ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

ИЗУЧЕНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКОВ

*Методические указания
для выполнения лабораторной работы*

Томск
2014

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии В.М. Вымятнин

Лабораторная работа посвящена изучению колебаний простейшей системы с двумя степенями свободы, состоящей из двух маятников, соединённых упругой пружиной. В работе определяются парциальные и нормальные частоты колебаний и изучаются биения при разной величине этой упругой связи.

СОСТАВИТЕЛЬ А.М. Толстик

Рецензент В.Ф. Нявро

Цель работы: изучение колебаний маятников, связанных упругой связью, и определение частот нормальных колебаний при разной величине этой связи.

Введение

Колебательные процессы широко распространены в природе и интенсивно изучаются. Простейшая модель колебательного движения - одномерный гармонический осциллятор, колебания которого описывается одним дифференциальным уравнением 2-го порядка, которое является уравнением движения: в механике это 2-ой закон Ньютона или уравнение вращательного движения, в электродинамике – закон Ома или уравнение Кирхгофа и так далее. Примером такого гармонического осциллятора являются математический или физический маятники, совершающие малые колебания, колебательный контур, пружинный маятник.

Гораздо чаще в физике приходится иметь дело с более сложными системами, которые можно описать при помощи модели связанных осцилляторов. Это имеет место, например, при изучении колебаний атомов внутри молекулы, колебаний атомов или молекул в кристаллической решётке. Оказывается, что в этом случае колебания каждой частицы можно представить в виде линейной комбинации так называемых нормальных или собственных колебаний (иногда называемых также нормальными модами), число которых равно числу степеней свободы[1], причём каждое нормальное колебание

[1] Число степеней свободы – это число независимых переменных типа координат, при помощи которых можно задать положение всех частей системы в пространстве. Например, материальная точка имеет 3 степени свободы. Точка, закреплённая на невесомом стержне, имеет 2 степени свободы. Если маятник совершает колебания в какой-то определённой вертикальной плоскости, то он имеет 1 степень свободы, и так далее.

происходит со своей частотой.

В данной лабораторной работе изучается простейшая система, состоящая из двух связанных между собой маятников, которые совершают колебания в одной вертикальной плоскости, проходящей через точки их подвеса. Данная система имеет 2 степени свободы и, следовательно, описывается при помощи двух нормальных колебаний.

Уравнения движения

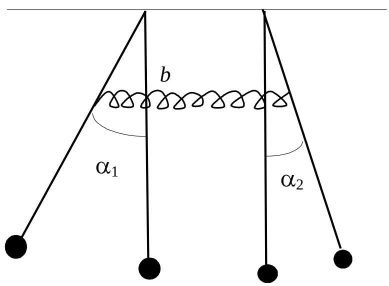

Рис. 1

Рассмотрим два математических маятника, связанных упругой связью, например, пружиной. Если маятники совершают колебания в одной плоскости, то эта система имеет две степени свободы. Это означает, что для полного описания положения в пространстве всей этой системы достаточно задать две величины, например, отклонение (угловое или линейное) от положения равновесия обоих маятников.

Запишем уравнения движения маятников. Так как система имеет 2 степени свободы, то она описывается системой двух уравнений, имеющих вид уравнений вращательного движения:

$$I\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -mg\ell\cdot\sin\alpha_1 - kb^2(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

$$I\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = -mg\ell\cdot\sin\alpha_2 - kb^2(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

В правой части каждого из этих уравнений первое слагаемое представляет собой момент силы тяжести, а второе – момент силы упругости пружины. Здесь m – масса маятника (будем считать их одинаковыми), I – момент инерции, α_1 и α_2 – углы отклонения маятников от положения равновесия, k – коэффициент упругости пружины, b – расстояние от точки закрепления пружины до оси маятника (считаем, что пружина закреплена симметрично), ℓ – длина маятников.

Если считать колебания малыми, то синусы малых углов приближённо можно заменить на сами углы (конечно, выраженные в радианах!). Кроме того, разделим обе части уравнений на I и введём обозначения: $\omega_0^2 = \dfrac{mg\ell}{I}$, $\lambda^2 = \dfrac{kb^2}{I}$, где ω_0 – частота свободных колебаний каждого маятника в случае отсутствия связи между ними, а λ характеризует величину их связи. Тогда система уравнений движения примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + \lambda^2)\cdot\alpha_1 - \lambda^2\alpha_2 = 0 \\
&\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} - \lambda^2\alpha_1 + (\omega_0^2 + \lambda^2)\cdot\alpha_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Это система двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Парциальные частоты

Рассмотрим частный случай, когда один маятник закреплён (например, его придерживают рукой), а другой может совершать колебания. Конечно, эти колебания происходят с другой частотой, нежели свободные колебания. Можно заранее сказать, что частота этих колебаний, называемая парциальной частотой, больше частоты свободных колебаний, так как на маятник действует дополнительная сила – сила упругости пружины.

В рассматриваемом частном случае система (1) будет состоять из двух одинаковых уравнений вида:

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + \lambda^2)\cdot\alpha_1 = 0\,.$$

Это уравнение незатухающих гармонических колебаний вида $\alpha_1 = A\cos(\omega_{\text{п}} t + \varphi)$, где парциальная частота

$$\omega_{\text{п}} = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}\ . \qquad (2)$$

Нормальные частоты

Ищем решение системы (1) в виде:

$$\alpha_1 = A\cos(\omega t + \varphi),$$

$$\alpha_2 = B\cos(\omega t + \varphi).$$

Дважды дифференцируя эти выражения и подставляя их в (1), получаем:

$$\begin{aligned} &+(\omega_0^2 - \omega^2 + \lambda^2)A - \lambda^2 B = 0, \\ &-\lambda^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2 + \lambda^2)B = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Выражения (3) представляют собой систему двух линейных однородных уравнений относительно амплитуд A и B. В общем случае такая система имеет только тривиальное, нулевое решение. Нетривиальное решение появляется только в случае равенства нулю детерминанта, составленного из коэффициентов этой системы, то есть если

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \lambda^2)^2 - \lambda^4 = 0. \qquad (4)$$

Это биквадратное уравнение относительно частоты ω. Решая его для частного случая одинаковых маятников, получаем два значения частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = (\omega_0^2 + \lambda^2) \pm \lambda^2. \qquad (5)$$

То есть

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\lambda^2, \qquad \text{а} \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2.$$

Эти частоты называются частотами нормальных колебаний, или просто нормальными частотами. Из (5) видно, что одна из нормальных частот больше парциальной, а другая – меньше, причём это утверждение верно и для общего случая неодинаковых маятников.

Уравнения (3) позволяют определить не сами амплитуды, а только их отношение:

$$K = B/A = \frac{\omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2}{\lambda^2}. \tag{6}$$

Общее решение системы уравнений (1) представляет собой суперпозиций нормальных колебаний, то есть

$$\alpha_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Причиной этого является линейность системы (1), в связи с чем любая линейная комбинация решений также является решением этой системы.

Используя связь между амплитудами (6), это общее решение можно переписать в виде:

$$\alpha_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_2 = A_1 K_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 K_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

где K_1 и K_2 – отношения амплитуд (6) для первой и второй нормальных частот, которые в случае одинаковых маятников равны:

$$K_1 = -1, \qquad K_2 = 1.$$

Тогда общее решение уравнений движения маятников – формулы (7) – перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \alpha_2 &= -A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, связанные колебания системы, имеющей 2 степени свободы, представляет собой довольно сложное движение, являющееся суперпозицией двух нормальных колебаний. Каждое нормальное колебание представляет собой гармоническое колебание с определённой частотой, и с заданной начальной фазой, зависящей от начальных условий.

Нормальные колебания связанных маятников

Из формул (7) получим, как выглядит оба нормальных колебания связанных маятников. Для этого нужно подобрать подходящим образом произвольные константы A_1, A_2, φ_1, φ_2. То есть каждое из нормальных колебаний можно реализовать «в чистом виде» путём подходящего выбора начальных условий.

Пусть начальные условия имеют вид:

$$\alpha_1(0) = \alpha_0, \qquad \alpha_1'(0) = 0,$$
$$\alpha_2(0) = -\alpha_0, \qquad \alpha_2'(0) = 0.$$

то есть маятники отклонили в противоположные стороны на одинаковый угол и заставили их колебаться без начальной скорости. Тогда из формулы (8) для этого случая следует:

$$\alpha_0 = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2,$$
$$-\alpha_0 = -A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2.$$
$$0 = -A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2,$$
$$0 = +A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2.$$

Из второй пары этих формул следует, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, тогда первая пара перепишется: $\alpha_0 = A_1 + A_2$, $-\alpha_0 = -A_1 + A_2$.

Отсюда следует, что $A_2 = 0$, $A_1 = \alpha_0$, то есть колебания маятников при данных начальных условиях происходят по следующему закону:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos\omega_1 t,$$
$$\alpha_2 = -\alpha_0 \cos\omega_1 t.$$

Таким образом, в этом случае оба маятника колеблются с одинаковой частотой, равной одной из нормальных частот, причём в противофазе, то есть навстречу друг другу.

Изменим теперь начальные условия – отклоним маятники в одну сторону на одинаковый угол и снова заставим их колебаться без начальной скорости. Теперь начальные условия выглядят так:

$$\alpha_1(0) = \alpha_0, \qquad \alpha_1'(0) = 0,$$
$$\alpha_2(0) = \alpha_0, \qquad \alpha_2'(0) = 0.$$

Тогда из (8) следует:

$$\alpha_0 = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2, \quad 0 = -A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2,$$
$$\alpha_0 = -A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2. \; 0 = +A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2.$$

Из второй пары уравнений по-прежнему следует равенство нулю обеих начальных фаз φ_1 и φ_2. Из первой же пары уравнений тогда получается, что $A_1 = 0$, $A_2 = \alpha_0$. Т.е. для таких начальных условий закон движения маятников выглядит так:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos\omega_2 t,$$
$$\alpha_2 = \alpha_0 \cos\omega_2 t.$$

Таким образом, в этом случае оба маятника тоже колеблются с одинаковой частотой, равной теперь другой нормальной частоте, причём сейчас колебания маятников происходят в фазе, то есть в такт.

Биения

В общем случае, при произвольных начальных условиях, движение каждого маятника является суперпозицией этих двух нормальных колебаний.

Рассмотрим, например, самый простой случай начальных условий: один маятник оставим в положении равновесия, а другой отклоним на какой-то угол α_0 и отпустим его без начальной скорости. Начальные условия теперь выглядят следующим образом:

$$\alpha_1(0) = \alpha_0, \qquad \alpha_1'(0) = 0,$$
$$\alpha_2(0) = 0, \qquad \alpha_2'(0) = 0.$$

Тогда из (8) следует:

$$\alpha_0 = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2,$$
$$0 = -A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2.$$
$$0 = -A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2,$$
$$0 = +A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2.$$

Из второй пары уравнений всё также следует равенство нулю обеих начальных фаз φ_1 и φ_2 . Из первой пары уравнений тогда получается, что $A_1 = A_2 = \alpha_0/2$.

Тогда закон движения маятников выглядит так:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t),$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_0(-\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t).$$

Выясним, как будет выглядеть движение маятников. В результате тригонометрических преобразований получим:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t,$$
$$\alpha_2 = \alpha_0 \sin\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \qquad (9)$$

Формулы (9) описывают колебания обоих маятников. Качественно они выглядят одинаково: можно представить себе, что каждый маятник колеблется с большой частотой, равной полусумме нормальных частот, и с переменной амплитудой, которая сравнительно медленно изменяется с частотой, равной полуразности нормальных частот. При этом фазы колебаний обоих маятников различаются на $\pi/2$: в момент, когда колебания одного из них максимальны, другой маятник покоится. Таким образом, энергия колебаний непрерывно передаётся от первого маятника ко второму и наоборот. Такие колебания с переменной амплитудой называют биениями.

Зависимость смещения из положения равновесия от времени для одного из маятников, то есть картина биений, приведена на рис. 2. Видно, что через определённые промежутки времени колебания маятника на мгновение прекращаются, промежуток времени между максимальной раскачкой колебаний такой же. Этот промежуток времени называют периодом биений.

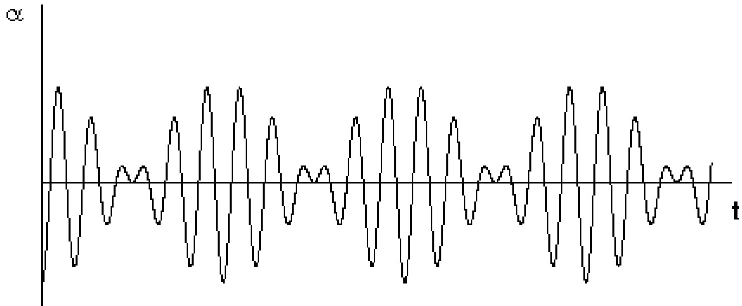

Рис. 2

Из (9) видно, что период биений

$$T_{б} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2},$$

а период колебаний

$$T_{к} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}. \qquad (10)$$

Если измерить экспериментально период биений и период колебаний, то по этим формулам можно вычислить нормальные частоты ω_1 и ω_2.

Ход работы

Установка для данной работы изображена на рис. 3.

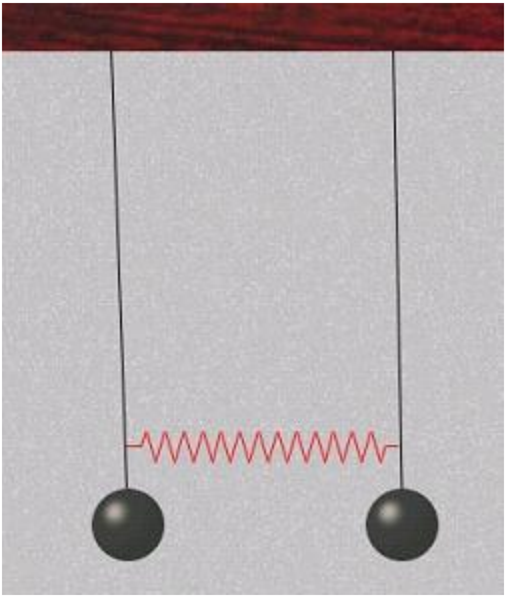

Рис. 3

Рекомендуется следующий порядок работы

1. Измерить парциальные частоты колебаний системы.

Закрепите один из маятников, придерживая его рукой, а другой отведите на небольшой угол. Измерьте несколько (например, 3) раз время его 10 колебаний и определите средний период и циклическую частоту.

2. Измерить частоту нормальных колебаний маятников, отведенных в разные стороны.

Отведите маятники на одинаковый угол в противоположные стороны. Измерьте несколько раз время 10 колебаний. Определите средний период и соответствующую циклическую частоту, это будет большая из частот нормальных колебаний.

3. Измерить частоту нормальных колебаний маятников, отведенных в одну сторону.

Отведите маятники на одинаковый угол в одну сторону. Измерьте несколько раз время 10 колебаний. Определите средний период и соответствующую циклическую частоту, это будет меньшая из частот нормальных колебаний.

4. Определить период и частоту биений какого-нибудь одного маятника.

Лучше всего биения получаются, если один из маятников оставить в положении равновесия, а другой отклонить в какую-либо сторону, а затем оба маятника одновременно отпустить.

Измерьте несколько раз время 10 колебаний. Найдите период начавшихся связанных колебаний. Следует также определить период биений какого-нибудь одного маятника. Если колебания затухнут, то их можно снова повторить.

5. Вычислить частоты нормальных колебаний маятников. По полученным значениям периодов связанных колебаний и биений из формул (10) вычислить частоты нормальных колебаний и сравнить их с измеренными ранее значениями.

6. Выполнить все описанные выше опыты для других положений пружины.

Опыт следует проделать для 3 - 4 высот. Например, сначала закрепить пружину в самом нижнем положении, затем на высоте, равной третьей части длины маятников, и, наконец, на высоте, равной двум третьим длины.

7. Построить график зависимости обеих нормальных частот от высоты пружины.

Контрольные вопросы

1. Что такое число степеней свободы?
2. Какие силы действуют на каждый из двух связанных маятников?
3. Какие частоты называют парциальными?
4. Какие частоты больше: парциальные или частоты свободных колебаний маятников?
5. Всегда ли система уравнений (3) имеет решение?
6. Как решать систему уравнений (3)? Что мы найдём в результате решения?
7. Каково соотношение нормальных и парциальных частот?
8. Как объяснить, что в нашем случае одна из нормальных частот равна частоте свободных колебаний ω_0? С каким нормальным колебанием связана эта частота: с колебаниями маятников в фазе или в противофазе?
9. Как можно определить нормальные частоты непосредственно?
10. Как можно определить нормальные частоты из биений?
11. В каком случае связь между маятниками сильнее: если пружина вверху или если она внизу?
12. Как должны изменяться нормальные частоты при усилении связи между маятниками?
13. Как должны выглядеть графики зависимости нормальных частот от высоты пружины.
14. Продумайте вид таблицы для этой работы.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика и молекулярная физика. - СПб: «Лань». – 2006. – 432 с.

Издание вышло в свет в авторской редакции

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 118 от «26» декабря 2013 г. Тираж 100 экз.