**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**
**РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**В.А. Якутенок**

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

***Учебное пособие***

Издательский Дом Томского государственного университета
2013

**УДК 51-7**
**ББК 22.2**
**Я49**

**Якутенок В.А.**
**Я49** Теория функций комплексной переменной.
Основные положения : учеб. пособие. – Томск : Издательский
Дом Томского государственного университета, 2013. – 50 с.

В учебном пособии рассмотрены основные положения теории функций комплексной переменной.

Для студентов, изучающих курс «Математические методы моделирования физических процессов» при подготовке бакалавров по направлениям 223200 – техническая физика, 151600 – прикладная механика, 161700 – баллистика и гидроаэродинамика, 221000 – механика и робототехника на физико-техническом факультете ТГУ.

*Рецензент:*
зав. каф. прикладной аэромеханики проф. И.М. Васенин

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Впервые мнимые числа, как корни квадратные из отрицательных чисел, упоминаются в работе Дж. Кардано (1545 г.), касающейся решения кубического уравнения. Постепенно, по мере обнаружения пользы от их использования, они получают все более широкое распространение. Одним из творцов собственно теории функций комплексной переменной считается Л. Эйлер, которому принадлежит первое ее изложение на русском языке (1763 г.) и обозначение мнимой единицы буквой «*i*». Геометрическое толкование комплексных чисел было дано К. Весселем в 1799 г.

При определении понятия комплексного числа будем исходить из алгебраических соображений, которые будут сопровождаться геометрическими наглядными представлениями.

При решении алгебраических уравнений, в частности, квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом, получаются выражения вида $x \pm y\sqrt{-1}$ . Величина $i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей, $x$ и $y$ – действительные числа. Мнимая единица является решением квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$ и не принадлежит множеству действительных чисел. Очевидно, что $i^2 = -1$. Выражение $z = x + iy$ называется комплексным числом, которое определяется значением двух действительных чисел $(x, y)$, причем $x$ называется действительной частью комплексного числа $z$ , $y$ – мнимой частью (именно $y$ , а не $iy$ ). Приняты обозначения $x = \operatorname{Re} z$ , $y = \operatorname{Im} z$ . Так как значение комплексного числа $z$ определяется двумя действительными числами, то естественно поставить в соответствие любому $z$ – точку на плоскости, которая определяется также двумя действительными числами – декартовыми координатами $x$ и $y$ . Любой точке плоскости можно поставить в соответствие вектор с началом в начале координат и концом в точке $z$ (радиус-вектор точки $z$ ).

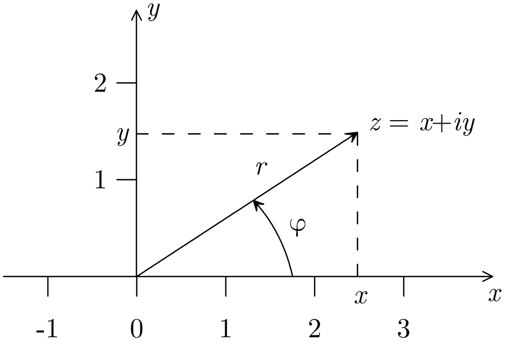

Рис. 1.1

Таким образом, геометрически комплексное число $z$ соответствует точке плоскости $x0y$ или радиус-вектору (рис. 1.1). Ось $x$ называется действительной осью, ось $y$ – мнимой. Полярные координаты $(r,\varphi)$ точки $z$ называются: $r$ – модулем числа $z$ ( $r = |z|$ ), $\varphi$ – аргументом $z$ ( $\varphi = \mathrm{Arg} z$ ). Комплексное число, соответствуя вектору, характеризуется не только величиной (модулем $r$ ), но и направлением (углом $\varphi$ ).

Глава 1

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

## 1.1 Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Соотношение $z = x + iy$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Определение мнимой единицы в виде $i^2 = -1$ придает прямой алгебраический смысл такой форме записи. Это означает, что операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел следует производить в соответствии с обычными правилами алгебры многочленов, с учетом того, что $i^2 = i \cdot i = -1$.

Тогда сумма двух комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ определяется как число $z$, равное:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,. \tag{1.1}$$

Для произведения имеем:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2).$$

Операции вычитания и деления определяются обычным образом, как обратные сложению и умножению, что дает: $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ – разность комплексных чисел $z_1$ и $z_2$;

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)}\frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

– частное комплексных чисел $z_1$ и $z_2$.

В последнем случае к результату приходим домножением числителя и знаменателя на число $\overline{z}_2 = x_2 - iy_2$, которое называется комплексно сопряженным числом числу $z_2 = x_2 + iy_2$.

Нулем называется число 0, такое, что $z + 0 = z$.

Так как при выполнении действий над комплексными числами применяются обычные правила алгебры, и в результате получается комплексное число, то выполняются все законы соответствующих действий: переместительный, сочетательный и распределительный. Отметим, что если $y = 0$, то имеем $z = x$ – действительное число, если же $x = 0$, то $z = iy$ – чисто мнимое число.

## 1.2 Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

Соответствие множества комплексных чисел $z = x + iy$ множеству точек плоскости, называемой комплексной плоскостью, позволяет представить комплексное число в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Аргумент $\varphi = \mathrm{Arg} z$ является многозначной функцией, значения которой отличаются на величину $2\pi k$ ($k$ – произвольное целое число). Например, числу $z = -1$ соответствуют аргументы $\pi$ и $-\pi$. Значение, соответствующее промежутку $(-\pi; \pi]$ называют главным значением аргумента и обозначают $\varphi = \arg z$. При этом саму функцию $\varphi = \arg z$ называют главной ветвью аргумента $(-\pi < \arg z \le \pi)$. Модуль числа $z$ (длина соответствующего радиус-вектор, см. рис. 1.1) равен: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и обозначается $r$.

Геометрический, а равно и физический смысл сложения комплексных чисел явно следует из его определения формулой (1.1): сложение комплексных чисел соответствует сложению векторов по правилу параллелограмма. Для вычитания имеем такое же соответствие. Отсюда следуют неравенства треугольника:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \; |z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2|.$$

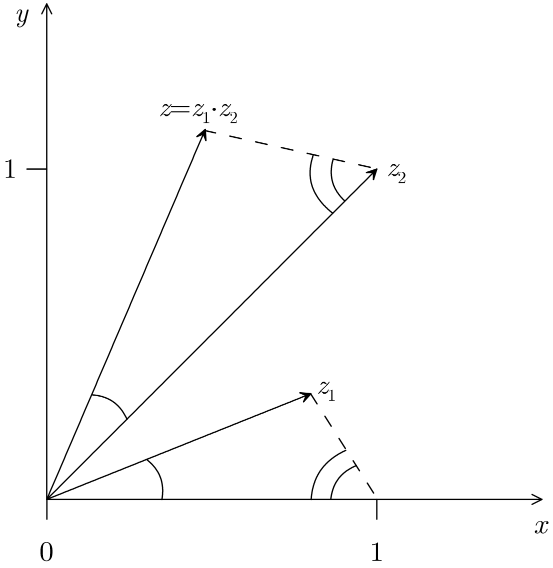

Рис. 1.2

Если сложение и вычитание комплексных чисел соответствуют правилам векторной алгебры, то произведение отличается от операций скалярного и векторного произведений векторов. Используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел, получаем:

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right],$$

т.е. модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей. Геометрически это означает растяжение (или сжатие, как на рис. 1.2) вектора, соответствующего числу $z_2$, в $|\, z_1 \,|$ раз и повороту на угол $\varphi_1$. Заметим, что треугольники $01z_1$ и $0z_2z$ на рис. 1.2 подобны. При делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Если определить возведение в целую степень комплексных чисел обычным образом (также как и для действительных чисел):

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n},$$

то согласно вышеуказанному свойству произведения получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,. \qquad (1.2)$$

При $r = 1$, т.е. при $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, отсюда следует формула Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$$

Например, для $n = 2$, получаем известные формулы (отделяя вещественные и мнимые части и имея ввиду, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части):

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi\,,\ \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\,.$$

Выше было отмечено, что аргумент $\varphi$ комплексного числа определен как многозначная функция, значения которой отличаются на величину, кратную $2\pi$. Как следует из рассмотрения операций умножения, деления и возведение в целую степень (основанной на операции умножения) можно использовать любое значение аргумента, например его главное значение. Результаты будут различаться аргументами, кратными $2\pi$, т.е. будут совпадать. При определении следующей операции – извлечения корня, такого рода однозначность не имеет места. Обозначим $w = \sqrt[n]{z}$. Пусть, по-прежнему: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а модуль и аргумент корня $w$ обозначим $\rho$ и $\theta$: $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Так как $w^n = z$, то по формуле (1.2) имеем:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Имея ввиду, что у равных комплексных чисел модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, получаем:

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,,\ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\,.$$

Данные соотношения определяют $n$ различных точек на комплексной плоскости и, следовательно, $n$ различных значений $\sqrt[n]{z}$. Эти числа имеют модуль $\sqrt[n]{r}$ и аргументы $\theta_k = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi\dfrac{k}{n}$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$, причем соответствующие им точки расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ и с углом при вершине $\dfrac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что корень четной степени имеет $n$ комплексных значений, из которых два действительны – положительное и отрицательное, а корень нечетной степени, имеет также $n$ комплексных значений, из которых одно действительно и положительно.

Для определения операции возведения действительного числа в комплексную степень воспользуемся свойствами показательной функции $e^{\alpha}$, предполагая, что и для комплексных $\alpha$ имеет место формула

$$\frac{de^{\alpha}}{d\alpha}=e^{\alpha}.$$

Пусть $\alpha = i\cdot t$, где $t$ – действительная переменная, т.е. $\alpha$ принимает чисто мнимые значения. Тогда

$$\frac{de^{it}}{dt}=ie^{it},$$

или, обозначая $z(t)=e^{it}$, получаем

$$\frac{dz}{dt}=iz.$$

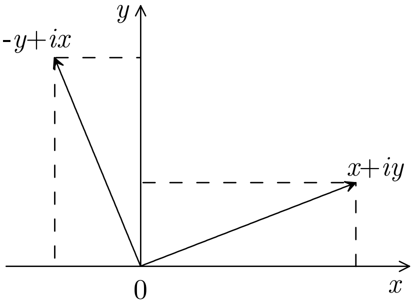

Рис. 1.3

Умножение $z$ на $i$ геометрически означает поворот вектора, соответствующего числу $z$, на угол $\pi/2$, ($iz = i\cdot(x+iy) = -y+ix$, рис. 1.3). Следовательно, приращение $dz = izdt$ перпендикулярно $z$, что означает поворот вектора $z$ вокруг начала координат на некоторый угол $d\varphi$ без изменения его длины, причем

$$d\varphi=\frac{|dz|}{|z|}=\frac{|izdt|}{|z|}=dt.$$

Модуль $|z|$ числа $z(t)$ равен единице, что следует из равенства $z(0)=e^{i\cdot 0}=1$ и того, что $z(t)=e^{it}$ соответствует вектору, получающемуся из единичного вектора $z(0)$ поворотом на угол $\varphi = t$ радиан (рис. 1.4).

Так как $|z| = 1$ и $\varphi \equiv t$, то $z(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

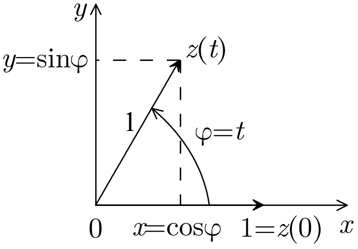

Рис. 1.4

Полученная формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.3}$$

называется формулой Эйлера и позволяет определить операцию возведения в степень $z = x + iy$ равенством:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

На формуле (1.3) основана третья форма записи комплексных чисел

$$z = re^{i\varphi} \tag{1.4}$$

так как $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$.

Форма записи комплексного числа в виде (1.4) называется показательной и, являясь равносильной тригонометрической, удобнее при вычислениях, связанных с умножением, делением и возведением в степень. Например, полученное ранее правило сложения аргументов при вычислении произведения двух комплексных чисел следует из правила сложения степеней сомножителей:

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Формула (1.4) может быть записана в виде

$$z = |z| \cdot e^{i\,\mathrm{Arg}\,z},$$

так как $r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}\,z = \arg z + 2\pi k$.

Отсюда следует выражение для логарифма комплексного числа. Обозначим через $w = u + iv = \mathrm{Ln}\,z$, комплексное число, такое, что

$$e^w = z,$$

и назовем его логарифмом числа $z$.
Тогда

$$e^{w}=e^{u+iv}=e^{u}\cdot e^{iv}=z=\left|z\right|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z},$$

и, следовательно

$$u=\ln|z|\,,v=\mathrm{Arg}\,z\,.$$

Таким образом

$$\mathrm{Ln}\,z=w=u+iv=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i\arg z+i\cdot 2\pi k\,.$$

Следовательно, логарифм комплексного числа имеет бесконечно много значений. Значение, отвечающее $k=0$, называется главным значением логарифма и обозначается

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\,.$$

Основные свойства главных значений логарифмов остаются такими же, как и обычных логарифмов положительных чисел, например,

$$\ln\left(z_1\cdot z_2\right)=\ln\left|z_1\cdot z_2\right|+i\arg\left(z_1\cdot z_2\right)=$$

$$=\ln\left|z_1\right|+\ln\left|z_2\right|+i\arg z_1+i\arg z_2=\ln z_1+\ln z_2.$$

Неединственность логарифмов является следствием периодичности показательной функции: $e^{z}=e^{z+2\pi ki}$, так как

$$e^{2\pi ki}=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k=1\,.$$

## Глава 2

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

При рассмотрении функций комплексной переменой будем исходить из того, что основные понятия математического анализа сохраняют свою силу и для нашего случая. Это означает, что предел, непрерывность, последовательность, ряд и т.д. определяются обычным образом. И, главное, под комплекснозначной функцией $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ понимается соответствие множества точек плоскости $z=x+iy$ множеству точек плоскости $w=u+iv$, которое полностью определено видом двух действительных функций действительных переменных $x$ и $y$, а именно $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$. На этом и основывается вышеуказанная возможность переноса определений и понятий математического анализа.

### 2.1 Условия Коши-Римана

Определим производную функции $f(z)$ по переменной $z$, как это и предполагалось, стандартным образом:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Если этот предел существует, то он не должен зависеть от того каким образом точка $z+\Delta z$ стремится к $z$.

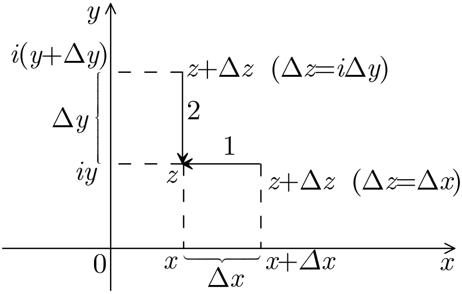

Рис. 2.1

Рассмотрим в качестве траекторий, по которым точка $z+\Delta z$ может стремиться к точке $z$ траектории, указанные на рис. 2.1. В случае 1 получаем:

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}; \tag{*}$$

в случае 2:

$$f'(z)=\lim_{i\Delta y\to 0}\frac{f(z+i\Delta y)-f(z)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{i\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}= \tag{**}$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сравнивая равенства (*) и (**) видим, что для того, чтобы получилось одно и тоже значение $f'(z)=\dfrac{df(z)}{dz}$ должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.1}$$

которые называются условиями Коши-Римана. Эти условия также (значительно реже) называют условиями Даламбера-Эйлера. Выполнение этих условий означает, что значение $f'(z)$ вообще не зависит от того по какому направлению осуществляется стремление точки $z+\Delta z$ к точке $z$. Покажем это.

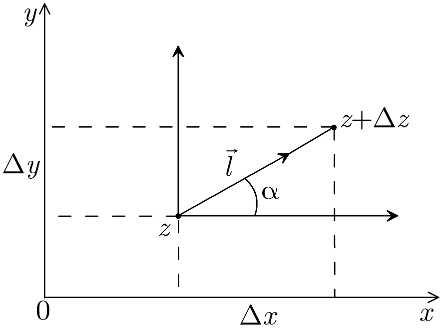

Рис. 2.2

Пусть точка $z+\Delta z$ стремится к точке $z$ по траектории обратной направлению единичного вектора $\vec{l}=\left(l_x,l_y\right)$, где $l_x=\cos\alpha,\ l_y=\sin\alpha$ – компоненты вектора $\vec{l}\left(\left|\vec{l}\right|=1\right)$. Тогда $\Delta x=\left|\Delta z\right|\cdot l_x,\ \Delta y=\left|\Delta z\right|\cdot l_y$ , $\Delta z=\Delta x+i\Delta y=\left|\Delta z\right|\cdot\left(l_x+il_y\right)$, $\left|\Delta z\right|^2=\Delta x^2+\Delta y^2$. По определению производной получаем, учитывая выписанные формулы:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta x+i\Delta y}\cdot\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x-i\Delta y}\to$$

$$\to\frac{\left[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)\right]}{\left|\Delta z\right|}\cdot\left(l_x-il_y\right)\to$$

$$\to\left(\frac{\partial u}{\partial l}+i\frac{\partial v}{\partial l}\right)\cdot\left(l_x-il_y\right),$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial l},\dfrac{\partial v}{\partial l}$ обозначены производные функций $u,v$ по направлению вектора $\vec{l}$ . Для них имеем формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\nabla u,\vec{l}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}l_x+\frac{\partial u}{\partial y}l_y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial l}=\left(\nabla v,\vec{l}\right)=\frac{\partial v}{\partial x}l_x+\frac{\partial v}{\partial y}l_y.$$

Подставляя эти выражения в выписанное соотношение для $f'(z)$ и учитывая (2.1), а так же то, что $l_x^{\,2}+l_y^2=1$ , получаем:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Таким образом, ввиду произвольности вектора $\vec{l}$, значение производной $f'(z)$ не зависит от направления стремления точки $z+\Delta z$ к точке $z$. Для этого требуется выполнение условий Коши-Римана (2.1).

Функции, дифференцируемые и однозначные (каждому $z=x+iy$ соответствует единственное значение $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$) в каждой точке некоторой области, называются аналитическими функциями (их называют также регулярными или голоморфными) в соответствующей области.

При переходе к полярным координатам $(\rho,\varphi)$ условия Коши-Римана приобретают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Докажем, для примера, первое соотношение $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\rho}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}=\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial y}-\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial x},$$

но и

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{d\varphi}\right)=\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial y}-\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следует также отметить, что для функций комплексной переменной имеют место все формулы дифференцирования функций действительной переменной. Это является следствием того, что правила алгебраических действий, понятие предела и производной совпадают для действительных и комплексных величин.

## 2.2. Сопряженные гармонические функции

Многие задачи математической физики проводят к необходимости решения уравнения в частных производственных второго порядка, имеющего вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ . \tag{2.2}$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа, а функции $u(x,y)$, являющиеся его решением, называют гармоническими функциями. Уравнение Лапласа получается, например, при исследовании стационарного (не зависящего от времени) теплового состояния тела, в котором передача тепла осуществляется по закону Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot gradT\ ,$$

где $\vec{q}$ – тепловой поток, $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, $T = T(x,y)$ – температура тела в точке $(x,y)$. Тогда, при отсутствии источников тепла:

$$div\,\vec{q} = 0\text{, или } div\,gradT = 0,$$

а это и есть уравнение вида (2.2), которое записывают также в виде $\nabla^2 u = 0$ или $\Delta u = 0$, где под $\nabla$ понимается оператор «набла» из векторного анализа:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\ .$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты осей $x$ и $y$. Условия Коши-Римана (2.1) показывают, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Действительно, дифференцируя первое уравнение по $x$, а второе по $y$ и складывая полученные вторые производные, приходим к (2.2). Аналогично убеждаемся в том, что мнимая часть аналитической функции $v(x,y)$ является гармоничной функцией. Причем гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ связаны уравнениями Коши-Римана. Такие две функции называются сопряженными гармоническими функциями. Зная одну из них, вторую можно найти с точностью до произвольной постоянной. Пусть, например, известна действительная часть аналитической функции $f(z)$ – гармоническая функция $u(x,y)$. Тогда из первого уравнения (2.1):

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x)\,.$$

Интегрирование проводилось по $y$, а переменная $x$ рассматривалась как параметр. Поэтому постоянная интегрирования является функцией этого параметра и обозначена $\varphi(x)$. Она находится из второго уравнения (2.1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right] + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Отсюда определяем $\varphi'(x)$ и после интегрирования по $x$ вычисляем $\varphi(x)$ с точностью до постоянной. Например: $u = x^2 - y^2$ (очевидно, что (2.2) – выполняется). Имеем:

$$v = \int 2x dy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x),$$

$$2y + \varphi'(x) = 2y, \quad \varphi'(x) = 0,$$

$$\varphi(x) = C, \quad v = 2yx + C.$$

Сама функция $f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi + Ci = z^2 + Ci$, где $C = const.$

## 2.3. Интегралы от аналитических функций

Интеграл от функции комплексной переменной определяется, также как и производная, обычным для математического анализа образом, как предел конечных сумм. В качестве интервала интегрирования берется участок некоторой кривой $C$ (рис. 2.3).

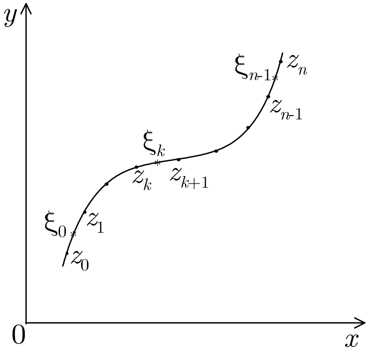

Рис. 2.3

Таким образом, для функции $f(z)$ имеем:

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot(z_{k+1} - z_k),$$

где $z_0, z_1, ..., z_k, ..., z_n$ – точки, разбивающие кривую $C$ на $n$ участков, $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$ – точки принадлежащие интервалам $[z_k; z_{k+1}]$, и считается, что $\max\limits_{0\le k\le n-1}\left|z_{k+1}-z_k\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда $\int\limits_C f(z)dz$ сводится к криволинейным интегралам второго рода от функций действительной переменной:

$$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_C (u+iv)(dx+idy)=\int\limits_C udx-vdy+i\int\limits_C udy+vdx \qquad (2.3)$$

Следовательно, для интегралов от комплексных функций имеют место все свойства криволинейных интегралов. Например:

$$\int\limits_C f(z)dz=-\int\limits_{C^-} f(z)dz,$$

где $C^-$ – кривая $C$, проходимая в обратном $C$ направлении;

$$\left|\int\limits_C f(z)dz\right|\le\int\limits_{C^-}\left|f(z)\right|\cdot\left|dz\right|\le M\cdot l,$$

где $M=\max\limits_C\left|f(z)\right|$, $l$ – длина кривой $C$.

Рассмотрим случай, когда величина $\int\limits_C f(z)dz$ не зависит от вида кривой $C$, а определяется только расположением точек, соответствующих началу и концу $C$ (точки $A$ и $B$ на рис. 2.4). Причем будем считать, что $C$ лежит в односвязной области $D$.

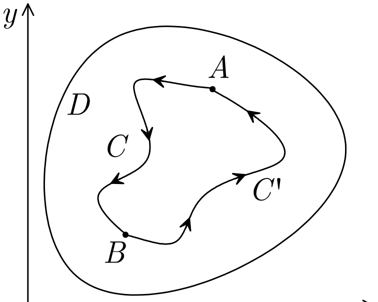

Рис. 2.4

Если имеет место такая независимость, то интеграл по замкнутому контуру, лежащему в $D$ равен нулю:

$$\int\limits_{C+C'} f(z)dz=\int\limits_C f(z)dz+\int\limits_{C'} f(z)dz=\int\limits_C f(z)dz-\int\limits_{(C')^-} f(z)dz=0$$

При обходе замкнутого контура положительным направлением будем считать обход при котором внутренняя область, ограниченная контуром, остается слева. Формула Грина, связывающая интеграл по контуру $\gamma$ с интегралом по области $E$, ограниченной этим контуром, гласит:

$$\int_{\gamma} Pdx+Qdy=\iint_{E}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\ ,$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ – некоторые функции $(x,y)$. Поэтому для равенства нулю контурного интеграла в области должно выполняться равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Для равенства нулю $\int\limits_{C+C'} f(z)dz$, согласно формуле (2.3), должно быть:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

что совпадает с условиями Коши-Римана (2.1). Таким образом, функция $f(z)$ в области $D$ должна быть аналитической и имеет место следующее утверждение, называемое теоремой Коши: для аналитической в односвязной области $D$ функции $f(z)$ интеграл по замкнутому контуру, лежащему в $D$, равен нулю, что эквивалентно независимости интеграла от вида кривой интегрирования. Данная теорема обобщается и на случай многосвязных областей: пусть $f(z)$ – аналитическая функция в многосвязной замкнутой области $\overline{D}$ $\left(\overline{D}=D+C_0+C_1+....+C_n\right)$, ограниченной извне контуром $C_0$, а изнутри контурами $C_1,...,C_n$ (рис. 2.5).

Тогда

$$\int_C f(z)dz=0,$$

где $C=C_0+C_1^-+...+C_n^-$.

Для понимания этого утверждения достаточно соединить внутренние границы с внешней кривыми $\gamma_1,...,\gamma_n$, что превратит $\overline{D}$ в односвязную область, для которой справедлива теорема Коши. Интегралы по $\gamma_1,...,\gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях и поэтому не вносят вклада в $\int\limits_C f(z)dz$.

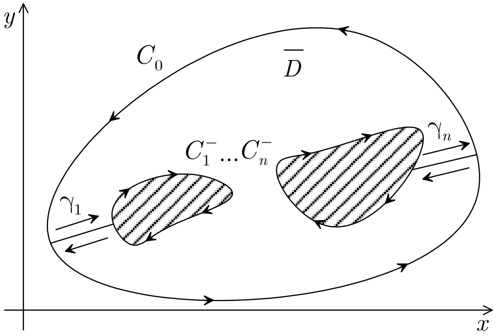

Рис. 2.5

## 2.4. Понятие первообразной. Формула Ньютона-Лейбница

Пользуясь независимостью для аналитических функций интеграла от кривой интегрирования можно ввести для них понятие первообразной и вывести формулу, аналогичную формуле Ньютона-Лейбница для функций действительной переменной.

Для этого рассмотрим $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ – интеграл по кривой, соединяющей точки $z_0$ и $z$, и лежащей в области аналитичности функции $f(z)$. Точку $z_0$, будем считать фиксированной, а точку $z$ – переменной. Тогда, в силу теоремы Коши, этот интеграл не зависит от вида кривой, соединяющей $z_0$ и $z$, и является функцией переменной $z$:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z),$$

причем

$$F'(z) = f(z).$$

Действительно:

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \cdot \left[ \int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz - \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz \right] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \cdot f(\xi) \cdot \Delta z = f(z),$$

где $\xi \in [z, z+\Delta z]$, а под $\Delta z$ понимается отрезок прямой, соединяющий точки $z$ и $z+\Delta z$ (интеграл не зависит от пути перехода от начальной точки к конечной, и имеет место обычная теорема о среднем).

Функция $F(z)$, производная от которой равна $f(z)$, называется первообразной для $f(z)$. Первообразная – аналитическая функция, так как имеет производную. В виду произвольности выбора точки $z_0$, первообразная определяется до произвольной постоянной, равной $\int\limits_{z'_0}^{z_0} f(z)dz$ , где $z'_0$ – другой выбор фиксированной точки (рис. 2.6).

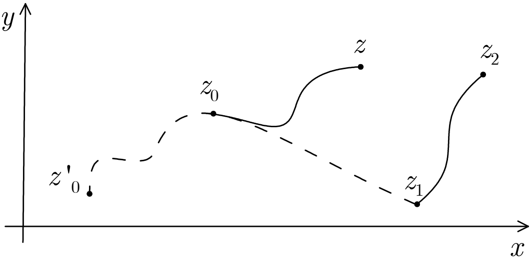

Рис. 2.6

Это следует так же из того, что производная постоянной равна нулю.
По той же причине:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z_2} f(z)dz - \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}.$$

Эту формулу, как и в случае действительной переменной, можно называть формулой Ньютона-Лейбница. Естественно первообразная носит также название неопределенного интеграла (неопределенного до произвольной постоянной).

## 2.5. Интегральная формула Коши и следствия из нее

Теорема Коши позволяет установить фундаментальное свойство аналитической функции: значение функции внутри области полностью определяется ее значениями на границе этой области. Так как действительная и мнимая часть аналитической функции являются гармоническими функциями, то это свойство распространяется и на них. Следовательно, при решении задачи, например, о тепловом состоянии некоторого тела, достаточно знать температуру на его поверхности. По этой температуре можно вычислить ее значение в любой внутренней точке.

Для получения этой связи рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(z)/(z - z_0)$ в области аналитичности функции $f(z)$. Сама функция $\varphi(z)$ обращается в бесконечность в точке $z = z_0$ и, следовательно, не является в ней аналитической. Тем не менее, в двухсвязной области, ограниченной окружностью $\gamma_\rho$ с радиусом $\rho$, и замкнутой кривой $\Gamma$ (рис. 2.7) функция $\varphi(z)$ – аналитическая.

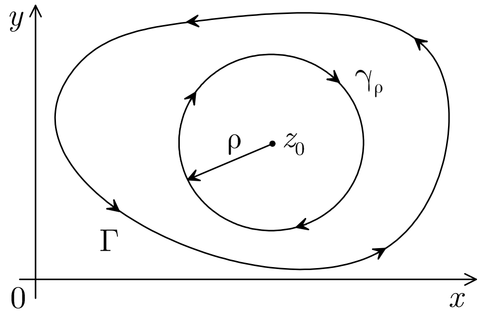

Рис. 2.7

Следовательно, по теореме Коши:

$$\int_{\Gamma} \varphi(z)dz + \int_{\gamma_{\overset{-}{\rho}}} \varphi(z)dz = 0$$

или

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \ .$$

Вычислим последний интеграл при $\rho \to 0$, используя показательную запись комплексной переменной: $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$.

Получаем:

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_{\gamma_\rho} f(z) d\varphi \xrightarrow[\rho \to 0]{} i f(z_0) \cdot 2\pi \ .$$

Следовательно:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\ . \tag{2.4}$$

Эта формула называется интегральной формулой Коши. Именно она связывает внутренние значения аналитической функции в точке $z_0$ с ее граничными значениями в точках $z\in\Gamma$. Она имеет место и для многосвязных областей при интегрировании по полной границе области.

Укажем некоторые следствия формулы (2.4).

1. Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ определен для $z_0\notin\Gamma$ (для этого случая требуется отдельное рассмотрение), причем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\begin{cases}f(z_0),\ z_0-\text{внутри }\Gamma,\\ 0,\ \ z_0-\text{ вне }\Gamma.\end{cases}$$

Равенство нулю имеем по причине аналитичности подынтегральной функции вне контура $\Gamma$.

2. Рассмотрим в качестве замкнутого контура $\Gamma$ – окружность $\gamma_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в точке $z_0$, тогда:

$$z-z_0=\rho e^{i\varphi},\ \ dz=i\rho e^{i\varphi}d\varphi,$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{\rho e^{i\varphi}}\cdot i\rho e^{i\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(z)d\varphi=\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{\gamma_\rho}f(z)ds,$$

где $ds=\rho d\varphi$ – длина элемента дуги окружности. Следовательно, значение аналитической функции в центре окружности равно среднему арифметическому ее значений на окружности. Это утверждение называется теоремой о среднем. Заметим, что оно имеет место и по отдельности для действительной и мнимой частей $f(z)$. Поэтому для гармонических функций также выполняется теорема о среднем.

3. Из теоремы о среднем и неравенства треугольника следует принцип максимума модуля аналитической функции. Данный принцип заключается в том, что максимальные значения модуля аналитической функции могут достигаться только на границе области её аналитичности. Действительно, среднеарифметическое не может быть больше, чем те числа (естественно положительные) из которых оно составлено. В нашем случае рассмотрим внутреннюю точку $z_0$, являющуюся центром окружности $\gamma_\rho$ (рис 2.7). Если функция $f(z)$ аналитична везде в области, то по теореме о среднем:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi.$$

Переходя к модулям имеем:

$$\left|f(z_0)\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi\right|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(z)\right|d\varphi\le\frac{1}{2\pi}\cdot\left|f(z)\right|_{\max}\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\left|f(z)\right|_{\max},$$

где $\left|f(z)\right|_{\max}=\max\limits_{\gamma\rho}\left|f(z)\right|$.

Здесь использовалось свойство интеграла от комплексной функции:

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi\right|\le\int\limits_0^{2\pi}\left|f(z)\right|d\varphi,$$

которое следует из определения интеграла:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta\varphi_k$$

и того, что:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta\varphi_k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(\xi_k)\right|\cdot\Delta\varphi_k,$$

что является следствием неравенства треугольника (свойство интегралов, указанное ранее без объяснения). Таким образом, модуль $\left|f(z)\right|$ может достигать максимума только на границе круга с центром в точке $z_0$ (так как $\rho$ произвольно). Понятно, что всю область можно покрыть такой системой кругов с произвольными точками $z_0$, что и объясняет указанный принцип. То же самое имеет место и для минимума модуля (при условии, что $\left|f(z)\right| \neq 0$ внутри области). Так как теорема о среднем выполняется для гармонических функций, то и для них реализуется принцип максимума, который имеет ясный физический смысл, например, для стационарного распределения температуры в теле: внутри него температура не может быть больше, чем на границе (при отсутствии внутренних источников).

## 2.6. Интегральная формула для производных высших порядков аналитических функций. Оценки Коши. Теорема Лиувилля

По интегральной формуле Коши имеем:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,.$$

Точка $z_0$ находится внутри области, ограниченной контуром Г, поэтому $z-z_0\neq 0$. Следовательно, интеграл берется от непрерывной функции и его можно дифференцировать по $z_0$ под знаком интеграла. Тогда, последовательно дифференцируя, получим:

$$\begin{aligned} f'(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,\\ f''(z_0)&=\frac{2!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f^{(n)}(z_0)&=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Таким образом, аналитические функции имеют производные всех порядков, которые выражаются через граничные значения по формулам (2.5).

Из формул (2.5) следуют неравенства, называемые оценками Коши. Пусть $M=\max\limits_{z\in\Gamma}\left|f(z)\right|$, $R=\min\limits_{z\in\Gamma}\left|z-z_0\right|$, $S$ – длина контура Г, тогда:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\left|f(z)\right|}{\left|z-z_0\right|^{n+1}}\left|dz\right|\leq\frac{n!M}{2\pi R^{n+1}}S\,.$$

Если Г – окружность $\left|z-z_0\right|=R$, то

$$\left|f^{(n)}\left(z_0\right)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}\text{, где } n = 0,1,2,...$$

Отсюда следует, так называемая теорема Лиувилля: если функция $f\left(z\right)$ аналитична на всей комплексной плоскости и ограничена, то она постоянная. Действительно, тогда: $\left|f'\left(z_0\right)\right| \leq \frac{M}{R}$ и, так как $R$ в этом случае может быть как угодно большим, то $\left|f'\left(z_0\right)\right| = 0$, следовательно $f\left(z\right) = const$. В частности, так как $\sin z \neq const$, то эта функция не может быть ограничена и может быть: $\left|\sin z\right| > 1$.

## 2.7. Ряды Тейлора

Степенным рядом называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z - z_0\right)^n = C_0 + C_1\left(z - z_0\right) + ... + C_n\left(z - z_0\right)^n + ...,$$

где точка $z_0$ называется центром ряда, а комплексные числа $C_n$ – коэффициентами ряда. Если такой ряд сходится в точке $z^*$, то он сходится в любой точке $z$, расположенной ближе к центру $z_0$, чем $z^*$. Действительно, в этом случае $\left|z - z_0\right| < \left|z^* - z_0\right|$ и $\left|C_n\left(z - z_0\right)^n\right| < \left|C_n\left(z^* - z_0\right)^n\right|$ и, следовательно, слагаемые ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(z - z_0\right)^n$ мажорируются (оцениваются сверху) слагаемыми сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(z^* - z_0\right)^n$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(z - z_0\right)^n$ сходится. Это утверждение называется теоремой Абеля. Круг с центром $z_0$, в котором степенной ряд сходится, называется кругом сходимости, а его радиус – радиусом сходимости степенного ряда. Для определения радиуса сходимости существуют формулы:

1) Коши-Адамара: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|C_n\right|}}$ и 2) Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|C_n\right|}{\left|C_{n+1}\right|}$. Отметим, что в круге сходимости сумма степенного ряда, как сходящаяся бесконечная сумма аналитических функций, является аналитической функ-

цией. Тогда возникает вопрос о представлении аналитической функции $f(z)$ в области ее аналитичности сходящимся степенным рядом. Для этого рассмотрим точку $z_0$, принадлежащую области аналитичности $f(z)$ и функцию

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z - z_0 + z_0} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}.$$

Будем считать, что точки $\xi$, $z$, $z_0$ расположены как на рис. 2.8, где $\Gamma$ – окружность радиуса $R$, с центром в точке $z_0$, лежащая в области аналитичности функции $f(z)$.

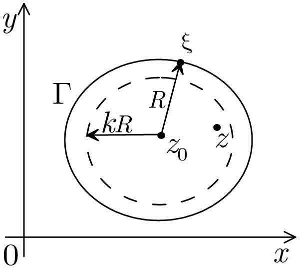

Рис. 2.8

Воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + .. + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

переписав ее в виде:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + .. + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Тогда:

$$\frac{1}{\xi - z} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + ... + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n + \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{n+1}\right)$$

Умножим обе части этого равенства на $f(\xi)/2\pi i$, проинтегрируем по $\Gamma$ (т.е. по $\xi$ ) и воспользуемся интегральной формулой Коши (2.4) и формулами для высших производных (2.5):

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)\cdot\frac{f'(z_0)}{1!}+(z-z_0)^2\cdot\frac{f''(z_0)}{2!}+..+(z-z_0)^n\cdot\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+$$

$$+\frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}(\xi-z)}\,d\xi.$$

При $n\to\infty$, величина последнего слагаемого стремится к нулю. Действительно, пусть $|z-z_0|=kR,\ (0<k<1)$, тогда:

$$\left|\frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}(\xi-z)}d\xi\right|\leq\frac{k^{n+1}R^{n+1}}{2\pi}\frac{M\cdot 2\pi R}{R^{n+1}\cdot R(1-k)}=\frac{k^{n+1}}{1-k}M\text{ , где}$$

$M=\max\limits_{\xi\in\Gamma}|f(\xi)|$ и учтено, что:

$$|\xi-z|>R-kR=R(1-k)\,.$$

Следовательно, при $n\to\infty$ имеем стремление к нулю, т.к. $k<1$. Таким образом, любая аналитическая функция $f(z)$ представляется в круге аналитичности своим рядом Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\cdot\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,. \tag{2.6}$$

Такое представление аналитической функции степенным рядом единственно, так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=f(z)$ имеет коэффициенты, равные коэффициентам ряда Тейлора, что видно из следующего вычисления:

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}C_k\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)\cdot(z-z_0)^{k-n},$$

т.е. при $\begin{cases}k=n\\ z=z_0\end{cases}$ имеем: $f^{(n)}(z_0)=C_n\cdot n!$, что дает $C_n=f^{(n)}(z_0)/n!$, а также $C_0=f(z_0)$. Значит, любой степенной ряд является рядом Тейлора свой суммы, причем его радиус сходимости равен расстоянию от центра ряда $z_0$ до ближайшей точки, где нарушается аналитичность функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$. Для коэффициентов ряда Тейлора имеем оценку:

$$|C_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot 2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n},$$

где $M = \max\limits_{\xi\in\Gamma}|f(\xi)|$.

## 2.8. Ряды Лорана

Функция $f(z)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0$, если она аналитична в $z_0$ и ее окрестности. Этого может и не быть, например, когда $f(z_0)$ обращается в бесконечность. Тогда оказывается, что для функции $f(z)$ аналитической в окрестности точки $z_0$ можно построить разложение по положительным и отрицательным степеням $z - z_0$

:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\cdot(z-z_0)^n = \ldots + C_{-n}\cdot(z-z_0)^{-n} + \ldots + C_{-1}\cdot(z-z_0)^{-1} + \ldots$$

$$+C_0 + C_1\cdot(z-z_0) + \ldots + C_n\cdot(z-z_0)^n + \ldots$$

Покажем это. Пусть кольцо $r < |z - z_0| < R$ лежит в области аналитичности $f(z)$, но в точке $z_0$ аналитичность не предполагается. Обозначим внутреннюю окружность – $\gamma$, внешнюю – $\Gamma$. Тогда для любой точки $z$, принадлежащей кольцу, по интегральной формуле Коши (2.4) имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\,d\xi. \qquad (*)$$

Рассмотрим дробь $1/(\xi - z)$, входящую в первый интеграл в (*):

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0}\left(1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots$$

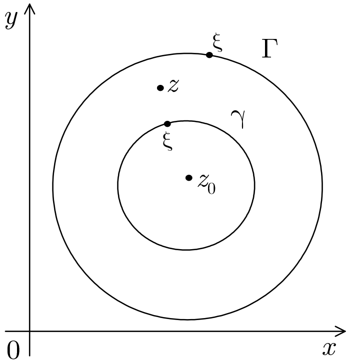

Рис. 2.9

В этом случае геометрическая прогрессия сходится, т.к.: $\dfrac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|}<1$ (см. рис. 2.9). Подставляя полученное разложение в первый интеграл в формуле (*) будем иметь:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi+(z-z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}d\xi+\ldots$$

$$+(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

где

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ \ n=0,1,2,\ldots \qquad (2.7)$$

Здесь $C_n$ не представляется в виде $f^{(n)}(z_0)/n!$, т.к. $f(z)$ может быть неаналитична в точке $z_0$. Во втором интеграле (*) дробь $1/(\xi-z)$ раскладывается в сходящуюся геометрическую прогрессию вида:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}=$$

$$=-\left[\frac{1}{z-z_0}+\frac{\xi-z_0}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{(\xi-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}+\ldots\right].$$

Подставляя во второй интеграл (*), получаем:

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=$$

$$=(z-z_0)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f(\xi)d\xi+(z-z_0)^{-2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f(\xi)(\xi-z_0)d\xi+...$$

$$+(z-z_0)^{-n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi+...=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

где

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ n=-1,-2,-3,... . \qquad (2.8)$$

При переходе к записи при помощи знака суммы положительное *n* было заменено на отрицательное. Следовательно

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

где $C_n$ вычисляются по формулам (2.7), (2.8). По теореме Коши для многосвязных областей значения интегралов (2.7) и (2.8) не изменятся, если контуры интегрирования заменить на любой замкнутый контур, лежащий в кольце аналитичности функции $f(z)$:

$$r<|z-z_0|<R.$$

Например, окружность $C$ радиуса $\rho\,(r<\rho<R)$. Тогда для вычисления коэффициентов ряда

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \qquad (2.9)$$

имеем формулу:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,... \qquad (2.10)$$

Полученный ряд называется рядом Лорана функции $f(z)$ с центром в точке $z_0$. Причем $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ называется правильной частью ряда, а $f_2(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n$ – главной частью.

С другой стороны, если $f(z)$ представляется рядом $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, то для коэффициентов $C_n$ получается формула (2.10). Действительно, домножим обе части равенства $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ на $\dfrac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ и проинтегрируем по $C$ – окружности радиуса $|z-z_0|$ с центром в точке $z_0$:

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int\limits_C (z-z_0)^{n-k-1}\,dz\,.$$

Все интегралы в правой части равны нулю (по теореме Коши, как интегралы от аналитических функций, которыми являются степени $z-z_0$), кроме одного, когда $n=k$. В этом случае

$$\int\limits_C (z-z_0)^{-1}\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=2\pi i.$$

Таким образом, для $C_k\equiv C_n$ и получаем формулу (2.10). Следовательно, всякий сходящийся ряд по положительным и отрицательным степеням $z-z_0$ является рядом Лорана своей суммы. Другими словами, разложение в ряд Лорана аналитической в кольце $r\le|z-z_0|\le R$ функции $f(z)$ единственно. Из формулы (2.10), также как и для коэффициентов ряда Тейлора, следуют неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана:

$$|C_n|<\frac{M}{\rho^n},\quad n=0,\pm1,\pm2,...\ ,$$

где $M$ – максимальное значение модуля функции $f(z)$ на окружности $|z-z_0|=\rho$.

Заметим также, что правильная часть ряда Лорана по теореме Абеля сходится в круге $|z-z_0|<R$, а главная – в области $|z-z_0|>r$.

## 2.9. Нули аналитической функции. Теорема единственности

Точка комплексной плоскости $z=z_0$, в которой аналитическая функция $f(z)$ равна нулю, называется нулем функции $f(z)$: $f(z_0)=0$.

Если $f(z) \neq 0$, то в ее ряде Тейлора $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ все коэффициенты $C_n$ не могут равняться 0 (тогда и $f(z)=0$), но $C_0 = f(z_0) = 0$. Если и $C_1 = 0,\ C_2 = 0, \ldots, C_{n-1} = 0$, но $C_n \neq 0$, то точка $z_0$ называется нулем *n*-ого порядка функции $f(z)$. Это означает, что $f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Следовательно, в этом случае ряд Тейлора функции $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k (z-z_0)^k,$$

а сама функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = (z-z_0)^n \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+k} \cdot (z-z_0)^k$ – аналитическая функция, причем

$$\varphi(z_0) = C_n \neq 0.$$

Так как рассматриваются непрерывные функции, то нуль может быть только изолированным, т.е. существует окрестность точки $z_0$, где $f(z) \neq 0$, за исключением одной точки $z_0$. Отсюда следует утверждение, называемое теоремой единственности: если две аналитические функции совпадают на некоторой кривой (или даже на сходящейся последовательности точек), то они совпадают и во всей области аналитичности. Это утверждение сразу следует из рассмотрения разности упомянутых функций, которая имеет неизолированные нули и, следовательно, тождественно равна нулю. Следствием является выполнение тождеств для элементарных функций действительной переменной при замене последней комплексной переменной. Например, рассматривая функцию $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ и имея в виду, что $f(z) = 0$ при $z = x$, получаем, что $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

## 2.10. Особые точки аналитических функций

Также как в п. 2.9 рассматривались изолированные нули, здесь будем рассматривать изолированные особые точки $z_0$, для которых существует окрестность, в которой функция $f(z)$ является аналитической за исключением одной точки $z_0$. Подчеркнем, что идет речь об областях однозначности функций.

Имеется три вида особых точек:

1) устранимые особые точки, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;
2) полюсы, для которых $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;
3) существенно особые точки, для которых $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Если точка $z=z_0$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то в кольце ее аналитичности $0<|z-z_0|<R$ (внутренняя окружность вырождается в точку) функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n .$$

В зависимости от вида особой точки ряд Лорана приобретает различную форму.

В случае устранимой особой точки ряд Лорана не имеет главной части. Действительно, в этом случае функция $f(z)$ ограничена в окрестности точки $z_0$ $\left(|f(z)|<M\right)$, а из неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана следует:

$$|C_n|<\frac{M}{R^n} \ (n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,...).$$

Тогда для отрицательных $n$ $(k=-n)$:

$$|C_{-k}|\le MR^k$$

и при $R\to 0$ получаем:

$$C_{-k}=0 \ (k=1,2,...).$$

Обратно: если ряд Лорана не содержит главной части, то существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C_0$. Такая точка называется устранимой особой точкой, т.к. особенность можно устранить, полагая

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z).$$

Для случая полюса рассмотрим функцию $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. Тогда $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=0$ и для функции $g(z)$ точка $z_0$ является нулем. Пусть это нуль $n$-ого порядка. В этом случае считается, что функция $f(z)$ имеет в т. $z_0$ полюс $n$-ого порядка. Согласно рассмотрению нулей $g(z)$ можно представить в виде:

$$g(z)=(z-z_0)^n\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в окрестности точки $z_0$ и $\varphi(z_0)\neq 0$. Тогда функция $\dfrac{1}{\varphi(z)}$, аналитическая в окрестности точки $z_0$ и разлагается в ряд Тейлора по степеням $(z-z_0)$:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=C_{-n}+C_{-n+1}(z-z_0)+\ldots+C_0(z-z_0)^n+\ldots ,$$

где нумерация начата не с нуля, а с $(-n)$.

Следовательно:

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n}\frac{1}{\varphi(z)}=C_{-n}(z-z_0)^{-n}+C_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1}+\ldots+$$

$$+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots$$

или

$$f(z)=\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k(z-z_0)^k.$$

Последняя формула показывает, что в случае полюса $n$-ого порядка в главной части разложения в ряд Лорана содержится $n$ слагаемых. С другой стороны, если разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ имеет именно такой вид, то функция

$$\varphi(z)=(z-z_0)^n f(z)=C_{-n}+C_{-n+1}(z-z_0)+\ldots$$

является аналитической, так как представляется рядом Тейлора и $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=C_{-n}\neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}=\infty$, и функция $f(z)$ имеет в точке $z_0$ полюс $n$ -ого порядка.

Для существенно особой точки не остается ничего другого, как наличие в главной части бесконечного количества слагаемых. При этом оказывается, что для любого комплексного числа $z^*$ найдется соответствующая, сходящаяся к точке $z_0$ последовательность точек $z_k$, такая, что $\lim\limits_{z_k\to z_0}f(z)=z^*$. Это утверждение называется теоремой Сохоцкого.

В соответствии с видом особых точек однозначные аналитические функции разделяют на два класса: 1) целые (или голоморфные) функции, не имеющие конечных особых точек и 2) дробные (мероморфные), имеющие в качестве конечных особых точек только полюсы. Количество полюсов может быть и бесконечным во всей плоскости, но в конечной области может быть только конечное их количество.

## Глава 3

# ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

### 3.1. Понятие вычета

В случае, если внутри контура интегрирования функция $f(z)$ является аналитической, то по теореме Коши интеграл по этому контуру равен нулю. Предположим, что внутри контура имеется единственная особая точка $z_0$. Тогда интеграл может быть отличен от нуля. Его величина, деленная на $2\pi i$ (для удобства приложений) называется вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0$ и обозначается $\text{выч}\left[f(z), z_0\right]$ или $\text{res}\left[f(z), z_0\right]$.

Таким образом,

$$\text{выч}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\xi)\,d\xi,$$

и зависит только от функции $f(z)$ и точки $z_0$, так как его величина не изменяется при замене контура $\gamma$ любым другим, содержащим внутри единственную особую точку $z_0$. Так как в окрестности точки $z_0$ функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\left(z-z_0\right)^n,\ C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\left(\xi-z_0\right)^{n+1}}d\xi,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...,$$

то

$$\text{выч}\left[f(z),z_0\right]=C_{-1}.$$

## 3.2. Вычисление вычета в полюсе

Рассмотрим вначале частный случай вычета в полюсе первого порядка – точке $z_0$. Тогда функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана вида:

$$f(z)=C_{-1}\left(z-z_0\right)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(z-z_0\right)^n.$$

Для нахождения $\text{выч}\left[f(z),z_0\right]=C_{-1}$, умножим обе части равенства на $\left(z-z_0\right)$ и перейдем к пределу при $z\to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)f(z)=C_{-1}=\text{выч}\left[f(z),z_0\right]. \tag{3.1}$$

Отсюда следует еще одна формула для вычета в полюсе первого порядка. Для ее получения представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z_0)\neq 0$ и, следовательно, $\psi(z)$ – имеет в точке $z_0$ нуль первого порядка, что означает: $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$. Тогда:

$$\text{выч}\left[f(z),z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\left(z-z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{3.2}$$

Для полюса порядка $m$ разложение в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z)=C_{-m}\left(z-z_0\right)^{-m}+...+C_{-1}\left(z-z_0\right)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(z-z_0\right)^n.$$

Необходимо найти $C_{-1}$. Для этого домножим это равенство на $\left(z-z_0\right)^m$ и продифференцируем $(m-1)$ раз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\left(z-z_0\right)^m \cdot f(z)\right]=(m-1)!\,C_{-1}+m!\left(z-z_0\right)\cdot C_0+\ldots\ .$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получим

$$C_{-1}=\text{выч}\left[f(z),z_0\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\left(z-z_0\right)^m f(z)\right]. \qquad (3.3)$$

## 3.3. Теорема Коши о вычетах

Как следует из формул (3.2), (3.3) вычисление вычетов сводится к дифференцированию и предельному переходу. Это гораздо проще, чем вычисление интеграла по замкнутому контуру. Рассмотрим контур $\Gamma$, внутри которого находится $N$ особых точек $z_k$ $(k=1,2,\ldots,N)$ функции $f(z)$, аналитических внутри Г, за исключением точек $z_k$. Выделим каждую точку $z_k$ контуром $\gamma_k$ так, чтобы внутри $\gamma_k$ находилась единственная особая точка $z_k$. Тогда по теореме Коши для многосвязных областей

$$\int_{\Gamma} f(\xi)d\xi+\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\int_{\gamma_k^-} f(\xi)d\xi=0,$$

или

$$\int_{\Gamma} f(\xi)d\xi=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\int_{\gamma_k} f(\xi)d\xi=2\pi i\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\text{выч}\left[f(z),z_k\right].$$

Последнее равенство и составляет содержание теоремы Коши о вычетах, которая позволяет вычислять интегралы без интегрирования и состоит в том, что интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов, умноженной на $2\pi i$.

## 3.4. Понятие бесконечно удаленной точки. Вычет в бесконечно удаленной точке

Рассмотрим неограниченно возрастающую последовательность $\left\{\left|z_n\right|\right\}$, такую, что для любого положительного действительного числа $R$ можно найти номер $N$, такой, что при $n>N$ имеет место: $\left|z_n\right|>R$.

Такой последовательности модулей комплексных чисел $z_n$, соответствует последовательность $\{z_n\}$, которая не имеет конечного предела и сама может быть названа неограниченно возрастающей. Для устранения возникающего неудобства вводят комплексное число $z=\infty$ и считают, что неограниченно возрастающие последовательности сходятся к этому числу. Считают также, что полная комплексная плоскость состоит из множества конечных точек и бесконечно удаленной точки $z=\infty$. Алгебраические свойства числа $z=\infty$ обусловлены тем, что последовательность $\left\{\frac{1}{z_n}\right\}$ сходится к $z=0$. Вследствие этого, для любого конечного $z$:

$$z\cdot\infty=\infty\ \left(z\neq 0\right),\ z+\infty=\infty,\ \frac{z}{\infty}=0,$$

а также $\frac{z}{0}=\infty\ \left(z\neq 0\right)$. Операция $\frac{\infty}{\infty}$ не определена.

Дадим определение вычета в точке $z=\infty$. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в окрестности $R<|z|<\infty$ точки $z=\infty$. Вычетом $f(z)$ в бесконечности называют величину:

$$\text{выч}\left[f(z),\infty\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-}f(\xi)d\xi,$$

где $\Gamma^-$ – окружность радиуса $\rho>R$ такого, что вне круга $|z|\leq\rho$ нет конечных особых точек. Окружность $\Gamma^-$ проходится в направлении по часовой стрелке (в отрицательном направлении). Тогда можно сформулировать утверждение, полезное при вычислении интегралов. А именно: сумма всех вычетов, включая и вычет на бесконечности, функции $f(z)$, имеющей конечное число особых точек, равна нулю. Действительно, если $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n$ – конечные особые точки $f(z)$, то по теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma}f(\xi)d\xi=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{выч}\left[f(z),z_k\right],$$

где $\Gamma$ – окружность, содержащая внутри все конечные точки $z_k$. По определению вычета в бесконечности и получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}\text{выч}\left[f(z),z_k\right]+\text{выч}\left[f(z),\infty\right]=0.$$

В окрестности точки $z=\infty$ функцию $f(z)$, аналитическую при $R<|z|<\infty$, можно разложить в ряд Лорана. Для этого введем новую переменную $\xi=\frac{1}{z}$ и рассмотрим функцию $F(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=f(z)$. Тогда $F(\xi)$ аналитическая в кольце $0<|\xi|<\frac{1}{R}$, с центром в точке $\xi=0$. Причем: $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{\xi\to 0}F(\xi)$ и, следовательно, характер особенности $f(z)$ при $z\to\infty$ совпадает с характером особенности $F(\xi)$ при $\xi\to 0$, так как все определяется значением пределов, которые равны.

Поэтому:

1) в устранимой особой точке $z=\infty$ (для $F(\xi)$ – это точка $\xi=0$):

$$f(z)=F(\xi)=C_0^{'}+C_1^{'}\xi+..+C_n^{'}\xi^n+...=$$
$$=C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\frac{C_{-2}}{z^2}+...+\frac{C_n}{z^n}+...,$$

где $C_{-n}=C_n^{'}$;

2) в полюсе порядка $n$ $\left(\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{\xi\to 0}F(\xi)=\infty\right)$:

$$f(z)=F(\xi)=$$
$$=\frac{C_{-n}^{'}}{\xi^n}+\frac{C_{-n+1}^{'}}{\xi^{n-1}}+...+\frac{C_{-1}^{'}}{\xi}+C_0^{'}+C_1^{'}\xi+...+C_k^{'}\xi^k+...=$$
$$=C_nz^n+C_{n-1}z^{n-1}+...+C_1z+C_0+\frac{C_{-1}}{z}+...+\frac{C_{-k}}{z^k}+...$$

где $C_{-k}=C_k^{'}$;

3) в существенно особой точке, аналогично:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}.$$

Таким образом, в окрестности точки $z=\infty$ главная часть ряда Лорана – сумма положительных степеней $z$, а правильная – отрицательных. Отсюда видно, что вычет в бесконечности равен коэффициенту $C_{-1}$ при степени $z^{-1}$, взятому с обратным знаком. Действительно, интегрируя ряд по окружности $\Gamma$ радиуса достаточно большого для того, чтобы вне ее не было конечных особых точек, получаем:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_{\Gamma} z^n dz+\sum_{n=0}^{\infty}C_{-n}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^n}=2\pi i\cdot C_{-1},$$

так как $\int_{\Gamma} z^k dz=\begin{cases}2\pi i, & k=-1,\\ 0, & k\neq -1.\end{cases}$

Этот результат был получен ранее. Отсюда и из определения вычета в бесконечности и следует, что

$$\text{выч}\left[f(z),\infty\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(\xi)d\xi=-C_{-1}.$$

Заметим, что в этом случае степень $z^{-1}$ принадлежит правильной части ряда Лорана и вычет в бесконечности может быть отличен от нуля даже тогда, когда $f(z)$ имеет при $z=\infty$ конечный предел или нуль первого порядка.

## 3.5. Вычисление определенных интегралов с помощью теории вычетов

Теория вычетов позволяет вычислять интегралы не только от функций комплексной переменной, но и определенные интегралы от функций действительной переменной. Зачастую это более эффективно, чем применение методов математического анализа. Например, если все особые точки, лежащие внутри контура интегрирования, являются полюсами, то вычисление интеграла сведется к вычислению производных. Рассмотрим некоторые конкретные случаи.

### 3.5.1. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$

Рассмотрим интеграл

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta,$$

где $R$ – рациональная функция от $\sin\theta, \cos\theta$. Данный интеграл сводится к интегралу по единичной окружности $|z|=1$ заменой переменной: $z=e^{i\theta}$. Тогда:

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta,\quad d\theta=\frac{dz}{iz}.$$

При изменении $\theta$ от 0 до $2\pi$ комплексная переменная $z$ пробегает в положительном направлении окружность $|z|=1$ и, следовательно,

$$I=\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}R\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z}=\int\limits_{|z|=1}R_1(z)dz,$$

где $R_1(z)=\frac{1}{iz}R\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$ – рациональная функция $z$, которая является аналитической внутри единичного круга, за исключением конечного числа особых точек $z_k$ $(1\le k\le N)$. Имея в виду, что особые точки рациональной функции могут быть только полюсами (пусть их порядок равен $m_k$) по теореме Коши и формуле (3.3) для вычета в полюсе порядка $m_k$ получаем:

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}}\left[(z-z_k)^{m_k}\cdot R_1(z)\right].$$

Понятно, что в случае полюса первого порядка, следует пользоваться формулой: числитель, деленный на производную знаменателя (формула (3.2)).

### 3.5.2. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

Рассмотрим аналитическую функцию $f(z)$, которая совпадает с функцией $f(x)$ на действительной оси (т.е. при $y=0$). Функция $f(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(x)$ на комплексную плоскость и получается, как правило, простой заменой переменной $x$ на $z$. Вместо интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ будем вычислять $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz$, где $\gamma_R = C_R \cup [-R;R]$ – замкнутый контур, изображенный на рис. 3.1, состоящий из полуокружности $C_R$ $\left(|z| = R,\ \operatorname{Im} z > 0\right)$ и отрезка действительной оси $[-R, R]$.

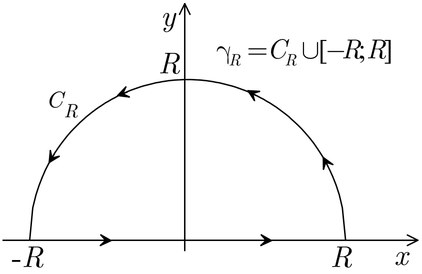

Рис. 3.1

Предположим, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. Тогда с использованием основной теоремы о вычетах получаем:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \text{выч}\left[f(z), z_k\right],$$

где $z_k$ – особые точки функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. При этом предполагается, что на действительной оси функция $f(z)$ особых точек не имеет. Основное предположение о равенстве нулю $\int\limits_{C_R} f(z)dz$ выполняется, если дополнительно функция $f(z)$, аналитическая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа $(N)$ особых точек, удовлетворяет условию:

$$\left|f(z)\right| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}} \quad \left(M > 0, \delta > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\right),$$

т.е. имеет при $z = \infty$ нуль не ниже второго порядка. Действительно, тогда:

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right| \le \int\limits_{C_R} \left|f(z)\right|\left|dz\right| \le \frac{M}{R^{1+\delta}} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{\delta}}$$

и в пределе при $R \to \infty$ имеем нуль. Итак, при указанных условиях на функцию $f(z)$ получаем, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ существует и равен

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{выч}\left[f(z), z_k\right].$$

### 3.5.3. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$. Лемма Жордана

Для вычисления интегралов указанного вида при положительных значениях параметра $\lambda$ можно применить рассуждения, описанные в предыдущем пункте. При этом используется контур интегрирования, изображенный на рис. 3.1. Основным условием является требование:

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0,$$

которое выполняется, если функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек и стремится к нулю при $|z| \to \infty$, равномерно относительно $\varphi = \arg z$ $\left(0 < \arg z < \pi\right)$. Содержание этого высказывания и называется леммой Жордана. Обозначим $M = \max\limits_{C_R} \left|f(z)\right|$ и оценим величину $I = \left|\int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)dz\right|$. Учитывая, что:

$\left|e^{i\lambda z}\right|=\left|e^{i\lambda(x+iy)}\right|=\left|e^{i\lambda x}\right|\cdot\left|e^{-\lambda y}\right|=e^{-\lambda R\sin\varphi}$; $\left|dz\right|=R\,d\varphi$; $\left|f(z)\right|\le M$ , получаем: $I\le MR\int\limits_0^{\pi}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi=2MR\int\limits_0^{\pi/2}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi$ . Последнее равенство усматривается из того, что $(\theta=\pi-\varphi)$ :

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-\lambda R\sin(\pi-\theta)}d\theta=\int\limits_0^{\pi/2}e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta\,.$$

Далее учтем, что при $0\le\varphi\le\pi/2$ : $\sin\varphi\ge\dfrac{2}{\pi}\varphi$ . Это неравенство можно получить из анализа графика функции $\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ (рис.3.2).

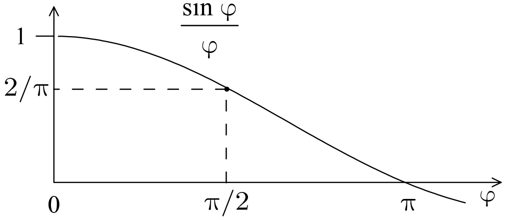

Рис. 3.2

Тогда:

$$I\le 2MR\int\limits_0^{\pi/2}e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}d\varphi=M\frac{\pi}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda R}\right).$$

Окончательно: $\lim\limits_{R\to\infty}I=0$ , т.к. $\lim\limits_{R\to 0}M=0$ , что и доказывает лемму Жордана. Исходя из нее и основной теоремы о вычетах, получаем формулу:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{выч}\left[e^{i\lambda z}f(z),z_k\right],$$

где $z_k$ – особые точки $f(z)$ при $\operatorname{Im}z>0$ .

Заметим, что $e^{i\lambda x}=\cos\lambda x+i\sin\lambda x$ , поэтому описанный способ позволяет фактически вычислять интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x\cdot f(x)\,dx,\quad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\cdot f(x)\,dx.$$

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

2. Алгебраическая форма записи комплексных чисел и операции сложения, вычитания, умножения и деления. Сопряженное комплексное число.

3. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Геометрический смысл сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел. Неравенства треугольника.

4. Возведение комплексного числа в целую степень. Формула Муавра. Извлечение корня.

5. Возведение действительного числа в комплексную степень. Вывод формулы Эйлера.

6. Показательная форма записи комплексных чисел. Логарифм комплексного числа. Главное значение логарифма.

7. Вывод условий Коши-Римана. Понятие аналитической функции. Независимость производной аналитической функции от направления дифференцирования. Условия Коши-Римана в полярных координатах.

8. Уравнение Лапласа. Сопряженные гармонические функции. Определение гармонической функции по известной сопряженной ей гармонической функции.

9. Понятие интеграла от функции комплексной переменной. Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Теорема Коши (в том числе для многосвязных областей).

10. Понятие первообразной аналитической функции. Вывод формулы Ньютона-Лейбница.

11. Вывод интегральной формулы Коши.

12. Теорема о среднем для аналитических функций.

13. Принцип максимума модуля аналитической функции и его обоснование.

14. Вывод интегральной формулы для производных высших порядков аналитической функции. Оценки Коши. Теорема Лиувилля.

15. Теорема Абеля. Формулы для определения радиуса круга сходимости степенного ряда.

16. Ряд Тейлора и его единственность.

17. Ряд Лорана. Формула для коэффициентов ряда. Единственность разложения в степенной ряд аналитической в кольце функции.

18. Понятие нуля аналитической функции и его порядка. Теорема единственности для аналитических функций.

19. Классификация особых точек аналитической функции.

20. Вид ряда Лорана в окрестности особых точек аналитической функции.

21. Понятие вычета аналитической функции.

22. Формулы для вычисления вычета в простом полюсе (полюсе первого порядка).

23. Вывод формулы для вычисления вычета в полюсе порядка $m$.

24. Теорема Коши о вычетах.

25. Понятие бесконечно удаленной точки и вычета в ней.

26. Формы ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

27. Вычисление с помощью теории вычетов интегралов вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

28. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx$. Доказательство леммы Жордана.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии изложены элементы теории функций комплексной переменной, которые должны послужить основой изучения различных разделов математической физики. Например, операционного исчисления и теории конформных отображений с приложением к решению краевых задач механики сплошных сред. Для более обстоятельного изучения рекомендуются учебники и учебные пособия [1-7]. Следует заметить, что интегральная формула Коши является основой метода комплексных граничных элементов, положения которого изложены в [8]. Этот метод позволяет численно решать плоские задачи теории потенциала с чрезвычайно высокой точностью. Содержания настоящего пособия вполне достаточно для овладения данной методикой.

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2002. – 688 с.
2. *Морозова В.Д.* Теория функций комплексного переменного : учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. X.)
3. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной : учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.
4. *Фукс Б.А., Шабат Б.В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М. : Наука, 1964. – 388 с.
5. *Шведенко С.В.* Начала анализа функций комплексной переменной: М. : МИФИ, 2008. – 356 с.
6. *Эйдерман В.Я.* Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.
7. *Половинкин Е.С.* Курс лекций по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие. – М. : МФТИ, 1999 – 256 с.
8. *Громадка II Т., Лей Ч.* Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах : пер. с англ. – М. : Мир, 1990. – 303 с.

*Издание подготовлено в авторской редакции*

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 150 от «7» февраля 2014 г. Тираж 100 экз.