Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 46—51

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.541

О равенстве нулю группы $\mathrm{Hom}(-, C)$ *

В. М. Мисяков
Томский государственный университет

Аннотация. Хорошо известно, что множество гомоморфизмов из фиксированной абелевой группы A в фиксированную абелеву группу B образует абелеву группу по сложению, обозначаемую через $\mathrm{Hom}(A, B)$. Группы гомоморфизмов абелевых групп обладают многими замечательными свойствами. Так, например, они ведут себя как функторы в категории абелевых групп. В некоторых важных случаях можно выразить инварианты группы $\mathrm{Hom}(A, B)$ через инварианты групп A и B. Например, если A — периодическая или если B — алгебраически компактная абелевы группы. Если $A = B$, то группа $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{End}(A, B)$ называется группой эндоморфизмов группы A, которую можно превратить в кольцо, обозначаемое $\mathrm{E}(A)$. Изучение групп гомоморфизмов и колец эндоморфизмов является важной задачей теории абелевых групп. В частности, описание абелевых групп таких, что $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ является одной из открытых проблем в теории абелевых групп. Группа $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ в следующем, например, случае. Пусть абелева группа G разлагается в прямую сумму своих подгрупп A и B, причём A — вполне характеристическая подгруппа в группе G, т. е. A отображается в себя при любом эндоморфизме группы G. Тогда $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$. Вполне характеристической подгруппой является, например, её периодическая часть. В статье рассматривается условие, эквивалентное равенству нулю группы гомоморфизмов произвольной группы в группу без кручения.

Ключевые слова: абелева группа; группа гомоморфизмов.

В [1] С. Я. Гриншпоном сформулирована проблема 2: «Выяснить, для каких групп A группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, C)$ равна нулю, где C — вполне разложимая группа без кручения». Для периодической абелевой группы C эта задача была решена в работе [2]. Близкие вопросы рассматривались также в работах [5], [6], [7], [8], [9]. В данной заметке даются некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ для произвольной группы без кручения C. В работе под словом «группа» понимается абелева группа. Все стандартные определения и обозначения можно найти в [10], [11].

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

Введем некоторые обозначения: $\mathrm{Hom}(A, C)$ — группа гомоморфизмов из группы A в группу C; $\mathrm{im}(f)$ ($\ker(f)$) — образ (ядро) гомоморфизма f; $< c >$ — циклическая группа, порождённая элементом c; $t(c)$ ($t(C)$) — тип элемента c (группы C); $o(a)$ — порядок элемента a; F_{m} — свободная группа с m свободными образующими; Z — группа целых чисел; $T(A)$ — периодическая часть группы A.

В следующей лемме описание группы A, для которой выполняется равенство $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, в случае когда C — группа без кручения, сводится к случаю, когда A — непериодическая, неделимая группа.

Лемма. *Пусть C — ненулевая группа без кручения. Группа $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда группа A удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) A — периодическая группа;

2) A — непериодическая группа, C — редуцированная группа, причём либо A — делимая группа, либо $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, если A — непериодическая, неделимая группа.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. Для группы A возможны следующие случаи: 1) A — периодическая группа и 2) A — непериодическая группа. Если выполняется случай 1), то из [10, с.213] следует обратное утверждение, т. е. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$.

Пусть выполняется 2), т. е. пусть A — непериодическая группа. Допустим, что C содержит делимую подгруппу D, тогда $\mathrm{Hom}(< a >, < d >) \neq 0$, где $a \in A$, $o(a) = \infty$ и $d \in D$. Поскольку D — делимая группа, то любой ненулевой гомоморфизм из $< a >$ в D будет продолжаться до ненулевого гомоморфизма из A в D, что приводит к противоречию. Таким образом, C — редуцированная группа.

Если A — делимая, то из [10, с.213] следует обратное утверждение, т. е. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. $\square$

Теорема. *Пусть C — ненулевая редуцированная группа без кручения и A — непериодическая, неделимая группа. Группа $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда для редуцированной части $A' \neq 0$ группы A выполняется:*

a) если $T(A') = 0$, то справедливо одно из условий:

i) A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного Z, и выполняется одно из условий:

i_1) для любого $f \in \mathrm{Hom}(A', C)$ существует $0 \neq c \in C$ такой, что $\mathrm{im}(f) \subseteq < c >$;

i_2) для любого гомоморфизма $\beta : A' \to C$ найдётся гомоморфизм $\alpha : A' \to F_m$ такой, что $\pi\alpha = \beta$, т. е. следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна, где F_{m} — свободная группа и π — эпиморфизм;

j) для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A', C)$ следует:

j_1) существует сервантная подгруппа C' ранга 1 типа $t(C')$ в группе C, содержащая $\mathrm{im}(\varphi)$;

j_2) для любого элемента $a \in A'$ такого, что $t(a) < t(C')$, следует, что $a \in \ker(\varphi)$;

j_3) группа A' не содержит прямого слагаемого ранга 1, изоморфного C';

b) если $T(A') \neq 0$, то факторгруппа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию a).

Доказательство. Пусть $A = A' \oplus D$ — непериодическая, неделимая группа, где A' — редуцированная и D — делимая части группы A. Пусть $T(A') = 0$. Так как $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C) \oplus \mathrm{Hom}(D, C)$ и, как показано выше, $\mathrm{Hom}(D, C) = 0$. Тогда из $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ следует, что $\mathrm{Hom}(A', C) = 0$, группа A' при этом не содержит прямого слагаемого, изоморфного Z, и справедливость условий i_1), j_1), j_2) также очевидна.

Пусть выполняется условие i_1) и A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного Z. Допустим противное, т. е. пусть $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Поскольку C — редуцированная группа, то $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C)$. Таким образом, существует $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(A', C)$, т. е. найдется элемент $0 \neq c \in C$ такой, что $\mathrm{im}(f) \subseteq < c > \cong Z$. Следовательно, $\mathrm{im}(f) \cong Z$. Так как f будет расщепляться, то в группе A' найдется прямое слагаемое, изоморфное Z, что противоречит допущению.

Докажем, что выполняется условие i_2). Пусть для определённости группа C содержит систему образующих мощности m, тогда существует эпиморфизм $\pi : F_{\mathrm{m}} \to C$, [10, следствие 14.3], где $F_{\mathrm{m}} = \bigoplus\limits_{\mathrm{m}} Z$. Так как $\mathrm{Hom}(A', \bigoplus\limits_{\mathrm{m}} Z) \subseteq \mathrm{Hom}(A', \prod\limits_{\mathrm{m}} Z) \cong \prod\limits_{\mathrm{m}} \mathrm{Hom}(A', Z)$ и $\mathrm{Hom}(A', Z) = 0$ [4, теорема 3], то $\mathrm{Hom}(A', \bigoplus\limits_{\mathrm{m}} Z) = 0$. Таким образом, следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\alpha = \beta = 0$.

Обратно. Пусть A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного Z, и диаграмма в условии теоремы коммутативна, т. е. $\pi\alpha = \beta$, где $F_{\mathrm{m}} = \underset{\mathrm{m}}{\oplus} Z$. Тогда $\mathrm{Hom}(A', Z) = 0$ [4, теорема 3] и, следовательно, $\mathrm{Hom}(A', \underset{\mathrm{m}}{\oplus} Z) = 0$, т. е. $\alpha = 0$. Тогда $\beta = 0$.

Необходимость условия j_3) очевидна, докажем его достаточность. Пусть выполняется условие j) и допустим противное, т. е. пусть $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Поскольку C — редуцированная группа,
то $\mathrm{Hom}(A', C) \neq 0$. Следовательно, существуют $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A', C)$ и C' — сервантная подгруппа ранга 1 группы C такие, что $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq C'$. Так как при гомоморфизме типы элементов не уменьшаются и для любого элемента $d \in A'$ такого, что $t(d) < t(C')$, имеем $d \in \ker(\varphi)$. Поэтому для любого элемента $a \in A'$ такого, что $\varphi(a) \neq 0$ получим $t(\varphi(a)) = t(C')$, т. е. $t(\mathrm{im}(\varphi)) = t(C')$. Так как $r(\mathrm{im}(\varphi)) = r(C') = 1$ и $t(\mathrm{im}(\varphi)) = t(C')$, то $\mathrm{im}(\varphi) \cong C'$. Следовательно, $A'/\ker(\varphi) \cong C'$ и все элементы $A' \setminus \ker(\varphi)$ имеют тип $t(C')$. Поскольку $\ker(\varphi)$ — сервантная подгруппа в группе A', то $\ker(\varphi)$ — прямое слагаемое группы A' [6, предложение 86.5], имеющее дополнительное прямое слагаемое, изоморфное C', что противоречит допущению.

b) Пусть $T(A') \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, тогда $\mathrm{Hom}(A', C) = 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow T(A') \xrightarrow{\alpha} A' \xrightarrow{\beta} A'/T(A') \longrightarrow 0,$$

которая индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'/T(A'), C) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(A', C) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(T(A'), C). \qquad (1)$$

Так как $\mathrm{Hom}(A', C) = 0$, то β^* — изоморфизм и, следовательно,
$\mathrm{Hom}(A'/T(A'), C) = 0$, т. е. группа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию a) данной теоремы.

Обратно. Пусть группа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию a) данной теоремы, тогда $\mathrm{Hom}(A'/T(A'), C) = 0$. Поскольку $T(A')$ — периодическая группа, а C — группа без кручения, то $\mathrm{Hom}(T(A'), C) = 0$ и, как следует из точности последовательности (1), $\mathrm{Hom}(A', C) = 0$. Тогда из изоморфизма $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C) \oplus \mathrm{Hom}(D, C)$ и равенства $\mathrm{Hom}(D, C) = 0$ следует, что $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. $\square$

Список литературы

1. Гриншпон С. Я. Проблема 2 / С. Я. Гриншпон // Абелевы группы : тр. Всерос. симп., 22–25 августа 2005 г. – Бийск : РИО БПГУ, 2005. – С. 60.

2. Гриншпон С. Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп / С. Я. Гриншпон // Изв. вузов. Математика. – 1998. – №9. – С. 42–46.
3. Schultz P. Annihilator classes of torsion-free abelian groups / P. Schultz // Lect. Notes Math. – 1978. – Vol. 697. – P. 88–94.
4. Dimitriĉ R. On coslender groups / R. Dimitriĉ // Glasnik Matem. – 1986. – Vol.21, №2. – P. 327–329.
5. Крылов П. А. Группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ как артинов $\mathrm{E}(B)$- или $\mathrm{E}(A)$-модуль / П. А. Крылов, Е. И. Подберезина // Фундамент. и прикл. математика. – 2007. – Т. 13, вып. 3. – С. 81–96.
6. Мишина А. П. Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп / А. П. Мишина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 1962. – №4. – С. 39–43.
7. Гриншпон С. Я. Гомоморфные образы абелевых групп / С. Я. Гриншпон, Т. А. Ельцова // Фундамент. и прикл. математика. – 2007. – Т. 13, вып. 3. – С. 17–24.
8. Чехлов А. Р. Об абелевых группах, близких к Е-разрешимым / А. Р. Чехлов // Фундамент. и прикл. математика. – 2012. – Т. 17, вып. 8. – С. 183–219.
9. Куликов Л. Я. Обобщенные примарные группы. II / Л. Я. Куликов // Тр. ММО. – 1953. – Т. 2. – С. 85–167.
10. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.
11. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1977. – Т. 2. – 415 с.

Мисяков Виктор Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 тел.: (3822)460369 (e-mail: mvm@mail.tsu.ru)

V. Misyakov

On Vanishing of the Group $\mathrm{Hom}(-, C)$

Abstract. It is well known that the set of homomorphisms from a fixed abelian group A to a fixed abelian group B forms an additive abelian group denoted as $\mathrm{Hom}(A,\ B)$. Homomorphism groups of abelian groups possess many remarkable properties. For example, they behave like functors in the category of abelian groups. In some important cases, one can express invariants of the group $\mathrm{Hom}(A,\ B)$ in terms of invariants of the groups A and B, e.g., if A is a torsion abelian group or if B is an algebraically compact abelian group. If $A = B$, the group $\mathrm{Hom}(A,\ B) = \mathrm{End}(A,\ B)$ is called the endomorphism group of the group A; it can be turned into a ring denoted as $\mathrm{E}(A)$. Studying homomorphism groups and endomorphism rings is an important problem of the theory of abelian groups. In particular, describing abelian groups such that $\mathrm{Hom}(A,\ B) = 0$ is one of open problems in this theory. For example, the group $\mathrm{Hom}(A,\ B)$ is zero in the following case. Let an abelian group G be decomposed into a sum of its subgroups A and B, A being a fully invariant subgroup in the group G, i.e., A is mapped into itself under any endomorphism of the group G. Then, $\mathrm{Hom}(A,\ B) = 0$. The torsion subgroup of a group, for example, is its fully invariant subgroup. In this paper, a criterion of vanishing is presented for an arbitrary homomorphism from an arbitrary abelian group to an arbitrary torsion free group.

Keywords: abelian group, group homomorphisms.

References

1. Grinshpon S.Ya. Problem 2 [Problema 2]. *Abelevy gruppy: Trudy Vserossijskogo simpoziuma [Abelian Groups: Transaction All-Russian Symposium]*. Biysk, 2005, p. 60.
2. Grinshpon S.Ya. On the Equality to Zero of the Homomorphism Group of Abelian Groups [O ravenstve nulju gruppy gomomorfizmov abelevyh grupp]. *Izvestiya VUZ. Matematika [Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika]*, 1998, vol. 42, no. 9, pp. 39–43.
3. Schultz P. Annihilator Classes of Torsion-free Abelian Groups. *Lect. Notes Math*, 1978, vol. 697, pp. 88-94.
4. Dimitriĉ R. On Coslender Groups. *Glasnik Matem*, 1986, vol.21, no 2, pp. 327-329.
5. Krylov P.A., Podberezina Ye.I. The Group Hom(A, B) as an Artinian E(B)- or E(A)-module. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 154, issue 3, pp. 333-343.
6. Mishina A.P. On the Automorphism and the Endomorphism of Abelian Groups [Ob avtomorfizmah i jendomorfizmah abelevyh grupp]. *Moscow University Bulletin. Series 1. Mathematics. Mechanics [Vestnik Moskovskogo Universiteta. Serija 1. Matematika i mehanika]*, 1962, no 4. pp. 39-43.
7. Grinshpon S.Ya., Yeltsova T.A. Homomorphic Images of Abelian Groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 154, issue 3, pp. 290-294.
8. Chekhlov A.R. On Abelian Groups Close to E-solvable Groups [Ob abelevyh gruppah, blizkih k E-razreshimym gruppam]. *Fundam. Prikl. Mat. [Fundamental'naja i prikladnaja matematika]*, 2012, vol. 17, issue 8, pp. 183-219.
9. Kulikov L.Ya. Generalized Primary Groups. II [Obobshhenno primarnye gruppy. II]. *Tr. Mosk. Mat. Obs. [Trudy moskovskogo matematicheskogo obshhestva]*, 1953, vol. 2, pp. 85-167.
10. Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Pure and Applied Mathematics. 36. Academic Press., New York; London, 1970, vol. I.
11. Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Pure and Applied Mathematics. 36. Academic Press, New York; London, 1973, vol. II.

Misyakov Viktor, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Tomsk State University, 36, Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, tel.: (3822)460369 (e-mail: mvm@mail.tsu.ru)