ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ (ФИГУРЫ ЛИССАЖУ)

Методические указания для выполнения лабораторной работы

Томск
2014

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии В.М. Вымятнин

Лабораторная работа посвящена сложению взаимно перпендикулярных колебаний, а именно изучению фигур Лиссажу, которые появляются, если отношения частот складываемых колебаний равно отношению целых чисел.
Лабораторная работа проводится на компьютере. В работе изучается также влияние разности фаз складываемых колебаний на вид фигуры Лиссажу.

СОСТАВИТЕЛЬ А.М. Толстик

Рецензент В.Ф. Нявро

Издание вышло в свет в авторской редакции

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 114 от «26» декабря 2013 г. Тираж 100 экз.

СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ (ФИГУРЫ ЛИССАЖУ)

Цель работы: Изучение сложения гармонических колебаний. Определение неизвестной частоты колебаний по виду фигуры Лиссажу.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

В природе часто встречаются гармонические колебания. Это такой процесс, в котором некоторая физическая величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Примерами таких процессов являются колебания грузика на пружине, малые колебания математического или физического маятника, изменения тока и напряжения в колебательном контуре, колебания давления в звуковой волне, созданной камертоном или струной.

Общий вид гармонических колебаний можно представить в виде

$$p = p_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

Здесь p – колеблющаяся физическая величина. Она может быть избыточным давлением в звуковой волне, отклонением маятника от положения равновесия, напряжением на обкладках конденсатора в колебательном контуре и т. д. Во всех этих примерах колеблющаяся величина имеет разный смысл, но колебания происходят по одинаковому закону (1). Здесь p_0 – амплитуда колебаний, ω – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза колебаний.

Выясним физический смысл величин p_0,, φ_0, ω. Поскольку максимальное значение косинуса любого аргумента по модулю равно 1, то амплитуда p_0 представляет собой наибольшее возможное значение физической величины p в данном процессе. Амплитуда колебаний зависит только от начальных условий.

Начальная фаза колебаний φ_0 связана с выбором начала отсчета времени. Она характеризует состояние колебательной системы в момент времени t = 0 (момент включения секундомера). Следовательно, начальная фаза φ_0 не является характеристикой самой колеблющейся системы, а определяется начальными условиями их наблюдения.

В отличие от амплитуды и начальной фазы, частота гармонических колебаний ω не зависит от начальных условий, а определяется характеристиками самой колебательной системы.

СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОДИНАКОВОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Существует принцип суперпозиции для колебательного движения, согласно которому если тело одновременно участвует в двух колебаниях, то результирующее смещение из положения равновесия равно сумме смещений, возникающих в результате каждого колебания.

Например, в одну точку пространства через воздушную среду дошли колебания, созданные двумя камертонами, колеблющимися по гармоническому закону вида (1), где p – избыточное давление воздуха. Тогда в данном случае принцип суперпозиции утверждает, что суммарное давление p в некоторой точке равно сумме давлений, создаваемых в этой точке каждым камертоном в отдельности. То есть,

$$p = p_1 + p_2 = p_{10}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + p_{20}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\,, \quad (2)$$

где p_{10} и p_{20} - амплитуды складываемых колебаний, φ_1 и φ_2 - их начальные фазы.

Пусть частоты камертонов одинаковы, т. е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда

$$\begin{aligned} p &= p_{10}\cos(\omega t + \varphi_1) + p_{20}\cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= (p_{10}\cos\varphi_1 + p_{20}\cos\varphi_2)\cos\omega t - \\ &- (p_{10}\sin\varphi_1 + p_{20}\sin\varphi_2)\sin\omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

При получении этого выражения использована известная из тригонометрии формула

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

Всегда можно найти такие действительные A и φ_0, что будут выполняться равенства

$$\begin{cases} p_{10}\cos\varphi_1 + p_{20}\cos\varphi_2 = A\cos\varphi_0 \\ p_{10}\sin\varphi_1 + p_{20}\sin p_{20} = A\sin\varphi_0 \end{cases} \qquad (4)$$

Действительно, возводя уравнения (4) в квадрат и складывая, получим

$$A = \sqrt{(p_{10}\cos\varphi_1 + p_{20}\cos\varphi_2)^2 + (p_{10}\sin\varphi_1 + p_{20}\sin\varphi_2)^2} \qquad (5)$$

Поделив второе из уравнений (3) на первое, найдем

$$tg\varphi_0 = \frac{p_{10}\sin\varphi_1 + p_{20}\sin\varphi_2}{p_{10}\cos\varphi_1 + p_{20}\cos\varphi_2}. \qquad (6)$$

Следовательно, при сложении скалярных колебаний с одинаковыми частотами с учётом формул (5) и (6) формула (3) запишется

$$p = A\cos\varphi_0\cos\omega t - A\sin\varphi_0\sin\omega t =$$
$$= A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (7)$$

Таким образом, в результате сложения колебаний одинакового направления и частоты снова получилось гармоническое колебание с той же частотой, но с другой амплитудой *A* (5) и начальной фазой φ_0 (6). В конкретном примере сложения колебаний камертонов будет слышаться звук того же тона, но другой громкости.

Рассмотрим теперь случай сложения колебаний с различными частотами. В простом частном случае равных амплитуд $p_{10} = p_{20} = p_0$ имеем

$$p = p_0\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + p_0\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Складывая косинусы в этой формуле, получим

$$p = 2p_0\cos(\Omega t + \psi_1)\cos(\omega t + \psi_2) \qquad (8)$$

где $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $\psi_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, $\psi_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ и $\Omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$. Тогда

$$p = P_0(t)\cos(\omega t + \psi_2) \qquad (9)$$

где
$$P_0(t) = 2p_0\cos(\Omega t + \psi_1) \qquad (10)$$

Процесс, описываемой формулой (9), можно трактовать как почти гармоническое колебание изучаемой физической величины с изменяющейся амплитудой (10), что представлено на рис. 1.

Для рассматриваемого опыта с колебаниями двух камертонов будет слышан звук одной высоты, но громкость звука будет нарастать до некоторого максимального значения, а затем падать до нуля. Такие колебания с переменной амплитудой называют биениями.

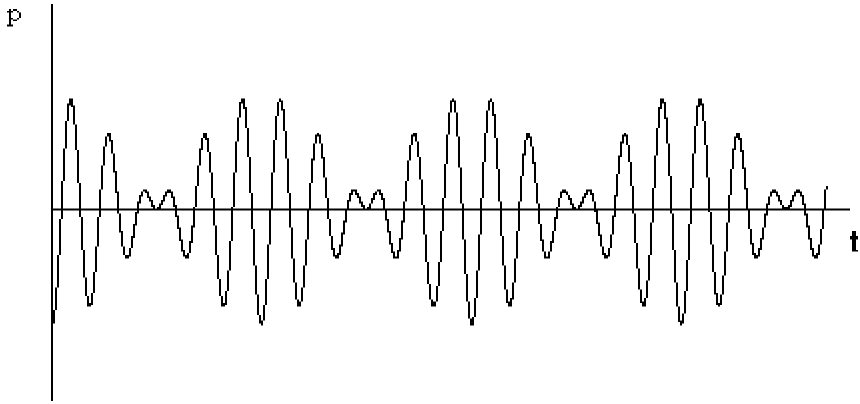

Рис. 1

Если амплитуды колебаний не равны, а частоты ω_1 и ω_2 близки, то мы также получим биения. Но в этом случае амплитуда колебаний меняется не до нуля, а до некоторого минимального значения, равного модулю разности амплитуд складываемых колебаний.

Таким образом, если мы имеем два слегка расстроенных камертона, то мы будем воспринимать звук как чередование тона одной и той же высоты, но различной громкости.

СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть теперь тело участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, например, вдоль осей x и y. Исследуем траекторию возможных движений такой системы. В параметрической форме уравнение траектории дается формулами

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \tag{11}$$

Выразив t из первого уравнения (10) и, подставив его во второе, получим уравнение траектории в явном виде:

$$y = y_0 \cos\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \arccos\frac{x}{x_0} + \varphi_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \varphi_1 \right) \tag{12}$$

Из этих уравнений следует, что движение происходит внутри прямоугольника:

$$|x| \le x_0\,, \quad |y| \le y_0\,.$$

Выясним теперь условия замкнутости траектории. Для этого удобно воспользоваться равенствами (11). Чтобы траектория была замкнутой, необходимо, чтобы после истечения некоторого промежутка времени τ как координата x, так и координата y вернулись к своему прежнему значению. Для этого, очевидно, необходимо выполнение следующих условий

$$\omega_1 (t + \tau) + \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1 + 2\pi n,$$

$$\omega_2 (t + \tau) + \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2 + 2\pi m,$$

или

$$\omega_1 \tau = 2\pi n$$

$$\omega_2 \tau = 2\pi m.$$

Поделив последние равенства друг на друга, получим, что условия замкнутости траектории можно выразить в виде

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m} \tag{13}$$

Таким образом, для того, чтобы траектория была замкнутой, необходимо, чтобы отношение частот было равно отношению целых чисел.

Если это условие не выполняется, то с течением времени траектория проходит сколь угодно близко к любой точке прямоугольника, равномерно его заполняя. Это пример так называемого условно периодического движения.

Рассмотрим подробнее замкнутые траектории. При движении по такой траектории точка описывает некоторую кривую, которая называется фигурой Лиссажу. Рассмотрим некоторые простые случаи фигур Лиссажу.

1) Пусть $\omega_1 = \omega_2$. Тогда из формулы (12) получаем:

$$\frac{y}{y_0} = \cos\left(\arccos\frac{x}{x_0} + \varphi_2 - \varphi_1\right) =$$

$$= \cos\left(\arccos\frac{x}{x_0}\right)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin\left(\arccos\frac{x}{x_0}\right)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= \frac{x}{x_0}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Переносся $\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$ в левую часть равенства, а $\frac{y}{y_0}$ в правую и возводя в квадрат, получим

$$\left(1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right)\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0}\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Отсюда:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (14)$$

Уравнение (14), как известно из аналитической геометрии, есть уравнение эллипса, оси которого расположены под некоторым углом к осям координат. Угол этот определяется разностью фаз $\varphi_2 - \varphi_1$. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) $\varphi_2 - \varphi_1 = n\pi$, где n любое целое число. В этом случае (14) переходит в

$$\left(\frac{x}{x_0} \pm \frac{y}{y_0}\right) = 0 .$$

Следовательно, в данном случае эллипс вырождается в прямую, наклоненную к оси y под углом $\alpha = \pm arctg\,\dfrac{y_0}{x_0}$. Другими словами, будет совершаться гармоническое колебание вдоль указанных прямых.

б) $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{2n+1}{2}\pi$.

Легко видеть, что при этом уравнение (13) перейдет в

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 .$$

Это уравнение эллипса с полуосями x_0, и y_0, расположенными вдоль осей координат. Если разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ с течением времени медленно меняется, то эллипс будет поворачиваться, вырождаться в прямую, снова превращаться в эллипс и т. д.

При других отношениях частот анализ более сложен. Фигуры, которые при этом образуются, Вы будете получать в процессе выполнения лабораторной работы.

Отметим, что из (12) следует простое правило для определения одной из частот, если другая частота известна.

Правило. *Проводим через фигуру Лиссажу две прямые, одну параллельную оси x, другую параллельную оси y, при этом прямые не должны проходить через узлы фигуры. Считаем число пересечений этих линий с фигурой Лиссажу. Отношение числа этих пересечений равно отношению частот колебаний.*

ХОД РАБОТЫ

На рис. 2. изображён кадр из данной лабораторной работы. В левой части имеются текстовые окна для ввода значений частоты одного из складываемых колебаний и начальной фазы, а в правой части находится окно, в котором вырисовывается соответствующая фигура Лиссажу.

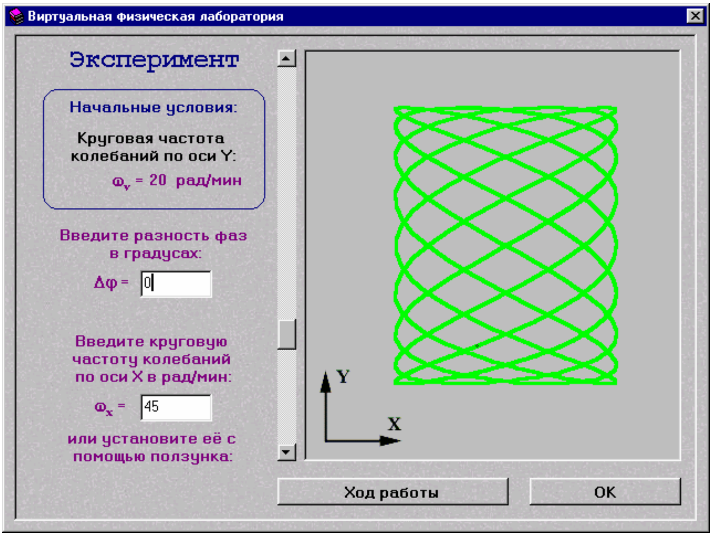

Рис. 2

Рекомендуется следующий порядок работы

1. Установить отношение частот 1:2 и разность фаз 90 градусов. Круговая частота вертикальных колебаний всегда равна 20 рад/с. Для установления отношения частот 1:2 нужно горизонтальную частоту установить равной 40 рад/с. Частота горизонтальных колебаний задается путем введения числа в соответствующее окно или с помощью "ползунка". Для установки разности фаз введите нужное число в предназначенное для этого окно.

2. Зарисовать траекторию колеблющейся частицы.

По виду траектории определите частоту горизонтальных колебаний и сравните её с установленной. Отношение частот равно отношению числа пересечений данной фигуры Лиссажу с двумя взаимно перпендикулярными горизонтальной и вертикальной линиями, не проходящими через узлы фигуры.

3. Опыт повторить с разностями фаз 0 и 180 градусов. Убедитесь, что отношение частот, определяемое по виду фигуры Лиссажу, не зависит от разности фаз. Обратите внимание на направление движения колеблющейся точки.

4. Проделать опыты для других отношений частот. Рекомендуются отношения частот:

2:5, 3:5, 3:4, 4:5, 6:5, 5:4, 3:2, 8:5, 7:4, 9:5, 2:1.

Если при каком-то отношении частот фигура Лиссажу получается слишком сложной, то вид её можно упростить подбором разности фаз при той же частоте.

5. Для отношения частот 1:1 проделать опыты при разностях фаз 0, 45, 90, 135,180 градусов.

Зарисуйте получившиеся эллипсы и убедитесь, что в предельных случаях 0 и 180 градусов они вырождаются в соответствующие прямые. Обратите внимание на наклон эллипсов при разных начальных фазах.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Сформулируйте принцип суперпозиции.
3. При каких условиях возникают биения?
4. Для случая колебаний одинакового направления: чем отличается результат сложения при одинаковых и разных амплитудах складываемых колебаний?
5. Получите формулу (7).
6. Сформулируйте условие замкнутости фигуры Лиссажу?
7. Что будет, если складываются взаимно перпендикулярные колебания с одинаковыми частотами?
8. Сформулируйте правило определение неизвестной частоты по фигуре Лиссажу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. I. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука. 1977. 432 с.