ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.7

ДИСКРЕТНЫЕ АВТОМАТЫ НА ПОЛУРЕШЁТКАХ

Г. П. Агибалов

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: agibalov@isc.tsu.ru

Теория дискретных автоматов на полурешетках является одним из значительных достижений научной школы прикладной дискретной математики (ПДМ) Томского государственного университета (ТГУ), представляя собой сравнительно новое научное направление на стыке математической кибернетики и общей алгебры, в рамках которого впервые удалось формализовать такие понятия, относящиеся к дискретным управляющим системам, как динамическое поведение, физическая реализуемость, адекватная модель и ее точность, и решить задачи логического проектирования таких систем в постановке, отражающей динамику поведения системы, возможность ее физической реализации на современной электронной базе и адекватность моделирования с любой наперед заданной точностью. Статья написана к 50-летию школы ПДМ ТГУ и является рефератом одноимённой монографии автора, вышедшей в Издательстве ТГУ в 1993 г. и ныне практически не доступной. В ней отражены почти все основные результаты теории дискретных автоматов на полурешётках, полученные к тому времени.

Ключевые слова: *конечные верхние полурешётки, полурешёточно упорядоченные алгебры, адекватные модели, точность дискретной модели, функции на полурешётках, системы уравнений на полурешётках, конечные автоматы на полурешётках, переключательные схемы на полурешётках, анализ, синтез, кодирование, минимизация, декомпозиция, адекватное моделирование.*

Введение

Под дискретным автоматом здесь подразумевается дискретная управляющая система со свойствами конечных абстрактного и структурного автоматов, понимаемых в том широком смысле, который допускает в схеме автомата элементы с управляемой проводимостью, двунаправленные каналы передачи информации, отождествление выходных полюсов компонент и многозначность структурного алфавита, присущие современным большим (БИС) и сверхбольшим (СБИС) цифровым интегральным микросхемам. В автомате на полурешётках каждая переменная принимает значения в некоторой конечной верхней полурешётке, т. е. в частично упорядоченном множестве, в котором любые два элемента имеют точную верхнюю грань, называемую суммой этих элементов, и которое вместе с математическими действиями, моделирующими структурные операции в автомате, образует полурешёточно упорядоченную алгебру. Имеются по меньшей мере четыре свидетельства полезности теории дискретных автоматов на полурешётках.

Во-первых, математический аппарат классических функциональных систем (алгебра логики, конечнозначная логика, теория автоматов), будучи удобным языком для адекватного описания статического (при фиксированном входном состоянии) поведения дискретного устройства, к сожалению, недостаточен для адекватного описания его динамического (вызываемого асинхронным изменением компонент входного состояния) поведения. Причина этого — в отсутствии в дискретной математике средств для выражения изменения дискретной величины, подобных дифференциалу и производной в непрерывной математике. Этот недостаток преодолевается в функциональных системах на полурешётках, каковыми являются полурешёточно упорядоченные алгебры. В описании динамического поведения дискретного автомата средствами такой алгебры отношение порядка в последней интерпретируется как отношение сравнения состояний в автомате по степени их неопределённости, обязанной явлению состязаний, которые возникают между компонентами состояния в процессе их асинхронного изменения, а сумма состояний в полурешетке моделирует это изменение как промежуточное (переходное) состояние. Например, асинхронное изменение состояния входов автомата с a на b моделируется в его описании промежуточным состоянием $a + b$. Именно $a + b$ предложено рассматривать как выражение для изменения значения дискретной величины с a на b.

Далее, в дискретных функциональных системах с частично определенными функциями, такими, как частичные функции конечнозначной логики, частично рекурсивные функции, частичные конечно-автоматные функции и т. п., неопределённость значения переменной (аргумента, функции) трактуется обычно одним способом — как любое из **всех** возможных определенных значений этой переменной. В приложениях к дискретным автоматам, в особенности на базе БИС и СБИС, такая трактовка ведет нередко к снижению точности используемых моделей со всеми вытекающими отсюда неприятными последствиями: в синтезе — затрудняются формализация исходных функций и их декомпозиция, в анализе — теряется необходимая информация. Этот недостаток математического аппарата можно преодолеть, если в область значений каждой переменной ввести значения разной степени неопределённости, трактуемые как любые из **некоторых** определённых значений и образующие в совокупности верхнюю полурешётку подмножеств определённых значений.

Важнейшими характеристиками любой математической модели, чем в сущности и служит дискретный автомат, являются ее адекватность и степень точности. В случае дискретных моделей первая понимается как безошибочность в том смысле, что результат адекватного моделирования всегда содержит в себе истинное значение моделируемой величины, а вторая — как степень неопределённости этого результата. Формализовать эти понятия традиционными средствами дискретной математики не удается. Аппарат же теории полурешеток позволяет сделать это путём определения адекватной модели полурешётки как множества из наибольших элементов всех смежных классов последней по некоторой конгруэнции на ней, которая, в свою очередь, представляет собой степень точности этой модели. В результате утверждения об адекватности и точности дискретных моделей становятся теоремами.

Наконец, рассматривая функции и автоматы как определённые на полурешётках, можно дать точное определение их физической реализуемости. Это понятие оказывается равносильным математическому понятию квазимонотонности, ибо квазимонотонные функции и автоматы на полурешётках и только они допускают схемную реализацию на современной микроэлектронной базе.

Таким образом, изучая дискретные автоматы на полурешётках, можно определить такие важные атрибуты дискретной управляющей системы, как динамическое поведение, физическая реализуемость, адекватная модель и ее точность, и сделать утверждения о них доказательными. Традиционные задачи проектирования дискретных автоматов на абстрактном и структурном уровнях представления, включая задачи эквивалентных преобразований, минимизации, декомпозиции, кодирования, моделирования, анализа, синтеза и др., удается теперь поставить и решить в новой, более общей постановке, отражающей динамику поведения автомата, его физическую реализуемость и адекватность моделирования с любой наперёд заданной точностью.

Первые конкретные результаты, продемонстрировавшие все эти возможности теории дискретных автоматов на полурешётках, получены автором в [1 – 7] и систематизированы в его монографии [6]. Истоком для них послужили исследования [8, 9], проведённые под руководством автора с целью создания адекватной математической модели функционирования БИС транзисторного уровня и разработки на её основе методов логического проектирования таких схем. Ниже в реферативной форме приводится обзор основных элементов теории дискретных автоматов на полурешётках, представленных в книге [6]. Доказательства всех теорем в нём можно найти также в [6]. Дальнейшее развитие исследования в этом направлении нашли в работах И. А. Панкратовой [10] и Н. Г. Парватова [11, 12].

1. Полурешётки

1.1. Точечные полурешётки

Всюду далее под полурешёткой подразумевается конечная верхняя полурешётка, т. е. конечное частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента a и b имеют точную верхнюю грань, называемую их *суммой* и обозначаемую $a + b$. В ней обязательно есть наибольший и минимальные элементы. Последние называются *точками* полурешетки. Полурешётка *точечная*, если она порождается своими точками, т. е. если каждый ее элемент равен сумме некоторых точек. Множество всех непустых подмножеств конечного множества M обозначается $\tilde{M}$. Полурешётка с элементами в $\tilde{M}$ и с включением в качестве отношения порядка называется *полурешеткой подмножеств* множества M.

Теорема 1. Всякая точечная полурешётка изоморфна полурешётке подмножеств своих точек.

1.2. Покрытия полурешёток

Покрытием полурешётки S называется всякое множество P различных и непустых подмножеств множества S, называемых *блоками* покрытия, которые обладают следующими свойствами: 1) объединение блоков в P есть S; 2) каждый блок в P является подполурешёткой в S; 3) для любых блоков A и B в P существует блок C в P, называемый *их суммой* в P и обозначаемый $A \oplus B$, который в P является точной верхней гранью для $A + B$ по отношению вкючения. Покрытие P называется *ассоциативным*, если в нём ассоциативна определённая так операция *сложения* $\oplus$. Вместе с последней ассоциативное покрытие полурешётки само есть полурешётка. Покрытие полурешётки называется *П-покрытием*, если сложение в нём совпадает с пересечением.

Теорема 2. Всякая полурешётка изоморфна своему П-покрытию.

1.3. Полурешётки проводимостей и состояний

Полурешетки подмножеств множества $E = \{0, 1, \mathrm{X}\}$ называются *полурешётками проводимостей*, а полурешётки подмножеств r-й декартовой степени E^r множества E для любого $r \geqslant 2$ — *полурешётками состояний*. Символы 0, 1, X в них интерпретируются как статические, или определённые, проводимости соответственно разомкнутой, замкнутой и резистивной электрических цепей, а их наборы в E^r — как статические, или определенные, состояния узла электронной схемы, представленные проводимостями схемы от полюсов источника питания до данного узла. Соответственно этому подмножества в E, обозначаемые как $0' = \{1, \mathrm{X}\}$, $1' = \{0, \mathrm{X}\}$, $\mathrm{X}' = \{0, 1\}$, $\mathrm{E} = \{0, 1, \mathrm{X}\}$, — это динамические, или в разной степени неопределённые проводимости цепей, а подмножества в E^r — это такие же состояния узлов схемы.

Теорема 3. Всякая точечная полурешётка с k точками изоморфна полурешётке состояний любой размерности $r \geqslant \log_3 k$.

1.4. Адекватные модели полурешёток

Пусть S — полурешётка со сложением $+$ и σ — конгруэнция на ней. Каждый смежный класс A в S/σ является подполурешёткой в S, и в нем есть наибольший элемент $\sup A$. Смежные классы A и B как элементы фактор-полурешётки S/σ и элементы в них, в том числе наибольшие, как элементы полурешётки S связаны между собой соотношением: $A \leqslant B \Leftrightarrow \sup A \leqslant \sup B \Leftrightarrow \exists a \in A \exists b \in B\ (a \leqslant b)$. Пусть далее $S{\uparrow}\sigma = \{\sup A : A \in S/\sigma\}$. Определим на $S{\uparrow}\sigma$ сложение $\oplus$ как $a \oplus b = \sup\,[a+b]_\sigma$. Вместе с $\oplus$ множество $S{\uparrow}\sigma$ является полурешёткой, гомоморфной полурешётке S и изоморфной полурешётке S/σ, и называется *адекватной моделью полурешётки S с точностью σ*.

Для любой эквивалентности R на M определим эквивалентность $\tilde{R}$ на $\tilde{M}$ как $A\ \tilde{R}\ B \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in B (a\ R\ b) \wedge \forall b \in B \exists a \in A (a\ R\ b)$. Это есть конгруэнция на полурешётке $\tilde{M}$. Пусть $\{R\}$ обозначает подполурешётку в $\tilde{M}$, порождённую смежными классами эквивалентности R.

Теорема 4. $\{R\} = \tilde{M}{\uparrow}\tilde{R}$.

В случае, когда M есть декартово произведение множеств, те его непустые подмножества, которые сами являются декартовыми произведениями множеств, называются *интервалами в M*. Пусть в этом случае $\hat{M}$ есть множество всех интервалов в M, $<R> = \hat{M} \cap \{R\}$ и $\hat{R}$ есть минимальная конгруэнция на $\hat{M}$, такая, что для любого смежного класса A эквивалентности R существует смежный класс конгруэнции $\hat{R}$, содержащий в качестве элементов все одноэлементные подмножества в A.

Теорема 5. $< R >= \hat{M}{\uparrow}\hat{R}$.

Пусть ρ является ядерной конгруэнцией гомоморфизма полурешёток $h : \{R\} \to < R >$, где $h(P)$ для $P \subseteq M$ есть наименьший интервал в $< R >$ со свойством $P \subseteq h(P)$.

Теорема 6. $< R >= \{R\}{\uparrow}\rho$.

Следствие 1. $\hat{M}$ и $< R >$ — адекватные модели $\tilde{M}$. Адекватные модели $\hat{M}$ являются адекватными моделями $\tilde{M}$.

Полурешётки $\tilde{M}$, $\hat{M}$ и $\{R\}$ точечные.

Теорема 7. Полурешётка $< R >$ точечная, если $M/R \subseteq \hat{M}$.

В [6] можно найти многочисленные примеры адекватных моделей полурешёток состояний для адекватного моделирования МДП-схем различных классов с той или иной точностью.

1.5. Кодирование полурешёток

Всюду далее через $m(L)$ обозначается множество точек полурешётки L, через $M(L)$ — множество всех минимальных (по включению) подмножеств в L, не имеющих в L нижней грани, и $r(L) = \max\limits_{A \in M(L)} |A|$.

Пусть B и Q — полурешётки и n — натуральное число. Если существуют такие полурешётка $K \subseteq B^n$ (с элементами и порядком в полурешётке B^n) и эпиморфизм полурешёток $h : K \to Q$, что для любого подмножества $U \subseteq K$, имеющего в B^n нижнюю грань, подмножество $h(U) \subseteq Q$ имеет нижнюю грань в Q, то h называется *кодированием*, а K — *кодом полурешётки* Q с *основанием* B, *длиной* n и *значностью* $k = |m(B)|$.

Теорема 8. Для полурешётки Q, допускающей k-значное кодирование, $k \geqslant r(Q)$. Точечная полурешётка Q допускает k-значное кодирование, если и только если $k \geqslant r(Q)$.

Теорема 9. Точечная полурешётка Q тогда и только тогда допускает кодирование с основанием $B \cong \tilde{M}$, когда $|M| \geqslant r(Q)$.

Для любого $A \subseteq Q$ определяется $Q(A)$ как $q \in Q(A) \Leftrightarrow q \in m(Q) \wedge \exists a \in A(q \leqslant a)$ и $Q(a) = Q(A)$ для $A = \{a\}$. Подмножество $T \subseteq Q(A)$ называется *допустимым*, если $\exists a \in A(T \cap Q(a) = \varnothing)$. Вектор с $|m(Q)|$ компонентами, поставленными во взаимно однозначное соответствие элементам в $m(Q)$ и имеющими значения в B, называется *разделяющим вектором подмножества* $A \subseteq Q$, если существует разбиение множества $Q(A)$ на допустимые подмножества (блоки) так, что значения любых двух компонент вектора, соответствующих элементам в $Q(A)$ из разных блоков разбиения, не имеют общей нижней грани в полурешётке B. Матрица с элементами в B, составленная из $|m(Q)|$ строк и имеющая для каждого $A \in M(Q)$ разделяющий вектор-столбец, называется *разделяющей матрицей полурешётки* Q. Подполурешётка в B *порождается матрицей*, если строки последней образуют порождающее множество этой полурешетки.

Теорема 10. Точечная полурешетка, допускающая код с длиной n и основанием $B \cong \tilde{M}$, допускает код с длиной n и основанием B, порожденный её разделяющей матрицей с элементами в $m(B)$.

Таким образом, кратчайший код точечной полурешётки Q с основанием $\tilde{M}$ порождается её разделяющей матрицей с наименьшим числом столбцов. Построение такой матрицы сводится к нахождению кратчайшего покрытия множества $M(Q)$ векторами в M^m, где $m = |m(Q)|$ и вектор *покрывает* подмножество $A \in M(Q)$, если он является разделяющим для A. Алгоритмы нахождения кратчайших покрытий множеств хорошо известны и исследованы [13].

2. Полурешеточно упорядоченные алгебры

2.1. Метод точечного расширения

Метод предназначен для расширения любой заданной абстрактной алгебры до полурешёточно упорядоченных алгебр. Для этого множество A элементов абстрактной алгебры заменяется некоторой полурешёткой L, такой, что $m(L) = A$, и каждая n-местная алгебраическая операция ω, определённая на A, распространяется на L по правилу *точечного продолжения*: $\omega(x_1, ..., x_n) = \sum \omega(a_1, ..., a_n)$, где сумма $\sum$ берется по всем наборам $(a_1...a_n) \in (m(L))^n$, в которых $a_i \leqslant x_i$ для $i = 1, ..., n$. Таким образом строятся полурешёточно упорядоченные алгебры k-значной логики, проводимостей и состояний.

2.2. Полурешёточно упорядоченные алгебры k-значной логики

Они являются точечными расширениями на полурешётках подмножеств в $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$ алгебры k-значной логики $(E_k, \neg, \wedge, \vee)$, где $\neg a = k - 1 - a$, $a \wedge b = \min(a, b), a \vee b = \max(a, b)$. В них операции $\neg, \wedge, \vee$ над операндами в $\tilde{E}_k$ вводятся по правилу точечного продолжения, а именно: $\neg x = \{\neg a : a \in x\}, x \wedge y = \{a \wedge b : a \in x, b \in y\}, x \vee y = \{a \vee b : a \in x, b \in y\}$.

Теорема 11. В полурешёточно упорядоченной алгебре $(\tilde{E}_k, \neg, \wedge, \vee)$ наряду с обычными законами идемпотентности, ассоциативности, коммутативности операций $\wedge$ и $\vee$, де Моргана и двойного отрицания имеют место следующие законы, где u_0, u_i, u_1 обозначают соответственно наименьший, произвольный и наибольший элементы в E_k, содержащиеся в элементе $u \in \tilde{E}_k$:

1) слабого поглощения — $x \subseteq x \vee (x \wedge y),\ x \subseteq x \wedge (x \vee y)$;

2) слабой дистрибутивности — $x \wedge (y \vee z) \subseteq (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ x \vee (y \wedge z) \subseteq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

3) обобщённой дистрибутивности — $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)),\ (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (x \vee (y \wedge z))$;

4) частичной дистрибутивности — $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, если и только если $\forall y_i (y_i > x_1$ или $y_i < x_0$ или $y_i \geqslant z_0$ или $y_i \in x)$ и $\forall z_i (z_i > x_1$ или $z_i < x_0$ или $z_i \geqslant y_0$ или $z_i \in x)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, если и только если $\forall y_i (y_i < x_0$ или $y_i > x_1$ или $y_i \leqslant z_1$ или $y_i \in x)$ и $\forall z_i (z_i < x_0$ или $z_i > x_1$ или $z_i \leqslant y_1$ или $z_i \in x)$;

5) частичного поглощения — $x = x \vee (x \wedge y)$ и $x = x \wedge (x \vee y)$, если и только если $\forall y_i (y_i < x_0$ или $y_i > x_1$ или $y_i \in x)$.

Таким образом, законы поглощения и дистрибутивности алгебры k-значной логики не сохраняются в её точечном расширении на полурешётке $\tilde{E}_k$. Это есть отражение известого свойства асинхронных схем — зависимости их функционирования от состязаний, которые в разных логических структурах проявляются по-разному.

2.3. Алгебры проводимостей

В алгебрах проводимостей элементы принадлежат полурешётке проводимостей, а операциями могут быть $\neg, \wedge, \vee, \theta$, их суперпозиции и др. На множестве E операции $\wedge, \vee$ и θ, соответственно *конъюнкция, дизъюнкция* и *мостик*, определяются как функции проводимости соответственно последовательного, параллельного и мостикового соединений цепей с проводимостями в E, а операция $\neg$ (*отрицание*), сохраняя Х, переводит одну в другую проводимости 0 и 1. На полурешетке $\tilde{E}$ они распространяются по правилу точечного продолжения. При таком определении $(\tilde{E}, \neg, \wedge, \vee) \cong (\tilde{E}_3, \neg, \wedge, \vee)$.

Теорема 12. В алгебре проводимостей $(\tilde{E}, \neg, \wedge, \vee)$ законы частичной дистрибутивности и частичного поглощения имеют вид: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, если и только если $x \neq \mathrm{X}'$ или $[(y \neq 1$ или $z \subseteq \mathrm{X}')$ и $(z \neq 1$ или $y \subseteq \mathrm{X}')]$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, если и только если $x \neq \mathrm{X}'$ или $[(y \neq 0$ или $z \subseteq \mathrm{X}')$ и $(z \neq 0$ или $y \subseteq \mathrm{X}')]$; $x = x \vee (x \wedge y)$ и $x = x \wedge (x \vee y)$, если и только если $x \neq \mathrm{X}'$ или $y \subseteq \mathrm{X}')]$.

2.4. Алгебры состояний

Алгебры состояний — это полурешёточно упорядоченные векторные алгебры с состояниями в полурешётке $\tilde{E}^r$ в качестве векторов и с проводимостями в полурешётке $\tilde{E}$ в качестве скаляров. Операциями в них могут быть умножение скаляра на вектор $\times$ и операции над векторами $\neg$, I, Δ, ∇. Для скаляра c в E и вектора a в E^r вектор $c \times a$ есть покомпонентная конъюнкция векторов c^r и a. Одноместные $\neg$, I и двухместные Δ, ∇ над векторами в E^r определяются как покомпонентное отрицание проводимостей, инверсия порядка следования компонент и покомпонентные конъюнкция и дизъюнкция соответственно. Для проводимостей в $\tilde{E}$ и состояний в $\tilde{E}^r$ все эти операции определяются по правилу точечного продолжения. В электронных схемах произведение $c \times a$ моделирует передачу состояния a по цепи с проводимостью c, а операция ∇ — функцию узла схемы: состояние узла, в котором сходятся различные проводники, равно результату применения ∇ к состояниям других концов этих проводников. Операции Δ, ∇ не имеют аналогов в алгебре k-значной логики, свидетельствуя о её недостаточности для моделирования современных БИС и СБИС.

2.5. Адекватные модели полурешёточно упорядоченных алгебр

В адекватной модели полурешёточно упорядоченной алгебры множество элементов является адекватной моделью с некоторой точностью σ для полурешётки элементов данной алгебры A, а операциями выступают адекватные модели ω_σ операций ω в A, определяемые как $\omega_\sigma(a_1, ..., a_n) = \sup\, [\omega(a_1, ..., a_n)]_\sigma$. Адекватные модели алгебр проводимостей и состояний служат адекватному моделированию БИС и СБИС различных типов с разной степенью точности.

3. Функции на полурешётках

3.1. Важнейшие классы

Рассматриваются функции, области определения и значений которых являются полурешётками. Для функции f они обозначаются D_f и V_f соответственно. Функция называется *аддитивной*, если она является гомоморфизмом полурешёток (сохраняет операцию сложения). Функция f *точечная*, если $\forall a \in D_f (f(a) = \sum\limits_{b \in m(D_f), b \leqslant a} f(b)$. Функция f *монотонная*, если она сохраняет порядок: $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Говорим, что функция g *реализует* функцию f, и пишем $g \leqslant f$, если $D_f \subseteq D_g, V_f \subseteq V_g$ и $g(a) \leqslant f(a)$ для всех $a \in D_f$. Функция называется *квазимонотонной из полурешётки D в полурешётку V*, если она реализуется некоторой монотонной функцией $g : D \to V$. Квазимонотонная из D в V функция $f : D \to V$ называется *квазимонотонной.*

Введенные функции замечательны тем, что функции на полурешётках у элементов реальных схем точечные или аддитивные, у самих схем — монотонные, а реализуемые схемами — квазимонотонные.

Теорема 13. Всякая аддитивная функция с точечной областью определения точечная. Всякая точечная функция с областью определения $D_f \cong \tilde{M}$ аддитивная.

Теорема 14. Все аддитивные и точечные функции монотонные. Суперпозиция монотонных или квазимонотонных функций есть функция монотонная или квазимонотонная соответственно.

Теорема 15 (тест квазимонотонности). Функция f квазимонотонна из D в V, если и только если $D_f \subseteq D, V_f \subseteq V$ и для любого $U \subseteq D_f$, где $2 \leqslant |U| \leqslant |m(V)|$ и

$x \in U \Rightarrow f(x) \neq \sup V$, из существования в D нижней грани для U следует существование в V нижней грани для $f(U)$.

В этом случае монотонная функция g, реализующая f, строится так: для любого $a \in D$ определяется $U_a = \{u \in D_f : a \leqslant u\}$ и за $g(a)$ принимается $\sup V$, если $U_a = \varnothing$, или наибольшая из нижних граней множества $f(U_a)$ в V в противном случае.

3.2. Реализация бинарных отношений

Функция $g : D \to V$ *реализует бинарное отношение* $\alpha \subseteq D \times V$, если $a\alpha b \Rightarrow g(a) \leqslant g(b)$. Отношение α *квазимонотонно*, если оно реализуется квазимонотонной и, значит, монотонной функцией.

Теорема 16. Отношение $\alpha \subseteq D \times V$ квазимонотонно, если и только если для любых (a_1, b_1), ..., (a_m, b_m) в α, где $2 \leqslant m \leqslant |m(V)|$ и $\{a_1, ..., a_m\}$ имеет нижнюю грань в D, множество $\{b_1, ..., b_m\}$ имеет нижнюю грань в V.

3.3. Минимизация числа аргументов

В случае $D_f = X_1 \times ... \times X_n$ функция f зависит от n аргументов $x_1, ..., x_n$, определённых на полурешётках $X_1, ..., X_n$ соответственно. Подмножество этих аргументов $Z = \{x_{j_1}, ..., x_{j_k}\}$ для $j_1 < ... < j_k$ *достаточно для* f, если существует монотонная функция g от аргументов в Z, удовлетворяющая для каждого $a = (a_1...a_n) \in D_f$ отношению реализации: $g(a_{j_1}...a_{j_k}) \leqslant f(a)$. Пусть $U(j_1, ..., j_k) = \{(a_{j_1}...a_{j_k}) : (a_1...a_n) \in U\}$.

Теорема 17 (тест достаточности). Подмножество Z достаточно для f, если и только если для любого подмножества $U \subseteq D_f$, для которого $2 \leqslant |U| \leqslant |m(V_f)|$, из существования в $X_{j_1} \times ... \times X_{j_k}$ нижней грани для $U(j_1, ..., j_k)$ следует существование в V_f нижней грани для $f(U)$.

Ввиду этой теоремы если каждому минимальному подмножеству $U = \{a_{i1}a_{i2}...a_{in} : i = 1, 2, ..., |U|\} \subseteq D_f$, для которого $f(U)$ не имеет нижней грани в V_f, сопоставить булев вектор $b_1b_2...b_n$, в котором для каждого $j = 1, 2, ..., n$ имеем $b_j = 1$ тогда и только тогда, когда в X_j нет нижней грани для $\{a_{ij} : i = 1, 2, ..., |U|\}$, и выписать все такие векторы один под другим, то получится матрица, номера столбцов кратчайшего покрытия которой указывают на аргументы достаточного для f подмножества наименьшей мощности. Так решается задача минимизации числа аргументов квазимонотонной функции на полурешётках.

3.4. Функциональная разделимость

Упорядоченное разбиение множества X аргументов функции $f \colon S^n \to S$ на два или три класса, где первый класс есть A и второй — B, обозначается A/B; в нём $p = |A|$, $q = |B|$ и $r = n - (p + q)$. Пусть задано некоторое такое разбиение A/B. Если $x \in S^n$, т. е. x есть набор значений переменных X, то через x_a, x_b и x_c обозначают элементы в S^p, S^q и S^r, являющиеся наборами тех значений переменных A, B и $X - (A \cup B)$ соответственно, которые содержатся в x. Функция f называется *разделимой по разбиению* A/B, если существуют квазимонотонные функции $g \colon S^{r+q} \to S$ и $h \colon S^{p+r+1} \to S$, что для любого $x \in S^n$ и любой квазимонотонной функции $g' \colon S^{r+q} \to S$, реализующей g, имеет место $h(x_a, x_c, g'(x_c, x_b)) \leqslant f(x)$. Пусть $H_{ij}(f)$ для $i \in S^r$ и $j \in S^q$ обозначает множество всех квазимонотонных функций $h_{ij} \colon S^p \to S$, реализующих функцию $f_{ij} \colon S^p \to S$, определяемую как $f_{ij}(m) = f(x)$, где $x_a = m$, $x_b = j$ и $x_c = i$.

Теорема 18. Квазимонотонная функция $f \colon S^n \to S$ разделима по разбиению A/B, если и только если для любых $i \in S^r$ и $j \in S^q$ можно указать $s_{ij} \in S$ и $h_{ij} \in H_{ij}(f)$ так, что $s_{ij_1} = s_{ij_2} \Rightarrow h_{ij_1} = h_{ij_2}$ и для любых $m_1, \ldots, m_k$ в S^p, $i_1, \ldots, i_k$ в S^r и $j_1, \ldots, j_k$

в S^q, где $2 \leqslant k \leqslant |m(S)|$, из существования нижних граней в S^{r+q} для $\{i_1 j_1, \ldots, i_k j_k\}$ и в S^{p+r+1} для $\{m_1 i_1 s_{i_1 j_1}, \ldots, m_k i_k s_{i_k j_k}\}$ следует существование нижних граней в S для $\{s_{i_1 j_1}, \ldots, s_{i_k j_k}\}$ и $\{h_{i_1 j_1}(m_1), \ldots, h_{i_k j_k}(m_k)\}$ соответственно.

3.5. Адекватные модели функций

Функция g называется *адекватной моделью функции* f с точностью (σ, ρ), если σ и ρ суть когруэнции на полурешётках D_f и V_f соответственно, $D_g = D_f \uparrow \sigma, V_g = V_f \uparrow \rho$ и $g(a) = \sup\ [f(a)]_\rho$ для всех $a \in D_g$. Функция f *сохраняет пару* (σ, ρ), если $a\sigma b \Rightarrow f(a)\rho f(b)$.

Теорема 19. Пусть g есть адекватная модель функции f с точностью (σ, ρ). 1) Если функция f монотонная или квазимонотонная, то функция g также монотонная или квазимонотонная соответственно. 2) Если функция f сохраняет пару (σ, ρ) и аддитивна, то функция g также аддитивна. 3) Пусть $f = f_0(f_1, ..., f_m)$, функция g_0 есть адекватная модель функции f_0 с точностью (δ, ρ), функция g_i есть адекватная модель функции f_i с точностью $(\sigma, \delta_i), i = 1, ..., m, \delta = \delta_1 \times ... \times \delta_m$ и $h = g_0(g_1, ..., g_m)$. Тогда если функция f_0 монотонная, то $g \leqslant h$; если же f_0 сохраняет пару (δ, ρ), то $g = h$.

Утверждение 3 теоремы допускает следующую интерпретацию: заменив в какой-либо схеме функции элементов их адекватными моделями, получим схему, функция которой реализуется адекватной моделью функции прежней схемы, если функции элементов монотонные, и совпадает с ней, если функции элементов сохраняют точности их моделей. Есть примеры функций на полурешетках (см., например, [6]), показывающие, что свойства точечности и аддитивности функции в ее адекватной модели могут теряться, причем точечность может теряться даже тогда, когда точность модели сохраняется функцией.

4. Полурешёточные функции k-значной логики

4.1. Способы задания, минимизация

Рассматриваются функции вида $f : \tilde{E}_k^{\,n} \to \tilde{E}_k$ для натуральных k и n; их множество со всевозможными n обозначается $P_{\tilde{k}}$. Методологически теория функций в $P_{\tilde{k}}$ строится так же, как для булевых функций, а именно: указывается табличный способ задания, вводятся элементарные функции, изучаются их свойства, определяются понятия формулы и функции, ею представляемой, а также понятия ДНФ, минимальной, кратчайшей и совершенной ДНФ, устанавливается существование и единственность последней для функции, отличной от 0, показывается возможность приведения элементарными преобразованиями произвольной формулы к виду ДНФ, формулируется закон двойственности, ставятся и решаются задачи минимизации в классе ДНФ и т. п. Здесь мы остановимся лишь на особенностях этого построения, свойственных общему случаю ($k > 2$) и обязанных недистрибутивности полурешёточно упорядоченной алгебры k-значной логики и требованию физической реализуемости формул.

Прежде всего, ДНФ бывает *ортогонализированной и неортогонализированной*. В последней, в отличие от первой, возможна пара элементарных конъюнкций с разными ненулевыми значениями. Раскрытие скобок осуществляется по правилу: $x(y \vee z) = xk_1 \vee xk_2 \vee ... \vee xk_m$, где $k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_m$ есть ортогонализированная ДНФ для $y \vee z$.

Во-вторых, наряду с представлением функций формулами, рассматривается их *реализация* последними, т. е. отношения вида $F \leqslant f$, и задачи минимизации в классе ДНФ ставятся как задачи построения кратчайшей или минимальной ДНФ F, представляющей или реализующей данную функцию f. В этой постановке, кроме того, предполагается, что члены элементарных конъюнкций в ДНФ принадлежат некоторому заданному множеству функций (например, функций транзисторов), называемых *базисными*. В таком предположении, естественно, не любая функция может допускать представление или реализацию в виде ДНФ, и решение задач минимизации включает формулировку и проверку условий существования решения в заданном базисе.

В-третьих, наряду с импликантами вводятся квазиимпликанты. Элементарная конъюнкция (базисных функций) G называется *импликантой* или *квазиимпликантой* функции f, если $G \vee f = f$ или $G \vee f \leqslant f$ соответственно. Импликанта G *неприводима по форме* или *по значению*, если не существует импликанты H, что $H = G \vee H$ и соответственно $r(H) < r(G)$ или $H \neq G$, где $r(K)$ — ранг (количество множителей в) элементарной конъюнкции K. Аналогично, квазиимпликанта G неприводима по форме или по значению, если не существует квазиимпликанты H, что $H \leqslant G \vee H$ и соответственно $r(H) < r(G)$ или $H \nleqslant G$. Импликанты и квазиимпликанты, неприводимые одновременно по форме и по значению, называются *простыми*.

Устанавливается, что кратчайшая ДНФ, представляющая f, может быть построена из любых импликант f — простых, неприводимых по форме или неприводимых по значению, а минимальная ДНФ, представляющая f, — только из неприводимых по форме импликант функции f. Построение кратчайшей ДНФ, реализующей f, возможно из неприводимых по форме квазиимпликант, а минимальной ДНФ, реализующей f, — только из неприводимых по форме квазиимпликант функции f.

Наконец, требуемые импликанты и квазиимпликанты находятся не склеиванием, как в булевом случае, элементарных конъюнкций, которое в данном случае неуместно, но путём построения подходящих покрытий и квазипокрытий так называемой базисной матрицы.

4.2. П-полнота

Система квазимонотонных функций $Q \subset P_{\tilde{k}}$ называется П-*полной*, если каждая квазимонотонная функция в $P_{\tilde{k}}$ реализуется формулой, построенной из функций в Q при помощи операций $\wedge$ и $\vee$. Система Q *независима*, если для любой функции $f \in Q$ система $Q - \{f\}$ не является П-полной.

Пусть $M_{\tilde{3}} = \Phi_0 \cup \Phi_1 \cup \{0, 1, 2\}$, где 0, 1, 2 суть функции в $P_{\tilde{3}}$, тождественно равные $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ соответственно, и множества Φ_0, Φ_1 функций в $P_{\tilde{3}}$ вводятся следующими определениями, где $D_f^{i_1 \ldots i_m} = \{a \in D_f : f(a) = \{i_1, \ldots, i_m\}\}$ для любых $i_1, \ldots, i_m$ в E_3.

1. $f \in \Phi_0$, если $f \in P_{\tilde{3}}$, $|D_f^0| = |D_f^2| = 1, D_f^{12} = D_f^1 = D_f^{01} = \varnothing$ и для всех $p \in D_f^0$, $q \in D_f^2, r \in D_f^{02}, s \in D_f^{012}$ выполняются условия:

a) $p \cap q = \varnothing, p \cap r \neq \varnothing, q \cap r \neq \varnothing$;

b) $p \cap s = \varnothing$ или $q \cap s = \varnothing$.

2. $f \in \Phi_1$, если $f \in P_{\tilde{3}}$, $|D_f^{01}| = |D_f^{12}| = 1, D_f^{02} \neq \varnothing, D_f^0 = D_f^1 = D_f^2 = \varnothing$ и для всех $p \in D_f^{01}, q \in D_f^{12}, r \in D_f^{02}, s \in D_f^{012}$ выполняются условия:

c) $p \cap q \neq \varnothing, p \cap r \neq \varnothing, q \cap r \neq \varnothing, p \cap q \cap r = \varnothing$;

d) $p \cap s = \varnothing$ или $q \cap s = \varnothing$ или $p \cap q \cap s \neq \varnothing$.

По тесту квазимонотонности функции в Φ_0 и Φ_1 квазимонотонные.

Теорема 20. Система функций $M_{\tilde{3}}$ П-полна и независима в $P_{\tilde{3}}$.

5. Системы уравнений на полурешётках

5.1. Динамическое поведение

Рассматриваются системы уравнений, связывающие функциональной зависимостью переменные, определённые на полурешётках. Они могут служить как функциональными, так и структурными моделями дискретных автоматов. Каждое уравнение в системе имеет вид $z = f(Z)$ и указывает на зависимость f переменной z от переменных множества Z. Обозначая через x, y и q наборы переменных, встречающихся соответственно только в правых, только в левых и в обеих частях системы уравнений L, последнюю можно записать в общем случае как пару векторных уравнений $y = \varphi(x, q)$, $q = \psi(x, q)$. Переменные в x, y и q называются соответственно *входными, выходными* и *внутренними* переменными, а наборы их значений — соответствующими *состояниями* системы L. Множества последних обозначаются X, Y и Q соответственно. По условию X, Y и Q — полурешётки, а φ и ψ — функции на полурешётках, $\varphi : X \times Q \to Y$, $\psi : X \times Q \to Q$. Они называются функциями *синхронных* соответственно *выходов* и *переходов* системы L. В случае их монотонности система L называется *монотонной.* Функция ψ называется *монотонной в точке* $ar \in X \times Q$, если $\psi(a, r) \leqslant r$ или $\psi(a, r) \geqslant r$; в этом случае ar называется *точкой монотонности* функции ψ. В частности, если $\psi(a, r) = r$, то ψ *стабильна в* ar и ar — *точка стабильности* ψ. Множества точек монотонности и стабильности функции ψ обозначаются M_ψ и S_ψ соответственно. Для монотонной системы L вводятся функции $\varphi^\varepsilon : M_\psi \to Y$ и $\psi^\varepsilon : M_\psi \to Q$, определяемые как $\varphi^\varepsilon(a, r) = \varphi(a, \psi^\varepsilon(a, r))$ и $\psi^\varepsilon(a, r) = q(m)$, где $q(1) = r, q(i + 1) = \psi(a, q(i))$ для $i = 1, 2, \ldots$ и m находится из условия $q(m + 1) = q(m)$. Они называются её функциями *асинхронных выходов* и *переходов* соответственно. Набор из семи элементов (ab, rts, uv), где $ar \in S_\psi, b \in X, t = \psi^\varepsilon(a + b, r), s = \psi^\varepsilon(b, t), u = \varphi^\varepsilon(a + b, r), v = \varphi^\varepsilon(b, t)$, называется *динамическим переходом* в монотонной системе L (рис. 1). Его содержательный смысл следующий: если в дискретном автомате, моделируемом системой L и имеющем внутреннее состояние в r, входное состояние в некоторый момент времени асинхронно меняется из a в b, то в автомате возникает такой переходный процесс, в течение которого внутреннее и выходное состояния не выходят за пределы t и u соответственно и по завершению которого оказываются в s и v соответственно. Совокупность $T(L)$ всех динамических переходов системы L называется её *динамическим поведением.*

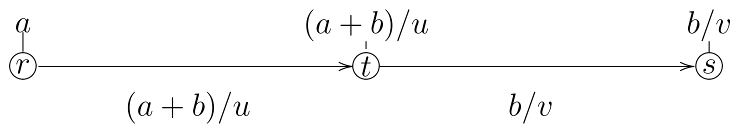

Рис. 1. Диаграмма динамического перехода

Операция, состоящая в подстановке в правую часть некоторого уравнения e системы вместо некоторой внутренней переменной z правой части $f(Z)$ уравнения для z, называется *элементарной подстановкой.* Если уравнение e и уравнение для z — это разные уравнения, то элементарная подстановка называется *элементарной суперпозицией*, в противном случае — *самоподстановкой.* Уравнение, которое не изменяется в результате самоподстановки, называется *нормальным.*

Теорема 21. Пусть система уравнений L' получена из монотонной системы L элементарными подстановками. Тогда: 1) $T(L) \subseteq T(L')$; 2) если все уравнения в L нормальные, то $T(L) = T(L')$; 3) если все подстановки — элементарные суперпозиции, то $T(L) = T(L')$.

Утверждение 1 теоремы означает, что в понятии динамического поведения монотонной системы формализовано такое поведение дискретного автомата, которое сохраняется с повышением скорости срабатывания тех или иных его компонент. Утверждение 2 означает, что для автомата с нормальными уравнениями компонент его динамическое поведение вообще не зависит от величин задержек в компонентах автомата.

В общем случае, когда система уравнений L не обязана быть монотонной, её функции асинхронных переходов ψ^ε и выходов φ^ε определяются на множестве $X \times Q$ при помощи следующего определения, в котором для любой функции на полурешётках $f : A \to B$ монотонная функция $f^+ : A \to B$ определена как $f^+(a) = \sum\limits_{b \in D_f, b \leqslant a} f(b)$:

$$\varphi^\varepsilon(x,q) = \varphi^+(x, \psi^\varepsilon(x,q)) \text{ и } \psi^\varepsilon(x,q) = p(k),$$

где $p(k)$ удовлетворяет условиям $p(k+1) = p(k), p(i+1) = \psi^+(x, p(i))$ для $i \geqslant 1$, $p(1) = p(m)$ и m удовлетворяет условиям $q(m+1) = q(m), q(i+1) = q(i) + \psi^+(x, q(i))$ для $i \geqslant 1$ и $q(1) = q$.

С использованием этих функций динамический переход в произвольной системе L определяется для любой точки $ar \in X \times Q$ так же, как в монотонном случае.

5.2. Минимизация

Подмножество внутренних переменных называется *размыкающим множеством*, если его представитель есть в каждом контуре графа зависимости переменных в системе. Подстановка во все уравнения для внутренних переменных некоторого размыкающего множества правых частей всех остальных внутренних переменных называется *суперпозицией по этому размыкающему множеству*. Процедура, состоящая в выполнении сначала суперпозиции по некоторому размыкающему множеству, а затем исключения из полученной системы уравнения для каждой недостижимой переменной, т. е. такой внутренней переменной, от которой не зависит непосредственно или транзитивно ни одна из выходных переменных, называется *минимизацией*.

Теорема 22. Пусть система уравнений L' получена минимизацией монотонной системы L и для любых $x \in X$ и $q \in Q$ символы x' и q' обозначают те входное и внутреннее состояния системы L', которые являются частями x и q соответственно. Тогда если $(ab, rts, uv) \in T(L)$, то $(a'b', r't's', uv) \in T(L')$. В случае немонотонной L это утверждение ослабляется до следующего: если $(ab, rts, uv) \in T(L)$ и $(a'b', r'pq, wz) \in T(L')$, то $p = t', q = s', w \leqslant u, z \leqslant v$.

6. Конечные автоматы на полурешётках

6.1. Гомоморфизмы, модели, реализации, точечные продолжения

Конечный автомат $S = (X, Q, Y, \psi, \varphi)$, где X — входной и Y — выходной алфавиты и Q — множество состояний, ψ — функция переходов, $\psi : X \times Q \to Q$, и φ — функция выходов, $\varphi : X \times Q \to Y$, называется *автоматом на полурешётках*, если множества X, Q, Y являются полурешётками. Под автоматом далее подразумевается именно автомат на полурешётках, а автомат S с абстрактными множествами X, Q, Y называется *абстрактным автоматом*. Автомат называется *точечным, аддитивным, монотонным* или *квазимонотонным*, если соответственно таковы его функции переходов и выходов. Автомат S называется *гомоморфным* (*изоморфным*) автомату $L = (U, P, V, \lambda, \delta)$, если существуют эпиморфизмы (соответственно изоморфизмы) полурешёток $h_1 : U \to X$, $h_2 : P \to Q$, $h_3 : V \to Y$, что для всех $up \in U \times P$ выполняются равенства $h_2\lambda(u,p) = \psi(h_1 u, h_2 p)$, $h_3\delta(u,p) = \varphi(h_1 u, h_2 p)$; в этом случае

$h_1h_2h_3$ называется *гомоморфизмом* (*изоморфизмом*) L на S, а автомат S — *гомоморфным образом*, или *моделью*, автомата L, который, в свою очередь, называется *наибольшим гомоморфным прообразом* автомата S, если $\lambda(u,p) = \sup h_2^{-1}\psi(h_1u, h_2p)$, $\delta(u,p) = \sup h_3^{-1}\varphi(h_1u, h_2p)$.

Теорема 23. Любая модель квазимонотонного, монотонного или аддитивного автомата является соответственно квазимонотонным, монотонным или аддитивным автоматом.

Теорема 24. Всякий наибольший гомоморфный прообраз квазимонотонного или монотонного автомата является соответственно квазимонотонным или монотонным автоматом.

Подавтомат автомата на полурешётках называется *точным подавтоматом*, если его полурешётки являются подполурешётками соответствующих полурешёток автомата. Говорят, что автомат S (*точно*) *реализуется автоматом* L, если существует в L (точный) подавтомат $L' = (X', P', V', \lambda', \delta')$ и гомоморфизм (соответственно изоморфизм) $h_1h_2h_3$ автомата L' на автомат S такие, что для любого $W' \subseteq U' \times P'$ из существования для $\lambda'(W')$ нижней грани в P следует существование для $h_2\lambda'(W')$ нижней грани в Q, а из существования для $\delta'(W')$ нижней грани в V — существование для $h_3\delta'(W')$ нижней грани в Y.

Теорема 25. Автомат тогда и только тогда реализуется квазимонотонным автоматом, когда он сам квазимонотонный.

Автомат на полурешётках называется *точечным продолжением абстрактного автомата*, если его функции являются точечными продолжениями соответствующих функций последнего.

Теорема 26. Пусть абстрактный автомат L гомоморфно отображается на абстрактный автомат S и автомат на полурешётках S' является точечным продолжением автомата S. Тогда существует точечное продолжение L' автомата L, такое, что L' гомоморфно отображается на S'.

6.2. Адекватные модели автоматов

Для автомата S и конгруэнций ρ_1, ρ_2, ρ_3 на его полурешётках X, Q, Y соответственно определяется автомат $S \uparrow \rho_1\rho_2\rho_3 = (X \uparrow \rho_1, Q \uparrow \rho_2, Y \uparrow \rho_3, \psi', \varphi')$, в котором ψ' и φ' являются адекватными моделями функций ψ и φ с точностями $(\rho_1 \times \rho_2, \rho_2)$ и $(\rho_1 \times \rho_2, \rho_3)$ соответственно. Если он является моделью автомата S, то он называется *адекватной моделью последнего с точностью* $\rho_1\rho_2\rho_3$. Тройка конгруэнций $\rho_1\rho_2\rho_3$ называется *стабильной в автомате* S, если пара $(\rho_1 \times \rho_2, \rho_2)$ сохраняется функцией ψ, а пара $(\rho_1 \times \rho_2, \rho_3)$ — функцией φ.

Теорема 27. Если тройка конгруэнций $\rho_1\rho_2\rho_3$ стабильна в автомате S, то автомат $S \uparrow \rho_1\rho_2\rho_3$ является моделью автомата S и, следовательно, его адекватной моделью. Обратно, если автомат S' является моделью автомата S, то существует стабильная в S тройка конгруэнций $\rho_1\rho_2\rho_3$, такая, что S' и $S \uparrow \rho_1\rho_2\rho_3$ изоморфны и, следовательно, S' изоморфен адекватной модели S с точностью $\rho_1\rho_2\rho_3$.

Ввиду этой теоремы все модели любого конечного автомата на полурешётках с точностью до изоморфизма исчерпываются его адекватными моделями. Последние, в свою очередь, полностью характеризуются в терминах стабильных троек конгруэнций на полурешётках автоматов. Из данной теоремы и предложения 2 теоремы 19 следует также, что адекватные модели аддитивных автоматов аддитивны.

6.3. Синтез

Пара уравнений $y = \varphi(x, q)$, $q = \psi(x, q)$ называется *канонической системой уравнений* автомата $S = (X, Q, Y, \psi, \varphi)$. Это есть система уравнений на полурешётках. Динамические переходы в ней и её динамическое поведение называются соответственно *динамическими переходами* и *динамическим поведением автомата* S. Последовательность динамических переходов $\tau = (T_1T_2...T_n)$ называется *цепью переходов*, если $T_i = (a_ia_{i+1}, r_it_ir_{i+1}, u_iv_i)$ для каждого $i = 1, ..., n$. *Командой над тройкой полурешёток* X, Q, Y называется всякий набор из шести объектов $c = (ab, rp, wz)$, где $a \in X$, $b \in X$, $r \in Q$, $p \in Q$, $w \in Y$, $z \in Y$. В ней ar называется *начальной точкой.* Последовательность команд $\sigma = (c_1c_2...c_n)$ называется *цепью команд*, если $c_i = (a_ia_{i+1}, p_ip_{i+1}, w_iz_i)$ для $i = 1, ..., n$. Команда *c реализуется в автомате S динамическим переходом* $T = (ab, rts, uv)$, если $s \leqslant p$, $u \leqslant w$ и $v \leqslant z$. *Цепь команд σ реализуется в S цепью переходов* τ, если $r_1 = p_1, r_{i+1} \leqslant p_{i+1}, u_i \leqslant w_i$ и $v_i \leqslant z_i$ для $i = 1, ..., n$. *Система* SC некоторых команд на X, Q, Y *реализуется автоматом* S, если каждая команда в ней реализуется некоторым динамическим переходом в S; система SC *сильно реализуется* в S, если каждая цепь команд в ней реализуется цепью динамических переходов в S. Система команд называется *автоматной*, если она реализуется монотонным автоматом.

Теорема 28. Система команд SC сильно реализуется монотонным автоматом S, если и только если она реализуется этим автоматом.

Теорема 29 (теорема синтеза). Система команд SC автоматна, если и только если для каждой её команды $c = (ab, rp, wz)$ можно указать такие t_c и p_c в Q, что $r \leqslant t_c$, $p_c = \inf(p, t_c)$ и бинарные отношения $\gamma \subseteq (X \times Q) \times Y$ и $\delta \subseteq (X \times Q) \times Q$, определённые высказываниями $(b, t_c)\gamma z$, $(a + b, t_c)\gamma w$, $(b, t_c)\delta p_c$ и $(a + b, t_c)\delta t_c$, квазимонотонны и монотонная функция ψ, реализующая δ, стабильна в начальных точках всех команд в SC; в этом случае SC реализуется автоматом $S = (X, Q, Y, \psi, \varphi)$, где φ — монотонная функция, реализующая γ.

6.4. Декомпозиция

Конечная последовательность $N = Q_0z_1S_1z_2S_2...z_lS_lz_{l+1}Q_{l+1}$ автоматов состояний $S_j = (X_j, Q_j, \psi_j)$ для $j = 1, 2, ..., l$ и отображений $z_j : Q_0 \times Q_1 \times ... \times Q_l \to X_j$ для $j = 1, 2, ..., l + 1$, где $X_{l+1} = Q_{l+1}$, называется *автоматной сетью.* В ней S_1, ..., S_l называются *компонентами*, z_1, ..., z_l — *связями*, Q_0 — *входным алфавитом*, Q_{l+1} — *выходным алфавитом*, z_{l+1} — *функцией выходов* и l — *длиной* сети. Далее предполагается, что в сети N все множества X_1, ..., X_l и Q_0, Q_1, ..., Q_l суть полурешётки и все связи z_1, ..., z_l суть гомоморфизмы полурешёток. Сеть N называется *квазимонотонной*, если квазимонотонны функции всех её компонент и её функция выходов.

Сеть N имеет *стандартную форму*, если для любого $j = 1, ..., l$ в ней $X_j = X_{0j} \times \times X_{1j} \times ... \times X_{lj}$ и $z_j(q_0q_1...q_l) = z_{0j}(q_0)z_{1j}(q_1)...z_{lj}(q_l)$ для некоторых $z_{ij} : Q_i \to X_{ij}$, $i = 0, 1, ..., l$. *Автоматом сети* N называется автомат $S_N = (Q_0, Q_1 \times ... \times Q_l, Q_{l+1}, \psi_N, \varphi_N)$, где для x в Q_0 и $q = q_1...q_l$ в $Q_1 \times ... \times Q_l$

$$\psi_N(x, q) = (\psi_1(z_1(x, q), q_1), \psi_2(z_2(x, q), q_2), ..., \psi_l(z_l(x, q), q_l)),\ \varphi_N(x, q) = z_{l+1}(x, q).$$

Сеть N (*точно*) *реализует автомат* S, если её автомат S_N (точно) реализует S. Если сеть N в стандартной форме точно реализует автомат S и $h_1h_2h_3$ есть соответствующий изоморфизм точного подавтомата в S_N на автомат S, то для любых i и j в ряду 1, 2, ..., l можно определить бинарные отношения τ_i, ρ_{ij} на полурешётке Q и бинарное отношение μ_j на полурешётке X как ядерные конгруэнции гомоморфизмов

$\pi_i h_2^{-1}$, $z_{ij}\pi_i h_2^{-1}$ и $z_{0j}h_1^{-1}$ соответственно, где $\pi_i(q_1...q_l) = q_i$. Они называются *конгруэнциями, индуцированными в S сетью N* (при гомоморфизме $h_1h_2h_3$). Наконец, система конгруэнций на полурешётке *полна*, если их пересечение совпадает с равенством.

Теорема 30. Для автомата S, конгруэнций τ_j и ρ_{ij} на полурешётке Q и конгруэнций μ_j на полурешётке X для i, j в $\{1, ..., l\}$ существует квазимонотонная сеть N в стандартной форме, точно реализующая S и индуцирующая в S данные конгруэнции, если и только если выполняются следующие условия:

1) $\tau_i \subseteq \rho_{ij}$ для всех i и j;

2) система конгруэнций $\tau_1, ..., \tau_l$ полна;

3) для каждого j пара конгруэнций $(\mu_j \times (\rho_{1j} \cap ... \cap \rho_{lj} \cap \tau_j), \tau_j)$ сохраняется функцией ψ;

4) для каждого j и любого $U_j \subseteq D_j$, где $D_j = X/\mu_j \times Q/\rho_{1j} \times ... \times Q/\rho_{lj} \times Q/\tau_j$, $U_j = \{[x_m]_{\mu_j}[q_m]_{\rho_{1j}}...[q_m]_{\rho_{lj}}[q_m]_{\tau_j} : m = 1, ..., k_j\}$ и $2 \leqslant k_j \leqslant |m(Q/\tau_j)|$, из существования для U_j нижней грани в D_j следует существование в Q/τ_j нижней грани для $V_j = \{[\psi(x_m, q_m)]_{\tau_j} : m = 1, ..., k_j\}$;

5) для любого $A \subseteq D$, где $D = X \times Q/\tau_1 \times ... \times Q/\tau_l$, $A = \{x_m[q_m]_{\tau_1}...[q_m]_{\tau_l} : m = 1, ..., k\}$ и $2 \leqslant k \leqslant |m(Y)|$, из существования для A нижней грани в D следует существование в Y нижней грани для $\{\varphi(x_m, q_m) : m = 1, ..., k\}$;

6) для любого $W \subseteq X \times Q$, где $W = \{x_m q_m : m = 1, ..., k\}$ и $2 \leqslant k \leqslant |m(Q)|$, из существования в $Q/\tau_1 \times ... \times Q/\tau_l$ нижней грани для $V = \{[\psi(x_m, q_m)]_{\tau_1}...[\psi(x_m, q_m)]_{\tau_l} : m = 1, ..., k\}$ следует существование в Q нижней грани для $\{\psi(x_m, q_m) : m = 1, ..., k\}$.

Говорят, что компонента S_i сети N *не зависит* от компоненты S_j или входа, если связь $z_i(q_0, q_1, ..., q_l)$ не зависит существенно от q_j и q_0 соответственно. Сеть N называется *каскадной, параллельно-последовательной* или *параллельной*, если в ней каждая компонента S_i не зависит от компоненты S_j для $j \geqslant i$, для $j \neq i - 1$ или для всех j соответственно. Параллельно-последовательная сеть *последовательная*, если каждая компонента S_i для $i \neq 1$ не зависит от входа сети. Каскадная, параллельно-последовательная, параллельная или последовательная сеть N, (точно) реализующая автомат S, называется его (*точной*) соответственно *каскадной, параллельно-последовательной, параллельной или последовательной декомпозицией*. Число состояний в автомате называется его *порядком*. Конгруэнция на полурешётке A называется *нетривиальной*, если она отличается от наименьшей (0_A) и наибольшей (1_A) конгруэнций на A.

Теорема 31. Квазимонотонный автомат S допускает точную параллельную квазимонотонную декомпозицию на компоненты меньшего порядка, если и только если на полурешётке его состояний существует полная система нетривиальных конгруэнций $\tau_1, ..., \tau_l$, сохраняемых функцией ψ и удовлетворяющих условиям 5 и 6 теоремы 30.

Теорема 32. Квазимонотонный автомат S допускает точную каскадную квазимонотонную декомпозицию на компоненты меньшего порядка, если и только если на полурешётке его состояний существует полная система из двух нетривиальных конгруэнций τ_1, τ_2, таких, что τ_1 сохраняется функцией ψ и удовлетворяются условия 5 и 6 теоремы 30 для $l = 2$ и следующее условие:

4′) из существования в $X \times Q/\tau_1 \times Q/\tau_2$ нижней грани для $\{x_m[q_m]_{\tau_1}[q_m]_{\tau_2} : m = 1, \ldots, k\}$ следует существование в Q/τ_2 нижней грани для $\{[\psi(x_m, q_m)]_{\tau_2} : m = 1, \ldots, k\}$.

Теорема 33. Квазимонотонный автомат S допускает точную параллельно-последовательную квазимонотонную декомпозицию длины $l \geqslant 2$, если и только если на полурешётке его состояний существует полная система конгруэнций $\tau_1, ..., \tau_l$, таких, что конгруэнция τ_1 и пары конгруэнций $(0_X \times (\tau_{i-1} \cap \tau_i), \tau_i)$ для $i = 2, \ldots, l$ сохраняются функцией ψ и выполняются условия 4 – 6 теоремы 30.

Теорема 34. Квазимонотонный автомат S допускает точную последовательную квазимонотонную декомпозицию длины $l \geqslant 2$, если и только если на полурешётке его состояний существует полная система конгруэнций $\tau_1, ..., \tau_l$, таких, что конгруэнция τ_1 и пары конгруэнций $(0_X \times (\tau_{i-1} \cap \tau_i), \tau_i)$ и $(1_X \times \tau_i, \tau_i)$ для $i = 2, \ldots, l$ сохраняются функцией ψ и выполняются условия 4 – 6 теоремы 30.

Покрытие P полурешётки Q *регулярно*, если для любых его блоков A и B из существования $a \in A$ и $b \in B$, таких, что $a \leqslant b$, следует $A \leqslant B$. Покрытие P *сохраняется в автомате* S, если $\forall x \in X \forall A \in P \exists B \in P(\psi(x, A) \subseteq B)$. Система покрытий $P_1, \ldots, P_l$ называется *ортогональной*, если $|A_1 \cap \cdots \cap A_l| \leqslant 1$ для всех $A_1 \in P_1, \ldots, A_l \in P_l$.

Теорема 35. Пусть $Q' = P_1 \times \cdots \times P_l$, где $P_1, \ldots, P_l$ суть регулярные ассоциативные покрытия полурешётки Q состояний квазимонотонного автомата S, сохраняемые его функцией переходов ψ и образующие ортогональную систему, и для любого $W = \{a_1q_1, \ldots, a_kq_k\} \subseteq X \times Q$ и любых $(A_{1m} \ldots A_{lm}) \in Q'$, где $m = 1, \ldots, k$ и $A_{1m} \cap \cdots \cap A_{lm} = \{q_m\}$, выполняются условия:

1) из $2 \leqslant k \leqslant |m(Y)|$ и существования для $\{a_mA_{1m} \ldots A_{lm} \colon m = 1, \ldots, k\} \subseteq X \times Q'$ нижней грани в $X \times Q'$ следует существование в Y нижней грани для $\varphi(W)$;

2) из $2 \leqslant k \leqslant |m(Q)|$ и существования в Q' нижней грани для $V = \{B_{1m} \ldots B_{lm} \colon m = 1, \ldots, k\} \subseteq Q'$, где для $i = 1, \ldots, l$ и $m = 1, \ldots, k$ блок B_{im} является минимальным (по порядку в P_i) из тех блоков B_i в P_i, для которых $\psi(a_m, A_{im}) \subseteq B_i$, следует существование в Q нижней грани для $\psi(W)$.

Тогда сеть $N = Xz_1S_1z_2S_2 \ldots z_lS_lz_{l+1}Y$, где для каждого $i = 1, \ldots, l$ в компоненте $S_i = (X, P_i, \psi_i)$ для любых $a \in X$ и $A_i \in P_i$ блок $\psi_i(a, A_i)$ является минимальным (по порядку в P_i) из тех блоков $B_i \in P_i$, для которых $\psi(a, A_i) \subseteq B_i$, $z_i(aA_1 \ldots A_l) = a$ и

$$z_{l+1}(aA_1 \ldots A_l) = \begin{cases} \varphi(a, q), & \text{если } q \in A_1 \cap \cdots \cap A_l, \\ \sup Y, & \text{если } A_1 \cap \cdots \cap A_l = \varnothing, \end{cases}$$

является квазимонотонной параллельной декомпозицией автомата S.

Утверждение остаётся в силе, если в нём за $\psi_i(a, A_i)$ и соответственно за B_{im} принимается не минимальный из указанных блоков в P_i, но наибольший из них.

Теорема 36. Пусть $Q' = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 суть ассоциативные покрытия полурешётки Q состояний квазимонотонного автомата S, образующие ортогональную пару, покрытие P_1 регулярно и сохраняемо функцией переходов ψ автомата и для любого $W = \{a_1q_1, \ldots, a_kq_k\} \subseteq X \times Q$ и любых $(A_{1m}A_{2m}) \in Q'$, где $m = 1, \ldots, k$ и $A_{1m} \cap A_{2m} = \{q_m\}$, выполняются условие 1) теоремы 35 при $l = 2$ и следующие условия:

2) из $2 \leqslant k \leqslant |m(Q)|$ и существования в Q' нижней грани для $V = \{B_{1m}B_{2m} \colon m = 1, \ldots, k\} \subseteq Q'$, где для $m = 1, \ldots, k$ блок B_{1m} является минимальным (по порядку в P_1) из тех блоков B_1 в P_1, для которых $\psi(a_m, A_{1m}) \subseteq B_1$, и блок B_{2m} является наибольшим (по порядку в P_2) из тех блоков B_2 в P_2, для которых $\psi(a_m, q_m) \in B_2$, следует существование в Q нижней грани для $\psi(W)$;

3) из $2 \leqslant k \leqslant |m(P_2)|$ и существования для $\{a_m A_{1m} A_{2m} \colon m = 1, \ldots, k\} \subseteq X \times Q'$ нижней грани в $X \times Q'$ следует существование в P_2 нижней грани для $\{B_{21} \ldots B_{2k}\} \subseteq \subseteq P_2$, где для $m = 1, \ldots, k$ блок B_{2m} является наибольшим (по порядку в P_2) из тех блоков B_2 в P_2, для которых $\psi(a_m, q_m) \in B_2$.

Тогда сеть $N = X z_1 S_1 z_2 S_2 z_3 Y$, где $S_1 = (X, P_1, \psi_1)$, $S_1 = (X \times P_1, P_2, \psi_2)$ и для любых $a \in X$, $A_1 \in P_1$ и $A_2 \in P_2$ блок $\psi_1(a, P_1)$ является минимальным (по порядку в P_1) из тех блоков B_1 в P_1, для которых $\psi(a, A_1) \subseteq B_1$, $\psi_2(aA_1, A_2)$ является наибольшим (по порядку в P_2) из тех блоков B_2 в P_2, для которых $\psi(a, A_1 \cap A_2) \in B_2$, $z_1(aA_1A_2) = a$, $z_2(aA_1A_2) = aA_1$ и

$$z_3(aA_1A_2) = \begin{cases} \varphi(a, q), & \text{если } q \in A_1 \cap A_2, \\ \sup Y, & \text{если } A_1 \cap A_2 = \varnothing, \end{cases}$$

является квазимонотонной каскадной декомпозицией автомата S.

Утверждение остаётся в силе, если в нём за $\psi_1(a, A_1)$ и соответственно за B_{1m} принимается не минимальный, но наибольший блок или за $\psi_2(aA_1, A_2)$ и соответственно за B_{2m} принимается не наибольший, но минимальный блок из числа указанных.

6.5. Кодирование

Автомат $L = (X, P, V, \lambda, \delta)$, где $P \subseteq B^n$, называется *кодом автомата* $S = = (X, Q, Y, \psi, \varphi)$, если существует эпиморфизм полурешёток $h \colon P \to Q$, что для всех $xp \in X \times P$ выполняются равенства $h\lambda(x, p) = \psi(x, h(p))$, $\delta(x, p) = \varphi(x, h(p))$ и для любого $W \subset X \times P$ из существования для W нижней грани в $X \times B^n$ следует существование для $\lambda(W)$ и $\delta(W)$ нижних граней в B^n и Y соответственно, а из существования для $\lambda(W)$ нижней грани в B^n — существование для $h\lambda(W)$ нижней грани в Q; в этом случае h называется *кодированием автомата* S, а полурешётка B и числа n и $k = |m(B)|$ — соответственно *основанием*, *длиной* и *значностью* кодирования h и кода L. Код L называется *наибольшим*, если автомат L является наибольшим гомоморфным прообразом автомата S при гомоморфизме h. Автомат L называется *квазимонотонным на полурешётке* $G \supseteq P$, если его функции λ и δ квазимонотонны из $X \times G$ в G и в Y соответственно.

Теорема 37. 1) Всякий код автомата с основанием B и длиной n является автоматом, квазимонотонным на B^n. 2) Всякий автомат, допускающий кодирование, квазимонотонный. 3) Всякий наибольший код автомата квазимонотонный; наибольший код монотонного автомата монотонный. 4) Любому кодированию автомата отвечает по крайней мере один монотонный код.

Теорема 38. Любое кодирование полурешётки состояний квазимонотонного автомата является кодированием самого автомата.

Теорема 39. Автомат тогда и только тогда допускает кодирование, когда он квазимонотонный.

Пусть $r(S) = \max\limits_{A \in M(S)} |A|$, где $M(S) = M_0(S) \cup M_1(S) \cup M_2(Q) \subseteq M(Q)$ и для любого $A \in M(Q)$:

1) $A \in M_0(S)$, если $A \subseteq \psi(X \times Q)$;

2) $A \in M_1(S)$, если существует $Z = \{x_1q_1, \ldots, x_mq_m\} \subseteq X \times Q$, что $x_1, \ldots, x_m$ имеют общую нижнюю грань в X, $A \subseteq \{q_1, \ldots, q_m\}$ и хотя бы одно из подмножеств $\psi(Z) \subseteq Q$ и $\varphi(Z) \subseteq Y$ не имеет нижней грани в полурешётках Q и Y соответственно;

3) $A \in M_2(Q)$, если $A = \{a_1, b\}$, где $b \in Q$ и $a_1 \in m(Q) - Q(b)$.

Автомат называется *непримитивным*, если он не является гомоморфным образом автомата, функция переходов которого реализуется константой.

Теорема 40. Непримитивный квазимонотонный автомат S с точечной полурешёткой состояний тогда и только тогда допускает k-значное кодирование, когда $k \geqslant r(S)$.

Теорема 41. Непримитивный квазимонотонный автомат S с точечной полурешёткой состояний допускает кодирование с основанием $B \cong \tilde{M}$, если и только если $|M| \geqslant r(S)$.

6.6. Минимизация числа состояний

Говорят, что автомат L *словарно реализует* автомат S, если

$$\forall q \in Q \exists p \in P \forall \alpha \in X^*(\lambda(\alpha, p) \leqslant \varphi(\alpha, q)).$$

Говорят также, что L *словарно реализует* S *с моделированием автомата состояний*, если существует эпиморфизм полурешёток $h\colon Q \to P$, что $h\psi(x, q) = \lambda(x, hq)$ и $\delta(x, hq) \leqslant \varphi(x, q)$. *Ассоциативное покрытие* P полурешётки состояний Q квазимонотонного, монотонного или аддитивного автомата S *согласуется с* S, если существуют соответственно квазимонотонные, монотонные или аддитивные функции $\psi'\colon X \times P \to P$ и $\varphi'\colon X \times P \to Y$, что для любых $x \in X$ и $A \in P$ имеет место включение $\psi(x, A) \subseteq \psi'(x, A)$ и значение $\varphi'(x, A)$ является в Y нижней гранью для $\varphi(x, A)$; в этом случае если $P = Q/\sigma$ для некоторой конгруэнции σ на Q, то говорят, что σ *согласуется с* S.

Теорема 42. Если аддитивный автомат S словарно реализуется аддитивным автоматом с m состояниями, то на полурешётке состояний в S существует П-покрытие мощности не более m, согласуемое с S. Обратно, если на полурешётке состояний аддитивного автомата S существует П-покрытие мощности m, согласуемое с S, то S словарно реализуется аддитивным автоматом с m состояниями.

Теорема 43. Квазимонотонный, монотонный или аддитивный автомат тогда и только тогда словарно реализуется с моделированием автомата состояний соответственно квазимонотонным, монотонным или аддитивным автоматом с m состояниями, когда на его полурешётке состояний существует согласуемая с ним конгруэнция индекса m.

Ставятся следующие задачи минимизации числа состояний в заданном классе A автоматов на полурешётках: для автомата S из класса A найти автомат L в классе A с наименьшим числом состояний, который либо словарно реализует автомат S — задача 1, либо словарно реализует S с моделированием автомата состояний — задача 2. Ввиду теорем 42 и 43 задача 1 для класса аддитивных автоматов и задача 2 для любого из классов квазимонотонных, монотонных и аддитивных автоматов сводится к построению на полурешётке состояний заданного автомата согласуемых с ним соответственно П-покрытия наименьшей мощности и конгруэнции наименьшего индекса.

7. Переключательные сети

Рассматриваются сети, называемые *переключательными*, в которых рёбра наделены проводимостями со значениями из некоторой полурешётки проводимостей C, а полюсы (внешние вершины) — состояниями со значениями из некоторой полурешётки состояний S, где $(S, \nabla, C, \times)$ является полурешёточно упорядоченной алгеброй и S содержит *высокоимпедансное состояние* 0^r. Решаются задачи *анализа* таких сетей, состоящие в построении полных проводимостей между вершинами данной сети и функций состояний ее вершин.

7.1. Полные проводимости

Переключательная сеть *бесповторная*, если проводимости всех рёбер в ней являются попарно различными переменными. Если α — набор значений переменных проводимостей всех рёбер сети N, то через $N(\alpha)$ обозначается сеть, которая получается из сети N замещением в ней всех переменных проводимостей рёбер их значениями из набора α. Для любых двух вершин i и j сети N через N_{ij} обозначается сеть, которая остаётся после удаления из N всех рёбер, не принадлежащих цепям в N, соединяющим i с j.

Во всякой переключательной сети конъюнкция проводимостей всех рёбер некоторой цепи называется *проводимостью этой цепи*. Цепь называется *разомкнутой*, *замкнутой* или *резистивной*, если её проводимость равна 0, 1 или X соответственно. С каждой парой вершин ij переключательной сети связываются два типа проводимостей — непосредственная и полная. Формально *непосредственная проводимость* любой сети от вершины i к вершине j определяется как дизъюнкция проводимостей всех рёбер сети, соединяющих i с j, а полная проводимость бесповторной сети N от i к j — как точечная функция f_{ij} от переменных проводимостей рёбер в N, которая на любом наборе α значений этих переменных в множестве $E = \{0, 1, \mathrm{X}\}$ принимает значение

$$f_{ij}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если в } N_{ij}(\alpha) \text{ все цепи разомкнуты,} \\ 1, & \text{если в } N_{ij}(\alpha) \text{ есть замкнутая цепь,} \\ \mathrm{X}, & \text{если в } N_{ij}(\alpha) \text{ есть резистивная и нет замкнутых цепей.} \end{cases}$$

Для сети, которая не является бесповторной, полная проводимость от вершины i к вершине j получается в результате замещения некоторых аргументов под знаком f_{ij} для подходящей бесповторной сети соответствующими переменными и константами.

В *дистрибутивной сети*, в алгебре проводимостей $(C, \wedge, \vee)$ которой выполнены законы дистрибутивности и поглощения (теорема 11), полные проводимости строятся методами, известными из теории контактных схем (методы цепей, сечений, возведение в степень матрицы непосредственных проводимостей, последовательного разложения, последовательного исключения вершин и др.), а для произвольных сетей, для которых эти методы не работают, с указанной целью предлагаются новые общие методы — комбинаторный, короткого замыкания, характеристических функций и метод имитационного моделирования. В следующем их изложении, относящемся к бесповторной сети N, символ D_{ij} обозначает дизъюнкцию проводимостей всех цепей в последней, соединяющих вершину i с вершиной j, и $x^c = 1$, если $x = c$, и $x^c = 0$ в противном случае.

Комбинаторный метод. В D_{ij} подставляются значения переменных из набора α, равные 0 или 1; в полученной формуле выполняются всевозможные поглощения по правилу $A \vee (A \wedge B) = A$, после чего в неё подставляются значения остальных переменных из α; константа, в которую таким образом свёртывается D_{ij}, и есть $f_{ij}(\alpha)$.

Метод короткого замыкания:

$$f_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(c_1 \ldots c_n) \in \{0,1\}^n} (x_1^{1(c_1)} \wedge x_2^{1(c_2)} \wedge \cdots \wedge x_n^{1(c_n)} \wedge D_{ij}^{(c_1 \ldots c_n)}),$$

где $z^{(c)} = z$, если $c = 1$, $z^{(c)} = \neg z$, если $c = 0$, и $D_{ij}^{(c_1 \ldots c_n)}$ получается из D_{ij} подстановкой 1 вместо каждой переменной x_k, для которой $c_k = 1$, с последующим выполнением всевозможных поглощений.

Метод характеристических функций. Используется булево представление проводимостей в $\tilde{E}$, а именно: проводимость x представляется булевым вектором из трёх компонент $({}^0x, {}^1x, {}^{\mathrm{X}}x)$, где $\forall c \in E({}^cx = 1 \Leftrightarrow c \in x)$. Выражение для f_{ij} строится по следующим формулам: $f_{ij} = \bigvee\limits_{c \in \tilde{E}} (f_{ij}^c \wedge c)$, $f_{ij}^0 = \neg{}^1f_{ij} \wedge \neg{}^{\mathrm{X}}f_{ij}$, $f_{ij}^1 = \neg{}^0f_{ij} \wedge \neg{}^{\mathrm{X}}f_{ij}$, $f_{ij}^{\mathrm{X}} = \neg{}^0f_{ij} \wedge \neg{}^1f_{ij}$, $f_{ij}^{\mathrm{X'}} = \neg{}^{\mathrm{X}}f_{ij} \wedge {}^0f_{ij} \wedge {}^1f_{ij}$, $f_{ij}^{1'} = \neg{}^1f_{ij} \wedge {}^0f_{ij} \wedge {}^{\mathrm{X}}f_{ij}$, $f_{ij}^{0'} = \neg{}^0f_{ij} \wedge {}^1f_{ij} \wedge$ $\wedge {}^{\mathrm{X}}f_{ij}$, $f_{ij}^{\mathrm{E}} = {}^0f_{ij} \wedge {}^1f_{ij} \wedge {}^{\mathrm{X}}f_{ij}$ и, если $D_{ij} = \bigvee\limits_k (x_{k1} \wedge x_{k2} \wedge \cdots \wedge x_{km_k})$, то ${}^1f_{ij} = {}^1D_{ij} =$ $= \bigvee\limits_k ({}^1x_{k1} \wedge {}^1x_{k2} \wedge \cdots \wedge {}^1x_{km_k})$, ${}^0f_{ij} = {}^0D_{ij} = \bigwedge\limits_k ({}^0x_{k1} \vee {}^0x_{k2} \vee \cdots \vee {}^0x_{km_k})$, а выражение для ${}^{\mathrm{X}}f_{ij}$ получается из выражения для f_{ij}^{X} последовательным применением следующих действий: 1) приведение к виду ДНФ; 2) замещение каждого выражения $\neg{}^1x \wedge \neg{}^0x$ равным x^{X}; 3) подстановка ${}^{\mathrm{X}}x$, x^0 и x^1 вместо x^{X}, ${}^0x$ и ${}^1x$ соответственно; 4) замещение каждого $\neg x^0$ равным ${}^1x \vee {}^{\mathrm{X}}x$ и каждого $\neg x^1$ равным ${}^0x \vee {}^{\mathrm{X}}x$.

7.2. Функции состояний

Рассмотрим произвольную вершину j переключательной сети N с m полюсами и n переменными проводимостями рёбер. Пусть $s = (a_1a_2 \ldots a_m) \in S^m$ и $\alpha \in C$. Выполним следующую итеративную процедуру приписывания состояний вершинам сети $N(\alpha)$, где для любой вершины i через s_i обозначено состояние, приписанное вершине i в последний раз:

1) для каждого $i = 1, \ldots, m$ припишем a_i полюсу сети с номером i; каждой вершине, не являющейся полюсом, припишем высокоимпедансное состояние;

2) если в сети $N(\alpha)$ есть ребро ab с проводимостью 1, то вершины a и b стянем к одной вершине, которой припишем новое состояние $s_a \nabla s_b$ и которую в случае $j \in \{a, b\}$ (и только в этом случае) обозначим как j; эта операция повторяется до тех пор, пока в сети не останется рёбер с проводимостью 1, после чего

3) если для некоторого ребра ab , где $a \neq j$, имеет место $s_b \neq q = s_b \nabla (c(ab) \times s_a)$, где $c(ab)$ есть проводимость ребра ab (в этом случае ребро ab называется *возбуждённым*), то вершине b припишем новое состояние, равное q; эта операция повторяется до тех пор, пока в сети $N(\alpha)$ не останется ни одного возбуждённого ребра ab с $a \neq j$, после чего процесс приписывания состояний вершинам сети считается законченным.

Пусть в результате этого процесса вершине j приписано состояние s_j. Положим $f_j(s, \alpha) = s_j$. Определённая таким образом функция $f_j\colon S^m \times C^n \to S$ называется *функцией состояний вершины j в сети N*.

Переключательная сеть N называется *разделительной со стороны вершины* j, если для любых её полюсов i и k сети N_{ij} и N_{kj} не имеют общего ребра, проводимость которого может принять значение X'.

Теорема 44. Для любой разделительной со стороны j сети N, а также для любой вершины j во всякой дистрибутивной сети N:

$$f_j(a_1, \ldots, a_m, \alpha) = \nabla_{i=1}^m f_{i'j}(\alpha) \times a_i,$$

где i' — вершина сети, являющаяся её i-м полюсом.

8. Переключательные схемы

8.1. Переключательная схема как модель интегральных схем транзисторного уровня

Схема — это тройка объектов (X, Z, Z_0), где X — конечное множество элементов схемы, Z — множество её узлов, или цепей, и Z_0 — множество полюсов схемы, $Z_0 \subseteq Z$. Элемент схемы характеризуется конечным множеством своих полюсов и, в свою очередь, может быть схемой из других элементов. Множество узлов Z является разбиением множества всех полюсов элементов в схеме. Элемент схемы, имеющий m полюсов, называется *переключательным элементом*, если выделено подмножество его полюсов, названных *управляющими*, и элементу поставлена в соответствие квадратная матрица $||g_{ij}||$ размера $m \times m$, в которой g_{ij} есть монотонная функция на полурешётках, названная *проводимостью элемента от его полюса i к полюсу j*, принимающая значения в некоторой полурешётке проводимостей C и зависящая от аргументов, которые поставлены во взаимно однозначное соответствие управляющим полюсам элемента и принимают значения в некоторой полурешётке состояний S. Предполагается, что в S есть высокоимпедансное состояние и что $(S, \nabla, C, \times)$ и $(C, \wedge, \vee)$ суть полурешёточно упорядоченные алгебры: первая — векторная алгебра состояний, вторая — алгебра проводимостей. Пара (C, S) называется *типом элемента*, и схема из однотипных переключательных элементов называется *переключательной схемой*. Тип элемента в ней называется *её типом*. Узел в переключательной схеме называется *управляющим узлом схемы*, если он содержит управляющий полюс некоторого элемента.

Различным узлам переключательной схемы присваиваются различные переменные со значениями в S, названные собственными *переменными этих узлов*. Те из них, что присвоены управляющим узлам, названы *управляющими переменными схемы*. Различным полюсам в схеме, кроме того, присвоены разные переменные со значениями в S, отличные от собственных переменных схемы и названные *её входными переменными*, а также разные переменные, отличные как от собственных, так и входных переменных и названные *выходными переменными схемы*. Таким образом, одному и тому же полюсу схемы присвоены три переменные — входная, выходная и собственная.

Дизъюнкция всех проводимостей элементов схемы от их полюсов в узле a к их полюсам в узле b, в которых (проводимостях) каждый аргумент замещён управляющей переменной узла схемы, содержащего тот управляющий полюс элемента, который соответствует этому аргументу, называется *непосредственной проводимостью схемы* между её узлами a и b (от a к b). Бесповторная переключательная сеть N называется *соответствующей данной переключательной схеме K*, если вершинами и полюсами в сети N являются соответственно узлы и полюсы схемы K и ребро ab существует в N тогда и только тогда, когда непосредственная проводимость схемы K от a к b не есть 0. В этом случае функция, которая получается замещением в полной проводимости между вершинами a и b сети N переменной проводимости каждого ребра kl непосредственной проводимостью схемы K между k и l, называется *полной проводимостью схемы K* между узлами a и b (от a к b). Аналогичным образом определяется *функция состояний узла j в схеме K* по функции состояний вершины j в соответствующей сети N. По теореме 14 непосредственные и полные проводимости в переключательной схеме являются монотонными функциями от её управляющих переменных, а функции состояний узлов — монотонными функциями от входных и управляющих переменных схемы.

Переключательные элементы являются математическими моделями физических компонент в БИС и СБИС — диодов, резисторов, транзисторов. Например, полевой транзистор моделируется переключательным элементом с тремя полюсами, каждый из которых управляющий; проводимости в нём между затвором и остальными полюсами равны 0, а проводимость между истоком и стоком есть функция от состояний всех его полюсов, которая определяется типом данного транзистора и способом его включения в схему. Логические компоненты в БИС и СБИС (вентили, ключи, триггеры) моделируются *функциональными элементами* — простейшими переключательными схемами. Соответственно этому переключательные и функциональные схемы (из функциональных элементов) — это математические модели БИС и СБИС на транзисторном и вентильном уровнях абстракции. Функции состояний в них определяются при помощи одних и тех же процедур анализа переключательных сетей, которые (процедуры) не привязаны к какому-либо типу БИС, благодаря чему сама эта модель в равной мере эффективна и для NМОП, и для КМОП, и для других типов БИС и СБИС.

Уравнение $y_i = z_i$, где y_i и z_i — соответственно выходная и собственная переменные, присвоенные полюсу i, называется *уравнением для выходной переменной полюса* i. Уравнение $z_j = \psi_j(x_1, \ldots, x_n, Z_j)$, где z_j — собственная переменная узла j, $x_1, \ldots, x_n$ — все входные переменные схемы, ψ_j — функция состояний узла j и Z_j — набор ее существенных аргументов из множества управляющих переменных схемы, называется *уравнением для собственной переменной узла* j. Совокупность уравнений для всех выходных и достижимых собственных переменных схемы K называется *канонической системой уравнений схемы* K. На неё, а вместе с ней и на схему K распространяются все понятия и утверждения, относящиеся к системам уравнений на полурешётках, в том числе понятия внутренней переменной, состояния, динамического перехода и динамического поведения, процедура минимизации числа внутренних переменных и др.

Переключательная схема называется *комбинационной*, если число внутренних переменных в ней после минимизации равно 0; в противном случае схема называется *последовательностной*. Динамический переход в комбинационной схеме вырождается в четвёрку (ab, uv).

8.2. Синтез комбинационных схем

Говорят, что система команд CC, где каждая команда имеет вид $c = (ab, wz)$ и в ней a и b принадлежат полурешётке B^n, w и z — полурешётке B^m и $B \subseteq \tilde{E}^r$, *динамически реализуема*, если существует комбинационная схема с n входами и m выходами, в которой для любой команды $c = (ab, wz)$ в CC есть динамический переход (ab, uv), удовлетворяющий соотношениям $u \leqslant w$ и $v \leqslant z$.

Теорема 45. Система команд CC динамически реализуема, если и только если бинарное отношение $\rho \subseteq B^n \times B^m$, определённое высказываниями $b\rho z$ и $(a + b)\rho w$, выписанными для всех команд (ab, wz) в CC, квазимонотонно.

В силу этой теоремы синтез комбинационной схемы с заданным динамическим поведением осуществляется так: сначала проверяется условие динамической реализуемости данной системы команд (теорема 16) и в случае их выполнения способом, изложенным в доказательстве достаточности условий теоремы 16, строится квазимонотонная функция f, выражающая зависимость выходных состояний искомой схемы от её входных состояний; затем из элементов заданного базиса строится комбинационная схема, реализующая функцию f.

8.3. Синтез последовательностных схем

Автомат, чья каноническая система уравнений есть минимизированная каноническая система уравнений последовательностной схемы, называется *автоматом этой схемы*. Говорят, что система команд SC, где каждая команда имеет вид $c = (ab, qs, wz)$ и в ней a и b принадлежат полурешётке X, w и z — полурешётке Y и q и s — полурешётке Q, *динамически реализуема*, если существует последовательностная схема K, подавтомат $L = (U, P, V, \lambda, \delta)$ автомата схемы K и эпиморфизмы полурешёток $h_1\colon U \to X$, $h_2\colon P \to Q$, $h_3\colon V \to Y$, такие, что:

1) для любых u_1, u_2 в U и p_1, p_2 в P из $h_1(u_1) = h_1(u_2)$ и $h_2(p_1) = h_2(p_2)$ следует $h_2\lambda(u_1, p_1) = h_2\lambda(u_2, p_2)$ и $h_3\delta(u_1, p_1) = h_3\delta(u_2, p_2)$;

2) для любой команды $c = (ab, qs, wz)$ в SC найдётся в L динамический переход $T = (u_1u_2, ptr, v_1v_2)$, в котором $h_1(u_1) = a$, $h_1(u_2) = b$, $h_2(p) = q$, $h_2(r) \leqslant s$, $h_3(v_1) \leqslant w$ и $h_3(v_2) \leqslant z$.

Теорема 46. 1) Всякая динамически реализуемая система команд SC автоматна. 2) Автоматная система команд SC на полурешётках X, Q, Y динамически реализуема, если эти полурешётки точечные и допускают 3-значное кодирование.

Согласно этой теореме, синтез последовательностной схемы с заданным динамическим поведением сводится к следующей цепочке действий: сначала проверяются условия автоматности заданной системы команд SC (теорема 29) и в случае их выполнения способом, изложенным в доказательстве достаточности условий теоремы 29, строится автомат S, реализующий SC; затем проверяются условия существования кода необходимой значности для автомата S (теорема 40) и в случае их выполнения способом, изложенным в доказательстве достаточности условий теоремы 40, строится автомат L — код автомата S требуемой значности; наконец синтезируется комбинационная схема в заданном базисе, реализующая функции автомата L, и в ней замыкаются обратные связи в соответствии с каноническими уравнениями автомата L. В эту цепочку могут быть вставлены процедуры минимизации и декомпозиции автомата S, описанные в п. 6.6 и 6.4.

Заключение

Элементы теории дискретных автоматов на полурешётках, представленные в работе, ориентированы на приложения к анализу, синтезу и адекватному моделированию дискретных управляющих систем на различных уровнях представления — от транзисторного до конечно-автоматного. Теория обеспечивает необходимыми понятиями, моделями, методами и теоремами процесс сквозного синтеза асинхронного управляющего устройства от системы команд, задающей динамическое поведение устройства, до его принципиальной электрической схемы, реализующей данное динамическое поведение, и обратный процесс — анализа, имеющего целью определение динамического поведения устройства по его принципиальной схеме.

Важнейшими шагами процесса синтеза являются абстрактный синтез, минимизация, декомпозиция и кодирование для автомата на полурешётках, минимизация его канонической системы уравнений, эквивалентные преобразования, минимизация форм представления и функциональная разделимость функций на полурешётках, синтез переключательной схемы, реализующей заданные полурешёточные функции, и др.

Процесс анализа сводится к нахождению полных проводимостей и функций состояний в переключательных сетях, построению канонической системы уравнений данной схемы и её автомата на полурешётках и определению динамического поведения последнего.

Теория позволяет для управляющих систем, моделируемых дискретными автоматами на полурешётках, строить их адекватные математические модели с любой наперёд заданной точностью, что достигается благодаря возможности формализации для дискретной системы понятий адекватной модели и её точности, которую предоставляет аппарат теории полурешёток и полурешёточно упорядоченных алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агибалов Г. П.* Функциональные системы на полурешётках // Алгоритмы решения задач дискретной математики. Вып. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. С. 3–39.
2. *Agibalov G. P.* Functional systems on semilattices // Fundamentals of Computation Theory / Eds. R. G. Bukharaev, O. B. Lupanov. Berlin: Springer Verlag, 1987. P. 5–9.
3. *Агибалов Г. П.* Квазимонотонные функции и их минимизация // Кибернетика. 1989. № 2. С. 111–113.
4. *Agibalov G. P.* Finite automata on partially ordered sets // Automatic Control. 11th IFAC World Congress Proceedings / Eds. V. Utkin, U. Jaaksoo. Oxford; New York; Seoul; Tokyo: Pergamon Press, 1991. V. 3.
5. *Агибалов Г. П.* К кодированию полурешёток и автоматов на полурешётках // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 74–87.
6. *Агибалов Г. П.* Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
7. *Агибалов Г. П.* Адекватные модели полурешёток, функций и автоматов на полурешётках // Вестник Томского госуниверситета. Июнь 2000. № 271. С. 118–121.
8. *Агибалов Г. П., Бузанов В. А., Липский В. Б., Румянцев Б. Ф.* Математическая модель схем из элементов с управляемой проводимостью // Автоматика и телемеханика. 1982. № 9. С. 89–98.
9. *Агибалов Г. П., Бузанов В. А., Липский В. Б., Румянцев Б. Ф.* Логическое проектирование переключательных автоматов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 154 с.
10. *Панкратова И. А.* Реализация функций на полурешётках переключательными схемами // Прикладная дискретная математика. 2009. № 2. С. 50–55.
11. *Парватов Н. Г.* Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 61–78.
12. *Парватов Н. Г.* Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 62–82.
13. *Закревский А. Д.* Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М.: Наука, 1971. 512 с.