ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 56, № 9/2 ФИЗИКА 2013

УДК 519.21

М.А. ЛЕОНОВА, Л.А. НЕЖЕЛЬСКАЯ

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ[1]

Изучается обобщенный асинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Решается методом максимального правдоподобия задача об оценивании длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

Ключевые слова: *обобщенный асинхронный поток событий, непродлевающееся мертвое время, функция правдоподобия, оценка максимального правдоподобия, длительность мертвого времени.*

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований обобщенного асинхронного потока событий (далее – поток), начатых в статьях [1–3]. Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков в настоящее время принято называть МС-потоками либо МАР-потоками событий. В [4] приведена классификация МС-потоков событий и установлена связь между МС-потоками и МАР-потоками событий.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [5]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [6].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [7], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, не продляют его периода и недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). Подобные ситуации возникают в компьютерных сетях, например при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). Для того чтобы оценить потери сообщений потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

В настоящей статье для решения задачи оценивания длительности мертвого времени применяется метод максимального правдоподобия, так как оценки, построенные на основе этого метода, как правило, обладают привлекательными свойствами.

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии распределена по экспоненцильному закону с параметром α_i, $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$ дополнительное событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q $(0 \le q \le 1)$ дополнительное событие в первом состоянии.

В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_i события наступает время фиксированной длительности T (мертвое

---

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования и науки РФ ТЕМПЛАН № 8.4055.2011.

время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние, помечены буквами p либо q; штриховка – периоды мертвого времени длительности T; $t_1, t_2,\ldots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

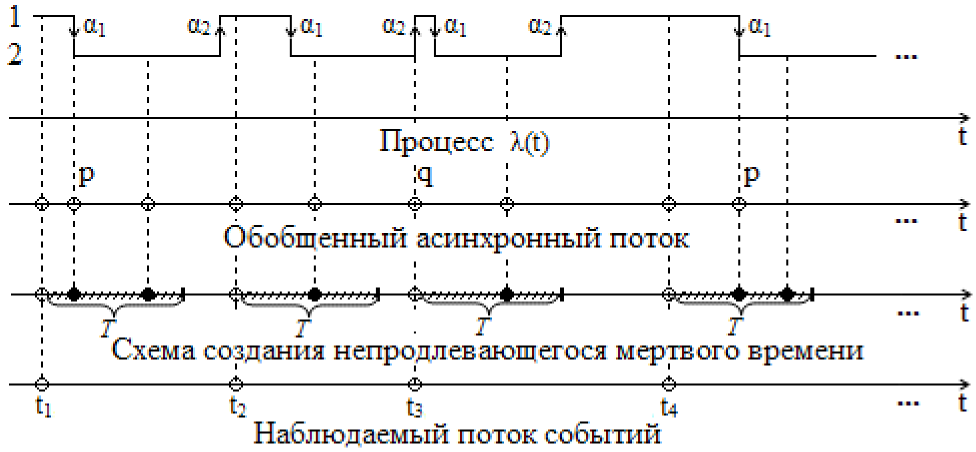

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2,\ldots$ наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока $(\tau_k > 0)$. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \ge 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [2] плотность вероятностей примет вид

$$p_T(\tau)=0,\ 0\le\tau<T;\ p_T(\tau)=\frac{z_1}{z_2-z_1}\left[z_2-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}f(T)\right]e^{-z_1(\tau-T)}-\frac{z_2}{z_2-z_1}\left[z_1-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}f(T)\right]e^{-z_2(\tau-T)},\ \tau\ge T,$$

$$f(T)=\alpha+\lambda\psi(T)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},\ \psi(T)=1\Big/\left[z_1z_2-\left(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],$$

$$\lambda=\alpha_1\alpha_2\left(\lambda_1+p\alpha_1-\lambda_2-q\alpha_2\right)\left(\lambda_1+q\alpha_1-\lambda_2-p\alpha_2\right),\ \alpha=\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2, \quad (1)$$

$$z_{1,2}=\left[\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right]\Big/2;\quad 0<z_1<z_2.$$

В (1) принимается, что $\lambda\ne 0, (\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)\ne 0$. Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$ $\ldots$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины $\tau_1, \ldots, \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \ldots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда функция правдоподобия, с учетом (1), выпишется в виде

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(k)}) = 0, 0 \le \tau_{\min} < T; \quad L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}), \tau_{\min} \ge T.$$

Так как поставленная задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока λ_i, α_i, i = 1, 2, p, q известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, ее реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$L(T \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \left\{ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau^{(j)} - T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau^{(j)} - T)} \right\} \Rightarrow \max_T, 0 \le T < \tau_{\min}, \quad (2)$$

где $z_1, z_2, f(T)$ определены в (1).

Значение T, при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени. Показывается, что решением оптимизационной задачи (2) является оценка $\hat{T} = \tau_m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горцев А.М., Нежельская Л.А. // Дискретная математика. − 2011. − Т. 23. − Вып. 2. − С. 59–65.
2. Gortsev A.M. and Nezhelskaya L.A. // Discrete Mathematics and Applications. − 2011. − V. 21. − Is. 3 (Jul). − P. 283–290.
3. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. − 2012. − № 4(21). − С. 14–25.
4. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. // Queues: Flows, Systems, Networks: Proceedings of the international conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis, Design and Optimization of Information and Telecommunication Networks». − Minsk, BSU, 2013. − P. 32–38.
5. Горцев А.М., Нежельская Л.А. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. − 2011. − № 1(14). − С. 13−21.
6. Горцев А.М., Нежельская Л.А., Соловьев А.А. // Автоматика и телемеханика. − 2012. − № 8. − С. 49−63.
7. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., and Soloviev A.A. // Automation and Remote Control. − 2012. − V. 73. − No. 8. − P. 1316−1326.
8. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежельская Л.А. // Автоматика и телемеханика. − 2008. − № 9. − С. 76−93.
9. Горцев М.А., Нежельская Л.А. // Радиотехника. − 2004. − № 10. − С. 8−16.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: mleonova86@mail.ru

Поступила в редакцию 15.07.13.

Леонова Мария Алексеевна, аспирантка;
Нежельская Людмила Алексеевна, к.т.н., доцент.

M.A LEONOVA, L.A. NEZHELSKAYA

ESTIMATION OF UNPROLONGING DEAD TIME IN A GENERALIZED ASYNCHRONOUS FLOW OF EVENTS

Generalized asynchronous flow of events is considered. This flows are adequate mathematical models of real information flows which functioning in integrated service digital networks.The conditions of flows functioning in communications systems often produce the effect of unprolonging dead time. The flow is functioning in conditions of unprolonging dead time (the value of dead time is fixed). We solve the problem of estimation of dead time by using the likelihood function.

Keywords: *generalized asynchronous flow of events, unprolonging dead time, likelihood function, maximum likelihood estimation, dead time value.*