ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Методические указания для выполнения лабораторной работы

Томск
2014

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии В.М. Вымятнин

На примере маятника Максвелла рассмотрено плоское движение твердого тела, получена рабочая формула для расчета момента инерции маятника Максвелла через экспериментально измеримые частицы.

Для студентов, выполняющих общий физический практикум в лаборатории механики.

СОСТАВИТЕЛЬ доцент В.Ф. Нявро

Рецензент доцент А.М. Толстик

Маятник Максвелла

Цель работы: Экспериментальное определение момента инерции цилиндрического твердого тела относительно оси симметрии с помощью маятника Максвелла.

Теория работы

Маятник Максвелла представляет собой массивный диск, ось которого подвешена на двух накрученных на нее нитях (рис.1). Поскольку движение маятника Максвелла происходит под действием силы тяжести и сил натяжения нитей (рис.2), то устойчивое движение маятника без раскачивания возможно только в том случае, если нити вертикальны.

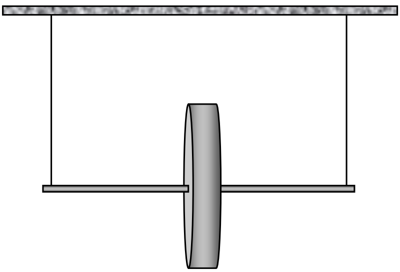

Рис.1

Моментом инерции тела относительно некоторой оси вращения называют величину

$$I = \sum_i m_i r_i^2 , \qquad (1)$$

где m_i – массы материальных точек, составляющих тело, r_i – расстояние от этих точек до оси вращения. Таким образом, момент инерции характеризует распределение массы тела относительно оси вращения. Из формулы (1) видно, что момент инерции – величина аддитивная, то есть момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

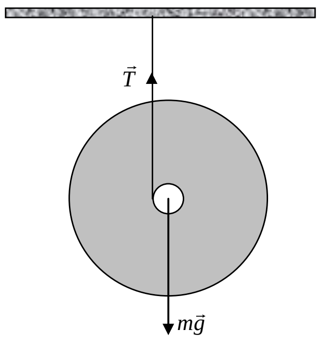

Рис. 2

Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции сводится к вычислению интеграла:

$$I = \int r^2 dm, \qquad (2)$$

где r – расстояние от элементарной массы dm до оси вращения. Интегрирование должно проводиться по всей массе тела.

Маятник Максвелла можно представить в виде совокупности полых цилиндров и сплошного цилиндра – оси маятника. Рассчитаем моменты инерции таких тел. Любое из этих тел можно мысленно разбить на тонкие цилиндрические слои так, чтобы можно было считать, что с требуемой точностью точки внутри такого слоя находятся на одинаковом расстоянии от оси маятника. Разобьем цилиндр радиуса R на цилиндрические слои толщиной dr. Пусть радиус какого-то слоя равен r, тогда масса вещества, заключенного в этом слое, равна

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr,$$

где dV – объем слоя, h – высота цилиндра, ρ – плотность вещества цилиндра. Момент инерции этого слоя равен

$$dI = dm r^2 = \rho 2\pi h r^3 dr.$$

Момент инерции всего цилиндра найдется интегрированием по всем слоям

$$I = \int dI = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \frac{R^4}{4} \qquad (3)$$

Так как масса цилиндра $m = \rho \pi R^2 h$, то момент инерции сплошного цилиндра будет равен:

$$I = \frac{mR^2}{2}\,. \tag{4}$$

Момент инерции полого цилиндра, имеющего внутренний радиус R_1, а внешний R_2, можно вычислить также по формуле (3), изменив в интеграле пределы интегрирования

$$I = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \rho 2\pi h \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right).$$

Так как масса полого цилиндра $m = \rho\pi \left(R_2^2 - R_1^2\right) h$, то его момент инерции будет равен

$$I = \frac{m\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2}\,. \tag{5}$$

Однако, аналитическое вычисление интегралов (3) возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной формы такие интегралы находят численно, либо используют косвенные методы определения момента инерции.

Целью настоящей лабораторной работы является экспериментальное определение момента инерции маятника Маквелла. Маятник Маквелла совершает плоское движение. Плоское движение твердого тела является движением, при котором все точки тела перемещается параллельно некоторой неподвижной плоскости. Такое движение тела может рассматриваться как результат сложения поступательного движения какой-либо точки этой плоскости и вращения тела относительно оси, проходящей через эту точку перпендикулярно к плоскости. В качестве такой точки удобно использовать центр масс тела. Это позволяет применить для описания движения маятника Максвелла теорему о движении центра масс. Движение центра масс маятника Максвелла можно описать уравнением:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}\,, \tag{6}$$

где m – масса маятника, $\vec{a}$ – линейное ускорение центра масс, $\vec{T}$ – результирующая сила натяжения обеих нитей.

Для описания вращательного движения маятника Максвелла вокруг оси симметрии удобно выбрать систему отсчета, связанную с центром масс маятника. Ось вращения неподвижна в этой системе отсчета, но центр масс движется ускоренно, следовательно, связанная с ним система отсчета неинерциальна. Поэтому при описании вращательного движения маятника Максвелла необходимо учесть наличие поступательных сил инерции. Уравнение вращательного движения относительно оси вращения имеет следующий вид

$$I\beta = M \,, \tag{7}$$

где I - момент инерции тела относительно оси симметрии цилиндра, β - угловое ускорение, M - результирующий момент сил. Вектор силы тяжести проходит через ось вращения, поэтому момент этой силы относительно оси вращения равен нулю. Суммарный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс также равен нулю. Следовательно, уравнение (7) примет вид

$$I\beta = TR_0 \,, \tag{8}$$

где R_0 - радиус оси маятника вместе с намотанной на него нитью подвески.

Для нахождения момента инерции маятника Максвелла относительно его оси вращения можно воспользоваться уравнениями движения (6), (8). Спроецируем уравнение (6) на вертикальную ось. Тогда оно примет вид:

$$ma = mg - T \,. \tag{9}$$

Так как центр масс опускается на столько, на сколько раскручивается нить, то его перемещение x связано с углом поворота φ соотношением:

$$x = \varphi R_0 .$$

Дифференцируя это соотношение дважды, получим:

$$a = \beta R_0 . \qquad (10)$$

Совместное решение уравнений (8) – (10) дает следующие формулы для линейного ускорения центра масс системы и результирующей силы натяжения:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R_0^2}} , \qquad (11)$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR_0^2}{I}} . \qquad (12)$$

Из (11), (12) видно, что ускорение диска и результирующая сила натяжения нитей постоянны, и ускорение всегда направлено вниз. При этом, чем больше момент инерции *I*, тем меньше ускорение маятника. Силы натяжения, наоборот, растут с увеличением момента инерции. Если при опускании маятника координату его центра масс отсчитывать от точки его закрепления, то со временем координата будет меняться по закону:

$$x = \frac{at^2}{2} . \qquad (13)$$

Подставляя ускорение a из (13) в (11), получим для момента инерции маятника Максвелла следующее выражение:

$$I = \frac{mD_0^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2x} - 1\right). \qquad (14)$$

В (14) входят величины, которые легко экспериментально измерить: D_0 – внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на него нитью, t – время опускания маятника, x - изменение координаты центра масс маятника, m – масса маятника, которая складывается из массы маятника и массы надетого на него кольца. Внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на него нитью подвески определяется по формуле:

$$D_0 = D + 2D_n \qquad (15)$$

где D - диаметр оси маятника, D_n - диаметр нити.

Уравнения движения (8-10) и решения (11-12) не описывают поведение маятника в нижней точке, когда происходит переброс нити с одной стороны цилиндра на другую. При этом диск продолжает вращаться в прежнем направлении, но нить не разматывается, а наматывается на ось маятника. В течение времени переброса нити в нижней точке происходит изменение скорости опускания центра масс на противоположное. Поэтому в это время ускорение центра масс маятника велико, а значит, велики силы натяжения нитей, что может привести к их разрыву.

Механическая конструкция прибора

Общий вид маятника Максвелла показан на рис.3.

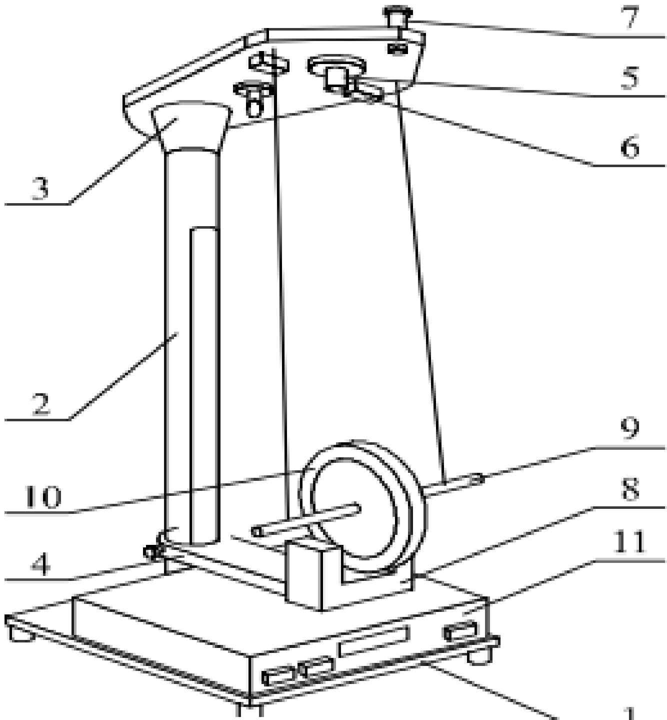

Рис.3. Общий вид маятника Максвелла

На основании 1 закреплена стойка 2, к которой прикреплены неподвижный верхний кронштейн 3 и подвижный кронштейн 4. На верхнем кронштейне находится электромагнит 5, фотоэлектрический датчик №1 (6) и вороток с фиксатором 7 для закрепления и регулировки длины нити подвески маятника. Нижний кронштейн 4 с фотодатчиком № 2 (8) можно перемещать вдоль стойки и фиксировать в выбранном положении. Маятник 9 - это диск, закрепленный на оси. На диск надеваются сменные металлические кольца 10, изменяющие момент инерции системы. Маятник с кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом.

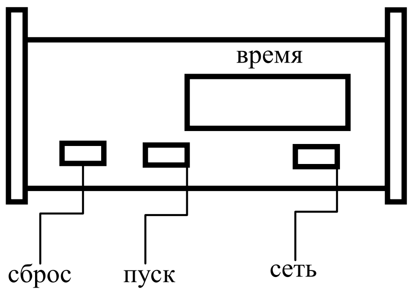

Рис.4.

Расстояние, на которое опускается центр масс маятника определяется по миллиметровой шкале стойки прибора.

Сигналы с фотодатчиков служат для автоматическог о пуска и остановки милли секундомера 11.

Вид передней панели секундомера представлен на рис. 4. На лицевой панели миллисекундомера находятся следующие ручки управления:

– «СЕТЬ» - выключатель сети. Нажатие этой клавиши включает напряжение питания. При этом на цифровых индикаторах высвечиваются нули и включаются лампочки фотоэлектрических датчиков.

– «СБРОС» - установка нуля секундомера. Нажатие этоой клавиши вызывает сброс электронных схем миллисекундомера, на цифровых индикаторах высвечиваются нули.

– «ПУСК» - управление электромагнитом. При нажатии этой клавиши выключается электромагнит, в схеме миллисекундомера генерируется импульс разрешения на измерение времени.

Порядок выполнения работы

1. Нижний кронштейн прибора передвинуть и зафиксировать в крайнем нижнем положении.
2. На диск маятника надеть одно из колец, прижимая его до упора.

3. Освободить гайку воротка для регулирования длины нити подвески. Подобрать длину нити таким образом, чтобы край стального кольца после опускания маятника находился на два миллиметра ниже оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика. Одновременно произвести корректировку установки маятника, обращая внимание на то, чтобы ось его была параллельной основанию прибора. Зажать вороток.
4. Нажать клавишу «СЕТЬ».
5. Намотать на ось маятника нить подвески, обращаяя внимание на то, чтобы она намоталась равномерно, виток к витку.
6. Фиксировать маятник при помощи электромагнита, обращая внимание на то, чтобы нить в этом положении не была слишком скручена.
7. По шкале на вертикальной колонке прибора определить путь, пройденный центром масс маятника.
8. Измерив диаметры нити D_n и оси маятника D в различных сечениях, найти средние значения этих величин и по ним определить по формуле (15) диаметр оси вместе с намотанной на ней нитью; для измерения D и D_n можно использовать микрометр.
9. Определить массу маятника вместе с надетым кольцом; значения масс отдельных элементов нанесены на них.
10. По формуле (14) определить момент инерции маятника Максвелла.
11. Вычислить момент инерции маятника теоретически, используя формулы (4), (5).
12. Сравнить полученный результат с величиной, рассчитанной по формуле (14).
13. Повторить измерения для двух оставшихся колец.
14. Рассчитать доверительный интервал ΔI по формуле

$$\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 = \frac{4\left[\;\Delta D\;^2 + 4\;\Delta D_n\;^2\right]}{D+2D_n\;^2} + \frac{gt^2\;^2}{gt^2-2x\;^2}\left[4\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2+\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right],$$

где ΔD, ΔD_n, Δt, Δx – доверительные интервалы для прямых измерений величин D, D_n, t, x, учитывающие как случайные, так и систематические погрешности.

Техника безопасности

При работе с прибором необходимо соблюдать правила безопасности, относящиеся к устройствам, в которых используется напряжение до 250 вольт. Эксплуатация прибора допускается только при наличии заземления.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции относительно оси вращения материальной точки, системы материальных точек?
2. От чего зависит момент инерции системы материальных точек?
3. Получите формулы для моментов инерции относительно оси симметрии цилиндра, кольца.
4. Что называется центром масс системы материальных точек?
5. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы материальных точек.
6. Какое движение твердого тела называется плоским?
7. Какие силы и моменты сил действуют на маятник Максвелла при его движении?
8. Как меняются ускорение, скорость и сила натяжения нити при движении маятника Максвелла?

9. Как меняется механическая энергия маятника Максвелла при его движении?
10. На каком участке движения маятника, верхнем или нижнем, потери механической энергии больше? Объясните причины.
11. Оценить натяжение нитей при прохождении маятником нижней точки (продолжительность “удара” в ней принять равной $\Delta t \approx 0{,}05$с).

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. – Изд-во ФИЗМАТЛИТ/МФТИ, 2005.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика" – Изд-во Кнорус, 2012.
3. Грабовский Р.И. Курс физики. Изд-во Лань, 2007.
4. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – Изд-во «Лань», 2009.

Издание вышло в свет в авторской редакции

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 115 от «26» декабря 2013 г. Тираж 100 экз.