ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Методические указания для выполнения лабораторной работы

Томск
2014

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии В.М. Вымятнин

Лабораторная работа посвящена изучению вынужденных колебаний под действием периодической вынуждающей силы. В ходе эксперимента студенты получают амплитудную и фазовую резонансные кривые для пружинного маятника.

СОСТАВИТЕЛЬ А.М. Толстик

Рецензент В.Ф. Нявро

Цель работы: Изучение вынужденных колебаний. Получение амплитудных и фазовых резонансных кривых для пружинного маятника.

Свободные колебания маятника

Если некоторое тело находится в положении устойчивого равновесия, то при отклонении его из этого положения возникает возвращающая сила, которая стремится вернуть его в исходное состояние. Эта сила совершает над телом работу и, следовательно, вернувшись в положение равновесия, тело имеет конечную скорость. Вследствие инерции оно проходит это положение и движется до тех пор, пока его кинетическая энергия станет равной нулю, а потенциальная – максимальной. В этом состоянии возвращающая сила максимальна и снова направлена к положению равновесия, что приводит к возникновению колебательного движения.

Рассмотрим пружинный маятник, состоящий из невесомой пружины с коэффициентом упругости k и небольшого тела массы m. На тело со стороны пружины действует сила упругости $F = -kx$, где x – деформация пружины, знак «-» говорит о том, что эта сила направлена так, чтобы уменьшить деформацию, т.е. к положению равновесия.

Если действует только эта возвращающая сила, то такие колебания, раз возникнув, будут длиться сколь угодно долго. В реальных физических системах всегда есть силы трения или сопротивления. Это приводит к рассеянию энергии в виде тепла, и колебания с течением времени затухают. В простейшем случае сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела. Такое трение имеет место при медленном движении в вязкой жидкости или газе, и поэтому называется вязким трением. В этом случае можно написать, что сила трения равна $F_t = -\gamma \mathrm{v}$, где γ – коэффициент трения.

Чтобы получить незатухающие колебания, нужно передать колеблющемуся телу энергию извне. Такие колебания называются вынужденными. Математически наиболее простым является случай, когда на тело действует некоторая добавочная периодическая сила, которая меняется по гармоническому закону $F_b = F_0 \cos\omega t.$

В случае пружинного маятника второй закон Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \cos\omega t\,,$$

где $\ddot{x}$ – есть ускорение груза, а $\dot{x}$ - его скорость. Разделив это уравнение на m и, введя обозначения $\omega_0^2 = k/m$, $2\beta = \gamma/m$ и $f_0 = F_0/m$, запишем это уравнение в стандартном виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t\,. \qquad (1)$$

Если коэффициент затухания β и амплитуда вынуждающей силы F_0 равны нулю, то уравнение (1) переходит в уравнение $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Это уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора, а ω_0 – циклическая частота этих колебаний.

Если $\beta \neq 0$, а $F_0 = 0$, то (1) перейдет в уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \qquad (2)$$

При $\beta < \omega_0$ решением уравнения (2) будет функция:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad (3)$$

где квадрат частоты $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, а величины A_0 и φ_1 (начальная амплитуда и начальная фаза колебаний) определяются из начальных условий. Таким образом, амплитуда колебаний уменьшается с течением времени по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}\,. \qquad (4)$$

Из соотношения (4) видно, что $\tau = 1/\beta$ есть время, за которое амплитуда уменьшится в e раз, это время называется временем релаксации. Можно считать, что за это время затухающие колебания практически прекращаются.

Измеряемой на опыте характеристикой затухания является логарифмический декремент затухания, определяемый по формуле

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_1)} \quad , \tag{5}$$

где $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ – период затухающих колебаний.

Подставив в соотношение (5) амплитуду колебаний A из выражения (4), получим

$$\lambda = \ln \frac{x_0 e^{-\beta t}}{x_0 e^{-\beta(t+T_1)}} = \ln e^{\beta T_1} = \beta T_1. \tag{6}$$

Таким образом, измерив экспериментально λ и T_1, легко определить коэффициент затухания β.

Так как амплитуды колебаний $A(t)$ и $A(t+T_1)$ обычно отличаются незначительно, то для повышения точности измерений определяют амплитуду колебаний $A(t)$ и амплитуду колебаний по истечению некоторого числа полных колебаний n, т. е. $A(t)$ и $A(t + nT_1)$. Тогда $\ln \dfrac{A(t)}{A(t+nT_1)} = n\beta T_1 = n\lambda$.

Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{A(t)}{A(t+nT_1)} \tag{7}$$

Формула (7) служит для практического измерения логарифмического декремента затухания λ а, следовательно, и коэффициента затухания $\beta = \lambda / T_1$.

Вынужденные колебания

Обратимся теперь к решению уравнения (1). Исходя из физических соображений, можно ожидать, что в случае действия гармонической вынуждающей силы $f_0 \cos\omega t$ смещение тоже должно со временем меняется по гармоническому закону с той же частотой ω, и отставать по фазе от вынуждающей силы. К этому смещению нужно добавить решение (3), описывающее свободные затухающие колебания, так как подстановка (3) в (1) приводит к равенству нулю левой части уравнения (1). Таким образом, можно ожидать, что общим решением дифференциального уравнения (1) будет функция вида

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega t - \varphi)\,. \quad (8)$$

В теории дифференциальных уравнений показывается, что (8) действительно является общим решением уравнения (1). Как следует из (8), в начальный момент времени в системе возникают как свободные затухающие колебания с частотой ω_1, так и вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы ω. В результате возникает сложное движение, которое называется переходным режимом. Переходной режим будет продолжаться тем дольше, чем меньше коэффициент затухания β. По истечении времени релаксации $\tau = 1/\beta$ собственные колебания практически затухают и в системе остаются только гармонические колебания вида

$$x = A\cos(\omega\, t - \varphi). \quad (9)$$

Для определения амплитуды и фазы вынужденных колебаний подставим (9) в уравнение (1). После элементарных преобразований получаем:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega\, t - \varphi) - 2\beta A\omega\sin(\omega\, t - \varphi) = f_0\cos\omega t.$$

Преобразуя это уравнение по известным тригонометрическим формулам, получим:

$$\begin{cases} \left\{A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + 2\beta\omega\sin\varphi\right] - f_0\right\}\cos\omega\, t + \\ + A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\varphi - 2\beta\omega\cos\varphi\right]\sin\omega\, t = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Это выражение представляет собой сумму двух гармонических членов:

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = 0,$$

где a и b – не зависят от времени. Это равенство может удовлетворяться при любом t в том и только в том случае, если обе величины a и b равны нулю. Поэтому из (10) следует

$$\begin{cases} A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi\right] = 0 \\ A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi\right] = f_0. \end{cases} \quad (11)$$

Из этих двух уравнений можно определить величины A и φ. Величину фазы сразу определяем из первого уравнения

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (12)$$

Поделив первое уравнение (11) на A и умножив на $\cos\varphi$, а второе уравнение умножив на $\sin\varphi$, получим $\sin\varphi = \dfrac{2\beta\omega A}{f_0}$

Подставив это выражение в первое уравнение (11) найдем

$$\cos\varphi = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{f_0}.$$

Возведя в квадрат два последних равенства и сложив их, легко найти, что

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (13)$$

Формулы (9), (12) и (13) полностью описывают установившиеся вынужденные колебания. Отметим наиболее существенные особенности таких колебаний. Во-первых, частота вынужденных колебаний определяется частотой внешнего воздействия, а не параметрами колебательной системы. Во-вторых, амплитуда A и фазовый сдвиг φ вынужденных колебаний зависят от параметров колебательной системы ω_0 и β и частоты вынуждающей силы ω, но не зависит от начальных условий, в то время как переходный процесс от них зависит.

Явление резонанса

Рассмотрим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы (13). График этой зависимости называется резонансной кривой.

При $\omega \ll \omega_0$ из (13) следует, что $A_0 \approx f_0/\omega_0^2$, т.е. при малой частоте внешней силы последняя действует на систему как постоянная статическая сила. При $\omega \to \infty$ амплитуда колебаний A стремится к нулю, т.е. при большой частоте внешней силы осциллятор из-за своей инертности не успевает следовать за изменением этой силы.

Если $\beta = 0$ и $\omega = \omega_0$, то, как следует из (13), амплитуда колебаний обращается в бесконечность. Ясно, что реально такая ситуация возникнуть не может. Это связано с тем, что всегда есть потери, связанные с трением.

Из приведенных выше рассуждений а также из выражения (13) следует, что резонансная кривая должна иметь при некоторой частоте ω_p максимум. Пользуясь правилами нахождения экстремумов функций $\left(\dfrac{dA}{d\omega} = 0\right)$, легко получить, что максимум амплитуды достигается при частоте

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ . \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим, что амплитуда колебаний при резонансе равна

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_1}\ , \qquad (15)$$

где ω_1 – частота свободных затухающих колебаний. Если β мало, то, как видно из (15), амплитуда колебаний при $\omega = \omega_p$ становится очень велика. Это явление резкого возрастания амплитуды колебаний при $\omega = \omega_p$ называется явлением резонанса, а частота ω_p – резонансной частотой.

На рис. 1 приведены резонансные кривые для различных значений коэффициента затухания β ($\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$).

В соответствии с выше сказанным, резонансная амплитуда тем больше, чем меньше затухание. Резонансная частота с уменьшением коэффициента затухания все больше приближается к собственной частоте колебаний ω_0. Сами кривые при уменьшении коэффициента затухания становятся уже и резче. Величина статической амплитуды не зависит от коэффициента затухания, а определяется только параметрами системы и величиной внешней силы f_0 .

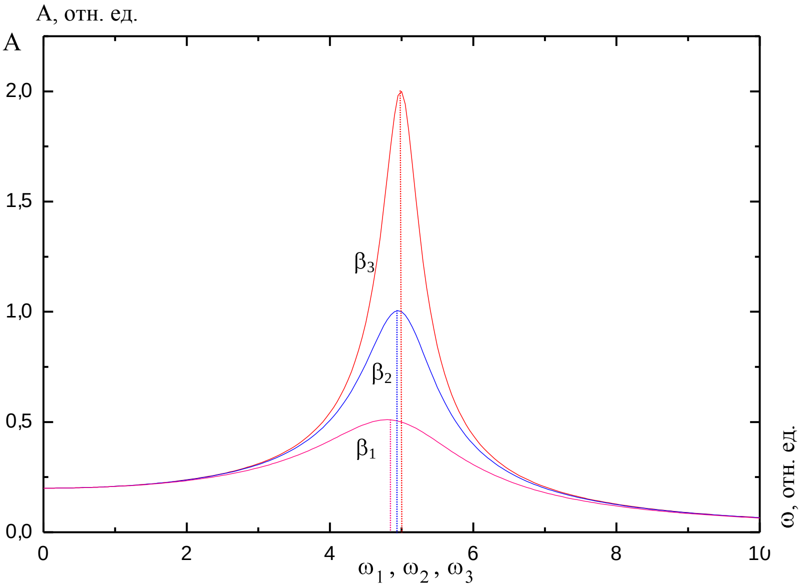


Рис. 1

Добротность осциллятора

Важнейшей характеристикой резонансных свойств системы является добротность. Добротностью осциллятора называется отношение резонансной амплитуды $A_\text{р}$ к статической амплитуде $A_\text{с}$, то есть,

$$Q = \frac{A_p}{A_c} = \frac{f_0}{2\beta\omega_1}\,\frac{\omega_0^2}{f_0}.$$

При $\beta \ll \omega_0$, $\omega_1 \approx \omega_\text{р} \approx \omega_0$ и мы имеем

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \pi\frac{1}{\beta\,T_0} = \frac{\pi}{\lambda}. \qquad (16)$$

Таким образом, чем меньше декремент затухания λ, тем больше добротность осциллятора Q. Можно показать, что добротность Q равна половине отношения энергии, запасенной осциллятором, к энергии, потерянной за один период.

Другой важной характеристикой является ширина резонансной кривой. Эта характеристика показывает, насколько быстро уменьшается амплитуда колебаний при отклонении от резонансной частоты ω_0 ($\beta \ll \omega_0$). Ширина резонансной кривой $\Delta\omega$ определяется разностью двух частот ω_1 и ω_2, при которых энергия колебаний в два раза меньше чем энергия при резонансе. Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то из (13) имеем

$$\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)^2 = 4\omega_1^2\beta^2, \qquad \left(\omega_2^2 - \omega_0^2\right)^2 = 4\omega_2^2\beta^2 .$$

Считая резонансную кривую достаточно узкой, т. е.

$$\left|\omega_1 - \omega_0\right| \ll \omega_0, \quad \left|\omega_2 - \omega_0\right| \ll \omega_0 ,$$

приближенно получим

$$\left(\omega_1 - \omega_0\right)^2\left(\omega_1 + \omega_0\right)^2 \approx \frac{\Delta\omega^2}{4} 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\beta^2 .$$

Отсюда

$$\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} . \qquad (17)$$

Таким образом, чем больше добротность осциллятора, тем уже резонансная кривая. Далее, используя (15) получим, что

$$A_p \approx \frac{f_0}{\Delta\omega\omega_0} . \qquad (18)$$

То есть, чем уже резонансная кривая, тем больше значение резонансной амплитуды.

Фазовые резонансные кривые

Резонансные кривые, приведенные на рис. 1 и представленные формулой (13) называются амплитудными резонансными кривыми. Другой важной характеристикой осциллятора являются фазовые резонансные кривые, показывающие, насколько смещение отстает по фазе от вынуждающей силы. Эта зависимость определяется соотношением (12). Анализ этой формулы для различных частот ω приводит к виду фазовых резонансных кривых, представленных на рис. 2.

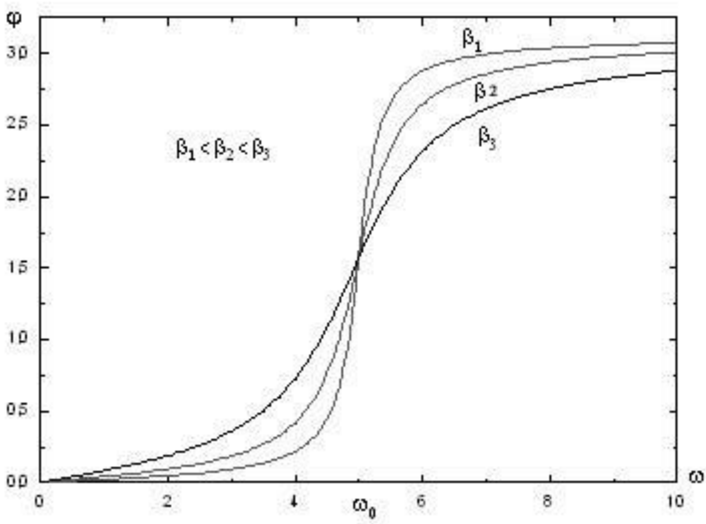


Рис. 2.

Как видно из этого рисунка, при $\omega \ll \omega_0$ отставание фазы смещения от фазы вынуждающей силы мало. Вблизи резонанса при $\omega = \omega_0$, сила опережает смещение на $\pi/2$. Это означает, что когда сила достигает максимального значения, смещение равно нулю, а когда сила равна нулю, смещение максимально. При $\omega \gg \omega_р$ $\varphi \approx \pi$, т.е. смещение и сила находятся в противофазе. Эти закономерности можно наблюдать при выполнении экспериментальной части работы. Из рисунка также видно, что уменьшение затухания приводит к более быстрому изменению сдвига фазы смещения относительно фазы внешней силы.

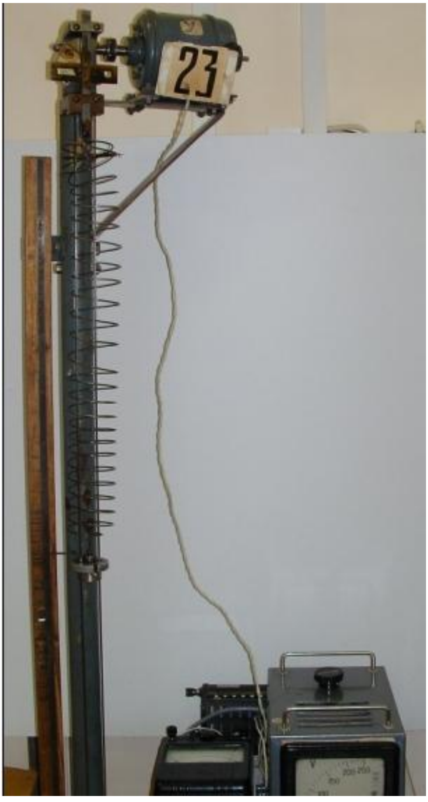
Фазовые резонансные кривые позволяют понять физическую сущность явления резонанса. Действительно, вдали от резонанса внешняя сила часть времени совпадает по направлению со скоростью частицы $\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi)$, а часть времени направлена противоположно скорости. Таким образом, внешняя сила часть времени совершает положительную работу и разгоняет тело, а часть времени – отрицательную, т. е. тормозит его. При резонансе $\varphi \approx \pi/2$ и

$$v = -A\omega\sin(\omega t - \pi/2) = A\omega\cos\omega t\,.$$

То есть вынуждающая сила все время совершает положительную работу и, следовательно, накопленная осциллятором энергия в данном случае должна быть значительно больше. Можно показать, что в установившемся режиме эта работа в точности равна работе сил трения. Следовательно, резонанс характеризуется наличием наиболее благоприятных условий передачи энергии от внешней силы к осциллятору.

Описание установки

Фотография установки приведена на рис. 3.



Грузик, подвешенный на пружине, может совершать вертикальные колебания под действием силы упругости. Верхний конец пружины прикреплён к эксцентрику, насаженному на ось электродвигателя. Поэтому верхний конец пружины совершает колебания с частотой, равной частоте вращения мотора. Колебания пружинного маятника будут вынужденными колебаниями, а частота вынуждающей силы равна частоте вращения двигателя. Её можно изменять, меняя при помощи автотрансформатора напряжение, подаваемое на двигатель.

В данной работе сначала нужно измерить частоту затухающих колебаний маятника и коэффициент затухания. После

Рис.3.

этого включается электродвигатель и при каждой установившейся частоте его вращения измеряется амплитуда установившихся вынужденных колебаний маятника, а также частота его колебаний, равная частоте вращения мотора.

Ход работы

1. Измерить период и определить частоту собственных колебаний.

Отклоните грузик из положения равновесия и измерьте время нескольких полных колебаний. Определите период колебаний и круговую частоту собственных колебаний. Эту операцию следует провести несколько (5 – 10) раз. В дальнейшем используются средние значения частоты и периода колебаний.

3. Измерить декремент затухания и определить коэффициент затухания.

Отклоните грузик из положения равновесия и определите начальную амплитуду. Отпустите грузик и найдите амплитуду после нескольких полных колебаний. Определите логарифмический декремент затухания. С его помощью вычислите коэффициент затухания и добротность осциллятора. Измерения следует провести несколько (например, 5) раз.

4. Измерить амплитуду колебаний при разных частотах вынуждающей силы.

Включите двигатель. Установите такое напряжение, при котором начнут происходить колебания. Дождитесь установления вынужденных колебаний, после чего измерьте их амплитуду, а также период и частоту колебаний. Измерения следует провести для нескольких частот ω (около 10 значений: 5 частот меньших и 5 больших резонансной). Имейте в виду, что частота колебаний маятника сильно изменяется уже при небольшом изменении напряжения на двигателе.

5. По полученным данным построить график зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы.

По графику определите резонансную частоту. Вычислите добротность осциллятора как отношение резонансной амплитуды к амплитуде статического смещения.

6. Постройте график зависимости начальной фазы колебаний от частоты вынуждающей силы.

Начальную фазу вычислите по теоретической формуле (12) для каждой частоты ω. Следует иметь в виду, что фаза φ изменяется в пределах от нуля до 180 градусов. В случае отрицательного значения $tg\varphi$ (при $\omega > \omega_0$) фаза φ находится во второй четверти.

Контрольные вопросы

1. Что такое положение устойчивого равновесия?
2. Что такое период и частота колебаний?
3. Как выглядит уравнение незатухающих свободных колебаний маятника?
4. Что такое время релаксации?
5. Что такое логарифмический декремент и коэффициент затухания?
6. Какие колебания называются вынужденными?
7. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его общее решение.
8. Как влияет затухание на вид амплитудной резонансной кривой?
9. Как влияет затухание на вид фазовой кривой?
10. В чем заключается явление резонанса?
11. В чем состоит физическая сущность явления резонанса?
12. Что называется добротностью осциллятора?
13. Как добротность связана с декрементом затухания?
14. Как добротность осциллятора связана с шириной резонансной кривой?
15. Как измерить на опыте коэффициент затухания?
16. Как построить фазовую резонансную кривую?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. I. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука. - 2009. - 432 с.

Издание вышло в свет в авторской редакции

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 111 от «26» декабря 2013 г. Тираж 100 экз.