домножим обе части уравнения на  $\mathbf{E}$  справа, получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{E} + j\varepsilon w \lambda \mathbf{F}_2(w, \infty, t, \varepsilon) \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [e^{j\varepsilon w} \mathbf{P} - \mathbf{I}] \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \mathbf{E} (e^{j\varepsilon w} - 1).$$

Подставим сюда (19) и применим разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ , получаем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} \mathbf{R}\mathbf{E} + j\varepsilon w \lambda \Phi_2(w, t) \mathbf{R}\mathbf{E} = \Phi_2(w, t) [\mathbf{R}'(0) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(0)] \mathbf{E} \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] + O(\varepsilon^3).$$

Приводя подобные, сокращая на  $\varepsilon^2$ , используя обозначение (16) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \Phi_2(w, t) \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa),$$

решая которое при начальном условии  $\Phi_2(w, 0) = 1$ , получаем  $\Phi_2(w, t) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa)t\right\}$ . Под-

ставляя это выражение в (18), получаем (15). Теорема доказана.

**Аппроксимация распределения числа событий, наступивших в HISM-потоке.** Выполняя в (15) замены, обратные к (13), и возвращаясь к функции  $\mathbf{H}(u, z, t)$ , получаем

$$\mathbf{H}(u, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp\left\{ju\lambda Nt + \frac{(ju)^2}{2} (\lambda + \kappa) Nt\right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция числа событий, наступивших в высокоинтенсивном полумарковском потоке в течение времени  $t$ , удовлетворяет соотношению

$$h(u, t) = \mathbf{H}(u, \infty, t) \mathbf{E} \approx \exp\left\{ju\lambda Nt + \frac{(ju)^2}{2} (\lambda + \kappa) Nt\right\}.$$

То есть при достаточно больших значениях  $N$  распределение числа событий, наступивших в HISM-потоке за время  $t$ , может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием  $\lambda Nt$  и дисперсией  $(\lambda + \kappa) Nt$ , где  $\lambda$  и  $\kappa$  определяются выражениями (7) и (16).

**Численные результаты.** В качестве примера для численных расчетов рассмотрим задачу моделирования событий в высокоинтенсивном полумарковском потоке, заданном полумарковской матрицей  $\mathbf{A}(x)$  третьего порядка, записанной в форме  $\mathbf{A}(x) = \mathbf{P} * \mathbf{G}(x)$ , где  $\mathbf{P}$  – стохастическая матрица;  $\mathbf{G}(x)$  – матрица, составленная из некоторых функций распределения; операция  $*$  – адямарово произведение матриц. Будем рассматривать пример, когда элементы матрицы  $\mathbf{G}(x)$  соответствуют функциям гамма-распределения [9] с параметрами формы  $\alpha_{k\nu}$  и масштаба  $\beta_{k\nu}$ ,  $k, \nu = \overline{1, 3}$ , которые представим в виде матриц  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{\beta}$  соответственно. Выберем следующие конкретные значения параметров:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 10 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

В результате расчетов получили следующие значения параметров:  $\lambda \approx 1,0909$ ;  $\kappa \approx -0,0906$ .

Для данной задачи было выполнено имитационное моделирование потока при значениях  $N = 1, 10, 30, 100, 1000$  и построены эмпирические распределения числа событий в интервалах длины  $t = 10$ . Ряды распределений эмпирических данных и соответствующих аппроксимаций для  $N = 1$  и  $N = 10$  представлены графически на рис. 1 (для остальных значений  $N$  графики практически совпадают и на рисунке становятся неразличимы).

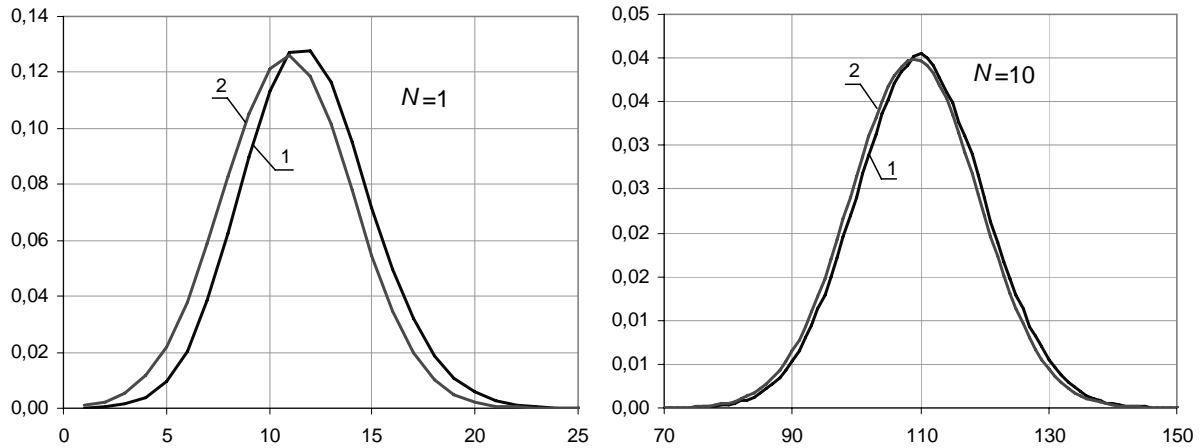


Рис. 1. Сравнение полигона относительных частот эмпирического распределения (1) и аппроксимирующего ряда распределения (2)

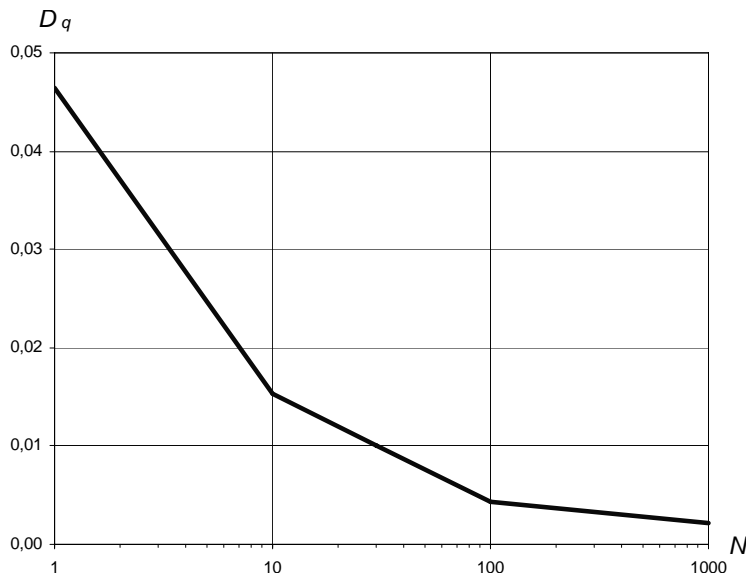
Для оценки точности аппроксимации распределения будем использовать расстояние Колмогорова [10]  $D_q = \sup_x |F_q(x) - F(x)|$ . Здесь  $F_q(x)$  – эмпирическая функция распределения,  $F(x)$  – функция

#### Зависимость качества аппроксимации от величины $N$

$N$	$\delta_a$	$\delta_D$	$D_q$
1	8,01%	2,6%	0,0464
10	0,91%	0,7%	0,0153
30	0,41%	0,5%	0,0101
100	0,11%	0,4%	0,0044
1000	0,08%	0,2%	0,0021

распределения нормальной случайной величины с найденными выше характеристиками. В таблице представлены относительные погрешности вычисления математического ожидания  $\delta_a$  и дисперсии  $\delta_D$ , а также расстояние Колмогорова  $D_q$  для рассмотренных случаев.

На рис. 2 представлен график, демонстрирующий убывание расстояния Колмогорова между эмпирическим и аналитическим (нормальным) распределениями с ростом значения  $N$ .



Можно заметить, что уже при  $N > 30$  достигается достаточно высокое качество гауссовской аппроксимации числа событий в рассмотренном высокоинтенсивном полумарковском потоке (расстояние Колмогорова не превышает 0,01).

Рис. 2. Изменение расстояния Колмогорова  $D_q$  в зависимости от интенсивности потока (логарифмическая шкала по  $N$ )

**Заключение.** В работе представлено исследование высокоинтенсивного полумарковского потока событий. Показано, что в условии неограниченного роста его интенсивности распределение числа событий, наступивших в данном потоке в течение интервала времени фиксированной длины, может быть аппроксимировано нормальным распределением. В работе получены параметры этого распределения. Рассмотренные числовые примеры демонстрируют применимость полученных асимптотических результатов для HISM-потоков событий.

Аналогичные результаты были получены ранее и для других типов высокоинтенсивных потоков: рекуррентного [3], MMPP [4], MAP [5].

*Литература*

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – 4-е изд., испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
2. Грачев В.В. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных / В.В. Грачев, А.Н. Моисеев, А.А. Назаров, В.З. Ямпольский // Доклады ТУСУРа. – 2012. – № 2 (26), ч. 2. С. 248–251.
3. Moiseev A. Investigation of High Intensive General Flow / A. Moiseev, A. Nazarov // Proc. of the IV International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics» (PCI'2012). – Baku: IEEE, 2012. – P. 161–163.
4. Moiseev A. Investigation of the High Intensive Markov-Modulated Poisson Process / A. Moiseev, A. Nazarov // Proc. Of The International Conference On Application Of Information And Communication Technology And Statistics In Economy And Education (ICAICTSEE-2012). – Sofia: University Of National And World Economy, 2012. – P. 72–77.
5. Моисеев А.Н. Исследование высокоинтенсивного MAP-потока / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров // Изв. Том. политехн. ун-та. – 2013. – Т. 322, № 2. – С. 16–18.
6. Корольюк В.С. Стохастические модели систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
7. Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
8. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
10. Рыков В.В. Математическая статистика и планирование эксперимента: учеб. пособие / В.В. Рыков, В.Ю. Иткин. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 308 с.

---

**Моисеев Александр Николаевич**

Канд. техн. наук, доцент каф. программной инженерии Томского государственного университета (ТГУ)  
Тел.: 8 (382-2) 52-94-96  
Эл. почта: alexander-moiseev@mail.ru

**Назаров Анатолий Андреевич**

Д-р техн. наук, профессор, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ  
Тел.: 8 (382-2) 52-95-99  
Эл. почта: nazarov.tsu@gmail.com

Moiseev A.N., Nazarov A.A.

**Asymptotic analysis of the high-intensive semi-Markovian arrival process**

Investigation of the high-intensive semi-Markovian arrival process is presented in the paper. It is shown that a distribution of the number of arrivals in the process during some period under asymptotic condition of an infinite growth of the process rate can be approximated by normal distribution. The characteristics of the approximation are obtained as well. The analytical results are supported by numeric examples.

**Keywords:** high-intensive arrival process, semi-Markovian process, asymptotic analysis.