

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ  
ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО  
ПОДВЕСА**

*Методические указания для выполнения  
лабораторной работы*

Томск  
2014

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии



В.М. Вымятин

Рассмотрено основное уравнение вращательного движения и понятие момента инерции. В работе необходимо определить моменты инерции некоторых симметричных тел при помощи трифилярного подвеса.

Для студентов физических специальностей дневной формы обучения.

**СОСТАВИТЕЛЬ** доцент А.М. Толстик

Рецензент доцент В.Ф. Нявро

## Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса

**Цель работы:** знакомство с понятием момента инерции, а также экспериментальное определение моментов инерции некоторых симметричных тел при помощи трифилярного подвеса.

### Понятие момента инерции

Рассмотрим произвольное абсолютно твердое тело, имеющее закрепленную ось вращения  $OO$  (рис.1).

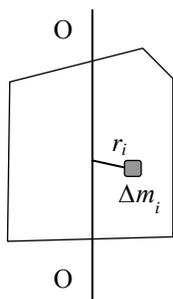


Рис.1

Расчленим мысленно это тело на некоторое число  $N$  малых объемных участков, каждый из которых можно считать материальной точкой. Рассмотрим одну из них с номером  $i$ . Пусть масса этого малого "кусочка"  $\Delta m_i$ , а кратчайшее расстояние от него до оси вращения  $r_i$ . Тогда моментом инерции этой материальной

точки называют величину  $\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2$ . Момент инерции всего тела является суммой моментов инерции всех таких "кусочков", т.е.

$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2$ . Но это приближенное выражение:  $I$  зависит от вели-

чины участков, на которые разбивают тело: чем "кусочки" мельче и чем их больше, тем точнее определяется момент инерции. Строго момент инерции твердого тела равен пределу данной суммы при стремлении всех масс  $\Delta m_i$  к нулю, а их числа - к бесконечности, т.е. интегралу

$$I = \lim \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm, \quad (1)$$

где интегрирование проводится по всей массе тела. Если объем малого участка равен  $dV$ , то его масса  $dm = \rho dV$ , где  $\rho$  плотность вещества. Тогда

$$I = \int \rho r^2 dV, \quad (2)$$

где интегрирование проводится по всему объему, а плотность  $\rho$  может и не быть константой.

Ясно, что момент инерции данного тела зависит от распределения масс в этом теле относительно оси вращения, а не просто от общей массы. Например, если взять два одинаковых по размерам и массе цилиндра, один из которых сплошной, а другой - пустотелый, то у пустотелого цилиндра момент инерции относительно оси  $OO$  (рис.2) больше, так как его участки расположены в среднем на больших расстояниях от оси вращения.

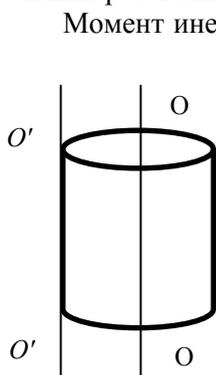


Рис.2

Момент инерции одного и того же тела зависит от положения оси вращения. Например, момент инерции цилиндра относительно периферийной оси  $O'O'$  больше, чем относительно центральной оси  $OO$  (рис.2), так как в первом случае часть участков тела находится от оси  $O'O'$  на больших расстояниях, давая большие вклады, пропорциональные квадрату расстояния, в суммарный момент инерции.

Подобно тому, как масса является мерой инертности тела при поступательном движении, момент инерции характеризует инертные свойства тела при вращательном движении.

Это видно из основного уравнения вращательного движения:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (3)$$

где  $I$  - момент инерции тела относительно какой-то оси,  $M$  - момент внешних сил относительно этой оси,  $\omega$  и  $\frac{d\omega}{dt}$  - соответственно угловая скорость и угловое ускорение. Из (3) видно, что тело с малым  $I$  легко раскрутить и остановить, т.е. придать ему значительное угловое ускорение  $\frac{d\omega}{dt}$ , даже действуя на него небольшим моментом сил. Если момент инерции  $I$  велик, то угловое ускорение при том же значении момента сил  $M$  мало, т.е. тело с большим моментом

инерции трудно раскрутить, но трудно и остановить. Такое тело стремится сохранить состояние своего вращательного движения, т.е. обладает большой инертностью.

### Теорема Штейнера

Вычисление моментов инерции относительно оси во многих случаях облегчает теорема Гюйгенса - Штейнера, связывающая моменты

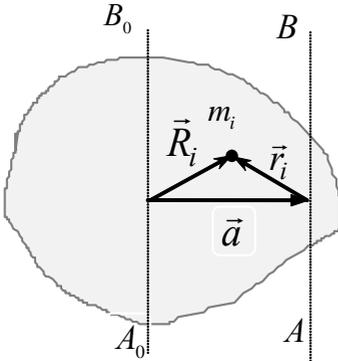


Рис. 3

инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела.

Пусть ось  $A_0B_0$  проходит через центр масс. Радиус-вектор точки с массой  $\Delta m_i$ , отсчитываемый от этой оси, в плоскости, перпендикулярной оси, обозначим  $\vec{R}_i$ , а от оси  $AB$ , параллельной оси  $A_0B_0$  но не проходящей через центр масс,  $\vec{r}_i$ . Проведем от оси  $A_0B_0$  к оси  $AB$  в этой плоскости вектор  $\vec{a}$ .

Пусть  $I_0$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, а  $I$  – относительно оси  $AB$ , не проходящей через центр масс. По определению моментов инерции имеем:

$$I_C = \sum_{i=1}^N \Delta m_i R_i^2, \quad I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2.$$

Из рис. 3 непосредственно видно, что  $\vec{r}_i = -\vec{a} + \vec{R}_i$  и, следовательно,  $r_i^2 = R_i^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{R}_i$ . Поэтому получаем

$$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N \Delta m_i R_i^2 + a^2 \sum_{i=1}^N \Delta m_i - 2\vec{a} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{R}_i.$$

Учтем, что  $\sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{R}_i = 0$ , т.к. эта ось проходит через центр

масс, а  $\sum_{i=1}^N \Delta m_i = M$  – масса тела. Тогда для момента инерции относительно оси  $AB$  получаем следующее выражение

$$I = I_C + Ma^2. \quad (4)$$

Эта формула выражает теорему Штейнера – Гюйгенса. Момент инерции  $I$  тела относительно произвольной оси равен сумме его момента инерции  $I_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы тела  $M$  на квадрат расстояния  $a$  между осями.

### Моменты инерции некоторых тел

Получим выражение для моментов инерции нескольких простейших симметричных тел относительно оси симметрии, проходящей через центр масс соответствующего тела: для кольца, цилиндра, тонкого стержня и толстого бруска.

**Кольцо (пустотелый цилиндр)** Все элементарные участки кольца расположены на одинаковом расстоянии, равном радиусу ( $r_i=R$ ), от оси кольца. Тогда формула, для момента инерции имеет вид

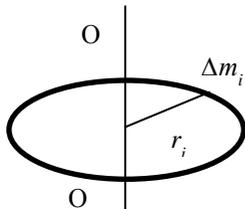


Рис.4

$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^N \Delta m_i = MR^2$ . Т.е. момент инерции кольца относительно его оси симметрии записывается в виде

$$I = MR^2 \quad (5)$$

По этой же формуле определяется момент инерции пустотелого цилиндра относительно его цилиндрической оси.

**Диск (сплошной цилиндр)** Разобьем диск на элементарные колечки (рис. 5). Радиус одного из них пусть будет  $r$ , ширина  $dr$ , а масса –  $dm$ . Тогда момент инерции этого бесконечно тонкого кольца относительно оси  $OO$  равен  $dI = r^2 dm$ . Масса кольца  $dm$  равна площади кольца  $dS=2\pi r dr$ , умноженной на поверхностную плотность, т.е. массу диска, отнесённую к

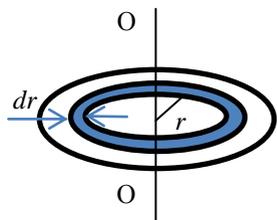


Рис.5

его площади (в нашем случае  $M/\pi R^2$ ). Тогда момент инерции кольца

$$dI = \left( \frac{M}{\pi R^2} \right) 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{2M}{R^2} r^3 dr. \text{ Момент инерции всего}$$

диска равен интегралу  $I = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$ . Интегрируя, получаем для

момента инерции диска:

$$I = \frac{MR^2}{2}. \quad (6)$$

**Тонкий стержень.** Разобьем стержень (рис. 6) на элементарные участки длиной  $dx$  и массой

$$dm = \frac{M}{l} dx, \text{ где } M \text{ – масса всего стержня, а } l \text{ – его длина. Тогда момент инерции}$$

этого участка равен

$$dI = dm x^2 = \frac{M}{l} x^2 dx, \text{ где } x \text{ – расстояние}$$

до оси  $OO$ . Момент инерции стержня

равен  $I = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$ . Интегрируя, получаем выражение для момен-

та инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину:

$$I = \frac{1}{12} Ml^2 \quad (7)$$

**Брусок.** Разобьем брусок на плоские слои толщиной  $dx$ , а длиной и

высотой, соответственно,  $a$  и  $b$

(рис.7). Если такой слой находится на

расстоянии  $x$  от оси бруска  $OO$ , то его

момент инерции относительно этой

оси можно вычислить по теореме

Штейнера (4), которая для этого слоя

запишется в виде  $dI = dI_C + dm \cdot x^2$ .

Здесь,  $dI_C$  - момент инерции слоя

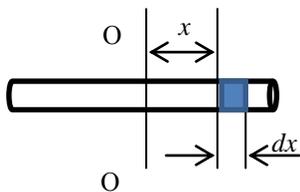


Рис.6

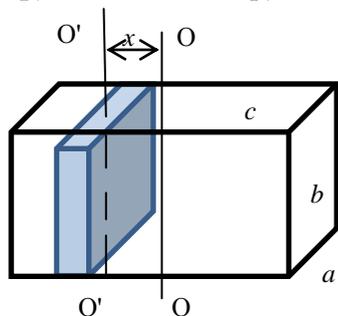


Рис.7

относительно оси  $O'O'$ , проходящей через его центр масс,  $dm$  - масса слоя, равная

$$dm = \frac{M}{abc} (ab \cdot dx) = \frac{M}{c} dx$$

( $M$  - масса всего бруска). Данный слой можно, в свою очередь, представить как совокупность параллельных друг другу и перпендикулярных оси  $O'O'$  стержней длиной  $a$ , поэтому момент инерции  $dI_c$  слоя относительно оси  $O'O'$  выражается такой формулой (7)

как и для стержня, т.е.:  $dI_c = \frac{1}{12} dm \cdot a^2$ . Момент инерции относительно оси  $OO$  равен по теореме Штейнера

$$dI = \frac{1}{12} dm \cdot a^2 + dm \cdot x^2 = \frac{1}{12} \frac{M}{c} a^2 dx + \frac{M}{c} x^2 dx$$

Чтобы найти суммарный момент инерции, нужно просуммировать (т.е. интегрировать) моменты инерции всех слоев:

$$I = \int dI = \int_{-c/2}^{c/2} \left( \frac{1}{12} \frac{M}{c} a^2 dx + \frac{M}{c} x^2 dx \right)$$

Т.е. момент инерции бруска относительно оси  $OO$  равен

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2) \quad (8)$$

Заметим, что он не зависит от высоты бруска  $b$ , т.е. от размера бруска вдоль направления, параллельного оси  $OO$ .

### Трифиллярный подвес

Для измерения моментов инерции тел служит трифиллярный подвес. Он представляет собой две платформы  $P$  и  $P'$ , связанные тремя симметрично расположенными нитями  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  (рис. 8). Платформа  $P$  укреплена на кронштейне и неподвижна, а платформа  $P'$  может совершать крутильные колебания относительно вертикальной оси  $OO'$ .

Пусть с верхней платформой  $P$  связана система координат  $x, y, z$ , начало которой находится в центре платформы  $O$ . При повороте

нижней платформы относительно положения равновесия, она поднимается на высоту  $h = z_0 - z$ , где  $z_0$  - координата точки  $O'$  в положении равновесия платформы, а  $z$  - координата точки  $O'$ , соответствующая углу поворота  $\varphi$ . Запишем полную механическую энергию платформы:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + Mg(z_0 - z), \quad (9)$$

где  $I$  - момент инерции платформы (пустой или с исследуемым телом),  $Mg(z_0 - z) = Mgh$  - потенциальная энергия платформы,  $\frac{I\omega^2}{2}$

- её кинетическая энергия,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} - \text{угловая скорость.}$$

Из условия нерастяжимости нити можно выразить высоту  $h$  через угол поворота  $\varphi$ . Для этого рассмотрим расстояние между точками  $C$  и  $C'$ , равное длине нити  $l$ . Координаты точки  $C$  всё время остаются постоянными и равны  $x_c = r$ ,  $y_c = 0$ ,  $z_c = 0$ .

Координаты точки  $C'$  в положении равновесия равны  $x_{c'}(0) = R$ ,  $y_{c'}(0) = 0$ ,  $z_{c'}(0) = z_0$ .

При повороте системы на угол  $\varphi$  координаты той же точки становятся равными

$$x_{c'} = R \cos \varphi, \quad y_{c'} = R \sin \varphi, \quad z_{c'} = z.$$

Условие постоянства длины нити  $l$  можно записать в виде

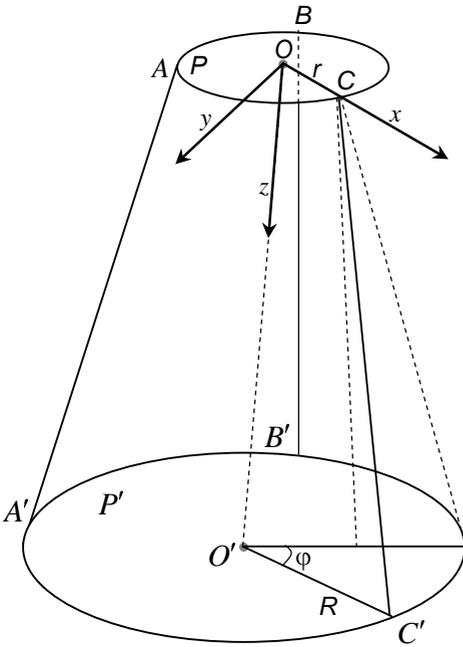


Рис. 8

$$l^2 = (x_{c'} - x_c)^2 + (y_{c'} - y_c)^2 + (z_{c'} - z_c)^2 = \\ = (x_{c'(0)} - x_c)^2 + (y_{c'(0)} - y_c)^2 + (z_{c'(0)} - z_c)^2,$$

или  $(R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 = (R - r)^2 + z_0^2$ . Отсюда

$$z^2 = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) = z_0^2 - 2Rr2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (10)$$

Для малых углов поворота  $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$  тогда и выражение (10) запишется в виде  $z^2 = z_0^2 - Rr\varphi^2$ . Вынесем  $z_0$  из-под корня и представим  $z$  в виде

$$z = z_0 \sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{z_0^2}}.$$

Получили функцию вида:  $\sqrt{1 - a}$ , разложение которой в ряд Тейлора для малых  $a \ll 1$  даёт:  $\sqrt{1 - a} \approx 1 - \frac{1}{2}a$ . Таким образом, для малых углов это выражение принимает вид  $z = z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}$ . Следовательно, высота подъёма нижней платформы  $h = z_0 - z = \frac{Rr}{2z_0}\varphi^2$  и

полную механическую энергию подвеса можно записать

$$E = \frac{1}{2}I \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + Mg \frac{Rr}{2z_0} \varphi^2. \quad (11)$$

Если трение внутри системы пренебрежимо мало, то энергия сохраняется, т.е.  $E = const$  и  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Продифференцировав (11) по времени, получим уравнение

$$\frac{I}{2} 2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \frac{d\varphi}{dt} + Mg \frac{Rr}{2z_0} 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad (12)$$

откуда 
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MgRr}{I_{z_0}}\varphi = 0. \quad (13)$$

Это известное уравнение гармонических колебаний, и его решением является функция  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgRr}{I_{z_0}}}$  - циклическая частота колебаний.

Период колебаний трифилярного подвеса

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{z_0}}{MgRr}}. \quad (14)$$

Отсюда получаем выражение для момента инерции

$$I = \frac{MgRrT^2}{4\pi^2 z_0}. \quad (15)$$

### Ход работы

1. Осторожно вывести ненагруженную платформу из положения равновесия, поворачивая на малый угол  $\varphi$ . Когда платформа начнёт совершать крутильные колебания, необходимо следить за тем, чтобы она не совершала никаких побочных колебаний и была горизонтальна.

Несколько (например, 5) раз измерить секундомером время  $t_i$   $n$

= 20 полных колебаний. Найти среднее время  $\langle t \rangle$  и средний пе-

риод колебаний  $\langle T \rangle = \frac{\langle t \rangle}{n}$ . Результаты занести в таблицу, вид которой предлагается.

| $n$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $\langle t \rangle$ | $\langle T \rangle$ | $I_0$ | $I_1$ | $I_T$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------|---------------------|-------|-------|-------|
|     |       |       |       |       |       |                     |                     |       |       |       |
|     |       |       |       |       |       |                     |                     |       |       |       |

2. Вычислить момент инерции  $I_0$  пустой платформы по формуле (15). Результат занести в таблицу.
3. Взвесить на технических весах исследуемое тело (диск или брусок) и положить его на середину платформы.
4. Осторожно вывести нагруженную платформу из положения равновесия и выполнить все измерения, описанные в пункте 1.
5. Вычислить момент инерции  $I_1$  платформы с грузом, подставив в формулу (15) суммарную массу платформы с грузом. Результат занести в таблицу.
6. Определить момент инерции тела  $I_T$  (момент инерции диска или бруска относительно оси, проходящей через его центр масс) как разность момента инерции платформы с телом и пустой платформы. Результат занести в эту же таблицу.
7. Рассчитать погрешности измерений момента инерции диска и бруска.
8. Вычислить «теоретические» значения моментов инерции бруска и диска по формулам (6) и (8), измерив предварительно их геометрические размеры при помощи штангенциркуля.
9. Сравнить соответствующие значения моментов инерции, полученные экспериментально и «теоретически».
10. Осуществить проверку теоремы Штейнера.
  - 10.1) Для этого расположить два одинаковых диска симметрично относительно оси вращения подвеса (рис. 9) и выполнить все измерения, описанные в пункте 1.
  - 10.2) Вычислить момент инерции платформы с двумя дисками по формуле (15), а затем общий момент инерции двух дисков как разность момента инерции платформы с телами и пустой платформы. Результат занести в таблицу. Разделив полученную величину на 2, получим момент инерции  $I_d$  одного диска относительно оси подвеса  $OO'$ , сдвинутой на расстояние  $a$  относительно оси, проходящей через центр масс диска.

10.3) Вычислить «теоретически» момент инерции диска относительно этой оси, используя теорему Штейнера – Гюйгенса (4)

$I_d = I_C + ma^2$ , где  $I_C$  - момент инерции диска относительно

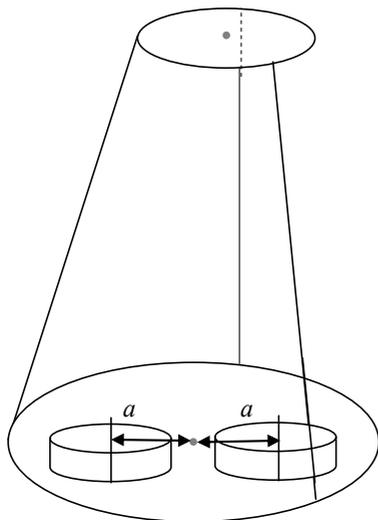


рис. 9

оси, проходящей через его центр масс, который был измерен этим же способом ранее,  $m$  - масса диска;  $a$  - расстояние между центром платформы и центром диска, которое нужно измерить линейкой.

### Обработка результатов измерений

Погрешность измерения момента инерции тела вычисляется по формуле  $\Delta I_T = \sqrt{\Delta I^2 + \Delta I_0^2}$ , где  $\Delta I$  - погрешность измерения момента инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $\Delta I_0$  - погрешность измерения пустой платформы. Значения  $\Delta I$  и  $\Delta I_0$  вычисля-

ются по одной и той же формуле для относительной погрешности косвенных измерений

$$\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 = \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_0}{z_0}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2,$$

где  $\Delta R$ ,  $\Delta r$ ,  $\Delta z_0$  - систематические погрешности измерений размеров трифилярного подвеса, имеющие величину порядка 1мм;  $\Delta M = 0,1\text{г}$  - систематическая погрешность измерения массы на технических весах. При вычислении погрешности измерения периода колебаний  $\Delta T$  следует учесть как систематическую погрешность однократного измерения времени ручным секундомером  $\Delta t_{\text{сисм}} = 0,2\text{с.}$ , так и случайную погрешность, вычисляемую по формуле Стьюдента

$$\Delta t_{\text{сл}} = t_{\alpha, N} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle)^2}{N(N-1)}}.$$

Суммарная погрешность измерения времени колебаний

$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{\text{сл}}^2 + \Delta t_{\text{суст}}^2}$ , а погрешность измерения периода колебаний

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{n}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твёрдого тела, его физический смысл?
2. Сформулировать теорему Гюйгенса – Штейнера.
3. Вывести формулу для момента инерции трифилярного подвеса.
4. В чём заключается теорема Штейнера? Получите формулу (4).
5. Обруч подвешен на гвоздик. Чему равен его момент инерции относительно гвоздика, если его масса  $M$ , а радиус  $R$ ?
6. Выведите формулу (6) для момента инерции цилиндра и формулу (7) для стержня.
7. Найдите момент инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его конец.
8. Выведите формулу (8) для момента инерции бруска.
9. Почему колебания трифилярного подвеса должны быть малыми?
10. Выведите рабочую формулу (15). Что такое  $M$  в этой формуле?
11. Опишите методику определения момента инерции диска.
12. Как осуществить проверку теоремы Штейнера?
13. Как определить погрешность измерения периода колебаний?
14. Как найти погрешность окончательного результата?
15. Как можно уменьшить погрешность измерений в этой работе?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. СПб: «Лань». – 2006. – 432 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. I. Механика. - М.: Физматлит, 2006. - 560 с.

*Издание вышло в свет в авторской редакции*

Отпечатано на участке оперативной полиграфии  
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 117 от «26» декабря 2013 г. Тираж 100 экз.