**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

И. Б. Богоряд

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ РАКЕТ

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по направлениям
«Ракетостроение и космонавтика»
и «Гидроаэродинамика и динамика полета»*



**Издательство Томского университета
2013**

УДК 532.516
ББК В253
Б 745

Р е ц е н з е н т – доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Биматов*

Богоряд И.Б.

Б 745 **Введение** в динамику ракет. Издание 2-е переработанное и исправленное.– Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 136 с.

ISBN 978-5-7511-1170-2

Излагаются основные подходы и задачи, связанные с синтезом математической модели ракеты с жидкими массами на борту как объекта автоматического регулирования. Обсуждаются некоторые динамические свойства такой механической системы. Описаны наиболее известные методы решения гидродинамических задач, связанных с расчетом коэффициентов уравнений возмущенного движения.

Для студентов физико-технических специальностей университетов.

УДК 532.516
ББК В253

ISBN 978-5-7511-1170-2 © Богоряд И.Б., 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Динамика твердого тела, в полости которого сдержится жидкость со свободной поверхностью, составляет один из важных современных разделов механики. Помимо теоретического значения этот раздел представляет прикладной интерес для практики проектирования баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов, снабженных жидкостными ракетными двигателями.

Круг проблем, изучаемых в динамике таких систем, условно можно разделить на две части:

– построение адекватной математической модели системы (или, что то же самое, обоснование ее динамической схемы);

– исследование динамических свойств и устойчивости программного (невозмущенного) движения системы, главным образом управляемого.

Решение этих проблем требует применения знаний из ряда разделов механики (теоретическая механика, гидромеханика, механика деформируемого твердого тела и др.) и смежных дисциплин (баллистика, теория колебаний и устойчивости, автоматическое регулирование, методы математической физики и др.)

При написании пособия учитывалось, что этому курсу динамики предшествуют лекции по перечисленным выше дисциплинам. Во-вторых, использовались имеющиеся методически совершенные учебные пособия для студентов высших технических учебных заведений, такие как [1, 3]. Поэтому главное внимание уделено ставшим классическими в ракетостроении «опорным» вопросам синтеза линейной динамической схемы ракет с учетом подвижности компонент жидкого ракетного топлива в баках.

Книга написана по материалам лекций, которые читаются студентам физико-технического факультета Томского госуниверситета, обучающимся по специальности «баллистика» (направление – аэродинамика, баллистика, динамика полета).

ВВЕДЕНИЕ

Современная межконтинентальная баллистическая ракета (МБР) или ракета-носитель космического аппарата (РНКА) представляют собой сложную энергонасыщенную динамическую систему, состоящую из тысяч элементов, устройств, агрегатов, приборов и т.д. Эта система отражает самые передовые достижения во многих отраслях науки, техники и производства, таких как механика, химия, электроника, машиностроение, электротехника, приборостроение, металлургия и т.д. и т.п.

Высокий уровень и совершенство объектов ракетно-космической техники отражают меру той ответственности задач, которые решаются этой техникой, будь то боевые, научные или экономические задачи.

Все эти задачи связаны с доставкой полезного груза (боевой блок, космический аппарат) в заданную точку на Земле или в космическом пространстве. И в любом случае мы имеем дело с летательным аппаратом массой порядка 100 тонн, снабженного энергетической установкой мощностью в миллионы киловатт и оснащенного приборами прецизионного управления с относительными ошибками порядка $10^{-5} \ldots 10^{-6}$ измеряемой величины (время, скорость и др.)

Создание таких ракетно-космических комплексов осложняется многими ограничениями и требованиями, зачастую противоречивыми. Например, массогабаритные параметры МБР, стартующей с железнодорожной платформы, должны укладываться в требования, принятые в этом виде транспорта (радиусы разворотов, нагрузки на ось и т.д.). Свои ограничения выставляют конструкторы подводных лодок, автомобильных шасси.

Создание нового ракетного (РК) или ракетно-космического (РКК) комплекса является крупной дорогостоящей программой государственного масштаба. Достаточно напомнить, что к реализации суперпроекта «Энергия-Буран» были привлечены более 1200 НИИ, КБ, заводов.

Началу работ предшествует аналитический военно-политический и военно-технический прогноз стратегической обстановки в мире на 10–20 лет вперед. Результат этого прогноза – документ «Тактико-технические требования Министерства обороны» (ТТТ) к конкретному РК или РКК в целом и к его составным частям, одной из которых является собственно МБР или РНКА. Постановление о создании нового комплекса утверждает руководство страны.

Чтобы представить основные положения ТТТ и место в них динамики ракеты – предмета наших интересов в этих лекциях, перечислим основные положения, определяющие облик и главные характеристики одного из реальных ракетных комплексов, созданных в КБ «Южное».

Итак об основных положениях ТТТ по этому комплексу:

1. Тип ракетного комплекса: стационарный с высоко защищенными от наземного ядерного взрыва (до 100 кг/см^2) одиночными удаленными шахтными пусковыми установками (ПУ) (могут быть и другие виды старта – из подводной лодки, мобильный – железнодорожный, грунтовый).

2. Способ старта: из шахты с помощью маршевого двигателя (могут быть другие способы – из транспортно-пускового контейнера с помощью порохового аккумулятора давления или маршевого двигателя, с пускового стола на полигоне и др.).

3. Тип и класс ракеты: МБР, жидкостная полностью ампулизированная; стартовый вес 210 тонн, в т.ч., жидкое топливо 190 тонн; вес разделяющейся головной части (РГЧ) 8,5 тонн (могут быть еще оперативно-тактические, твердотопливные, головная часть – моноблок и др.).

4. Вид боевого оснащения: РГЧ с 10 боевыми блоками (ББ) мощностью 0,5 Мт каждый и эффективным комплексом средств противодействия ПРО противника. Обеспечивает поражение до 10 целей (точечных и площадных) на прямоугольнике ≈300000 кв. км (500×600 км), обеспечивает оптимальное распределение ББ по целям на всех вероятных театрах военных действий (еще может быть обычный заряд).

5. Тип системы управления: автономная, инерциальная, на базе БЦВМ (могут быть еще с астрокоррекцией, активного наведения, командная).

6. Максимальная прицельная дальность стрельбы: 11000 км (с вероятностью p=0,997)

7. Точность стрельбы: ±0,65 км. Задается по формуле

$$\frac{\left|\Delta L\right|_{P=0,993}+\left|\Delta z\right|_{P=0,993}}{2}=0,65\,\text{км}.$$

Это очень жесткое требование. Поясним примером. Пусть отклонение в 0,65 км вызвано только одним фактором – ошибкой в определении продольной составляющей вектора скорости V_x в момент подачи команды на отделение ББ.

Пусть для дальности стрельбы L = 10000км эта скорость

$$V_x \cong 6500\,\text{м/с} \text{ и } \frac{\partial L}{\partial V_x}=5000\frac{\text{м}}{\text{м/с}}=5000c$$

Предельное отклонение по дальности задано

$$\Delta L=\frac{\partial L}{\partial V_x}\Delta V_x=650\text{м},$$

т.е. ошибка определения V_x не должны превышать

$$\Delta V_x=\frac{650}{5000}=0,13\ м/с\,.$$

Это составляет $2\cdot10^{-5}$ измеряемой величины (6,5 км/с). Так как на дальность влияют еще многие другие ошибки, то погрешность $\frac{\Delta V_x}{V_x}$ должны быть не более 10^{-5}.

Обобщенный показатель надежности: $P_{ОБ}$ =0,93. Он определяется по формуле

$$P_{ОБ}=\underset{0,997}{P_{БГ}}\cdot\underset{0,993}{P_{СТ}}\cdot\underset{0,96}{P_{ПР}}\cdot\underset{0,99}{P_{РГ}}\cdot\underset{0,997}{P_{ББ}}\cdot\underset{0,993}{P_{\Delta}},$$

где $P_{БГ}$ – вероятность выполнения требований по боеготовности (старт через установленное время от момента получения команды),

$P_{СТ}$ – вероятность безотказной работы всех наземных и бортовых систем и агрегатов в процессе старта,

$P_{ПР}$ – полетная надежность ракеты от запуска ДУ до отделения головной части,

$P_{РГ}$ – надежность работы головной части на участке разведения ББ,

$P_{ББ}$ – вероятность преодоления ПРО и достижения цели в рабочем состоянии,

P_{Δ} – вероятность выполнения требований по точности стрельбы.

Каждый из этих показателей надежности является, в свою очередь, произведением вероятностей составляющих его подсистем.

Так, полетная надежность есть произведение вероятностей безотказной работы ДУ I и II ступеней, системы управления, системы разделения ступеней, отделения головной части и т.д.

И эти составляющие, в свою очередь, включают в себя десятки и сотни устройств, элементов следующего уровня «малости» и т.д. Как достигаются такие показатели надежности? За все нужно «платить». Так, решение проблемы надежности СУ достигается увеличением ее габаритно-весовых характеристик в 2–3 раза и стоимости – в ≈ 10 раз. Это требует применения десятков тысяч электрорадиоэлементов специальной серии, проходящих при изготовлении тройной контроль, тренировку, отбор; троированием каналов вычислительного комплекса; дублированием электрических цепей и элементов; проведением нескольких циклов лабораторно-отбраковочных и стендовых испытаний с имитацией возможных сбоев в крайних режимах эксплуатации и т.д.

8. Время пуска из полной боевой готовности: 62 с. (Для сравнения в США Менинтмен–III – 30 с). Но там твердотопливный двигатель, а не ЖРД, там не нужна предстартовая подготовка, и, главное, – это непрерывно работающая командная часть СУ в процессе всего времени нахождения на боевом дежурстве. Отсюда быстрый выход из строя командных приборов, повышенная опасность несанкционированного пуска и другие недостатки.

9. Стойкость ракеты к поражающим факторам ЯВ.

10. Гарантированный срок пребывания на боевом дежурстве: 10 лет.

11. Боевое применения: любые метеоусловия при $-50^{\circ} \le t \le 50^{\circ}$C, ветер до 25 м/с (у Земли) до и после ядерного воздействия по боевому ракетному комплексу.

Классическая схема разработки ракетного комплекса с «нуля» включает несколько этапов, аналогичных по содержанию методу последовательных приближений:

- Аванпроект: грубые оценки («прикидки») массогабаритных и энергетических характеристик, учитывающие прогнозные (достижимые) через 5–10 лет показатели совершенства ДУ, СУ, конструкционных материалов и т.д. Формирование облика комплекса.
- Эскизный проект: относительно точные достижимые характеристики с учетом конкретных данных по компановке, массогабаритным параметрам, аэродинамике, теплозащите, прочности,

составу и характеристикам приборов и устройств СУ, конструкции стартового комплекса и т.д. Уточнение по сравнению с Аванпроектом габаритов, весовых параметров, точностей и режимов работы отдельных узлов и устройств.

- Разработка конструкторской документации. Опять, очередное уточнение возможностей ДУ, аэродинамических характеристик, алгоритмов управления и т.д.
- Экспериментальная отработка (лабораторные, стендовые, динамические, статические и другие испытания). И опять уточнение отдельных конструкторских решений, баллистических и динамических свойств РК (РКК).
- Изготовление опытных образцов для огневых, стендовых и летных испытаний.
- И, наконец, летно-конструкторские испытания и государственные сдаточные испытания.

Каково место **Динамики** на этих этапах разработки, и что, собственно, она имеет целью своих исследований?

Динамика занимается изучением устойчивости управляемого программного движения ракеты. Более конкретно:

✓ Обоснованием динамических свойств ракеты как объекта регулирования.

✓ Выдачей исходных данных для проектирования системы стабилизации объекта в его пространственном движении (т.е. по каналам тангажа, рысканья, крена).

Из этого ясно, что динамика как компонента процесса проектирования присутствует в большей или меньшей степени на всех этапах.

«Динамики» включаются в процесс проектирования, когда «баллистиками» по рассчитанным номинальным значениям всех параметров ракеты и системы управления установлено программное движение (законы изменения угла тангажа $\vartheta_{пр}(t)$, изменения скорости $\bar{V}_{пр}(t)$, высоты и дальности во времени, просчитаны в этом случае аэродинамические и тепловые нагрузки). В программном движении МБР угол рысканья $\psi(t) \equiv 0$, так же как и угол крена $\gamma(t) \equiv 0$. Причем эти расчеты проводятся в условиях стандартного ветра и отсутствия других случайных воздействий и погрешностей при изготовлении изделия и системы управления (отклонения от номиналов веса, размеров, посадочных мест, перекосы и т.д.). Кроме того, предполагается, что в программном движении ракета ведет себя как абсолютно

жесткое твердое тело: упругие деформации отсутствуют, жидкость в баках не плещется.

В действительном движении ракета представляет собой деформируемую механическую систему: корпус изгибается, жидкое топливо плещется в баках, на ракету действуют связанные с этим дополнительные сосредоточенные и распределенные нагрузки. Более того, в действительном движении на ракету действуют силы ветра, а ее параметры и параметры СУ известны с ошибками.

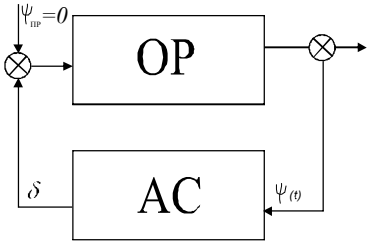


Рис. 0.1

Задача динамиков состоит в том, чтобы, во-первых, выяснить характер влияния этих факторов (деформируемость системы, погрешность определения ее параметров и параметров внешней среды) на действительное движение системы (насколько оно сильно отличается от программного) и дать исходные данные для синтеза автомата стабилизации (АС). АС имеет своей задачей удержать движение вблизи (в нужных пределах) программного движения. Схематически это представлено на рис. 0.1.

В данном пособии рассмотрено в основном математическое моделирование объекта регулирования «ОР», когда в динамической схеме учитывается подвижность жидкого наполнения топливных баков.

Глава 1

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. УПРОЩАЮЩИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Параметры программной траектории (или по-другому – невозмущенного движения) рассчитываются при номинальных (идеальных) значениях параметров ракеты (весовые, геометрические, центровочные), системы управления (отсутствие шумов, расчетные значения коэффициентов усиления и др.) и внешней среды (стандартное распределение по высоте давления, температуры в атмосфере, стандартный геопотенциал, отсутствие ветра).

На самом деле при каждом пуске каждой ракеты эти параметры отличаются от номинальных. Это приводит к тому, что действительное движение будет отличаться от программного. Более того, к изменению программного движения приведет и то, что при его расчете (мы уже об этом говорили) не учитываются упругие колебания корпуса и отдельных конструкций и не учитывается подвижность жидкости в топливных баках.

При синтезе автомата стабилизации эти моменты нужно учитывать. Это значит, что в математической модели движения объекта появляются новые обобщенные координаты и, соответственно, уравнения (например, уравнения движения жидкости в подвижном баке, уравнения упругих деформаций).

Придадим этим соображениям математический характер, переведем их на язык формул.

1.1. Постановка задачи о возмущенном движении

Пусть действительное движение нашей системы описывается следующей задачей Коши:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(\bar{y}, \bar{z}), \qquad \bar{y}(t=0) = \bar{y}^0 , \tag{1.1}$$

где $\bar{f}$ – функция (векторная) векторных же аргументов $\bar{y}$ и $\bar{z}$,

$\bar{y} = \bar{y}(y_1, y_2, ..., y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n)$ – вектор параметров движения (например, $y_1 = V_x$, $y_2 = V_y$ и т.д.),

$\bar{z} = \bar{z}(z_1, z, ...z_m)$ – вектор констант (например, z_1 – длина ракеты, z_2 – центр тяжести, z_3 – масса и т.д.),

И пусть программное (невозмущенное) движение описывается частным случаем (1.1):

$$\frac{d\bar{y}_{np}}{dt} = \bar{f}_{np}(\bar{y}_{np}, \bar{z}_н), \qquad \bar{y}_{np}(t=0) = \bar{y}^0_{np}. \tag{1.2}$$

Причем будем полагать, что

$$\bar{y} = \bar{y}_{np} + \Delta\bar{y}, \quad \bar{z} = \bar{z}_H + \Delta\bar{z},$$

где $\Delta\bar{y}$ и $\Delta\bar{z}$ – векторы отклонения программных и номинальных значений параметров движения $\bar{y}_{np}$ и констант $\bar{z}_H$ соответственно. Будем считать их малыми (~ε).

Возмущенное движение будем характеризовать векторами

$$\Delta\bar{y} = \bar{y} - \bar{y}_{np}, \quad \text{и} \quad \Delta\bar{z} = \bar{z} - \bar{z}_H. \tag{1.3}$$

Вычтем (1.2) из (1.1) и получим уравнения возмущенного движения

$$\frac{d\Delta\bar{y}}{dt} = \bar{f}(\bar{y}_{np} + \Delta\bar{y}, \quad \bar{z}_H + \Delta\bar{z}) - \bar{f}_{np}(\bar{y}_{np}, \bar{z}_H) \tag{1.4}$$

Разложим первое слагаемое в ряд Тейлора в окрестности $\Delta\bar{y} = 0$, $\Delta\bar{z} = 0$:

$$\bar{f}(\bar{y},\bar{z}) = \bar{f}(\bar{y}_{ПР},\bar{z}_H) +$$
$$+(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\Delta y_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\Delta y_n)\cdot \bar{i}_1 +$$
$$+(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2}(\Delta y_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_2^2}(\Delta y_2)^2 + ... + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_n^2}(\Delta y_n)^2)\cdot \bar{i}_1 +$$
.....
$$+(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\Delta y_2 + ... + \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\Delta y_n)\cdot \bar{i}_2 +$$
$$+(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2}(\Delta y_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_2^2}(\Delta y_2)^2 + ... + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_n^2}(\Delta y_n)^2)\cdot \bar{i}_2 +$$
.....
$$+(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\Delta z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_2}\Delta z_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial z_m}\Delta z_m)\cdot \bar{j}_1 +$$
$$+(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(\Delta z_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2}(\Delta z_2)^2 + ... + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_m^2}(\Delta z_m)^2)\cdot \bar{j}_1 +$$
.....
$$+(\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\Delta z_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_2}\Delta z_2 + ... + \frac{\partial f_2}{\partial z_m}\Delta z_m)_{\Delta\bar{y}=\Delta\bar{z}=0}\cdot \bar{j}_2 +$$
$$+(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2}(\Delta z_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2}(\Delta z_2)^2 + ... + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_m^2}(\Delta z_m)^2)\cdot \bar{j}_2 +$$
.....

Подставим это в (1.4) и запишем в матричном виде

$$\frac{d\Delta\bar{y}}{dt} = \Delta\bar{f} + \left\|P_1\right\|\cdot\Delta\bar{y} + \left\|P_2\right\|\cdot(\Delta\bar{y})^2 + ... + \left\|P_{k1}\right\|\cdot(\Delta\bar{y})^{k1} +$$
$$+ ... + \left\|\Pi_1\right\|\cdot\Delta\bar{z}_1 + \left\|\Pi_2\right\|\cdot(\Delta\bar{z})^2 + ... + \left\|\Pi_{k2}\right\|\cdot(\Delta\bar{z})^{k2} + ... \qquad (1.5)$$

Здесь

$$\Delta\bar{f} = \bar{f}(\bar{y}_{пр},\bar{z}_H) - \bar{f}_{пр}(\bar{y}_{пр},\bar{z}_H)$$

и

$$\left\|P_{k1}\right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^{k1} f_1}{\partial y_1^{k1}} & \dfrac{\partial^{k1} f_1}{\partial y_2^{k1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k1} f_1}{\partial y_n^{k1}} \\ \dfrac{\partial^{k1} f_2}{\partial y_1^{k1}} & \dfrac{\partial^{k1} f_2}{\partial y_2^{k1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k1} f_2}{\partial y_n^{k1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{k1} f_n}{\partial y_1^{k1}} & \dfrac{\partial^{k1} f_n}{\partial y_2^{k1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k1} f_n}{\partial y_n^{k1}} \end{array} \right\|_{\substack{\Delta\bar{y}=0 \\ \Delta\bar{z}=0}},$$

$$\left\|\Pi_{k2}\right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^{k2} f_1}{\partial z_1^{k2}} & \dfrac{\partial^{k2} f_1}{\partial z_2^{k2}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k2} f_1}{\partial z_m^{k2}} \\ \dfrac{\partial^{k2} f_2}{\partial z_1^{k2}} & \dfrac{\partial^{k2} f_2}{\partial z_2^{k2}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k2} f_2}{\partial z_m^{k2}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{k2} f_n}{\partial z_1^{k2}} & \dfrac{\partial^{k2} f_n}{\partial z_2^{k2}} & \cdots & \dfrac{\partial^{k2} f_n}{\partial z_m^{k2}} \end{array} \right\|_{\substack{\Delta\bar{y}=0 \\ \Delta\bar{z}=0}}.$$

1.2. Линеаризация уравнений возмущенного движения

Теперь о линеаризации последнего уравнения (1.5). Решение этого уравнения – нелинейного, высокого порядка ($n>>1$), с переменными коэффициентами – весьма затруднительно, громоздко, неэффективно – проводится только численными методами, поэтому и весьма неинформативно. Поэтому анализ динамики проводится обычно по линейному приближению (1.5).

Дело в том, что, как уже отмечалось, возмущения обобщенных координат Δy_i малы как в связи с малостью возмущений параметров (констант) Δz_j, так и благодаря наличию в системе АС, призванного минимизировать возмущения компонент вектора $\Delta\bar{y}$. Поэтому Δy_i и Δz_j можно рассматривать как малые параметры задачи, а само уравнение (1.5) – как разложение $\bar{f} - \bar{f}_{np}$ в ряд по степеням этих малых параметров.

Линеаризация уравнения (1.5) заключается в пренебрежении в нем малыми более высокого порядка, чем первый (т.к. $\varepsilon >> \varepsilon^2 >> \varepsilon^3 \ldots$).

В результате получаем из (1.5) уравнение возмущенного движения в линейном (или первом) приближении

$$\frac{d\Delta\bar{y}}{dt} = \Delta\bar{f} + \left\| P_1 \right\| \cdot \Delta\bar{y} + \left\| \Pi_1 \right\| \cdot \Delta z_1 + \mathrm{O}\left((\Delta\bar{y})^2 + (\Delta\bar{z})^2 \right). \quad (1.6)$$

Дополним их начальными условиями

$$\Delta\bar{y}(t=0) = \Delta\bar{y}^0,$$

или в развернутом виде

$$y_i(t=0) = y_i^0, \;\; \dot{y}_i(t=0) = \dot{y}_i^0 \;\; (i = 1,2,...,n), \quad (1.7)$$

В дальнейшем предстоит наполнить задачу Коши (1.6) – (1.7) конкретным физическим содержанием (заменить символы $\bar{y}$ и $\bar{z}$ параметрами и константами нашей механической системы) и провести некоторый анализ ее динамических свойств.

Уравнения (1.6), описывающие процессы и явления в возмущенном движении, назовем динамической схемой нашей системы в линейном приближении.

Если бы нам не удалось по каким-либо причинам ограничиться линейным приближением и в (1.5) назначить $k_1>1$ и $k_2>1$, то получили бы нелинейную динамическую схему.

Теперь о том, почему в (1.5) обычно достаточно ограничиться $k_1=k_2=1$. Дело в том, что на практике отклонения $\left|\Delta\bar{z}\right|$ (константы) от номиналов малы, а так как движение управляемое, то малыми являются и отклонения от программных параметров движения $\left|\Delta\bar{y}\right|$. Это первый аргумент в пользу линеаризации. Второй аргумент предоставляют нам известные теоремы Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения.

Приведем некоторые определения устойчивости (по А.М. Ляпунову) .

Определение 1. Невозмущенное движение устойчиво, если для всех возмущенных движений, которые описываются обобщенными координатами $\Delta y_i(t)$, существуют такие положительные $\varepsilon_i > 0$ и $\eta_i(\varepsilon) > 0$, что если $\left|\Delta y_i(t_0)\right| \le \eta_i(\varepsilon)$, то при $t > t_0$ $\left|\Delta y_i(t)\right| < \varepsilon_i$.

Определение 2. Если в условиях определения 1 имеет место предельная оценка

$$\lim_{t\to\infty} \Delta y_i(t) = 0, \quad i = 1,2,...,n,$$

то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

Определение 3. Невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале времени $[t_1, t_2]$(техническая устойчивость), если для всех возмущенных движений $\Delta y_i(t)$ существуют такие $\varepsilon_i > 0$ и $\eta_i(\varepsilon) > 0$, что если $|\Delta y_i(t_0)| \le \eta_i(\varepsilon)$, то $|\Delta y_i(t)| < \varepsilon_i$ при $t_1 < t < t_2$.

Эти определения справедливы для возмущенных движений независимо от того, описываются ли они системами линейных или нелинейных уравнений, являются ли коэффициенты этих уравнений постоянными или зависящими от времени. Однако на практике из-за сложности анализа нелинейных уравнений ограничиваются исследованием линейного приближения. Основанием для такого упрощенного подхода к исследованию устойчивости являются следующие теоремы А.М.Ляпунова.

Теорема I. Если характеристическое уравнение системы линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет только корни с отрицательными вещественными частями, т.е. невозмущенное движение в линейном приближении устойчиво, то устойчиво будет и невозмущенное движение в приближениях более высокого порядка.

Теорема II. Если характеристическое уравнение системы линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, т.е. невозмущенное движение в линейном приближении неустойчиво, то неустойчивым будет и невозмущенное движение в приближениях более высокого порядка.

Теорема III. Если характеристическое уравнение системы линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет нулевые или чисто мнимые корни, то устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения более высокого порядка, чем первый, не следует из устойчивости или неустойчивости линейного приближения.

1.3. Гипотеза замороженных коэффициентов. Примеры

Дальнейшее упрощение математического анализа устойчивости связано с введением понятия локальной устойчивости. Дело в том,

что аналитическое решение системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в общем случае получить нельзя. Но в рассматриваемых нами системах за характерное время возмущенного движения коэффициенты уравнений движения мало изменяются. Например, период колебаний твердого тела $T_\psi \sim 1$ с, в то время как характерное время процесса имеет длительность $T \sim 10^1 \ldots 10^3$с, поэтому за время $t \sim T_\psi$ относительное изменение параметров составляет величину порядка $10^{-1} \ldots 10^{-3}$, что сопоставимо с точностью определения некоторых динамических коэффициентов. Поэтому на малом интервале времени коэффициенты считаются постоянными (замороженными).

Под локальной устойчивостью (неустойчивостью) невозмущенного движения при $t > t_0$ понимается устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения системы с постоянными коэффициентами, равными их значениям при $t = t_0$. При этом движение системы развивается из некоторого начального состояния, порожденного действием внешних возмущений при $t \leq t_0$. При $t > t_0$ эти возмущения отсутствуют.

С понятием устойчивости тесно связано понятие управляемости объекта регулирования. Управляемость ОР не имеет количественных оценок, она характеризуется реакцией параметров его движения на управляющие воздействия. Интуитивно понятно, что управляющие воздействия должны быть такой величины и с такими динамическими характеристиками, чтобы с необходимой эффективностью отрабатывать (компенсировать) рассогласование программных и действительных параметров, которое вызвано возмущающими факторами.

Остановимся на особенностях, определяющих облик синтезируемой далее динамической схемы:

1. Движение ракеты проходит в сильном силовом поле массовых сил (ускорение на активном участке имеет порядок $10g_0$, где g_0 – ускорение земного тяготения).

2. Корпус ракеты абсолютно жесткий.

3. Система «сухая» ракета + жидкость в ее отсеках (баках) обладают общей осью симметрии.

4. Возмущенное движение описывается системой дифференциальных уравнений большой размерности из-за наличия жидких масс со свободными поверхностями.

5. Возмущенное движение носит колебательный характер.

6. Система неконсервативна из-за подкачки в нее энергии через исполнительные органы АС.

7. Диссипация энергии в возмущенном движении за период колебаний мала в сравнении с ее общим запасом.

Эти и другие особенности могут приводить к тому, что в процессе движения в системе возникают сложные виды динамической неустойчивости* из-за паразитных обратных связей в замкнутом контуре ОР–АС, вследствие которых происходит перекачка энергии из ее источников в отдельные элементы системы.

Поясним наглядным примером возникновение паразитной обратной связи в случае изгибных колебаний корпуса в плоскости рыскания.

В начале предположим, что корпус ракеты абсолютно жесткий (рис. 1.1. *а*). На измеренный угол рыскания ψ командные приборы реагируют выдачей сигнала исполнительным органам системы управления. В соответствии с этим сигналом рули отклоняются на угол δ_1, что создает момент, возвращающий ось ракеты в плоскость стрельбы.

Пусть теперь корпус ракеты упругий и совершает изгибные колебания (как, например, тонкостенный стержень) в плоскости рыскания (рис. 1.1*в*). Вектор скорости центра масс ракеты, как и выше, отклонен от плоскости стрельбы на угол ψ.

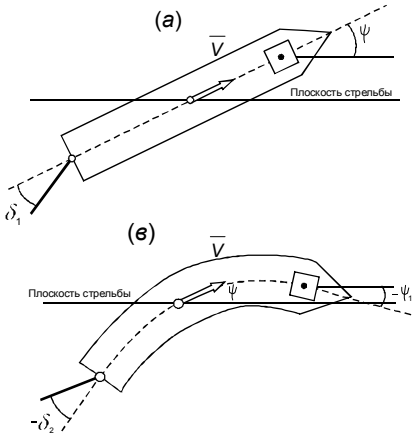


Рис. 1.1

Но в сечении, где расположены датчики (гироприборы), фиксируется в связи с изгибом оси ракеты не угол ψ, а угол ψ_1. В соответствии с этим командные приборы выдают сигнал на отклонение руля на

* Динамической неустойчивостью называется такое состояние системы, при котором работа вынуждающих сил превосходит работу сил диссипативных.

угол – δ_2. Управляющий момент при этом будет работать на увеличение угла рыскания ψ.

Ясно, что при определенном соотношении парциальных частот и фаз колебаний ракеты, как упругого стержня, и автомата стабилизации возможна перекачка энергии от ДУ в изгибные колебания корпуса.

Далее мы на простейших примерах напомним некоторые методы исследования и оценки устойчивости.

Очевидным является анализ локальной устойчивости непосредственным расчетам корней характеристического определителя системы.

Решение уравнения свободного возмущенного движения твердого тела относительно центра масс в плоскости *oxz*

$$\ddot{\psi} + C_{\psi\dot{\psi}}\dot{\psi} + C_{\psi\psi}\psi = 0,$$

$$C_{\psi\dot{\psi}} = -\frac{x_d}{2I_{yy}}\left(C_{x_0} + C_y^{\alpha'}\right)\rho S V_{ox}^2, \quad C_{\psi\psi} = \frac{m_y^{\omega} L}{2I_{yy}}\rho S V_0^2 \tag{1.8}$$

имеет вид

$$\psi = \psi_0 e^{pt}.$$

Из характеристического уравнения

$$p^2 + C_{\psi\dot{\psi}}\, p + C_{\psi\psi} = 0$$

находятся корни

$$p_{1,2} = -\frac{C_{\psi\dot{\psi}}}{2} \pm \sqrt{\frac{C_{\psi\dot{\psi}}^2}{4} - C_{\psi\psi}}\,. \tag{1.9}$$

Анализ корней говорит о том, что движение будет устойчивым, если, во-первых, $C_{\psi\dot{\psi}} > 0$ (это всегда имеет место в силу физической природы аэродинамического демпфирования) и, во-вторых, $C_{\psi\psi} > 0$ и $C_{\psi\psi} > \dfrac{C_{\psi\dot{\psi}}}{4}$. Последнее условие (условие периодичности движения) приводит к требованию $x_d < 0$, которое означает требование аэродинамической статической устойчивости (x_d – координата центра аэродинамического давления).

Очевидно, что информация о знаках вещественных частей корней характеристического уравнения (определителя) достаточна для суждения об устойчивости невозмущенного движения.

Однако анализ устойчивости при помощи решения характеристического уравнения (определителя) связан с трудностями иногда труднопреодолимыми, вычисления корней. Эти трудности возрастают с увеличением размерности определителя и особенно, когда в системе имеются близкие и кратные корни, т.е. когда матрица коэффициентов близка к вырожденной или вырождена (а это типичная для рассматриваемых объектов ситуация).

Известны ряд критериев оценки устойчивости, по которым не нужно вычислять корни системы, а достаточно провести качественный анализ характеристического уравнения. Так, в соответствии с критерием Раута-Гурвица система будет устойчивой (необходимое и достаточное условие), если в определителе Гурвица, составленного из коэффициентов характеристического уравнения

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0$$

и который имеет вид

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix},$$

все диагональные миноры положительны. Если все $a_i > 0$ (i=0,1,…n), то для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все четные (или нечетные) диагональные миноры определителя Гурвица были бы положительными.

В нашем примере (1.8), (1.9) определитель Гурвица есть

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{\psi\dot{\psi}} & 0 \\ 1 & C_{\psi\psi} \end{vmatrix}$$

и необходимыми и достаточными условиями устойчивости будут те же, что и при непосредственном анализе корней характеристического уравнения

$$\Delta_1 = C_{\psi\dot{\psi}} > 0, \quad \Delta_2 = C_{\psi\dot{\psi}} C_{\psi\psi} > 0$$

или, так как $C_{\psi\dot{\psi}} > 0$ по определению, то $x_d < 0$.

Рассмотрим теперь более сложный пример управляемого движения (без учета аэродинамического демпфирования – демпфирование идет в запас устойчивости) и, кроме того, пусть $x_d > 0$, т.е. ракета с точки зрения аэродинамической компоновки неустойчива:

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi} + C_{\psi\psi}\psi + C_{\psi\delta} = 0, \\ &T_2\ddot{\delta} + T\dot{\delta} + \delta = k_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + k_{\psi}\psi, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где k_{ψ}, $k_{\dot{\psi}}$ − коэффициенты усиления АС, δ − обобщенная координата парциальной системы АС.

Построим для (1.10) характеристические определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 + C_{\psi\psi} & C_{\psi\delta} \\ -pk_{\dot{\psi}} - k_{\psi} & T_2 p^2 + T_2 p + 1 \end{vmatrix}$$

и уравнение

$$L(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} &a_0 = T_2, \;\; a_1 = T_1, \qquad a_2 = 1 + C_{\psi\psi}T_2, \\ &a_3 = C_{\psi\psi}T_1 + k_{\dot{\psi}}C_{\psi\delta}, \;\; a_4 = C_{\psi\psi} + k_{\psi}C_{\psi\delta} \end{aligned}.$$

Определитель Гурвица в этом случае имеет вид

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Движение будет устойчивым, если $a_0, a_1, \ldots a_4$ положительны и

$$\Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

Если $C_{\psi\psi} > 0$, что соответствует аэродинамически неустойчивой компоновке $(x_d > 0)$, то, так как $C_{\psi\delta} > 0$, можно подобрать такие k_{ψ}, $k_{\dot{\psi}}$, что $\Delta_3 > 0$, и система будет устойчивой. Границу устойчивости найдем из уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta_3 = \left(T_1 - T_2 k_{\dot{\psi}} C_{\psi\delta}\right)\left(C_{\psi\psi}T_1 + k_{\dot{\psi}}C_{\psi\delta}\right) - \\ &-T_1^2\left(C_{\psi\psi} + C_{\psi\delta}k_{\psi}\right) = 0. \end{aligned}$$

В плоскости параметров автомата стабилизации k_ψ, $k_{\dot\psi}$ это уравнение имеет вид

$$C_1 k_{\dot\psi}^2 + C_2 k_{\dot\psi} + C_3 k_\psi = 0,$$

где

$$C_1 = -T_2 C_{\psi\delta}^2 < 0,$$

$$C_2 = -C_{\psi\delta} T_1 \left(T_2 C_{\psi\psi} - 1 \right) > 0, \quad C_3 = -T_1^2 C_{\psi\delta} < 0.$$

Область устойчивости наглядно можно представить на графике (рис .1.2). Очевидно, что $k_\psi = 0$ при $k_{\dot\psi} = 0$ и $k_{\dot\psi} = -\dfrac{C_2}{C_1} > 0$. . Далее, $\left(k_\psi\right)_{\max}$ достигается при

$$k_{\dot\psi} = -\frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1} > 0.$$

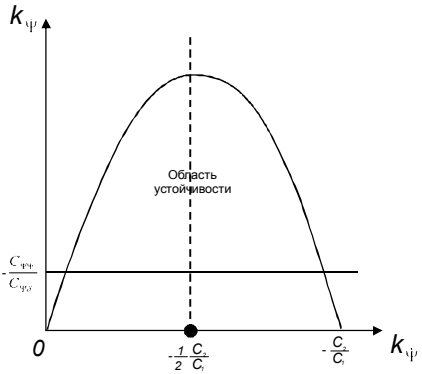


Рис. 1.2

Парабола $f\left(k_\psi\right) = C_1 k_\psi^2 + C_2 k_{\dot\psi}$ симметрична относительно $k_{\dot\psi} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{C_2}{C_1}$. Из условия $a_4 > 0$ следует

$$k_\psi > \frac{C_{\psi\psi}}{C_{\psi\delta}},$$

поэтому область устойчивости (см. рис.1.2) ограничена параболой (1.10) и прямой

$$k_\psi = -\frac{C_{\psi\psi}}{C_{\psi\delta}},$$

которая определяет границу области апериодической неустойчивости (аналог требования $C_{\psi\psi} > 0,\ C_{\psi\psi} > C_{\psi\dot{\psi}}^2$ в предыдущем примере).

1.4. Границы применимости гипотезы замороженных коэффициентов

Гипотеза замороженных коэффициентов, как и любая другая, корректна в определенных условиях. Следующим примером, где используется изящная техника анализа устойчивости, мы проиллюстрируем оценку границ применимости этой гипотезы.

Рассмотрим линейное уравнение свободных колебаний неуправляемой абсолютно жесткой ракеты в плоскости рыскания. Причем в смысле аэродинамики ракета устойчива (центр давления расположен ближе к корме, чем центр масс). Выпишем уравнение этой задачи

$$I_{yy}\ddot{\psi} + m_y^\omega \frac{\rho V^2}{2} SL\dot{\psi} + \left(C_{x_0} + C_y^\alpha\right)\frac{\rho V^2}{2} Sx_d\psi = 0$$

или в традиционном в динамике виде

$$\ddot{\psi} + C_{\psi\dot{\psi}}(t)\dot{\psi} + C_{\psi\psi}(t)\psi = 0, \qquad (1.11)$$

где учтено, что координата $x_d < 0$ (условие аэродинамической устойчивости),

$$C_{\psi\dot{\psi}} = m_y^\alpha \frac{\rho V^2}{2I_{yy}} SL, \quad C_{\psi\psi} = \left(C_{x_0} + C_y^\alpha\right)\frac{\rho V^2}{2} Sx_d$$

и все обозначения обычные для баллистики и динамики. Начальные условия здесь не играет роли.

В (1.11) коэффициент $C_{\psi\dot{\psi}}$ есть коэффициент демпфирования $\beta(t)$ (1/2 коэффициента затухания), а $C_{\psi\psi} = \omega^2$ – квадрат круговой частоты колебаний, так что само это уравнение – это уравнение линейного осциллятора с демпфированием. Поэтому (1.11) перепишем в виде

$$\ddot{\psi} + \beta(t)\dot{\psi} + \omega^2(t)\psi = 0.$$

Будем предполагать (это существенное, но физически оправданное в нашей задаче предположение), что коэффициенты $C_{\psi\dot{\psi}}(t)$ и $C_{\psi\psi}(t)$ –

монотонные функции времени (т.е. на рассматриваемом интервале времени их первые производные от времени знак не меняют).

Введем безразмерное время τ по формуле

$$\tau = \int_0^t \omega(t)dt.$$

Это значит, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \omega(t)\frac{d}{d\tau},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\omega(t)\frac{d}{d\tau}\right) = \omega(t)\frac{d}{d\tau}\left(\omega(t)\frac{d}{d\tau}\right) = \tag{1.12}$$

$$= \omega(t)\frac{d\omega}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\omega^2\frac{d^2}{d\tau^2}.$$

Поэтому из (1.12) имеем

$$\omega^2\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \omega(t)\frac{d\omega}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} + \beta(t)\omega(t)\frac{d\psi}{d\tau} + \omega^2\psi = 0$$

или

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{d\omega}{d\tau} + \beta\right)\frac{d\psi}{d\tau} + \psi = 0. \tag{1.13}$$

Решать это уравнение (с переменными коэффициентами) в квадратурах мы не умеем. Из-за этого поступим по-другому: выясним, когда, при каких условиях энергия колебаний со временем убывает (устойчивость) и когда увеличивается (неустойчивость).

Удельная энергия линейного осциллятора всегда может быть представлена в виде

$$E = \frac{k}{2}\left[\psi^2 + (\frac{\partial\psi}{\partial\tau})^2\right],\ k>0.$$

Найдем отсюда скорость изменения энергии

$$\frac{dE}{d\tau} = k\left(\psi\frac{d\psi}{d\tau} + \frac{d\psi}{d\tau}\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\right) = k\frac{d\psi}{d\tau}\left(\psi + \frac{d^2\psi}{d\tau^2}\right).$$

При $\frac{dE}{d\tau} > 0$ – колебания будут неустойчивыми, при $\frac{dE}{d\tau} < 0$ – устойчивыми.

Заменим в последнем выражении то, что в круглых скобках, с помощью (1.13)

$$\frac{dE}{d\tau} = -k\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega}\left(\frac{d\omega}{d\tau} + \beta\right)$$

или

$$\frac{dE}{d\tau} = -k\left(\frac{d\ln\omega}{d\tau} + \frac{\beta}{\omega}\right)\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2. \qquad (1.14)$$

Так как $\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2 > 0,$ то движение будет устойчивым (достаточное условие), если

$$\frac{d\ln\omega}{d\tau} + \frac{\beta}{\omega} \geq 0. \qquad (1.15)$$

Рассмотрим гипотетический пример колебаний при вертикальном старте абсолютно жесткой ракеты с постоянной скоростью на некотором промежутке времени (t_1, t_2), существенно большим, чем период колебаний.

В этом случае в коэффициентах $C_{\psi\psi}$ и $C_{\psi\dot{\psi}}$ все сомножители постоянны, кроме плотности воздуха, которая, как известно, меняется с высотой по экспоненциальному закону.

Поэтому можно принять, что*

$$\omega = C_{\psi\psi} = be^{-\frac{1}{2}\gamma t}, \quad \beta = ae^{-\gamma t}.$$

Подставим это в (1.15) и получим достаточное условие устойчивости

$$-\frac{1}{2}\gamma + ae^{-\gamma t} \geq 0,$$

т.е., начиная с некоторого $t^* > -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{\gamma}{2a}$, движение будет неустойчивым несмотря на то, что условие статической аэродинамической устойчивости (x_d<0) выполняется.

* Так как τ монотонная функция t, то (1.15) сохраняет силу и относительно переменной t.

$$\frac{d\ln\omega}{dt} + \beta \geq 0.$$

Глава 2

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ, ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОДВИЖНЫЙ ОТСЕК

2.1. Постановка краевой задачи

Пусть $\overline{V}_a$ – вектор абсолютной скорости абсолютно твердого отсека в инерциальной системе отсчета o^*,x^*,y^*,z^*

$$\overline{V}_a = \overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}, \tag{2.1}$$

где $\overline{V}_0$ – вектор скорости начала связанной (o, x, y, z) системы координат,

$\dot{\overline{\Omega}}$ – угловая скорость отсека

$\overline{r}$ – радиус-вектор в связанной системе координат.

Введем ограничения на класс рассматриваемых жидкостей и характер их движения:

1. Жидкость идеальная, несжимаемая, однородная. Это значит, что ее плотность ρ=const, а вязкие напряжения в ней отсутствуют и давление на любую элементарную площадку действует только по нормали к ней (касательных составляющих напряжений нет).

2. Движение жидкости происходит в потенциальном поле массовых сил. Если $\overline{g}$ – напряженность этого поля, то, значит, существует такая функция U, что

$$\overline{g} = \nabla U, \quad \nabla = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Например, если g – ускорение земного тяготения, то

$$U = -gx, \quad \nabla U = -g\overline{i}. \tag{2.2}$$

3. Начальное (при t=0) движение жидкости безвихревое

$$\mathrm{rot}\overline{u}\left(\overline{r},0\right) = 0,$$

где $\overline{u}(\overline{r},t)$ – вектор абсолютной скорости жидкости.

Совокупность этих допущений (ограничений) позволяет в соответствии с теоремой Лагранжа утверждать, что и при t>0 движение жидкости будет безвихревым

$$\mathrm{rot}\overline{u}\left(\overline{r},t\right)=0 \tag{2.3}$$

или, иными словами, вектор абсолютных скоростей жидкости $\overline{u}(\overline{r},t)$ имеет потенциал $\Phi^*\left(\overline{r},t\right)$ такой, что

$$\overline{u}\left(\overline{r},t\right)=\nabla\Phi^*\left(\overline{r},t\right),\ \ \overline{u}\left\{u,v,w\right\},\ \ \overline{r}\left\{x,y,z\right\}. \tag{2.4}$$

Поскольку, помимо условия незавихренности, течение еще должно удовлетворять условию неразрывности

$$\mathrm{div}\overline{u}=0,$$

то с учетом (2.4) в объеме жидкости должно выполняться уравнение Лапласа

$$\mathrm{div}\overline{u}=\mathrm{div}\left(\nabla\Phi^*\right)=\Delta\Phi^*,$$

$$\nabla\cdot\overline{u}=\mathrm{div}\overline{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^*\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial z^2}=\Delta\Phi^*=0.$$

В этом случае функция Φ^* называется гармонической или потенциальной.

Таким образом, в области Q, занятой жидкостью, требуется, чтобы

$$\Delta\Phi^*\left(\overline{r},t\right)=0,\quad \overline{r}\in Q. \tag{2.5}$$

Чтобы сформулировать краевую задачу о течении жидкости, целиком заполняющей подвижную полость (отсек), нужно (2.5) дополнить краевыми и начальными условиями. Пусть начальные условия задачи будут нулевыми (для простоты). На смоченной поверхности S задаются краевые условия непротекания – равенство нормальных составляющих скорости жидкости ($\partial\Phi^*/\partial n$) и нормальных составляющих скоростей твердого тела в этих точках S

$$\left.\frac{\partial\Phi^*}{\partial n}\right|_S=\left(\nabla\Phi^*\cdot\overline{n}\right)_S=\left(\overline{V}_0+\dot{\overline{\Omega}}\times\overline{r}\right)_S\cdot\overline{n}\ . \tag{2.6}$$

Следуя Н.Е.Жуковскому, будем разыскивать решение $\Phi^*(\bar{r},t)$ в виде суммы

$$\begin{aligned}
&\Phi^*(r,t)=\bar{\Phi}_1(\bar{r})\cdot\bar{V}_0(t)+\bar{\Phi}_2(\bar{r})\cdot\dot{\bar{\Omega}}(t),\\
&\bar{\Phi}_1=\bar{i}\Phi_{11}+\bar{j}\Phi_{12}+\bar{k}\Phi_{13},\\
&\bar{\Phi}_2=\bar{i}\Phi_{21}+\bar{j}\Phi_{22}+\bar{k}\Phi_{23},
\end{aligned}\qquad (2.7)$$

причем $\Delta\Phi_{1l}=0,\quad \Delta\Phi_{2l}=0,\quad (l=1,2,3)$.

Таким образом, $\Phi_{1l}(\mathrm{r}),\ (l=1,2,3)$ – потенциалы скоростей жидкости, порождаемые поступательными движениями твердого тела с единичной скоростью вдоль осей *ox*, *oy*, *oz* соответственно, $\Phi_{2l}(r)$ – то же самое, но вращательными движениями твердого тела относительно осей *ox*, *oy*, *oz* соответственно и также с единичными скоростями $\left(\dot{\Omega}_x=1,\ \dot{\Omega}_y=1,\ \dot{\Omega}_y=1\right)$.

Учитывая все это, выпишем краевые задачи для векторных потенциалов

$$\begin{aligned}
&\Delta\bar{\Phi}_1=0\ \text{ при }\ \bar{r}\in Q,\quad \frac{\partial\bar{\Phi}_1}{\partial n}=\bar{n}\qquad \text{при }\ r\in S,\\
&\Delta\bar{\Phi}_2=0\ \text{ при }\ \bar{r}\in Q,\quad \frac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial n}=\bar{r}\times\bar{n}\ \text{ при }\ r\in S
\end{aligned}\qquad (2.8)$$

и их компонент

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_{1l}=0\quad \text{при}\quad \bar{r}\in Q,\quad (l=1,2,3),\\
&\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial n}=n_x,\quad \frac{\partial\Phi_{12}}{\partial n}=n_y,\quad \frac{\partial\Phi_{13}}{\partial n}=n_z\ \text{ при }\ \bar{r}\in S,
\end{aligned}\qquad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_{2l}=0\quad \text{при}\quad \bar{r}\in Q,\quad (l=1,2,3),\\
&\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n}=yn_z-zn_y,\quad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}=zn_x-xn_z,\\
&\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial n}=xn_y-yn_x,\quad \text{при}\quad \bar{r}\in S,
\end{aligned}\qquad (2.10)$$

где $\bar{n}$ – вектор, внешний по отношению в жидкости нормали

$$\bar{n}=\bar{i}n_x+\bar{j}n_y+\bar{k}n_z,$$

а $n_{x,}\, n_y, n_z$ – косинусы углов между $\overline{n}$ и соответствующими осями системы координат *oxyz*

$$n_x = \cos(n,x),\quad n_y = \cos(n,y),\quad n_z = \cos(n,z).$$

Будем разыскивать решение краевых задач в предположении, что в начальный момент времени жидкость покоилась

$$\overline{V}_0(t=0)=0,\quad \dot{\overline{\Omega}}(t=0)=0.$$

В этом случае решение краевых задач (2.9) очевидно

$$\Phi_{11}=x,\quad \Phi_{12}=\text{y},\quad \Phi_{12}=z \quad \text{или} \quad \overline{\Phi}_1=\overline{r}. \qquad (2.11)$$

Вывод из (2.11): поступательное движение твердого тела не оказывает влияния на внутреннее движение жидкости, целиком заполняющей его отсек. Причем (это важно) решение (2.11) годится для любой формы отсека.

Из рассмотрения задачи (2.10) для Φ_{2l} можно сделать вывод, что эта составляющая потенциала также не зависит от закона движения твердого тела, она определяется исключительно геометрией отсека и может быть найдена для заданной геометрии бака раз и навсегда. Правда, решение этой задачи связано с определенными трудностями, тем большими, чем замысловатее геометрия отсека.

2.2. Относительное движение жидкости

В качестве примера анализа этой задачи без ее решения рассмотрим характер относительного движения жидкости в полости, вращающейся с угловой скоростью $\dot{\overline{\Omega}}(t)$. Форма полости не играет роли.

Пусть $\overline{u}'=\{u',v',w'\}$ – вектор искомой относительной скорости частиц жидкости. Его найдем, если из абсолютной $\overline{u}$ вычтем переносную $\dot{\overline{\Omega}}\times\overline{r}$

$$\overline{u}'=\nabla\Phi^*_{(V_0=0)}-\dot{\overline{\Omega}}\times\overline{r}=\overline{u}-\dot{\overline{\Omega}}\times\overline{r}.$$

В скалярном виде это будет

$$u=u'+(z\dot{\Omega}_y-y\dot{\Omega}_z),\quad v=v'+(x\dot{\Omega}_z-z\dot{\Omega}_x),$$
$$w=w'+(y\dot{\Omega}_x-x\dot{\Omega}_y)$$

По предположению, абсолютное движение жидкости безвихревое $(\mathrm{rot}\bar{u} = 0)$. Это значит, что

$$\left(\mathrm{rot}\bar{u}\right)_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\ \left(\mathrm{rot}\bar{u}\right)_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\mathrm{rot}\bar{u}\right)_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Заменим в этих формулах абсолютные скорости (составляющие) относительными и найдем, что

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = -2\dot{\Omega}_x,\ \ \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = -2\dot{\Omega}_y,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = -2\dot{\Omega}_z$$

или в векторном виде $\left(\mathrm{rot}\bar{u}'\right) = -2\dot{\bar{\Omega}}.$

Следовательно, безвихревое в абсолютном движении относительное движение жидкости завихренное и частицы жидкости имеют вращение, противоположное вращению твердого тела.

2.3. Давление в жидкости

Прежде всего, договоримся, что для описания течения жидкости в полости подвижного твердого тела вводятся две системы координат: абсолютная O^*,x^*,y^*,z^* и связанная с твердым телом O,x,y,z. Полагаем, что система твердое тело + жидкость обладает общей осью симметрии и ox является осью этой симметрии. Компоненты векторов смещения $\bar{R} = \{x(t), y(t), z(t)\}$ и поворота $\bar{\Omega}(t) = \{\vartheta, \psi, \gamma\}$ связанной системы отсчета относительно абсолютной и их производные по времени определяют возмущенное движение твердого тела. Так, что $\bar{V}_0(t) = \dot{\bar{R}}(t)$ и $\dot{\bar{\Omega}}(t)$ есть линейная и угловая скорости твердого тела в возмущенном движении.

Будем считать, что принятые ранее допущения о свойствах и характере течения жидкости сохраняются. В этих условиях вектор абсолютной скорости частиц жидкости обладает потенциалом скоростей

$$\bar{u} = \nabla\Phi^*\left(\bar{r}, t\right),$$

где $\overline{r} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z$ – радиус-вектор в связанной системе отсчета.

Преобразуем уравнения движения жидкости в форме Эйлера с учетом потенциальности поля скоростей.

Уравнение Эйлера в абсолютной системе отсчета имеет вид

$$\frac{d\overline{u}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \overline{g} = 0. \qquad (2.12)$$

Здесь $\frac{d}{dt}$ – полная производная в абсолютной системе отсчета, а вектор $\overline{u}$ есть

$$\overline{u} = \overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r} + \overline{u}', \quad \overline{u}' = \frac{d'\overline{r}}{dt}. \qquad (2.13)$$

Здесь $\overline{u}' = \{u', v', w'\}$ – вектор относительной скорости частиц жидкости,

$\frac{d'}{dt}$ – полная производная в связанной системе координат (в невозмущенном движении $\overline{u}' = 0$).

Перепишем (2.12) в связанной системе координат, вспоминая, что производная вектора $\overline{a}$ по времени в этом случае находится из формулы

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{d'\overline{a}}{dt} + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{a}.$$

Поэтому запишем вместо (2.12)

$$\frac{d'\overline{u}}{dt} + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \overline{g} = 0. \qquad (2.14)$$

Далее понадобятся известные преобразования:

$$\frac{d'\overline{u}}{dt} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{u}'\cdot\nabla)\overline{u}, \text{ и т.к. } \overline{u}' = \overline{u} - \left(\overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right), \text{ то}$$

$$(\overline{u}'\cdot\nabla)\overline{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 - \left[\left(\overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right)\cdot\nabla\right]\overline{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 -$$

$$-\nabla\left[\overline{u}\left(\overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right)\right] - \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{u}.$$

Теперь перепишем (2.14) вспоминая еще (2.2)

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left[u^2 - \overline{u}\cdot\left(\overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right) + \frac{1}{\rho}p + U\right] = 0.$$

Это уравнение Эйлера в связанной системе отсчета для случая безвихревого движения жидкости.

Заменим еще вектор $\bar{u}$ на его выражение через потенциал абсолютных скоростей $\left(\bar{u} = \nabla \Phi^*\right)$ и найдем, что

$$\nabla\left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla \Phi^*\right)^2 - \left(\bar{V}_0 + \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}\right) \cdot \nabla \Phi^* + \frac{p}{\rho} + g\bar{r}\right] = 0 .$$

Отсюда следует, что выражение в квадратных скобках не зависит от пространственных координат, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = &-\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\nabla \Phi^*\right)^2 + \\ &+ \left(\bar{V}_0 + \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}\right) \cdot \nabla \Phi^* + \bar{g} \cdot \bar{r} + c(t). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Выражение (2.15) в гидродинамике известно под названием интеграла Коши–Лагранжа. Произвольную функцию времени *c(t)* – постоянную интегрирования, – очевидно, можно найти, если давление известно хотя бы в одной точке жидкости при $t \geq 0$. В противном случае (2.15) позволяет находить разницу между давлениями в любых точках жидкости.

Глава 3

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОДВИЖНЫЙ ОТСЕК

Наличие у жидкости свободной поверхности принципиально меняет положение дел при описания движения жидкости в подвижном отсеке по сравнению с тем, что при полном заполнении отсека. Мы уже видели, что при полном заполнении отсека наличие жидкости не добавляет новых степеней свободы и движение жидкости описывается обобщенными координатами твердого тела:

$$\Phi^*(\bar{r},t) = \overline{\Phi}_1(r)\cdot\overline{V}_0(t) + \overline{\Phi}_2(\bar{r})\cdot\dot{\overline{\Omega}}(t). \qquad (3.1)$$

Обозначение и физический смысл векторных потенциалов $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ описаны формулами (2.7) и далее.

Пусть теперь жидкость имеет свободную поверхность (частичное заполнение отсека), которую обозначим через Σ. Ясно, что в этом случае в системе появляются новые степени свободы и, соответственно, новые обобщенные координаты, характеризующие движение свободной поверхности. Раз это так, то нужно сформулировать дополнительные соотношения и краевые условия на свободной поверхности.

Зададим уравнение свободной поверхности Σ в виде

$$F(\bar{r},t) = x - \varsigma(y,z,t) = 0. \qquad (3.2)$$

Здесь ς– новая неизвестная функция, которую назовем функцией формы свободной поверхности. И пусть в невозмущенном состоянии системы зеркало свободной поверхности жидкости Σ_0 – плоскость $x = 0$, перпендикулярная оси *ox*.

Сформулируем краевую задачу для потенциала абсолютных скоростей жидкости $\overline{\Phi}^*(\bar{r},t)$, когда жидкость имеет свободную поверхность и если абсолютная скорость твердого тела в инерциальной системе отсчета есть, как и прежде, в случае полного заполнения отсека жидкостью,

$$\overline{V}_a = \overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}}\times\bar{r}\ . \qquad (3.3)$$

Из уравнения неразрывности и с учетом предположения о безвихревом характере течения жидкости следует, что в объеме, занятом жидкостью, для вектора абсолютных скоростей жидкости $\overline{u} = \{u, v, w\}$ имеем

$$a) \quad \mathrm{div}\overline{u} = 0\,, \quad b)\, \overline{u} = \nabla \Phi^*\,, \quad c)\, \mathrm{div}\nabla \Phi^* = \Delta \Phi^*\,,$$

т.е.

$$\Delta \Phi^* = 0 \ \text{при} \ \overline{r} \in Q\,. \tag{3.4}$$

На смоченной поверхности потребуем выполнения условий непротекания – равенства нормальных к S составляющих абсолютных скоростей частиц жидкости $\left(\overline{u} \cdot \overline{n}\right)_S$ и твердой поверхности $\left(\overline{V}_a \cdot \overline{n}\right)_S$. С учетом (3.3) и (3.4) краевые условия непротекания записываются в виде

$$\overline{n} \cdot \nabla \Phi^* = \overline{n} \cdot \left(\overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right) \ \text{при} \ \overline{r} \in S$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \left(\overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right) \cdot \overline{n} \ \ \text{при} \ \overline{r} \in S\,. \tag{3.5}$$

Теперь о краевых условиях на свободной поверхности. Потребуем выполнения двух условий на Σ:

- динамическое. Оно отражает требование непрерывности напряжений при переходе через границу раздела сред газ–жидкость. Поскольку жидкость по предположению идеальная и полагая, что газ над Σ также идеальный и еще неподвижный, это условие сводится к следующему:

$$p\left(\overline{r}, t\right) = p_{газ} \quad \text{при} \ x = \varsigma\left(y, z, t\right) \ (\text{или} \ \overline{r} \in \Sigma\,). \tag{3.6}$$

- кинематическое. Оно устанавливает связь между скоростью частиц жидкости, принадлежащих Σ, и скоростью перемещения самой свободной поверхности. Из (3.2) получается, что эти скорости равны

$$\frac{dF}{dt} = 0 \ \text{или} \frac{dx}{dt} = \frac{d\varsigma}{dt}\,. \tag{3.7}$$

Для замыкания краевой задачи уравнение (3.4) и краевые условия (3.5) – (3.7) должны быть дополнены начальными условиями, к которым мы вернемся позже. А сейчас распишем более подробно краевые условия (3.6), (3.7).

В краевом условии (3.6) давление на Σ представим с помощью интеграла Коши–Лагранжа (2.15), учитывая там, что вектор ускорения

поля массовых сил направлен против оси o^*x^*. В этом случае получим на свободной поверхности $\left(x=\varsigma\left(y,z,t\right)\right)$:

$$\left[-\frac{\partial \Phi^*}{\partial t}-g\varsigma-\frac{1}{2}\left(\nabla\Phi^*\right)^2+\nabla\Phi^*\cdot\left(V_0+\dot{\bar{\Omega}}\times\bar{r}\right)\right]_{x=\varsigma}=c'\left(t\right), \quad (3.8)$$

где $c'(t)=c(t)+\dfrac{p_{газ}}{\rho}$.

Нужно не забывать, что в этой формуле

$$\Phi^*\Big|_{x=\varsigma}=\Phi^*\left(x=\varsigma\left(y,z,t\right),y,z,t\right).$$

Кинематическое краевое условие (3.7). Продифференцируем его по времени

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\varsigma}{\partial t}+\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\frac{dy}{\partial t}+\frac{\partial\varsigma}{\partial z}\frac{dz}{\partial t}.$$

Поскольку производные $\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}$ есть компоненты вектора относительной скорости жидкости $\bar{u}'\left(\bar{r},t\right)=\left\{u',v',w'\right\}$, вызванной возмущением свободной поверхности, то представим последнее соотношение в виде

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t}+\bar{u}'\cdot\nabla\varsigma=u'. \quad (3.9)$$

Вектор $\bar{u}'$ – новая неизвестная функция, которая появилась в связи с описанием деформации свободной поверхности кинематическим краевым условием в виде (3.9). Введем эту функцию в постановку задачи следующим образом. Будем разыскивать потенциал абсолютных скоростей в виде

$$\Phi^*\left(\bar{r},t\right)=V_0\left(t\right)\cdot\bar{\Phi}_1\left(\bar{r}\right)+\dot{\bar{\Omega}}\left(t\right)\cdot\bar{\Phi}_2\left(\bar{r}\right)+\Phi\left(\bar{r},t\right). \quad (3.10)$$

Здесь, так же как и прежде, $\bar{\Phi}_1=\left\{\Phi_{11},\Phi_{12},\Phi_{13}\right\}$ и $\bar{\Phi}_2=\left\{\Phi_{21},\Phi_{22},\Phi_{23}\right\}$ – векторные потенциалы скоростей жидкости, вызванные соответственно поступательными и вращательными движениями твердого тела с единичными скоростями. Причем при этих движениях твердого тела волны на свободной поверхности не возбу-

ждаются, как будто бы свободная поверхность – это плоскость Σ_0 в невозмущенном состоянии, перпендикулярная оси *ox*. Здесь полная аналогия с потенциалами $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ в задаче о движении жидкости, целиком заполняющей подвижный отсек. Так что краевые задачи для этих потенциалов имеют вид, представленный соотношениями (2.8) − (2.10).

Здесь нужно сделать важное отступление. В динамике ракет наибольшее распространение и практическое применение получили два подхода – две модели – к формулировке краевых задач для составляющих потенциала абсолютных скоростей $\Phi^*\left(\overline{r},t\right)$ в (3.10). Эти модели с точки зрения корректности эквивалентны, дальше мы это покажем. Отличаются они постулированием ориентации зеркала невозмущенной свободной поверхности и перераспределением физической «нагрузки» между составляющими Φ^*. Но, естественно, это перераспределение такое, что сумма составляющих в (3.10) справа дает краевую задачу для Φ^* (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) плюс необходимые начальные условия.

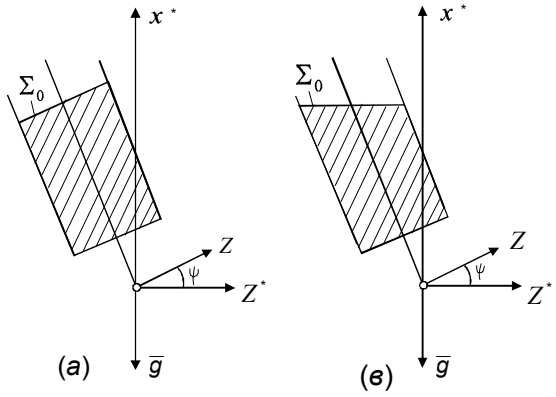


Рис. 3.1

Один из этих подходов принадлежит Г.С. Нариманову. Он предполагает, что при поворотах отсека относительно полюса О зеркало Σ_0 невозмущенной свободной поверхности совершает такой поворот, как будто бы жидкость была прикрыта невесомой жесткой крышкой, всегда перпендикулярной оси *ox* (рис. 3.1а). Эта модель называется моделью жесткой «крышки». Этой моделью мы и воспользовались, когда для потенциалов $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ в (3.10) приняли краевые условия в виде (2.8)–(2.10).

Другой подход (Б.И. Рабинович) – так называемая модель плавающей «крышки» – предполагает, что при поворотах отсека зеркало невозмущенной свободной поверхности Σ_0 всегда остается перпендикулярным вектору ускорения поля массовых сил $\bar{g}$ (рис.3.1в), т.е. сохраняет естественную пространственную ориентацию.

Продолжим формулировку краевых задач для составляющих Φ^* в (3.10). Потенциалу $\Phi(\bar{r},t)$ в (3.10) отводится такая роль: это потенциал скоростей относительных движений жидкости, так что вектор $\bar{u}'$ в (3.9) есть

$$\bar{u}' = \nabla\Phi . \tag{3.11}$$

При такой конструкции потенциала (3.10) первое слагаемое – это составляющая, связанная с переносным движением, а сумма второго и третьего слагаемых – составляющая, связанная с относительным движением жидкости.

Сформулируем вначале краевую задачу для $\Phi(\bar{r},t)$:

a) В объеме жидкости Q уравнение неразрывности с учетом (3.11) дает

$$\Delta\Phi(\bar{r},t) = 0, \quad \bar{r} \in Q . \tag{3.12}$$

b) На смоченной поверхности S выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad \bar{r} \in S . \tag{3.13}$$

c) На свободной поверхности Σ задается кинематическое краевое условие (3.9) с учетом (3.11)

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t} + \nabla\Phi\cdot\nabla\varsigma = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad r \in \Sigma . \tag{3.14}$$

Краевое условие (3.14) может быть переписано в несколько другом виде, удобном для некоторых последующих выкладок. Известно, что нормаль $\bar{n}$ к поверхности $F(\bar{r},t) = 0$ выражается соотношением

$$\bar{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

где $|\nabla F|$ – модуль вектора ∇F .

Из (3.2) имеем

$$\nabla F = \bar{i} - \bar{j}\frac{\partial\varsigma}{\partial y} - \bar{k}\frac{\partial\varsigma}{\partial z} = \bar{i} - \nabla\varsigma \;\; u \;\; |\nabla F| = \left[1 + (\nabla\varsigma)^2\right]^{1/2} .$$

Следовательно,

$$\bar{n} = \frac{\bar{i} - \nabla\varsigma}{\sqrt{1+(\nabla\varsigma)^2}} \;\; или \;\; \nabla\varsigma = \bar{i} - \bar{n}\sqrt{1+(\nabla\varsigma)^2} \; .$$

После подстановки последнего в (3.14) находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\varsigma/\partial t}{\sqrt{1+(\nabla\varsigma)^2}} \;\; при \;\; \bar{r} \in \Sigma \, . \qquad (3.15)$$

На свободной поверхности Σ, кроме кинематического, задается динамическое краевое условие, которое мы получим для Φ из (3.8), если заменим там Φ^* с помощью (3.10). После проведения этой подстановки найдем, что при $\bar{r} \in \Sigma$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \dot{\bar{V}}_0 \cdot \bar{\Phi}_1 + \ddot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2 + g\varsigma + \frac{1}{2}\left[\nabla\left(\dot{\bar{V}}_0 \cdot \bar{\Phi}_1\right)\right]^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\nabla\left(\dot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2\right)\right]^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \nabla\left(\bar{V}_0 \cdot \bar{\Phi}_1\right)\cdot\left(\dot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2\right) +$$
$$+ \left(\bar{V}_0 \cdot \Phi_1\right)\cdot\nabla\Phi + \nabla\left(\dot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2\right)\cdot\nabla\Phi -$$
$$- \left(\bar{V}_0 + \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}\right)\cdot\left[\nabla\left(\bar{V}_0 \cdot \bar{\Phi}_1\right) + \nabla\left(\dot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2\right)\cdot\nabla\Phi\right] = c'(t) \, .$$

Преобразуем это выражение, принимая во внимание, что:

во-первых, так как $\bar{\Phi}_1 = \bar{r}$, то $\nabla\left(\bar{V}_0 \cdot \bar{\Phi}_1\right) = \bar{V}_0$,

во-вторых, используя краевые условия для векторного потенциала $\bar{\Phi}_2$ (см.(2.8)), а также что $\frac{\partial}{\partial n} = \bar{n} \cdot \nabla$, можно получить

$$\left[\nabla\left(\dot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2\right) - \dot{\bar{\Omega}} \times r\right]\cdot\bar{n} = \left[\frac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial n} - \left(\bar{r} \times \bar{n}\right)\right]\cdot\dot{\bar{\Omega}} = 0$$

и, в третьих, не уменьшая общности, можно положить

$$c'(t) + \frac{1}{2}V_0^2 = 0 \, .$$

После проведения этих преобразований динамическое краевое условие на Σ приобретает такой вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g\varsigma + \dot{\bar{V}}_0 \cdot \bar{\Phi}_1 + \ddot{\bar{\Omega}} \cdot \bar{\Phi}_2 -$$
$$- \bar{V}_0\left(\dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}\right) - \frac{1}{2}\left(\dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}\right)^2 = 0 \quad при \;\; \bar{r} \in \Sigma. \qquad (3.16)$$

Осталось еще уточнить: что такое в этой формуле ς? От какого невозмущенного состояния отсчитывается ς в (3.16)? Понятно из всего хода вывода этого условия из интеграла Коши–Лагранжа (2.15), что здесь $\varsigma(y,z,t)$ есть функция формы свободной поверхности, невозмущенное состояние которой – плавающая «крышка», т.е. естественное положение зеркала в наклоненной на угол $\overline{\Omega}$ полости. Мы же формулируем краевую задачу для потенциала Φ по модели жесткой «крышки».

Поэтому нужно установить кинематическую связь между функциями формы свободной поверхности по упомянутым двум моделям.

Если временно обозначить функцию формы свободной поверхности по модели жесткой «крышки» через $\varsigma_1(y,z,t)$, то эта связь описывается формулой

$$\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2, \quad \varsigma_2 = (\bar{r} \times \bar{i}) \cdot \overline{\Omega}, \tag{3.17}$$

где ς – функция формы Σ по модели плавающей «крышки». Наглядный пример зависимости (3.17) для частного случая движения системы в плоскости рыскания $\left(\bar{V}_0 = \{0,0,v_z\},\ \bar{\Omega} = \{0,\psi,0\}\right)$ приведен на рис.3.2. В этом случае $(\bar{r} \times \bar{i}) = \bar{j}z - \bar{k}y$ и $\varsigma_2 = z\psi$ есть не что иное, как формула зеркала (плоскости) плавающей «крышки».

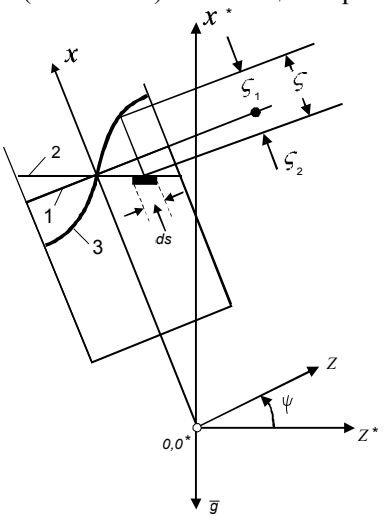


Рис. 3.2.
1 – жесткая «крышка»,
2 – плавающая «крышка», 3 – поверхность Σ

Итак, заменяем в (3.16) ς на сумму (3.17) (индекс в ς_1, как временно введенный, опускаем) и записываем динамическое краевое условие на свободной поверхности Σ по модели жесткой «крышки» в окончательном виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\nabla \Phi\right)^2+g\varsigma+\dot{\overline{V}}_0\cdot\overline{\Phi}_1+\ddot{\overline{\Omega}}\cdot\overline{\Phi}_2-\\&-\overline{V}_0\left(\dot{\overline{\Omega}}\times\bar{r}\right)-\frac{1}{2}\left(\dot{\overline{\Omega}}\times\bar{r}\right)^2-g\left(\bar{r}\times\bar{i}\right)\overline{\Omega}=0\end{aligned}\qquad(3.18)$$

Подводим итог. Вместо краевой задачи для потенциала $\overline{\Phi}^*\left(\bar{r},t\right)$ мы сформулировали в рамках модели жесткой «крышки» эквивалентную совокупность краевых задач для потенциалов $\overline{\Phi}_1\left(\bar{r}\right)$ и $\overline{\Phi}_2\left(\bar{r}\right)$ (см. (2.8)–(2.10)) и для потенциала $\overline{\Phi}\left(\bar{r},t\right)$ в виде (3.12), (3.13), (3.14), (3.18). Завершим формулировку этих задач заданием начальных условий:

$$\Phi\left(\bar{r},t=0\right)=\Phi^\circ\left(\bar{r}\right),\quad \varsigma\left(y,z,t=0\right)=\varsigma^\circ\left(y,z\right).\qquad(3.19)$$

При заданном законе движения твердого тела $\overline{V}_0(t)$ и $\overline{\Omega}\left(t\right)$ решение этих задач позволяет рассчитать движение жидкости и определить гидродинамические нагрузки, действующие на стенки отсека.

Глава 4

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пусть векторы $\overline{V}_0(t)$ и $\overline{\Omega}(t)$ в (3.1) и далее относятся к числу обобщенных координат, описывающих возмущенное движение твердого тела, т.е.

$$\overline{V}_0(t) = \overline{V}_д - \overline{V}_{пр}, \quad \overline{\Omega}(t) = \overline{\Omega}_д - \overline{\Omega}_{пр}.$$

Здесь индексом "пр" обозначены программные значения и индексом "*д*" – значения этих же обобщенных координат в действительном движении. Возмущенное движение будем рассматривать только в плоскости рыскания. Это существенное упрощение – независимое рассмотрение возмущенного движения в одной из плоскостей стабилизации системы. Оно наступает из анализа (подчеркнем) уже линеаризованных уравнений пространственного возмущенного движения твердого тела с жидкостью в его полости и когда система обладает, по крайней мере, двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. В основе этого упрощения лежит принцип суперпозиции линейных систем: ее отклик на сумму возмущений равен сумме откликов на каждое из возмущений.

Для сокращения выкладок мы сразу останавливаемся на случае движения в плоскости рыскания.

Принимая во внимания это, имеем

$$\overline{V}_0 = \{0, 0, v_z = \dot{z}(t)\}, \quad \overline{\Omega} = \{0, \psi, 0\}.$$

Векторы $\overline{k}z(t)$ и $\overline{j}\psi(t)$ определяют смещение и поворот твердого тела в плоскости рыскания в проекциях на оси связанной с твердым телом системы координат. Будем считать, что эти векторы и их производные по времени есть величины первого порядка малости

$$|z| \sim |\dot{z}| \sim \varepsilon, \quad |\psi| \sim |\dot{\psi}| \sim \varepsilon$$

и что величинами порядка ε^2 (второго порядка малости) можно пренебречь по сравнению с линейными членами.

Центральное место в линеаризации гидродинамической задачи занимает допущение, что волны на свободной поверхности жидкости имеют малую амплитуду, а их форма такая, что можно пренебречь квадратами и произведениями $|\varsigma|$ и ее производных по времени и пространственным координатам в сравнении с линейными членами.

Выберем в качестве масштаба длины (характерный размер) радиус свободной поверхности R_0, а в качестве характерного времени – период колебаний жидкости $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, где ω – круговая частота.

Тогда условие малости амплитуды колебаний жидкости имеет вид

$$\frac{|\varsigma|}{R_0} \sim \varepsilon << 1. \tag{4.1}$$

Отсюда непосредственно и из (3.14) следуют оценки

$$|\Phi| \sim |\varsigma| \cdot R_0 \cdot T^{-1} \sim \varepsilon, \quad |\nabla\Phi| \sim |\varsigma| \cdot T^{-1} \sim \varepsilon, \quad |\nabla\varsigma| \sim \varepsilon. \tag{4.2}$$

Эти оценки позволяют, пренебрегая слагаемым порядка малости ε^2 и выше, записать кинематическое условие (3.14) в виде

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right) \text{ при } x = \varsigma\left(y,z,t\right). \tag{4.3}$$

Точно так же поступаем с динамическим краевым условием (3.18)

$$\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}_{\varepsilon} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\nabla\Phi\right)^2}_{\varepsilon^2} + \underbrace{g\varsigma}_{\varepsilon} + \underbrace{\dot{\bar{V}}_0\bar{\Phi}_1}_{\varepsilon} + \underbrace{\ddot{\bar{\Omega}}\cdot\bar{\Phi}_2}_{\varepsilon} -$$

$$\underbrace{\dot{\bar{V}}_0\cdot\left(\dot{\bar{\Omega}}\times\bar{r}\right)}_{\varepsilon^2} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\dot{\bar{\Omega}}\times\bar{r}\right)^2}_{\varepsilon^2} - \underbrace{g\left(\bar{r}\times\bar{i}\right)\cdot\bar{\Omega}}_{\varepsilon} = 0,$$

которое после пренебрежения малыми порядка ε^2 получает вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\varsigma + \dot{\bar{v}}_z\cdot\bar{\Phi}_1 + \ddot{\bar{\Omega}}\cdot\bar{\Phi}_2 - \\ &-g\left(\bar{r}\times\bar{i}\right)\cdot\bar{\Omega} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right) = 0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Это первый этап линеаризации. Второй этап заключается в следующем. Мы уже подчеркивали, что формула (3.8), так же как и по-

следние формулы (4.3) и (4.4), записаны на свободной поверхности, т.е. выполняются при $x=\varsigma(y,z,t)$. Предположение о малости возмущений свободной поверхности ($\varsigma/R_0 \sim \varepsilon$) позволяет с принятой выше точностью до малых второго порядка $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ снести краевые условия с действительной неизвестной заранее поверхности $x=\varsigma(y,z,t)$ на ее зеркало в невозмущенном состоянии $x=0$. (Иногда уравнение свободной поверхности записывают в виде $x=H+\varsigma(y,z,t)$, где H – глубина заполнения отсека. Изменение места начала связанной системы отсчета принципиального значения не имеет).

Действительно, пусть ς и Φ и их производные суть малые порядка ε. Разложим заданную на Σ функцию $\Phi(x=\varsigma,y,z,t)$ в ряд Тейлора в окрестности $x=0$:

$$\Phi(x=\varsigma,y,z,t)=\underbrace{\Phi(x=0,y,z,t)}_{\varepsilon}+\underbrace{\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0}\cdot\varsigma}_{\varepsilon^2}+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\varsigma^2}_{\varepsilon^3}+\ldots$$

Видно, что, с принятой выше точностью

$$\Phi(x=\varsigma,y,z,t)=\Phi(x=0,y,z,t)+\mathrm{O}(\varepsilon^2). \qquad (4.5)$$

Отсюда следует, что краевые условия – динамическое и кинематическое можно "снести" с действительной свободной поверхности $x=\varsigma(y,z,t)$ на ее проекцию $x=0$ с принятой точностью до малых порядка ε^2:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial t}+g\varsigma+\dot{\bar{V}}\cdot\bar{\Phi}_1+\ddot{\bar{\Omega}}\cdot\Phi_2-g(\bar{r}\times\bar{i})\bar{\Omega}=0 \;\; при\; x=0\\&\frac{\partial\varsigma}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad при\; x=0\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Это очень важный вывод: оказалось, что при малых амплитудах колебаний жидкости краевые условия можно записать на известной фиксированной поверхности Σ_0. Это упрощает решение краевых задач. Более того, теперь кинематическое условие служит только для нахождения формы свободной поверхности после того, как уже найден потенциал Φ.

Покажем это одним из возможных путей. Для этого введем в рассмотрение потенциал смещений $\varphi(\bar{r},t)$, связанный с потенциалом скоростей $\Phi(\bar{r},t)$ соотношением

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\varphi\cdot\nabla\Phi.$$

При малых амплитудах ($|\varsigma|R_0^{-1} \sim |\Phi|\cdot T_0\cdot R_0^{-2} \sim \varepsilon << 1$), учитывая, что из (4.6) следует $\varsigma = \int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{x=\varsigma} dt = \int_0^t \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}\Big|_{x=\varsigma} dt = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=\varsigma}$,

получается, что на Σ $|\varphi|\cdot R_0^{-2} \sim |\varsigma|\cdot R_0^{-1}$. Поэтому с точностью до малых второго порядка

$$\Phi_{x=0}\Big| = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x=0} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right). \qquad (4.7)$$

Теперь кинематическое краевое условие на свободной поверхности записывается в виде

$$\varsigma = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0}. \qquad (4.8)$$

Нетрудно показать, кроме того, что в линейном приближении

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{\Sigma_0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0}.$$

Динамическое краевое условие в терминах потенциала смещений в линейном приближении будет таким:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \dot{\bar{V}}\cdot\bar{\Phi}_1 + \ddot{\bar{\Omega}}\cdot\bar{\Phi}_2 - g\left(\bar{r}\times\bar{i}\right)\cdot\bar{\Omega} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Перепишем это условие для рассматриваемого движения в плоскости рыскания, когда

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{k}z,\ \bar{V}_0 = \bar{k}v,\ \bar{r} = \bar{k}z,\ \bar{\Omega} = \bar{j}\cdot\psi,\ \ \bar{\Phi}_2 = \bar{j}\bar{\Phi}_{22}.$$

В этом случае на Σ_0

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial x} + z\dot{v}_z + \ddot{\psi}\Phi_{22} + gz\psi = 0. \qquad (4.9)$$

Г л а в а 5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ СОСУД

Задача о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхностью занимает, как будет видно из дальнейшего, центральное место во всей теории динамики жидконаполненных систем.

Эта задача является линеаризованным вариантом краевой задачи для потенциала Φ (или φ) при $z(t) \equiv 0$ и $\psi(t) \equiv 0$:

$$\Delta\varphi(\bar{r},t) = 0 \text{ в } Q, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{x=0} = 0. \qquad (5.1)$$

Кинематическое краевое условие (4.8) существенно только лишь для расчета формы свободной поверхности по известному потенциалу φ.

Начальные условия

$$\varphi(\bar{r},0) = \varphi^0(\bar{r}), \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial\varphi^0}{\partial t}$$

в задаче о собственных колебаниях несущественны.

Представим искомый потенциал $\varphi(\bar{r},t)$ задачи в виде

$$\varphi(\bar{r},t) = s(t)\Psi(\bar{r}). \qquad (5.2)$$

Подставим (5.2) в (5.1) и найдем, во-первых:

$$\Delta\Psi = 0 \text{ в } Q, \quad \left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_S = 0 \quad \left[\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \sigma^2\Psi\right]_{x=0}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega^2}{g} \qquad (5.3)$$

и, во-вторых,

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0, , \qquad (5.4)$$

где ω^2 – константа разделения независимых переменных $\bar{r}$ и t – квадрат частоты собственных колебаний (5.4). Уравнение (5.4) дополняется начальными условиями $s(0) = s_0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$.

В краевой задаче (5.3) неизвестными являются гармоническая функция пространственных координат $\Psi(\bar{r})$ и параметр σ^2, пропорциональный константе разделения ω^2. Это значит, что частоты ω собственных колебаний $s(t)$ в (5.4) могут быть только такие, которые удовлетворяют решению задачи (5.3).

Рассматриваемая задача нахождения нетривиального решения (5.3) относится к задачам типа Штурма–Луивилля о собственных значениях (или числах) σ^2 линейного оператора A при определенных краевых условиях. В общем случае задача Штурма–Луивилля имеет вид

$$A(\Psi) = \sigma^2 \Psi .$$

В нашем случае

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \text{ на } \Sigma_0,$$

т.е. областью определения оператора A является зеркало невозмущенной свободной поверхности, а функции Ψ удовлетворяют уравнению Лапласа в Q и условию непротекания $\partial\Psi/\partial n = 0$ на S.

Каждому найденному собственному значению σ^2 соответствует своя собственная функция Ψ и, следовательно, свое частное решение (5.4).

Для нас очень важны несколько замечательных свойств, которыми обладают решение (5.3).* Мы в дальнейшем воспользуемся этими свойствами в полной мере.

Состоят они в следующем:

1. Все собственные числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ положительны, кроме, может быть, одного $\sigma^2 = 0$, соответствующего тривиальному решению $\Psi \equiv 0$.

Это свойство имеет место для положительных операторов A, т.е. таких, что скалярное произведение положительно

$$(A\Psi, \Psi) > 0 .$$

---

* Доказательство этих свойств решений задач Штурма–Лиувилля на физическом уровне строгости описано в книге Л.И. Мандельштама “Лекции на теории колебаний“ (М.:”Наука”, 1972).

То, что в нашем случае оператор A положителен, легко показать. Зададим скалярное произведение на области определения оператора Σ_0 формулой

$$\left(A\Psi,\Psi\right)=\int\limits_{\Sigma_0}\Psi\cdot A\Psi ds=\int\limits_{\Sigma_0}\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x}ds.$$

Учитывая краевое условие на Σ_0 в (5.3), найдем

$$\left(A\Psi,\Psi\right)=\sigma^2\int\limits_{\Sigma_0}\Psi^2 ds>0,$$

что и требовалось. Более того, отсюда следует, что наш оператор положительно-определенный, т.е.

$$\left(A\Psi,\Psi\right)\geq\gamma^2\left\|\Psi\right\|,\quad\gamma^2>0.$$

2. Собственные значения σ_m^2 образуют счетное множество $\left(m=1,2,...\right)$ без точек сгущения.

Это означает, что, во-первых, собственные числа неограниченно возрастают с увеличением их номера $\left(\sigma_m^2<\sigma_{m+1}^2\right)$ и, во-вторых, имеет место счетное множество частных решений уравнения (5.3):

$$\ddot{s}_m+\omega_m^2 s_m=0\qquad\left(m=1,2,...\right).$$

3. Собственные функции Ψ_m ортогональны друг другу и к константе в области определения оператора A. В нашем случае это значит, что

$$\text{const}\cdot\int\limits_{\Sigma_0}\Psi_m ds=0,\quad\int\limits_{\Sigma_0}\Psi_m\cdot\Psi_n ds=\begin{cases}N_m^2 & \text{при } \mathrm{m=n},\\ 0 & \text{при } m\neq n.\end{cases}\qquad(5.5)$$

4. Собственные функции в области определения оператора A образуют полную систему линейно-независимых функций. Это, в частности, значит, что любая непрерывная на Σ_0 функция может быть представлена там равномерно сходящимся рядом по собственным функциям Ψ_m.

Из первого свойства и уравнения (5.4) следует, что константа разделения ω^2 есть квадрат частоты собственных колебаний жидкости. Частными решениями для потенциала (5.1), таким образом, будут

$$\varphi_m=\left(a_m\cos\omega_m t+b_m\sin\omega_m t\right)\Psi_m\quad\left(m=1,2,...\right),\qquad(5.6)$$

причем a_m и b_m (константы) находятся из начальных условий.

Счетное множество решений (5.6) указывает на существование колебаний жидкости с бесконечным набором частот, отвечающих множеству $\{\Psi_m\}$.

Обратим еще внимание на то, что задача (5.3) однородная: если Ψ_m – ее решение, то и $const \cdot \Psi_m$ – решение. В частности, такое чтобы, скажем, интеграл

$$\rho \dot{s}_m^2 \int_Q \left(\nabla \Psi_m\right)^2 dQ$$

был бы не чем иным, как кинетической энергией свободных колебаний жидкости по тону *m*.

Выберем эту константу так, что в некоторой точке свободной поверхности C $\{x = 0, y = y^0, z = z^0\}$ на линии пересечении свободной поверхности со смоченной

$$\left.\frac{\partial \Psi_m}{\partial x}\right|_{\bar{r}=C} = 1. \qquad (5.7)$$

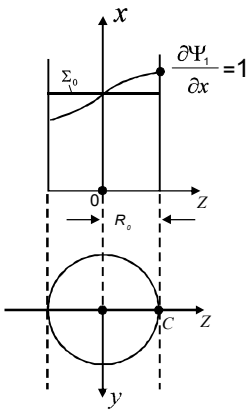


Рис. 5.1

Например, в нашем случае, когда мы рассматриваем движение твердого тела только с плоскости рыскания (плоскость *oxz* в связанной системе отсчета) это будет точка (см. рис. 5.1.) с координатами

$$C_z = \{x = 0, y = 0, z = R_0\}.$$

Очевидно, что при этом $s_m(t)$ будет амплитудой колебаний жидкости по тону m, а $\left.\dfrac{\partial \Psi_m}{\partial x}\right|_{x=0}$ – формой колебаний свободной поверхности – иными словами, функцией распределения возвышения точек свободной поверхности жидкости над Σ_0.

Краевую задачу (5.3) мы в дальнейшем будем называть базовой, имея в виду ее центральное значение, во всей теории движения жидконаполненных конструкций.

Глава 6

КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

6.1. Принцип Гамильтона–Остроградского

Применим к выводу уравнения возмущенного движения рассматриваемой ньютоновской системы принцип Гамильтона–Остроградского.

Введем для этого в рассмотрение кинетический потенциал L – разность кинетической T и потенциальной Π энергии

$$L = T - \Pi, \quad L = L\left(y_1 y_2,...,y_n,\dot{y}_1,\dot{y}_2,...,y_n\right) \tag{6.1}$$

и функционал – действие по Гамильтону

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt\,. \tag{6.2}$$

Функции времени $y_1(t), y_2(t),...\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t),...$ на действительном пути суть обобщенные координаты и скорости системы. Например, в нашем случае возмущенного движения пусть

$$y_1 = z(t),\ \dot{y}_1 = v_z(t),\ y_2 = \psi(t),\ \dot{y}_2 = \dot{\psi}(t),$$
$$y_3 = s_1(t),\ \dot{y}_3 = \dot{s}_1(t),\ y_4 = s_2(t),\ \dot{y}_4 = \dot{s}_2(t)\ \text{ и т.д.}$$

В соответствии с вариационным принципом Гамильтона совокупность функций $y_k(t)$ $\left(k = 1,2,...n\right)$, сообщающая стационарное значение действию по Гамильтону (6.2)

$$\delta S = 0\,,$$

где δ – оператор изохронного варьирования, определяет действительное движение системы. Причем оно подчиняется уравнениям Лагранжа II рода

$$\varepsilon_k(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right) = 0 \tag{6.3}$$
$$\left(k = 1,2,...n\right).$$

Здесь $\mathcal{E}(L)$ – оператор Эйлера.

Известно, что вариационный принцип Гамильтона «работает», только если система консервативна. В нашем случае система не консервативна. Для таких систем нет рецепта построения аналога кинетического потенциала, вариация которого давала бы внешние диссипативные силы.

В этом случае вместо вариационного принципа $\delta S = 0$ для вывода уравнений применяется вариационное соотношение (или принцип – просто принцип «безвариационный» – Гамильтона–Остроградского)

$$\delta S - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} F_k \delta y_k dt = 0, \tag{6.4}$$

где $F_k \delta y_k$ – работа обобщенных неконсервативных сил $F_к$ на виртуальных перемещениях δy_k.

Из (6.4) в силу независимости вариаций δy_k следуют уравнения движения

$$\mathcal{E}_k(L) - F_k = 0 \ (k = 1,2,...n). \tag{6.5}$$

Ещё раз подчеркнем, что в случае вариационного принципа $(\delta S = 0)$ решается вариационная задача нахождения стационарного значения функционала *S(L)*, который существует и известен алгоритм его построения. В случае неконсервативной системы нельзя указать способ построения функционала, вариация которого удовлетворяла бы соотношению (6.4). Мы должны в этом случае просто решить вариационное соотношение (6.4).

Еще один важный момент, который всегда нужно помнить: уравнения движения, независимо от того, являются ли они следствием (6.3) или (6.4), описывают движение системы в инерциальной системе отсчета.

Если мы хотим получить уравнение движения в связанной системе отсчета (неинерциальной), нужно соответствующим образом изменить ход выкладок, чтобы учесть это обстоятельство. Так, известно, что полная производная по времени от вектора, заданного в подвижных осях, выражается формулой

$$\frac{d\overline{R}}{dt} = \frac{d'\overline{R}}{dt} + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{R},$$

где $\dot{\overline{\Omega}}$ – вектор угловой скорости поворота связанной системы отсчета относительно абсолютной, а штрих означает производную в подвижных осях.

В частном случае, например, движения твердого тела

$$\frac{d\dot{\overline{\Omega}}}{dt} = \frac{d'\dot{\overline{\Omega}}}{dt} + \dot{\overline{\Omega}} \times \dot{\overline{\Omega}} = \frac{d'\dot{\overline{\Omega}}}{dt} = \ddot{\overline{\Omega}},$$

$$\frac{d\overline{V}_0}{dt} = \frac{d'\overline{V}_0}{dt} + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{V}_0.$$

Если предположить, что $\overline{V}_0(t)$ и $\overline{\Omega}(t)$ и их производные есть величины первого порядка малости и пренебречь малыми более высокого порядка, то

$$\frac{d\overline{V}_0}{dt} = \frac{d'\overline{V}_0}{dt} + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

и, следовательно, линеаризованные уравнения движения в инерциальной и подвижной системах отсчета по своей структуре отличаться не будут.

6.2. Энергия системы

Мы уже подчеркивали, что ограничимся рассмотрением линейного приближения уравнений возмущенного системы твердое тело + жидкость и только в плоскости рыскания. Для простоты считаем, что полость с жидкостью одна. Иначе просто нужно просуммировать соответствующие силы по числу баков (полостей).

Энергию системы E представим в виде суммы

$$E = E_T + E_Ж,$$

где $E_T = T_T + \Pi_T$ – сумма кинетической и потенциальной энергии твердого тела, $E_Ж = T_Ж + \Pi_Ж$ – то же самое для жидкости.

Начало связанной системы отсчета разместим в произвольной точке оси симметрии ox. Обобщенные координаты, характеризующие возмущенное движение, в соответствии с принятыми договоренностями считаем величинами первого порядка малости, а величинами второго и выше порядка малости по сравнению с ними пренебрегаем, т.е.

$$|v_z| \sim \varepsilon, \quad |\overline{\Omega}| \sim \left|\dot{\overline{\Omega}}\right| \sim \varepsilon, \quad |s_k| \sim |\dot{s}_k| \sim \varepsilon, \quad \varepsilon << 1, \ \varepsilon^2 << \varepsilon.$$

Кинетическая энергия

Начнем с кинетической энергии твердого тела (сухая ракета):

$$T_T = \frac{1}{2}\int_{Q_T} \overline{V}^2 dm,$$

где $\overline{V} = \overline{V}_0 + \dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}$ – абсолютная скорость элемента твердого тела массой dm.

Учитывая, что

$$\overline{V}_0 = \{0,0,v_z\}, \quad \dot{\overline{\Omega}} = \{0,\dot{\psi},0\}, \quad v_z = \dot{z}(t),$$

находим

$$\overline{V} = \overline{k}v_z + \left(\overline{i}z - \overline{k}x\right)\dot{\psi}$$

и

$$T_T = \frac{1}{2}m^0 v_z^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 \int_{Q_T}\left(z^2 + x^2\right)dm - v_z\dot{\psi}\int_{Q_T} x dm$$

или

$$T_T = \frac{1}{2}m^0 v_z^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 I_y^0 - v_z\dot{\psi}J_y^0, \qquad (6.6)$$

где m^0 – масса сухого твердого тела,

$I_y^0 = \int_{Q_T}\left(z^2 + x^2\right)dm$ – момент инерции сухого твердого тела, вычисленный относительно начала связанной системы координат,

$J_y^0 = \int_{Q_T} x dm = m^0 x_T$ – статический момент инерции сухого твердого тела, x_T – координата центра масс в этой же системе отсчета.

Теперь о кинетической энергии жидкости, которая в общем виде в абсолютном движении есть

$$T_Ж = \frac{1}{2}\rho\int_Q \left(\nabla\Phi^*\right)^2 dQ.$$

Подставим сюда выражение для потенциала абсолютных скоростей жидкости (3.10). Учтем, что в рассматриваемом частном случае движения в плоскости рыскания

$$\overline{V}_0 = \overline{k}v_z, \quad \dot{\overline{\Omega}} = \overline{j}\dot{\psi}, \quad \overline{\Phi}_1 = k\Phi_{13} = \overline{k}z, \quad \overline{\Phi}_2 = \overline{j}\Phi_{22},$$

и в результате будем иметь

$$T_{Ж} = \frac{1}{2}\rho \int_Q \left(v_z \cdot \nabla \Phi_{13} + \dot{\psi}\nabla \Phi_{22} + \nabla \Phi\right)^2 dQ =$$

$$= \frac{1}{2}\rho \left[v_z^2 \int_Q \left(\nabla \Phi_{13}\right)^2 dQ + \dot{\psi} \int_Q \left(\nabla \Phi_{22}\right)^2 dQ + \right.$$

$$+ \int_Q \left(\nabla \Phi\right)^2 dQ + 2v_z\dot{\psi} \int_Q \nabla \Phi_{13} \cdot \nabla \Phi_{22} dQ + \qquad (6.7)$$

$$\left. + 2v_z \int_Q \nabla \Phi_{13} \cdot \nabla \Phi dQ + 2\dot{\psi} \int_Q \nabla \Phi_{22} \cdot \nabla \Phi dQ \right].$$

Рассмотрим каждое слагаемое более подробно. При этом будем использовать: (а) – теорему Грина

$$\int_Q \nabla \alpha \nabla \beta dQ = -\int_Q \alpha \Delta \beta dQ + \int_\Gamma \alpha \frac{\partial \beta}{\partial n} ds,$$

где α, β – непрерывные функции, а Γ – поверхность объема Q, и (б) – краевые условия для Φ_{22} и Φ (вернее, φ), которые представлены в (2.10) и (5.1).

Выпишем эти краевые задачи целиком:

$$\Delta \Phi_{22} = 0 \text{ в } Q, \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = \left(\bar{r} \times \bar{n}\right)_2 = zn_x - xn_z \text{ при } \bar{r} \in S + \Sigma_0,$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi \text{ в } Q,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ при } \bar{r} \in S, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0$$

Кроме того, учтем, что известно решение $\Phi_{13}=z$ (см. (2.11)).

Итак, <u>первое слагаемое</u>

$$\frac{1}{2}v_z^2 \rho \int_Q \left(\nabla z\right)^2 dQ = \frac{1}{2}mv_z^2, \qquad (6.9)$$

где m – масса жидкости.

Второе слагаемое, как имеющее ту же размерность и структуру, что I_y^0 в (6.6), запишем в виде

$$\frac{1}{2}\dot{\psi}^2\rho\int_Q\left(\nabla\Phi_{22}\right)^2 dQ=\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 I_y,$$
$$I_y=\rho\int_Q\left(\nabla\Phi_{22}\right)^2 dQ\ , \tag{6.10}$$

где I_y – присоединенной момент инерции массы жидкости при вращении твердого тела в плоскости рыскания (*oxz*).

Третье слагаемое

$$\frac{1}{2}\rho\int_Q(\nabla\Phi)^2\,dQ \tag{6.11}$$

оставим пока без изменений.

Четвертое слагаемое преобразуем сначала с помощью формулы Грина

$$v_z\dot{\psi}\rho\int_Q\nabla\Phi_{13}\cdot\nabla\Phi_{22}dQ=$$
$$=-\rho\left[\int_Q z\Delta\Phi_{22}dQ-\int_{S+\Sigma_0}z\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}ds\right]v_z\dot{\psi}\ .$$

Так как

$$\Delta\Phi_{22}=0 \text{ и (см. (6.8))},\quad \left.\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\right|_{S+\Sigma}=zn_x-xn_z\ ,$$

то

$$v_z\dot{\psi}\rho\int_Q\nabla\Phi_{13}\cdot\nabla\Phi_{22}dQ=v_z\dot{\psi}\rho\int_{S+\Sigma_0}z\left(zn_x-xn_z\right)ds\ .$$

В последнем выражении введем обозначения

$$J_y=\rho\int_{S+\Sigma_0}z\left(zn_x-xn_z\right)ds$$

и применим к нему формулу Остроградского

$$\int_{S+\Sigma_0}f\left(\bar{r}\right)\cos\left(n,x_i\right)ds=\int_Q\frac{\partial f}{\partial x_i}dQ\ .$$

В результате будем иметь

$$J_y = -\rho \int_Q x dQ = -m x_Ж , \qquad (6.12)$$

где, как видно, I_y – статический момент инерции затвердевшей жидкости, а $x_Ж$ – координата ее центра тяжести. Таким образом, четвертое слагаемое есть

$$-v_z \dot{\psi} J_y . \qquad (6.13)$$

В пятом слагаемом обозначим

$$\mu_1 = \rho \int_Q \nabla \Phi_{13} \cdot \nabla \Phi dQ$$

и преобразуем этот интеграл по формуле Грина, учитывая, что $\Phi_{13} = z$ и $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S = 0$. В результате получим

$$\mu_1 = \rho \int_\Sigma z \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds .$$

Из формул (4.3) и (3.7) следует, что с точностью до малых второго порядка здесь интеграл по Σ можно заменить на интеграл по Σ_0, а вместо $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ записать $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$. После этого пятое слагаемое запишем в виде

$$\rho v_z \int_Q \nabla \Phi_{13} \cdot \nabla \Phi dQ = v_z \mu_1 , \quad \mu_1 = \rho \int_{\Sigma_0} z \frac{\partial \Phi}{\partial x} ds . \qquad (6.14)$$

Аналогично поступим с шестым слагаемым, так что

$$\rho \dot{\psi} \int_Q \nabla \Phi_{22} \cdot \nabla \Phi dQ = \dot{\psi} \mu_2 , \mu_2 = \rho \int_{\Sigma_0} \Phi_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial x} ds. \qquad (6.15)$$

Проведем еще преобразование слагаемых (6.11), (6.14) и (6.15), т.е. тех, что содержат потенциал Φ. Это нужно сделать для того, чтобы в явном виде ввести обобщенные координаты, описывающие волновые движения жидкости.

В разделе 5 была рассмотрена краевая задача о спектре собственных колебаний жидкости (задача (5.3)). Эту задачу мы назвали базовой. Замечательные свойства ее частных решений – счетного множества собственных функций – полнота, линейная независимость и ортогональность их на Σ_0 мы используем для представления потен-

циала скоростей $\Phi(\bar{r},t)$ в виде разложения в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этой задачи:

$$\Phi(\bar{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{s}_m(t)\Psi_m(\bar{r}). \tag{6.16}$$

Сохраним для Ψ_m нормировку (5.7). Это значит, что $s_m(t)$ по-прежнему есть амплитуда колебаний свободной поверхности по тону m.

Учитывая эти соображения, а также краевые условия на Σ_0 и ортогональность собственных функций Ψ_m на Σ_0, применяя формулу Грина, преобразуем составляющую кинетической энергии (6.11):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho\int_Q(\nabla\Phi)^2\,dQ=\frac{1}{2}\rho\int_{\Sigma_0}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}ds=\\
&=\frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{s}_m\dot{s}_n\int_{\Sigma_0}\Psi_m\frac{\partial\Psi_n}{\partial x}ds=\\
&=\frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{s}_m\dot{s}_n\sigma_n^2\int_{\Sigma_0}\Psi_m\Psi_n ds=\\
&=\frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m^2\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}\Psi_m^2 ds=\frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m^2\sigma_m^2N_m^2,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

где обозначение N_m^2 то же, что в (5.5).

Таким же образом поступаем с коэффициентами μ_1 из (6.14) и μ_2 из (6.15):

$$\mu_1=\rho\int_{\Sigma_0}z\frac{\partial\Phi}{\partial x}ds=\rho\sum_{m=1}^{n}\dot{s}_m\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}z\Psi_m ds=\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m\lambda_m \tag{6.18}$$

$$\text{где } \lambda_m=\rho\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}z\Psi_m ds$$

$$\mu_2=\rho\int_{\Sigma_0}\Phi_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial x}ds=\rho\sum_{m=1}^{n}\dot{s}_m\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}\Phi_{22}\Psi_m ds=\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m\lambda_{0m} \tag{6.19}$$

$$\lambda_{0m}=\rho\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}\Phi_{22}\Psi_m ds\,.$$

Далее станет ясным, что λ_m и λ_{0m} являются элементами тензоров присоединенных масс жидкости при соответственно поступательном (вдоль оси *oz*) и вращательном (относительно оси *oy*) движениях осесимметричного отсека.

Запишем в окончательном виде слагаемые (6.14) и (6.15):

$$\begin{aligned} \rho v_z \int_Q \nabla \Phi_{13} \cdot \nabla \Phi ds &= v_z \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m \lambda_m, \\ \rho \dot{\psi} \int_Q \nabla \Phi_{22} \cdot \nabla \Phi ds &= \dot{\psi} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m \lambda_{0m} \quad . \end{aligned} \tag{6.20}$$

Суммируя теперь (6.9), (6.10), (6.17), (6.13) и (6.20), получим выражение для кинетической энергии жидкости в подвижном твердом теле:

$$T_{Ж} = \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_y \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m^2 N_m^2 - v_z \dot{\psi} J_y +$$

$$+ v_z \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m \lambda_m + \dot{\psi} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m \lambda_{0m} \quad .$$

Прибавим сюда кинетическую энергию твердого тела (6.6) и будем иметь полную кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2} \left(m^0 + m \right) v_z^2 + \frac{1}{2} \left(I_y^0 + I_y \right) \dot{\psi}^2 - v_z \dot{\psi} \left(J_y^0 + J_y \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m^2 N_m^2 \sigma_m^2 + v_z \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m \lambda_m + \dot{\psi} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m \lambda_{0m} \quad . \end{aligned} \tag{6.21}$$

Потенциальная энергия

Составим выражение для потенциальной энергии возмущенного движения системы

$$\Pi = \Pi_T + \Pi_{Ж} .$$

Начнем с составляющей Π_T. За нулевой уровень Π_T принимается состояние твердого тела при $\psi = 0$, так что (рис. 6.1)

$$\Pi_T = m^0 g h ,$$

где *h* – возвышение центра масс твердого тела над уровнем при $\psi = 0$.

Вычисляем *h:*

$$h = x_T - x_T \cos\psi ,$$

откуда при малых ψ, когда $\cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}$, находим, что

$$\Pi_T = \frac{1}{2} m^0 g x_T \psi^2 . \qquad (6.22)$$

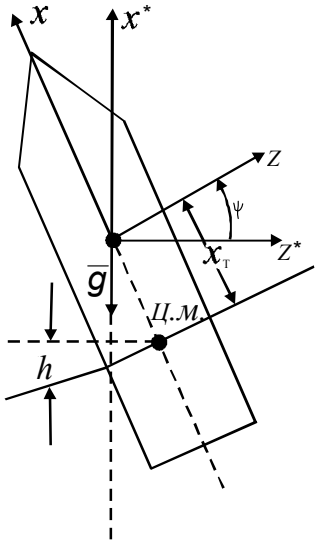


Рис. 6.1

Обратимся к выводу выражения для потенциальной энергии жидкости $\Pi_Ж$. Начнем с простейшего случая: бак неподвижен, ось *ox* параллельна вектору $\overline{g}$. За нулевой уровень потенциальной энергии жидкости принимается ее состояние, когда свободная поверхность не возмущена и совпадает с ее зеркалом Σ_0.

Подсчитаем потенциальную энергию столбика возмущенной свободной поверхности, опирающегося на элементарную площадку *ds* на Σ_0. Очевидно, это будет

$$d\Pi_Ж = g h_\varsigma dm ,$$

где $dm = \rho\varsigma(y,z,t)ds$, а $h_\varsigma = \frac{1}{2}\varsigma$ – возвышение центра масс столбика жидкости над Σ_0.

Следовательно, в рассмотренном примере (рис. 6.2.)

$$\Pi_{Ж} = \frac{1}{2}\rho g \int_{\Sigma_0} \varsigma^2 ds \,.$$

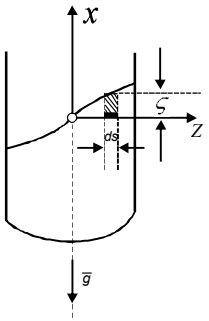


Рис. 6.2

Теперь общий случай в рамках нашей постановки – бак повернут относительно оси *oy* на угол ψ (рис. 3.2). Предварительно заметим, что потенциальная энергия будет включать две составляющие:

$$\Pi_{Ж} = \Pi_{\varsigma} + \Pi\psi,$$

где Π_{ς} – составляющая, связанная с волнами на свободной поверхности, а Π_{ψ} – потенциальная энергия затвердевшей жидкости при повороте твердого тела на угол ψ.

В соответствии с моделью жесткой «крышки», которой мы сейчас придерживаемся, отсчет высоты волны $\varsigma(y,z,t)$ производится от этой «крышки» (см. рис.3.2). В то же время нулевое значение Π_{ς} соответствует состоянию, когда свободная поверхность совпадает с плавающей «крышкой» (плоскость 2 на рис.3.2). Очевидно, что

$$\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2, \quad \varsigma_2 = \left(\overline{r} \times \overline{i}\right) \cdot \overline{\Omega},$$

где ς – функция формы Σ по модели плавающей «крышки», ς_1 – то же самое по модели жесткой «крышки», а ς_2 – уравнение плоскости плавающей «крышки» в связанной системе координат. Это значит, что при ее повороте относительно абсолютной системы на угол ψ

$$\varsigma_2 = +z\psi \,. \qquad (6.23)$$

Этого достаточно, чтобы определить ту составляющую потенциальной энергии, которая запасается в волнах на свободной поверхности. Для элементарного столбика жидкости, поднявшегося над плавающей крышкой – уровнем нулевой потенциальной энергии, – имеем, как и в рассмотренном выше примере,

$$d\Pi_\varsigma = dm \cdot g \cdot \frac{\varsigma}{2}, \quad dm = \rho\varsigma ds, \quad h_\varsigma = \frac{\varsigma}{2},$$

где $\frac{\varsigma_1}{2}$ – центр масс столбика.

Поэтому $$\Pi_\varsigma = \frac{1}{2}\rho g \int_{\Sigma_0} \varsigma_1^2 ds\,.$$

Или так как $\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2$ и $\varsigma_2 = +z\psi$, то в рамках модели жесткой «крышки»

$$\Pi_\varsigma = \frac{1}{2}\rho g \int_{\Sigma_0} \left(\varsigma_1 + z\psi\right)^2 ds\,. \tag{6.24}$$

Заметим, что мы не делаем различия в значениях Σ_0 для «плавающей» и «жесткой» крышки. При малых ψ и ς они в самом деле совпадают с точностью до малых второго порядка, т.е. не отличаются в рамках принятой при линеаризации задачи точности.

Придадим составляющей энергии Π_ς вид явной квадратичной зависимости от обобщенных координат $s_m(t)$. Для этого вспомним, что:

во-первых, потенциал скоростей $\Phi(\bar{r},t)$ связан с потенциалом смещений в линейном приближении (см. (4.7)) соотношением

$$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

во-вторых, кинематическое краевое условие в этом случае (см.(4.8)) есть (индекс «1» у ς опускаем)

$$\varsigma = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0},$$

в-третьих, потенциал скоростей Φ разыскивается в виде (см.(6.16))

$$\Phi(\bar{r},t) = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{s}_m(t)\Psi_m(\bar{r}),$$

Поэтому потенциал относительных смещений есть

$$\varphi(\bar{r},t)=\sum_{m=1}^{\infty}s_m(t)\Psi_m(\bar{r}),$$

а кинематическое краевое условие на Σ_0 будет

$$\varsigma(y,z,t)=\sum s_m(t)\left.\frac{\partial\Psi_m}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

После замены $\dfrac{\partial\Psi_m}{\partial x}$ на Ψ_m с учетом краевого условия на Σ_0

$$\frac{\partial\Psi_m}{\partial x}=\sigma_m^2\Psi_m,$$

найдем, что

$$\varsigma(y,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m^2 s_m(t)\Psi_m(\bar{r})\ \ при\ \ \bar{r}\in\Sigma_0. \qquad (6.25)$$

Подставим (6.25) в (6.24)

$$\Pi_\varsigma=\frac{1}{2}\rho g\int_{\Sigma_0}\left(\varsigma^2+2\varsigma z\psi(t)+z^2\psi^2(t)\right)ds=$$

$$=\frac{1}{2}\rho g\int_{\Sigma_0}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m^2 s_m\Psi_m\right)^2 ds+2\psi(t)\int_{\Sigma_0}z\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m^2 s_m\Psi_m ds+$$

$$+\psi^2(t)\int_{\Sigma_0}z^2 ds$$

Если еще учесть ортогональность $\Psi_m(m=1,2,...)$ на Σ_0, то

$$\Pi_\varsigma=\frac{1}{2}\rho g\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m^4 s_m^2 N_m^2+2\psi(t)g\sum_{m=1}^{\infty}s_m\lambda_m+$$
$$+\frac{1}{2}g\psi^2(t)L_y \qquad (6.26)$$

где так же, как в (6.18),

$$N_m^2=\int_{\Sigma_0}\Psi_m^2 ds,\quad \lambda_m=\rho\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}z\Psi_m ds,\quad (m=1,2,...)$$

и, кроме того, $L_y = \rho \int\limits_{\Sigma_0} z^2 ds$ – момент инерции поперечного сечения свободной поверхности Σ_0.

Осталось описать составляющую потенциальной энергии Π_Ψ, связанную с поворотом затвердевшей в баке жидкости в плоскости рыскания.

Эта составляющая представляется суммой

$$\Pi_\Psi = \frac{1}{2} mg x_Ж \psi^2(t) - \frac{1}{2} \rho g \psi^2(t) L_y. \qquad (6.27)$$

Первое слагаемое – это потенциальная энергия затвердевшей жидкости в области, ограниченной поверхностью $S+\Sigma_0$ в модели жесткой крышки (рис.6.3а). По структуре оно совпадает с Π_T (6.22), но вместо x_T здесь длина подвеса «маятника» $x_Ж$ – координата центра масс жидкости.

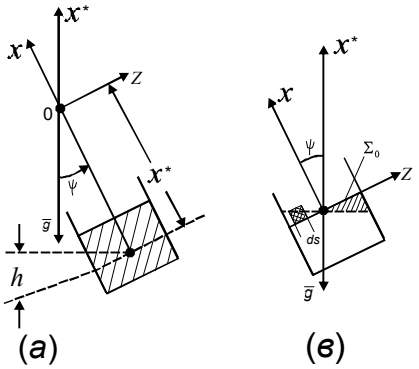


Рис. 6.3

Но на самом деле потенциальная энергия жидкости при повороте отсека на угол ψ меньше на величину, пропорциональную массе жидкости, содержащейся в объеме между плоскостью Σ_0 и плоскостью зеркала плавающей «крышки». Запасенная в этом объеме энергия вы-

ражается вторым слагаемым и рассчитывается по той же формуле (6.23), что и при расчете Π_ς .

Суммируя составляющие потенциальной энергии (6.22), (6.26) и (6.27), получим в окончательном виде потенциальную энергию системы:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} g \left(m^0 x_T + m x_Ж \right) \psi^2 + \\ & + \frac{1}{2} g \sum_{m=1}^{\infty} \left(g_m^2 s_m^2 \rho N_m^2 + 2 \psi s_m \lambda_m \right). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Глава 7

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Получим уравнения возмущенного движения рассматриваемой системы, как уравнения Лагранжа II рода, но с соответствующей правой частью, как это выписано в (6.5).

Для этого вычислим необходимые производные кинетического потенциала, как это следует из (6.3). Будем иметь в виду, что в нашем случае, когда кинетическая энергия есть квадратичная форма обобщенных скоростей, а потенциальная – обобщенных координат, имеют место соотношения:

$$-\frac{\partial L}{\partial y_i}=\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \quad (i=1,2,...).$$

Поэтому уравнения движения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right)+\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}_i}=F_i \quad (i=1,2...).$$

Из (6.21) имеем для обобщенных скоростей $v_z,\dot{\psi},\dot{s}_m$

$$\frac{\partial T}{\partial v_z}=\left(m^0+m\right)v_z-\left(J_y^0+J_y\right)\dot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m\lambda_m,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}=\left(I_y^0+I_y\right)\dot{\psi}-\left(J_y^0+J_y\right)v_z+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m\lambda_{0m},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_m}=\rho\dot{s}_m\sigma_m^2N_m^2+v_z\lambda_m+\dot{\psi}\lambda_{0m} \quad (m=1,2,...)$$

и, после этого для членов вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_z}\right)=\left(m^0+m\right)v_z-\left(J_y^0+J_y\right)\dot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m\lambda_m,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)=\left(I_y^0+I_y\right)\ddot{\psi}-\left(J_y^0+J_y\right)\dot{v}_z+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{s}_m\lambda_{0m}, \qquad (7.1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_m}\right)=\ddot{s}_m N_m^2+\dot{\upsilon}_z\lambda_m+\ddot{\psi}\lambda_{0m},\ \left(m=1,2,...\right).$$

Из (6.28) получим производные Π по z,ψ,s_m:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}=g\left(m^0x_T+mx_g\right)\psi+g\sum_{m=1}^{\infty}s_m\lambda_m,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s_m}=g\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sigma_m^4 s_m\rho N_m^2+\lambda_m\psi\right)\quad\left(m=1,2,...\right), \qquad (7.2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}=0,$$

Обобщенной координате $\upsilon_z(t)$ соответствует приложенная внешняя сила F_z, координате $\psi(t)$ – момент M_y, которые включают в себя соответствующие проекции аэродинамических, управляющих и других сил и моментов.

Подставим (7.1) и (7.2) в уравнения Лагранжа и получим искомые уравнения возмущенного движения системы твердое тело + жидкость в его полости в плоскости рыскания:

- Уравнение сил

$$\left(m^0+m\right)\dot{v}_z-\left(J_y^0+J_y\right)\ddot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{s}_m\lambda_m=F_z. \qquad (7.3)$$

- Уравнение моментов

$$\left(I_y^0+I_y\right)\ddot{\psi}-\left(J_y^0+J_y\right)\dot{v}_z-g\left(J_y^0+J_y\right)\psi+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\ddot{s}_m\lambda_{0n}+gs_m\lambda_m\right)=M_y. \qquad (7.4)$$

- Уравнения колебания жидкости

$$\sigma_m^2\rho N_m^2\left(\ddot{s}_m+g\sigma_m^2 s_m\right)+\dot{v}_z\lambda_m+\ddot{\psi}\lambda_{0m}+g\psi\lambda_m\quad(m=1,2,\ldots),$$

которые перепишем в виде

$$M_m\left(\ddot{s}_m+\omega_m^2 s_m\right)+\dot{v}_z\lambda_m+\ddot{\psi}\lambda_{0m}+g\psi\lambda_m=0, \qquad (7.5)$$

где $M_m=\rho\sigma_m^2 N_m^2$, а $\omega_m^2=g\sigma_m^2$ как уже было определено, – квадрат собственной частоты колебаний жидкости по m тону(m=1,2,…).

Эти уравнения нужно дополнить соответствующими начальными условиями: $v_z(0)=v_z^0$, $\psi(0)=\psi^0$, $s_m(0)=s_m^0$, $\dot{s}_m(0)=\dot{s}_m^0$ и, если движение управляемое (в F_z и M_y присутствуют управляющие силы и момент $F_\delta=F'_\delta\cdot\delta$, $M_\delta=M'_\delta\cdot\delta$), замкнуть систему уравнений (7.3) – (7.5) уравнением автомата стабилизации (типа того, что рассмотрели в разделе 1): $T^2\ddot{\delta}+T_1\dot{\delta}+\delta=k_\Psi\psi+k_{\dot{\Psi}}\dot{\psi}$.

Уравнения (7.3) – (7.5) можно несколько упростить, если начало связанной системы координат совместить с центром масс системы твердое тело + затвердевшая в нем жидкость.

Учтем, что в (7.3) и (7.4) коэффициенты $\left(J_y^0+J_y\right)$ можно подставить в виде $\left(J_y^0+J_y\right)=m^0x_T+mx_{ж}=\left(m^0+m\right)x_c$,

где x_c – координата центра масс системы с началом в некоторой точке на оси симметрии системы. Так вот, если $x_c=0$, то

$$J_y^0+J_y=0$$

и приведенное к центру масс начало отсчета системы твердое тело + жидкость даст следующую систему уравнений возмущенного движения в плоскости рыскания $\left(m^0+m\right)\dot{v}_z+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\ddot{s}_m=F_z$,

$$\left(I_y^0+I_y\right)\ddot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda_{0m}\ddot{s}_m+gs_m\lambda_m\right)=M_y\ , \qquad (7.6)$$

$$M_m\left(\ddot{s}_m+\omega_m^2 s_m\right)+\dot{v}_z\lambda_m+\ddot{\psi}\lambda_{0m}+g\lambda_m\psi=0\ ,\ (m=1,2,\ldots).$$

Начальные условия не изменяются. Естественно, что теперь параметры x_T, $x_{Ж}$ и коэффициенты I_y^0, I_y, λ_{0m} должны быть заданы и вычислены в системе координат, связанной с центром масс системы твердое тело + жидкость.

Глава 8

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПЛАВАЮЩЕЙ «КРЫШКИ»

В предыдущем разделе уравнения возмущенного движения рассматриваемой системы были получены в соответствии с гипотезой жесткой «крышки». Здесь мы получим аналогичные уравнения по гипотезе плавающей «крышки». Причем мы их получим не повторением всей процедуры вывода из принципа Гамильтона – Остроградского. Мы получим их путем линейных преобразований из уравнений по модели жесткой «крышки». Этим самым мы обеспечим эквивалентность уравнений, полученных по той и другой модели (гипотезе).

В основе этого преобразования лежит линейное кинематическое соотношение между функциями формы свободной поверхности, следующее из моделей жесткой и плавающей «крышек».

Мы уже использовали это кинематическое соотношение при выводе выражения для потенциальной энергии волнового движения жидкости в подвижном сосуде. Оно имеет вид

$$\varsigma = \varsigma_1 - z\psi(t), \tag{8.1}$$

где ς *и* ς_1 – функции формы по модели жесткой и плавающей «крышки» соответственно.

Обобщенные координаты волн на свободной поверхности по модели жесткой «крышки», как и прежде, обозначим через $s_m(t)$, а по модели плавающей «крышки» – через $q_m(t)$. Нам нужно установить связь между $s_m(t)$ и $q_m(t)$ и заменить, таким образом, в уравнениях движения по модели жесткой «крышки» s_m на q_m. Это и будут уравнения возмущенного движения по модели плавающей «крышки». Подтверждением того, что эти уравнения эквиваленты, будет служить то, что спектр частот и тех и других уравнениях одинаков. Этого и следовало ожидать, поскольку линейное преобразование (8.1) является тождественным.

Начнем с того, что выпишем уравнения для модели жесткой «крышки»:

$$\begin{gathered}\left(m^0+m\right)\dot{v}_z-\left(J_y^0+J_y\right)\ddot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{s}_m\lambda_m=F_z,\\ \left(I^0+I\right)\ddot{\psi}-\left(J_y^0+J_y\right)\dot{v}_z+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\ddot{s}_m\lambda_{0m}+s_m g\lambda_m\right)-\\ -g\left(J_y^0+J_y\right)\psi=M_y,\\ \left(\ddot{s}_m+\omega_m^2 s_m\right)M_m+\dot{v}_z\lambda_m+\ddot{\psi}\lambda_{0m}+g\psi\lambda_m=0,\ \ m=1,2,...\end{gathered}\tag{8.2}$$

Далее представим ς,ς_1 и z в виде разложений в обобщенные ряды Фурье по собственным функциям Ψ_m базовой краевой задачи:

$$\begin{gathered}\varsigma=\sum_{m=1}^{\infty}s_m\left.\frac{\partial\Psi_m}{\partial x}\right|_{x=0},\ \varsigma_1=\sum_{m=1}^{\infty}q_m\left.\frac{\partial\Psi_m}{\partial x}\right|_{x=0},\\ z=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\Psi_m,\end{gathered}\tag{8.3}$$

где a_n – неизвестные константы-коэффициенты разложения. Их без труда можно найти:

$$\int_{\Sigma_0}z\Psi_n ds=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\int_{\Sigma_0}\Psi_m\Psi_n ds=a_n\int_{\Sigma_0}\Psi_n^2 ds,\ \ \left(n=1,2,...\right)$$

или, в прежде введенных обозначениях

$$\rho\sigma_m^2\int_{\Sigma_0}z\Psi_m ds=\lambda_m=M_m\cdot a_m.$$

Следовательно,

$$a_m=\frac{\lambda_m}{M_m}\quad u\quad z=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{M_m}\Psi_m.$$

С учетом этих зависимостей из (8.1) находим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}s_m\sigma_m^2\Psi_m=\sum_{m=1}^{\infty}q_m\sigma_m^2\Psi_m+\psi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{M_m}\Psi_m.$$

Следовательно, сравнивая коэффициенты при одинаковых Ψ_m (они линейно независимые), поэтому получим

$$s_m = q_m - \psi(t)\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m}{M_m} \quad (m = 1,2,...). \tag{8.4}$$

Подставим (8.4) в первое уравнение (8.2)

$$\left(m^0 + m\right)\dot{v}_z - \left(J_y^0 + J_y + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m}\right)\ddot{\psi} + \sum_{m=1}^{\infty}\ddot{q}_m\lambda_m = F_z. \tag{8.5}$$

По структуре (8.5) не отличается от уравнения сил в (8.2). Но там условием отсутствия инерционной связи поступательного с вращательным движением было требование разместить начало связанной системы координат в центре масс системы твердое тело + затвердевшая жидкость

$$J_y^0 + J_y = 0 \quad \textit{или} \quad m^0 x_T + m x_Ж = \left(m^0 + m\right)x_C = 0.$$

В случае модели плавающей «крышки» это требование, как видно из (8.5), не работает. Здесь инерционная связь по $z(t)$ и $\psi(t)$ пропадает, если начало связанной системы отсчета поместить в точку x_G

$$m^0 m_T + m x_Ж + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m} = \left(m^0 + m\right)x_G.$$

Определим положение этой точки. Перепишем последнее соотношение, учитывая, что $x_c\left(m^0 + m\right) = x_T m^0 + x_Ж m$:

$$\left(m^0 + m\right)x_C + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m} = \left(m^0 + m\right)x_G$$

или

$$x_G = x_C + \frac{1}{m^0 + m}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m}.$$

Это значит, что точка x_G (по терминологии из теории корабля она называется метацентром) сдвинута вверх по длине ракеты относительно ее центра масс на величину

$$\frac{1}{m^0 + m}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m}.$$

Преобразуем это выражение, выясняя его определенный физический смысл. Выше мы получили, что

$$z = \sum_{m=1}^{n} \frac{\lambda_m}{M_m} \Psi_m \ .$$

Возведем z в квадрат, проинтегрируем по Σ_0 и вспомним опять, что Ψ_m ортогональны на Σ_0. Тогда с учетом ранее введенных обозначений получим

$$\rho \int_{\Sigma_0} z^2 ds = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{\sigma_m^2 M_m} = L_y \, .$$

Поэтому

$$x_G = x_C + \frac{L_y}{m^0 + m}, \tag{8.6}$$

где $L_y = \rho \int_{\Sigma_0} z^2 ds$ – момент инерции поперечного сечения свободной поверхности Σ_0 (см. (6.26)). Очевидно, что метацентр всегда смещен вверх относительно центра масс системы и тем больше, чем больше свободная поверхность и меньше масса жидкости.

Вернемся к уравнению поступательного движения (8.5). Обнаруживаем, что присоединенные массы $\lambda_m \ (m = 1,2,...)$ в модели плавающей «крышки» остались теми же, что и в модели жесткой «крышки», т.е.

$$\lambda_m = \lambda_m^{'}, \quad (m = 1,2,...)$$

(штрихом будем обозначать параметры, относящиеся к модели плавающей «крышки»).

Преобразуем теперь с помощью (8.4) уравнения колебаний жидкости из (8.2):

$$M_m \left(\ddot{q}_m - \ddot{\psi} \frac{1}{\sigma_m^2} \frac{\lambda_m}{M_m} + \omega_m^2 q_m - \psi(t) g \frac{\lambda_m}{M_m} \right) +$$
$$+ \dot{\upsilon}_z \lambda_m + \ddot{\psi} \lambda_{0m} + g \psi \lambda_m = 0, \quad m = 1,2,...$$

После приведения подобных

$$M_m\left(\ddot{q}_m+\omega_m^2 q_m\right)+\dot{\upsilon}_z\lambda_m+\ddot{\psi}\left(\lambda_{0m}-\frac{\lambda_m}{\sigma_m^2}\right)=0, \qquad (8.7)$$

$$m=1,2,..$$

Это уравнение также совпадает по структуре со своим аналогом в модели жесткой «крышки». Совпадают собственные частоты $\left(\omega_m^2=\left(\omega'\right)^2\right)$ и присоединенные массы $M_m=M_m'$. Имеют место два отличия: во-первых,

$$\lambda_{0m}'=\lambda_{0m}-\frac{\lambda_m}{\sigma_m^2}=\lambda_{0m}-\frac{g}{\omega_m^2}\lambda_m, \quad \left(\sigma^2=\frac{\omega^2}{g}\right)$$

и, во-вторых, нет силы $g\lambda_m\psi(t)$, пропорциональной обобщенной координате $\psi(t)$.

Эти различия имеют общие корни: они являются следствием разницы ς' и ς на величину $z\psi(t)$ в соответствии с зависимостью (7.1).

И, наконец, преобразуем уравнение моментов (7.2). После замены там s_m на q_m с помощью (8.4) получим

$$\left(I_Y^0+I_y\right)\ddot{\psi}-\left(J_Y^0+J_y\right)\dot{v}_z-g\psi\left(J_Y^0+J_y\right)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\ddot{q}_m\lambda_{0m}-\ddot{\psi}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m\lambda_{0m}}{M_m}+gq_m\lambda_m-g\psi\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m}\right)=M_y$$

или

$$\left(I_Y^0+I_y-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m\lambda_{0m}}{M_m}\right)\ddot{\psi}-\left(J_y^0+J_y\right)\dot{v}_z-$$
$$-g\psi\left(J_Y^0+J_y+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}\frac{\lambda_m^2}{M_m}\right)+ \qquad (8.8)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{q}_m\lambda_{0m}+g\sum_{m=1}^{\infty}q_m\lambda_m=M_y.$$

Еще раз преобразуем эту формулу, заменяя в последней сумме q_m на его выражение из (8.7) и, так как $\sigma_m^2 = \dfrac{\omega^2}{g}$,

$$q_m = \frac{1}{g\sigma_m^2}\left(\ddot{q}_m - v_z \frac{\lambda_m}{M_m} - \ddot{\psi} \frac{\lambda_{0m} - \dfrac{\lambda_m}{\sigma_m^2}}{M_m} \right).$$

Подставим это в последнюю сумму в (8.8)

$$\left[I_y^0 + I_y - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m^2}\left(2\lambda_m\lambda_{0m} - \frac{\lambda_m^2}{M_m} \right) \right] \ddot{\psi} -$$

$$- \left(J_y^0 + J_y + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{M_m\sigma_m^2} \right) \dot{v}_z - g(J_y^0 + J_y + \qquad (8.9)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{M_m\sigma_m^2} \Big) \psi + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \left(\lambda_{0m} - \frac{\lambda_m}{\sigma_m^2} \right) = M_y.$$

Как и в случае уравнения сил, структура уравнений моментов по двум рассматриваемым моделям одинакова. Различаются только коэффициенты. Обозначим их, штрихуя опять относящиеся к плавающей «крышке»,

$$I_y^{'} = I_y - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m^2}\left(2\lambda_m\lambda_{0m} - \frac{\lambda_m^2}{M_m} \right), \quad \lambda_{om}^{'} = \lambda_{0m} - \frac{\lambda_m}{\sigma_m^2}.$$

Положение метацентра относительно центра масс системы также находится из того же соотношения (8.6), полученного из уравнения сил.

В заключение соберем всю систему уравнений возмущенного движения вместе и приведем ее к системе отсчета с началом в метацентре $(x_G = 0)$. Штрих опустим, различая, если нужно, модели по обозначениям обобщенных координат жидкости: s_m – модель жесткой «крышки», q_m – модель плавающей «крышки»:

$$\begin{gathered}\left(m^0+m\right)v_z+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{q}_m\lambda_m=F_z,\\ \left(I_y^0+I_y\right)\ddot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{q}_m\lambda_{0m}=M_y,\\ M_m\left(\ddot{q}_m+\omega_m^2q_m\right)+v_z\lambda_m+\dot{\psi}\lambda_{0m}=0,\quad m=1,2,...\end{gathered}\tag{8.10}$$

Эти уравнения для завершения постановки задачи должны быть дополнены начальными условиями $(t=0)$:

$$v_z(0)=v_z^0,\ \psi(0)=\psi^0,\ \dot{\psi}(0)=\dot{\psi}^0,\ q_m(0)=q_m^0,\ \dot{q}_m(0)=\dot{q}_m^0,$$
$$(m=1,2,\ldots).$$

Уравнения движения (8.10), учитывая их предельную физическую ясность и компактность записи, получили название канонических уравнений возмущенного движения рассматриваемой механической системы.

Глава 9

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОТСЕКОМ, СОДЕРЖАЩИМ ЖИДКОСТЬ

9.1. Асимптотика «медленных» и «быстрых» движений

Пусть характерное время процесса (в данном случае – период колебаний твердого тела) будет T, а характерный линейный размер (например, длина волны колебаний системы на траектории – L). Тогда характерная частота процесса Ω имеет порядок

$$\Omega \sim \frac{1}{T} \sim \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2},$$

и будем считать ее конечной величиной.

Назовем «медленными» движениями системы такие, для которых частота основного тона собственных колебаний жидкости ω_1 много больше частоты колебаний системы

$$\Omega^2 << \omega_1^2, \quad \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \sim \varepsilon^2 << 1.$$

Оценим по порядку величин члены в последнем в (8.10) уравнении для m=1. Так как

$$|\ddot{q}_1| \sim \Omega^2 |q_1|, |\dot{v}_z| \sim \Omega^2 |z|, |\ddot{\psi}| \sim \Omega^2 |\psi|,$$

то

$$|q_1| \sim \varepsilon^2 \left(|q_1| + \frac{\lambda_1}{M_1} |z| + \frac{\lambda_{01}}{M_1} |\psi| \right).$$

Это значит, что «медленные» движения имеют место при $|q_1| \to 0$. Переходя в (8.10) к пределу при $|q_1| \to 0$, получим уравнения «медленных» движений системы:

$$\left(m^0 + m\right)\dot{v}_z = F_z \ , \ \left(I^0 + I\right)\ddot{\psi} = M_y \ . \qquad (9.1)$$

По структуре эти уравнения не отличаются от уравнений движения твердого тела с затвердевшей жидкостью. Отличие в их внутреннем содержании. Во-первых, для затвердевшей жидкости $I = \rho\int\limits_Q \left(y^2 + x^2\right)^2 dQ$, а здесь $I = \rho\int\limits_Q \left(\nabla\Phi_{22}\right)^2 dQ$ – интеграл от потенциалов Жуковского. Во-вторых, в случае затвердевшей жидкости такую структуру имеют уравнения, приведенные к центру масс системы твердое тело + жидкость $\left(x_C = 0\right)$, а уравнения (9.1) приведены к метацентру $\left(x_G = 0\right)$. В этом еще одно отличие уравнений «медленных» движений твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью от уравнений движения твердого тела с затвердевшей жидкостью.

Обратимся к уравнению «быстрых» движений. Они соответствуют асимптотике $\omega_n^2 \to 0$. В этом случае из последнего уравнения (8.10) имеем

$$\ddot{q}_n = -\frac{1}{M_n}\left(\lambda_n \ddot{z} + \lambda_{on}\ddot{\psi}\right), \quad n = 1,2,...$$

что позволяет исключить $\ddot{q}_n$ из первых двух уравнений в (8.10)

$$\left(m^0 + m - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2}{M_n}\right)\ddot{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\lambda_{0n}}{M_n}\ddot{\psi} = F_z,$$

$$\left(I^0 + I - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{0n}^2}{M_n}\right)\ddot{\psi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\lambda_{0n}}{M_n}\ddot{z} = M_y.$$

И в этом предельном режиме движения мы пришли к уравнениям, по структуре напоминающим уравнения движения твердого тела: в них отсутствуют обобщенные координаты, описывающие подвижность свободной поверхности. Однако масса, момент инерции и статический момент «откликаются» на наличие свободной поверхности (присоединенные массы $M_n, \lambda_n, \lambda_{0n}$ – интегралы по Σ_0). Более того, сохраняется инерционная связь между поступательным и вращательным движениями. В (8.10) она проявилась через подвижность жидкости, здесь – непосредственная, а при «медленных» движениях ее вообще не было.

9.2. Динамика системы в режиме установившихся гармонических колебаний

Рассмотрим установившиеся колебания системы (8.10) на частоте ω под действием внешних сил и момента

$$F_z = F_0 e^{i\omega t}, \quad M_y = M_0 e^{i\omega t}. \tag{9.2}$$

Реакция системы на гармоническое возбуждение (9.2) будет

$$z = z_0 e^{i\omega t}, \quad \psi = \psi_0 e^{i\omega t}, \quad q_n = q_{n0} e^{i\omega t}, \quad (n = 1,2,...) \tag{9.3}$$

В этом случае установившихся гармонических колебаний системы появляется возможность с помощью (9.3) исключить из уравнений движения (8.10) обобщенные координаты q_n. Для этого из последнего уравнения (8.10) находим

$$q_{n0} = -\omega^2 \frac{\lambda_n z_0 + \lambda_{0n}\psi_0}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}, \quad n = 1,2,... \tag{9.4}$$

Подставим (9.3) и (9.4) в первые два уравнения (8.10) и получим

$$-e^{i\omega t}\omega^2\left\{\left[m_0 + m - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2\lambda_n^2}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}\right]z_0 - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2\lambda_n\lambda_{0n}}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}\psi_0\right\} = F_z$$
$$-e^{i\omega t}\omega^2\left\{\left[I_y^0 + I_y - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2\lambda_n^2}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}\right]\psi_0 - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2\lambda_n\lambda_{0n}}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}z_0\right\} = M_y$$

или, возвращаясь с помощью (9.3) к $\ddot{z}$ и $\ddot{\psi}$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t}, \qquad \ddot{\psi} = -\omega^2\psi_0 e^{i\omega t},$$

получим

$$\begin{aligned}\mu_{zz}(\omega)\ddot{z} + \mu_{z\psi}(\omega)\ddot{\psi} &= F_z,\\ \mu_{\psi z}(\omega)\ddot{z} + \mu_{\psi\psi}(\omega)\ddot{\psi} &= M_y,\end{aligned} \tag{9.5}$$

где

$$\mu_{zz}(\omega) = m^0 + m - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)},$$

$$\mu_{z\psi}(\omega) = \mu_{\psi z} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{0n}}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}, \qquad (9.6)$$

$$\mu_{\psi\psi}(\omega) = I_y^0 + I_y - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{0n}^2}{M_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)}.$$

Из (9.6) следует, что коэффициенты уравнений (9.5) имеют размерность: μ_{zz} – массы, $\mu_{\psi\psi}$ – момента инерции, $\mu_{z\psi} = \mu_{\psi z}$ – статического момента инерции.

Структура уравнений (9.5) и размерность их коэффициентов позволяют говорить о том, что это уравнения движения некоторого твердого тела, массовые и инерционные характеристики которого в режиме установившихся гармонических колебаний зависят от частоты возбуждения в соответствии с зависимостями (9.6). В связи с этим уравнения (9.5) называются уравнениями движения динамически эквивалентного твердого тела. Подчеркнем еще раз, что динамически эквивалентное тело – это система твердое тело с полостью, частично заполненной жидкостью, в режиме установившихся колебаний (9.2) и (9.3).

Рассмотрим два предельных случая. Пусть $\omega \to 0$, т.е. $\frac{\omega}{\omega_n} << 1 \quad (n = 1,2,...)$ – частота возбуждения системы много меньше низшей из собственных частот колебаний жидкости. Тогда

$$\lim_{\omega\to\infty} \mu_{zz}(\omega) = m^0 + m, \quad \lim_{\omega\to\infty} \mu_{\psi\psi}(\omega) = I_y^0 + I_y,$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \mu_{z\psi}(\omega) = 0$$

и, следовательно, из (9.5) получаем

$$\left(m^0 + m\right)\ddot{z} = F_y, \quad \left(I^0 + I\right)\ddot{\psi} = M_y.$$

Т.е. в этом предельном случае уравнения движения расщепились на две независимых так же, как в рассмотренном выше асимптотическом приближении «медленных» движений.

Пусть теперь $\omega \to \infty$, т.е. $\dfrac{\omega}{\omega_n} \to \infty \ \ (n = 1,2,...)$. Из (9.6) следует, что

$$\lim_{\omega\to 0} \mu_{zz}(\omega) = m^0 + m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{M_n},$$

$$\lim_{\omega\to 0} \mu_{\psi\psi}(\omega) = I_y^0 + I_y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{0n}^2}{M_n}, \quad \lim_{\omega\to 0} \mu_{z\Psi}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{0n}}{M_n}.$$

Подстановка этих значений коэффициентов в (9.5) показывает, что при $\omega \to \infty$ уравнения движения динамически эквивалентного твердого тела вырождаются в уравнения «быстрых» движений.

Из рассмотрения уравнений (9.5) и их коэффициентов (9.6) можно сформулировать несколько качественных выводов. Во-первых, коэффициенты уравнений динамически эквивалентного твердого тела зависят от частоты возбуждения системы ω. Во-вторых, для динамически эквивалентного тела не существует метацентра (8.6), не зависящего от частоты возбуждения ω. Зависимость $x_G(\omega)$ можно установить, если уравнения (9.5) строить не из приведенных к каноническому виду (8.10), а из приведенных к произвольной точке $x_G \neq 0$ на оси симметрии системы, т.е. первые два уравнения в (8.10) заменить на (8.5) и (8.9) соответственно. Далее те же самые выкладки.

Представляет интерес зависимость коэффициентов (9.6) от частоты ω. Ограничимся рассмотрением $\mu_{zz}(\omega)$. На рис.9.1 представлен ее график. Видно, что эта зависимость в точках $\omega = \omega_n \ \ (n = 1,2,...)$ имеет разрыв, а в точках $\omega = \omega_{0n} \ \ (n = 1,2,...)$ – нули. Точкам разрыва соответствуют резонансы системы на каждой из собственных частот колебаний жидкости. На этих частотах при малых перемещениях отсека амплитуда волн на свободной поверхности неограниченно возрастает (не нужно забывать, что эта теория линейная и она «работает»

с «бесконечно» малыми искомыми переменными, поэтому этот график (рис. 9,1) отражает не реальное положение дел, а тенденцию).

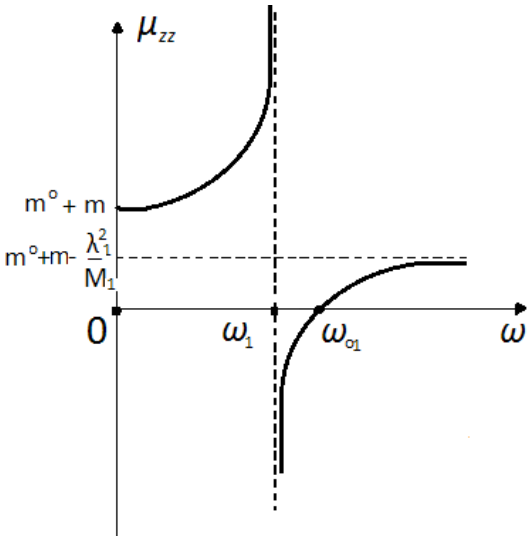


Рис. 9.1

Обратим внимание на интересный факт, который обнаруживается при рассмотрении графика на рис.9.1. Видно, что в диапазоне частот возбуждения $\omega_n < \omega < \omega_{0n}$ масса динамически эквивалентного твердого тела отрицательна. Это значит, что возбуждающая сила и ускорение находятся в противофазе. Ясно, что в случае твердого тела без жидкости вектор ускорения всегда совпадает по направлению с вектором силы. Появление «отрицательной» массы объясняется тем, что при установившихся колебаниях системы на определенной частоте ускорение самого твердого тела и ускорение общего центра масс жидкости и твердого тела имеют противоположные направления за счет интенсивного движения жидкости в сторону, противоположную движению твердого тела.

9.3. Влияние параметров системы на частоты ее собственных колебаний

Этот вопрос рассмотрим на нескольких простых примерах, выводы их которых известны из теории линейных колебаний связанных систем.

Рассмотрим вначале свободные колебания отсека с жидкостью вдоль оси o^*z^*. Динамическая схема этой системы будет одинаковой для моделей «жесткой» и «плавающей» крышки. Ограничимся учетом только первого тона колебаний жидкости. Выпишем уравнения движения

$$\left(m^0+m\right)\ddot{z}+\lambda_1\ddot{q}_1=0,\ M_1\left(\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1\right)+\lambda_1\ddot{z}=0.$$

И исключим из них $\ddot{z}$

$$\ddot{q}_1+\omega_*^2 q_1=0.$$

Здесь квадрат собственной частоты колебаний системы есть

$$\omega_*^2=\omega_1^2\,\frac{m^0+m}{m^0+m-\dfrac{\lambda_1^2}{M_1}}.$$

Она всегда больше, чем собственная частота колебаний жидкости ω_1. Это результат наложения связи (первое уравнение) на колебательное звено (второе уравнение): система становится более «жесткой».

Следующий пример. Отсек с жидкостью совершает свободные колебания в плоскости $o^*x^*z^*$ относительно центра масс системы, отнесенного на расстояние x_G от метацентра. Будем опять учитывать только первый тон колебаний жидкости. Воспользуемся моделью плавающей «крышки». Движение такой системы описывается уравнениями (см. (8.9)) при $\dot{v}_z=0$

$$\left(I_y^0+I\right)\ddot{\psi}+gx_G\left(m^0+m\right)\psi+\lambda_{01}\ddot{q}_1=0$$

$$M_1\left(\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1\right)+\lambda_{01}\ddot{\psi}=0$$

Механическим аналогом такой системы являются маятники с инерционной связью и парциальными частотами

$$\omega_1\quad u\quad \omega_T=\left[gx_G\left(m^0+m\right)\left(I_y^0+I_y\right)^{-1}\right]^{1/2}.$$

Связанность маятников характеризуется, как известно, произведением внедиагональных элементов характеристического определителя системы

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p^2+\omega_T^2 & p^2\dfrac{\lambda_{01}}{I_y^0+I_y} \\ p^2\dfrac{\lambda_{01}}{M_1} & p^2+\omega_1^2 \end{vmatrix}.$$

Найдем частоты собственных колебаний этой системы (будем их помечать *) из условия $\Delta=0$ (частотного уравнения):

$$a_0p^4+a_2p^2+a_4=0,$$

где

$$a_0=1-C_{\psi q}C_{q\psi},\quad a_2=\omega_1^2+\omega_T^2,\quad a_4=\omega_1^2\omega_T^2,$$

$$C_{\psi q}=\frac{\lambda_{01}}{I_y^0+I_Y},\quad C_{q\psi}=\frac{\lambda_{01}}{M_1}.$$

Этими частотами будут

$$p_{1,2}^2=\left(\omega_{1,2}^*\right)^2=$$

$$=\frac{-\left(\omega_1^2+\omega_T^2\right)\pm\sqrt{\left(\omega_1^2+\omega_T^2\right)^2-4\omega_1^2\omega_T^2\left(1-C_{\psi q}C_{q\psi}\right)}}{2\left(1-C_{\psi q}C_{q\psi}\right)}.$$

При слабой связанности парциальных систем $\left(C_{q\psi}C_{\psi q}\ll 1\right)$ получим

$$\left(\omega_1^*\right)^2=\omega_1^2\left(1+C_{\psi q}\cdot C_{q\psi}\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_T^2}\right),$$

$$\left(\omega_2^*\right)^2=\omega_T^2\left(1-C_{\psi q}\cdot C_{q\psi}\frac{\omega_T^2}{\omega_1^2-\omega_T^2}\right).$$

Нетрудно проверить известное из теории колебаний связанных систем положение, что парциальные частоты ω_1 и ω_T лежат между собственными частотами системы ω_1^* и ω_2^*, т.е.

$$\omega_2^*<\omega_T<\omega_1<\omega_1^*\ \text{или}\ \omega_1^*<\omega_1<\omega_T<\omega_2^*.$$

Рассмотренные выше примеры касались консервативных систем (достаточный признак этого – симметричность характеристических определителей относительно главной диагонали). Теперь обратимся к примеру, когда в системе, помимо консервативных связей, присутствуют и неконсервативные. Причем эти связи обусловлены не диссипацией энергии внутри системы (например, за счет вязкости жидкости, ее пока считаем пренебрежимо малой). Эти связи обусловлены взаимодействием системы с внешней средой. Пусть это будут аэродинамические силы и момент, пропорциональные обобщенной координате ψ .

Уравнения возмущенного движения такой системы в плоскости рыскания, записанные относительно метацентра $\left(x_G = 0\right)$ и при учете только первого тона колебаний жидкости, имеют вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{z} + C_{z\dot{\psi}}\dot{\psi} + C_{zq}\ddot{q}_1 = 0 \,, \\ &\ddot{\psi} + C_{\psi\psi}\psi + C_{\psi q}\ddot{q}_1 = 0 \,, \\ &\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + C_{qz}\ddot{z} + C_{q\psi}\ddot{\psi} = 0 \,. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Обозначения в (9.7) следующие:

$$C_{z\psi} = \frac{C_y^{\alpha}\rho S V^2}{2\left(m^0 + m\right)} \,,\ C_{zq} = \frac{\lambda_1}{m^0 + m} \,,\ C_{qz} = \frac{\lambda_1}{M_1} \,,$$

$$C_{q\psi} = \frac{\lambda_{01}}{M_1} \,,\ C_{\psi\psi} = -x_d \frac{C_y^{\alpha}\rho V^2}{2\left(I_y^0 + I_y\right)} \,,\ C_{\psi q} = \frac{\lambda_{01}}{I_y^0 + I_y}.$$

Для определенности полагается, что система обладает статической аэродинамической устойчивостью, т.е. центр аэродинамического давления $x_d < 0$ и, следовательно, $C_{\psi\psi} > 0$.

Для удобства дальнейшего анализа (9.7) исключим из них $\ddot{z}$:

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi} + \omega_T^2\psi + a_{\psi q}\ddot{q}_1 = 0 \,, \\ &\ddot{q}_1 + \omega_{10}^2 q_1 + b_{q\psi} + a_{q\psi}\ddot{\psi} = 0 \,, \end{aligned} \tag{9.8}$$

где

$$\omega_T^2 = C_{\psi\psi} \,,\ a_{\psi q} = C_{\psi q} \,,\ \omega_{10}^2 = \frac{\omega_1^2}{1 + C_{qz}C_{zq}} \,,$$

$$b_{q\psi} = -\frac{C_{qz}C_{zq}}{1 - C_{qz}C_{zq}} \,,\ a_{q\psi} = C_{q\psi} \,.$$

Механическим аналогом системы (9.8) являются связанные маятники. Их собственные частоты ω_T и ω_{10}.

Неконсервативная составляющая связанности маятников выражается произведением $a_{\psi q}b_{q\psi}$. Как в любой неконсервативной системе, ее собственные частоты будут комплексно сопряженными числами. Найдем условия, в которых колебания системы (9.8) будут неустойчивыми или, что то же самое, когда вещественные части корней частного уравнения положительны. Из характеристического определителя

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p^2+\omega_T^2 & p^2 a_{\psi q} \\ p^2 a_{q\psi}+b_{q\dot{\psi}} & p^2+\omega_{10}^2 \end{vmatrix}$$

и при $p=i\sigma$ (σ – комплексное число), получим частотное уравнение

$$\sigma^4\left(1-a_{q\psi}a_{q\psi}\right)-\sigma^2\left(\omega_T^2+\omega_{10}^2-a_{q\psi}b_{q\psi}\right)+\omega_T^2\omega_{10}^2=0$$

и его решение

$$\sigma_{1,2}^2=\frac{\omega_{10}^2\omega_T^2-a_{\psi q}b_{q\psi}}{2\left(1-a_{\psi q}a_{q\psi}\right)}\pm$$

$$\pm\frac{\left[\left(\omega_{10}^2+\omega_T^2\right)^2+4\omega_{10}^2\omega_T^2a_{\psi q}a_{q\psi}+a_{\psi q}^2b_{q\psi}^2-\left(\omega_{10}^2+\omega_T^2\right)a_{\psi q}b_{q\psi}\right]^{1/2}}{2\left(1-a_{\psi q}b_{q\psi}\right)}.$$

Отсюда следует, что при некоторых значениях произведения $b_{q\psi}a_{\psi q}$, которое определяет, как отмечалось, неконсервативную составляющую связанности парциальных систем, комплексные числа (частоты системы) $i\sigma$ могут иметь положительную вещественную часть. В этом случае система будет неустойчивой. Из подкоренного выражения $\sigma_{1,2}^2$ следует, что граница неустойчивости находится из решения квадратного относительно $a_{\psi q}b_{q\psi}$ уравнения

$$\left(a_{\psi q}b_{q\psi}\right)^2-2\left(\omega_{10}^2+\omega_T^2\right)a_{\psi q}b_{q\psi}+$$

$$+\left(\omega_{10}^2-\omega_T^2\right)+4\omega_{10}^2\omega_T^2a_{\psi q}a_{q\psi}=0\ .$$

Это решение имеет вид

$$\left(a_{\psi q}b_{q\psi}\right)=\omega_{10}^2+\omega_T^2\pm2\omega_{10}\omega_T\sqrt{1-a_{\psi q}a_{q\psi}}\ .$$

При слабой связанности (консервативной составляющей) парциальных систем $a_{\psi q}a_{q\psi} \ll 1$ эта граница будет

$$\left(\omega_{10}^2+\omega_T^2\right)^2+\omega_{10}\omega_T a_{\psi q}a_{q\psi} \ll a_{\psi q}b_{q\psi} \ll$$

$$\ll \left(\omega_{10}^2+\omega_T^2\right)^2-\omega_{10}\omega_T a_{\psi q}a_{q\psi} \ .$$

Еще один пример. Он иллюстрирует положение, что наличие в системе неконсервативных сил, пропорциональных обобщенным скоростям (т.е. внешних демпфирующих), может так же быть причиной появления неустойчивости. И это несмотря на то, что само по себе явление демпфирования связано с поглощением энергии движения.

Будем исследовать на устойчивость движение следующей гипотетической системы:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}+C_{z\psi}\ddot{\psi}+C_{zq}\ddot{q}_1=0\ ,\ \ddot{\psi}+C_{\psi\psi}\psi+C_{\psi q}\ddot{q}=0\ ,\\ &\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1+C_{qz}\ddot{z}+C_{q\psi}\ddot{\psi}=0\ . \end{aligned} \qquad (9.9)$$

Обозначения здесь такие же, как и в (9.7), а член $C_{z\dot{\psi}}\dot{\psi}$ обозначает, например, аэродинамическую демпфирующую силу. Исключая $\ddot{z}$ из последнего уравнения, так же как и в предыдущем примере, и обозначая

$$b_{q\dot{\psi}}=\frac{C_{qz}C_{z\dot{\psi}}}{1-C_{zq}C_{qz}}\ ,$$

получим эквивалентную (9.9) динамическую схему:

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi}+\omega_T^2\psi+a_{\psi q}\dot{q}_1=0\ ,\\ &\ddot{q}_1+\omega_{10}^2 q+a_{q\psi}\ddot{\psi}+b_{q\dot{\psi}}\dot{\psi}=0\ . \end{aligned}$$

Построим характеристический определитель

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p^2+\omega_T^2 & p^2a_{\psi q} \\ p^2a_{q\psi}+b_{q\dot{\psi}} & p^2+\omega_{10}^2 \end{vmatrix}$$

и его частотное уравнение

$$p^4\left(1-a_{q\psi}a_{q\psi}\right)-p^3a_{q\psi}b_{q\psi}+p^2\left(\omega_T^2+\omega_{10}^2\right)+\omega_T^2\omega_{10}^2=0. \qquad (9.10)$$

Будем считать, что коэффициент $b_{q\dot{\psi}}$ мал (порядка ε) и что корни (9.10) представимы в виде

$$p_j^2 = \alpha_j + i\sigma_j \quad \left(j = 1,2;\ i = \sqrt{-1}\right), \tag{9.11}$$

причем $$\frac{\alpha_j}{\sigma_j} \ll 1 \left(j = 1,2\right).$$

Эти допущения упрощают анализ корней (9.10). Действительно, после подстановки (9.11) в (9.10) и приравнивания к нулю вещественной и мнимой частей полученного таким образом уравнения найдем с точностью до малых порядка ε^2 :

$$\begin{aligned} &\sigma^4\left(1 - a_{q\psi}a_{q\psi}\right) - \sigma^2\left(\omega_T^2 + \omega_{10}^2\right) + \omega_T^2\omega_{10}^2 = 0\ , \\ &2\alpha\left[\omega_T^2 + \omega_{10}^2 - \sigma^2\left(1 - a_{q\psi}a_{q\psi}\right)\right] + \sigma^2 a_{q\psi}b_{q\dot{\psi}} = 0\ . \end{aligned} \tag{9.12}$$

Из первого уравнения (9.12) находим мнимые части корней (9.11) – собственные частоты колебаний системы

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{\omega_T^2 + \omega_{10}^2 \pm \sqrt{\left(\omega_T^2 - \omega_{10}^2\right)^2 + 4\omega_T^2\omega_{10}^2 a_{\psi q}a_{q\psi}}}{2\left(1 - a_{\psi q}a_{q\psi}\right)}\ ,$$

а из второго – соответствующие им вещественные части (9.11) – коэффициенты затухания $$\alpha_{1,2} = \frac{a_{\psi q}b_{q\dot{\psi}}}{4\left(1 - a_{\psi q}a_{q\psi}\right) - 2\dfrac{\omega_T^2 + \omega_{10}^2}{\sigma_{1,2}^2}}\ .$$

Преобразуем $\alpha_{1,2}$, используя первое уравнение (9.12)

$$\alpha_{1,2} = \frac{a_{\psi q}b_{q\dot{\psi}}}{2\left(1 - a_{\psi q}a_{q\psi}\right) - \dfrac{\omega_T^2\omega_{10}^2}{\sigma_{1,2}^2}}\ .$$

Рассмотрим два предельных случая. Пусть $\omega_T \to 0$. Тогда одна из собственных частот – σ_1 и соответствующий ей коэффициент затухания α_1 также стремятся к нулю, а вторые корни дают

$$\sigma_2^2 \approx \frac{\omega_0^2}{1 - a_{\psi q}a_{q\psi}}\ ,\ \ \alpha_2 \approx \frac{b_{q\psi}}{2\left(1 - a_{\psi q}a_{q\psi}\right)}\ .$$

Следовательно, при $b_{q\psi} > 0$ имеем $\alpha_2 > 0$, и собственные колебания системы будут неустойчивы.

Второй предельный случай: парциальные частоты ω_T и ω_{10} совпадают: $\omega_{10}^2 = \omega_T^2 = \omega_0^2$. Тогда получим

$$\sigma_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1+\sqrt{a_{\psi q}a_{q\psi}}} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = -\frac{b_{q\dot{\psi}}}{4\left(1+\sqrt{a_{\psi q}a_{q\psi}}\right)}\sqrt{\frac{a_{\psi q}}{a_{q\psi}}},$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1-\sqrt{a_{\psi q}a_{q\psi}}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = +\frac{b_{q\dot{\psi}}}{4\left(1-\sqrt{a_{\psi q}a_{q\psi}}\right)}\sqrt{\frac{a_{\psi q}}{a_{q\psi}}}.$$

Следовательно, при слабой связанности парциальных систем $\left(a_{\psi q}a_{q\psi} \ll 1\right)$ собственные колебания системы будут неустойчивыми при любом знаке $b_{q\dot{\psi}}$.

Глава 10

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ОТСЕК

Расчет коэффициентов уравнений возмущенного движения (7.6) – модель жесткой «крышки» или (8.10) – модель плавающей «крышки» связан с решением краевых задач для составляющих потенциала абсолютных скоростей (3.10)

Решение для составляющей $\overline{\Phi}_1(r)$ известно (см. (2.11))

$$\overline{\Phi}_1 = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z = \bar{r}\,. \tag{10.1}$$

Для составляющей $\overline{\Phi}_2(r)$ перепишем краевую задачу из (2.10):

$$\Delta\Phi_{2l} = 0 \text{ при } \bar{r} \in Q,\ (l = 1,2,3)$$

$$\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = yn_x - zn_y,\ \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = zn_x - xn_z,\ \frac{\partial\Phi_{2.3}}{\partial n} = xn_y - yn_z \tag{10.2}$$

$$\text{при } \bar{r} \in S + \Sigma_0$$

Выпишем так же базовую краевую задачу (задача на собственные значения):

$$\begin{aligned} &\Delta\Psi = 0 && \text{при } \bar{r} \in Q \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 && \text{при } \bar{r} \in S \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \sigma^2\Psi && \text{при } \bar{r} \in \Sigma_0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Аналитическое решение задач (10.2) и (10.3) возможно только в тех случаях, когда поверхности, ограничивающие объем жидкости Q, являются координатными. В этом случае, как известно, к решению может быть применен метод разделения переменных. Получим решение таким методом для бака в форме прямого кругового цилиндра.

10.1. Решение задачи на собственные значения

Найдем решение (10.3) для задачи, когда жидкость колеблется в цилиндрическом баке радиуса R_0 и заполняет его в невозмущенном состоянии на глубину H. Введем цилиндрическую систему координат o, x, r, θ с началом в центре днища бака. Ось ox направлена против вектора ускорения поля массовых сил.

Будем вначале разыскивать потенциал $\Psi(x, r, \theta)$ в виде

$$\Psi = X(x)\cdot \chi(r, \theta). \tag{10.4}$$

Подставим это выражение в уравнение Лапласа в (10.3), записанное в цилиндрической системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

и получим после отделения переменной независимой x

$$\frac{1}{\chi}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}\right) = -\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2. \tag{10.5}$$

В (10.5) знак перед константой разделения $k^2 > 0$ выбран таким образом, чтобы из общего решения уравнения

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 . X = 0\,,$$

которое имеет вид $X(x) = A_x e^{-kx} + B_x e^{kx}$, (10.6)

можно было найти частное решение, которое удовлетворяет, во-первых, краевым условиям на днище $(x = 0)$ и на зеркале свободной поверхности $(x = H)$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial X}{\partial x} - \sigma^2 X\right]_{x=H} = 0 \tag{10.7}$$

и, во-вторых, убывает от свободной поверхности к дну. Последнее в связи с тем, что возмущения от свободной поверхности вглубь жидкости затухают.

Решение (10.5) будет удовлетворять первому условию (10.7), если $A_x = B_x$. Тогда будем иметь

$$X(x) = A_x ch(kx), \tag{10.8}$$

а из второго условия находим

$$\sigma^2 = kth\left(kH\right). \tag{10.9}$$

Решение второй половины уравнения (10.5)

$$\frac{\partial \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + k^2 \chi = 0$$

будем разыскивать, продолжая процедуру разделения переменных, представив $\chi\left(r,\theta\right)$ в виде

$$\chi\left(r,\theta\right) = Y\left(r\right)Z\left(\theta\right).$$

В результате получим два уравнения для *Y* и *Z:*

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 Z}{d\theta^2} + m^2 Z = 0 \\ &\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)Y = 0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

Здесь m^2 – константа разделения. Ее знак выбран так, чтобы получить периодическое по θ с периодом 2π решение для потенциала Ψ. Этому требованию будут удовлетворять целочисленные значения $m = 0,1,2,\ldots$.

Очевидно, что в этом случае

$$Z\left(\theta\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_{\theta m}\sin m\theta + B_{\theta m}\cos m\theta\right).$$

Второе уравнение в (10.10) – это уравнение Бесселя, и его общее решение выражается через функции Бесселя порядка *m*. Учитывая, что при $r = 0$ решение Ψ не должно иметь особенности, – оно должно быть конечным, нужно ограничиться только функциями Бесселя первого рода $J_m\left(kr\right)$, т.е. нужно разыскивать решение *Y* в виде

$$Y\left(r\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{rm} J_m\left(kr\right).$$

Ясно, что краевое условие непротекания на цилиндрической смоченной поверхности (при $r=R_0$)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

будет удовлетворено, если потребовать, чтобы

$$\left.\frac{dJ_m(kr)}{dr}\right|_{r=R_0} = 0 \quad (m = 0,1,2...),$$

или, если ввести безразмерный параметр $\xi = kR_0$,

$$\frac{dJ_m(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (m = 0,1,2...). \tag{10.11}$$

Это трансцендентное уравнение имеет счетное множество корней $\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots$

Выпишем для *Y(r)* удовлетворяющее условию непротекания решение

$$Y(r) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{rmn} J_m\left(\xi_n^{(m)}\frac{r}{R_0}\right).$$

Знание корней уравнения (10.11) позволяет, во-первых, рассчитать из (10.9) собственные значения краевой задачи

$$\left(\sigma_n^{(m)}\right)^2 = \frac{\xi_n^{(m)}}{R_0} th\left(\xi_n^{(m)}\frac{H}{R_0}\right)$$

и, следовательно, собственные частоты колебаний жидкости

$$\left(\omega_n^{(m)}\right)^2 = \frac{\xi_n^{(m)} g}{R_0} th\left(\xi_n^{(m)}\frac{H}{R_0}\right). \tag{13.12}$$

Во-вторых, записать собственные функции $\Psi_n^{(m)}$ и искомый потенциал $\Psi(\bar{r})$

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n^{(m)}, \tag{13.13}$$

$$\Psi_n^{(m)} = \left(A_{mn}\sin m\theta + B_{mn}\cos m\theta\right) ch\left(\xi_n^{(m)}\frac{x}{R_0}\right)\cdot J_m\left(\xi_n^{(m)}\frac{r}{R_0}\right),$$

$$A_{mn} = A_x \cdot A_{\theta m} \cdot A_{rm}, \quad B_{mn} = A_x \cdot B_{\theta m} \cdot A_{rm}.$$

Упростим это выражение, обратив внимание на следующее обстоятельство. Выпишем коэффициенты λ_n из (6.18) и λ_{0n} из (6.19),

которые в уравнениях движения (7.6) (или 8.10) ответственны за динамическое взаимодействие твердого тела и жидкости

$$\lambda_n = \rho\sigma_n^2 \int\limits_{\Sigma_0} z\Psi_n ds, \quad \lambda_{0n} = \rho\sigma_n^2 \int\limits_{\Sigma_0} \Phi_{22}\Psi_n ds \,.$$

Перепишем λ_{0n} с учетом краевых условий для Φ_{22} и Ψ и формулы Грина в виде

$$\lambda_{0n} = \rho \int\limits_{\Sigma_0+S} \Psi_n \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} ds = \rho \int\limits_{\Sigma_0+S} \left(zn_x - xn_z\right)\Psi_n ds \,.$$

В цилиндрической системе координат $z = r\sin\theta$, интегралы от функций, содержащих $\sin\theta \cdot \sin m\theta$ при любых целочисленных $m \neq 1$, будут равны нулю. Тоже самое для $\cos\theta \cdot \cos m\theta$ и $\sin\theta \cdot \cos m\theta$ и $\cos\theta \cdot \sin m\theta$. Это следствие ортогональности тригонометрических функций на отрезке $0 << \theta << 2\pi$. Поэтому в (10.13), если движение рассматривается в плоскости рыскания (*oxz*), нужно положить $m = 1$ и $B_{mn} = 0$, и, если бы движение рассматривалось в плоскости тангажа (*oxy*), – $m = 1$ и $A_{mn} = 0$. Следствием этого заключения является вывод, что в линейном приближении уравнения движения системы твердое тело + жидкость в плоскостях тангажа и рыскания независимы.

Таким образом, для случая движения в плоскости рыскания из (10.12) запишем

$$\Psi\left(\overline{r}\right) = \sin\theta \sum A_n \cdot ch\left(\xi_n \frac{x}{R_0}\right) \cdot J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right). \qquad (10.14)$$

Здесь и далее имеется в виду, что $\xi_n = \xi_n^{(1)}$.

Точно так же для собственных частот из (10.12) будем иметь

$$\omega_n^2 = \frac{\xi_n g}{R_0} th\left(\xi_n \frac{H}{R_0}\right), \quad n = 1,2,.. \qquad (10.15)$$

Значения ξ_n вычислены заранее: $\xi_1 = 1{,}841$, $\xi_2 = 5{,}331$, … $\xi_n \approx \xi_{n-1} + \pi$.

Собственные функции (10.14) найдены с точностью до произвольной константы A_n. Определим эти константы так, чтобы интеграл

$$\int_Q \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_m \left(\nabla \Psi_m\right)^2 dQ,$$

где $$\Psi_n = A_n ch\left(\xi_n \frac{x}{R_0}\right) J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right),$$

определял кинетическую энергию жидкости (см. раздел 5). Для этого используем нормировку (5.7):

$$\left.\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\right|_{\substack{x=H \\ \theta=\frac{\pi}{2} \\ r=R_0}} = A_n \frac{\xi_n}{R_0} sh\left(\xi_n \frac{H}{R_0}\right) = 1.$$

Таким образом,

$$A_n = \left[\frac{\xi_n}{R_0} sh\left(\xi_n \frac{H}{R_0}\right) J_1\left(\xi_n\right)\right]^{-1}$$

и, следовательно,

$$\Psi_n = R_0 \sin\theta \frac{ch\left(\xi_n \frac{x}{R_0}\right)}{\xi_n sh\left(\xi_n \frac{H}{R_0}\right)} \cdot \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)}{J_1\left(\xi_n\right)}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (10.16)$$

Решение этой задачи для случая колебаний жидкости в плоскости тангажа будет отличаться от (10.16) только тем, что вместо сомножителя $\sin\theta$ нужно записать $\cos\theta$.

Нетрудно проверить, что собственные функции Ψ_n при $x = const$, как этого и следовало ожидать, ортогональны на отрезке $0 << r << R_0$.

10.2. Решение задачи для потенциала Жуковского

Для полости в форме прямого кругового цилиндра краевые условия задачи (10.2) для Φ_{22} имеют вид:

$\left.\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial r}\right|_{r=R_0} = -xn_z = -x\sin\theta$ – на цилиндрической поверхности;

$$\left.\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x}\right|_{ч=0} = -zn_x = -r\sin\theta \text{ – на дне полости;} \qquad (10.17)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x}\right|_{x=H} = -zn_x = r\sin\theta \text{ – на жесткой «крышке».}$$

Задача (10.2) для полного заполнения бака была впервые сформулирована Н.Е. Жуковским и им же был предложен изящный способ ее решения. Пусть

$$\Phi_{22}(x,r,\theta) = F_2 - xz = F_2 - xr\sin\theta, \qquad (10.18)$$

где F_2 – гармоническая функция, которая, как это следует из (10.17) и (10.18), должна удовлетворять краевым условиям:

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{x=H} = 2r\sin\theta.$$

Если гармоническую функцию F_2 разыскивать в виде

$$F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{2n}(x) \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)}{J_1(\xi_n)} \sin\theta,$$

то окажется, что краевое условие при $r = R_0$ удовлетворяется, а для выполнения двух других нужно потребовать, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{dX_{2n}}{dx}\right]_{x=H} \cdot \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)}{J_1(\xi_n)} = 2r, \qquad (10.19)$$

$$\left[\frac{dX_{2n}}{dx}\right]_{x=0} = 0$$

Будем решение X_{2n} искать в таком же виде, как $X(x)$ в (10.6)

$$X_{2n} = A_{2n} e^{-\xi_n \frac{x}{R_0}} + B_{2n} e^{\xi_n \frac{x}{R_0}}.$$

При $A_{2n} = B_{2n} = R_0^{-1}$, как нетрудно видеть, оно приобретает вид

$$X_{2n} = \frac{1}{R_0} ch\left(\xi_n \frac{x}{R_0}\right)$$

и, что главное, удовлетворяет условию на днище $(x=0)$. Остается удовлетворить краевое условие на невозмущенной свободной поверхности (при $x=H$).

Прежде всего, из (10.19) видно, что при принятой конструкции F_2, это условие представляет собою разложение r в обобщенный ряд Фурье по ортогональным (с весом r) на отрезке $[0, R_0]$ функциям $J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)$.

Найдем коэффициенты этого разложения. Для этого перепишем краевое условие в виде

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)}{J_1(\xi_n)}, \qquad A_n' = \frac{1}{2} A_n \frac{\xi_n}{R_0} sh\left(\xi_n \frac{H}{R_0}\right),$$

умножим справа и слева на $rJ_1\left(\xi_m \frac{r}{R_0}\right)$ и проинтегрируем на отрезке $[0, R_0]$. Тогда получим, что

$$A_m' = \frac{c_m}{N_m^2} \quad (m = 1,2,...),$$

где

$$c_m = \int_0^{R_0} \frac{J_1\left(\xi_m \frac{r}{R_0}\right)}{J_1(\xi_m)} r^2 dr = \frac{R_0^3}{\xi_m^2},$$

$$N_m^2 = \int_0^{R_0} \frac{J_1^2\left(\xi_m \frac{r}{R_0}\right)}{J_1^2(\xi_m)} rdr = \frac{R_0^2\left(\xi_m^2 - 1\right)}{2\xi_m^2},$$

$$A_m \frac{2R_0}{\xi_m^2\left(\xi_m^2 - 1\right) sh\left(\xi_m \frac{H}{R_0}\right)}.$$

Задача для Φ_{22} решена:

$$\Phi_{22} = R_0^2 \sin\theta \left[2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\left(\xi_n \frac{x}{R_0}\right)}{\xi_n\left(\xi_n^2 - 1\right)sh\left(\xi_n \frac{H}{R_0}\right)} \cdot \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)}{J_1\left(\xi_n\right)} - \frac{xr}{R_0^2} \right].$$

10.3. Расчет коэффициентов уравнений возмущенного движения по модели жесткой «крышки»

Вначале введем безразмерные переменные для величин, имеющих размерность длины,

$$\widetilde{x} = \frac{x}{R_0}, \quad \widetilde{H} = \frac{H}{R_0}.$$

и выпишем эти коэффициенты для бака в форме прямого кругового цилиндра. Для такого бака выше получены в замкнутом виде решения для

$$\Phi_{12}, \Phi_{22}, \Psi_n \ (n = 1,2,...).$$

Интегралы от комбинаций этих решений, являются табличными. Поэтому коэффициенты будут также выражаться в замкнутом виде:

$$\lambda_n = \rho\sigma_n^2 \int_{\Sigma_0} z\Psi_n ds = -\frac{\pi\rho R_0^3}{\xi_n^2},$$

$$\lambda_{0n} = \rho\sigma_n^2 \int_{\Sigma_0} \Psi_n \Phi_{22} ds = -\frac{\pi\rho R_0^4}{\xi_n^2}\left[\widetilde{H} + 2\frac{1 - ch\left(\xi_n\widetilde{H}\right)}{\xi_n sh\left(\xi_n\widetilde{H}\right)}\right],$$

$$M_n = \frac{\pi\rho R_0^3\left(\xi_n^2 - 1\right)}{2\xi_n^2 th\left(\xi_n\widetilde{H}\right)}, \quad \omega_n^2 = \frac{\xi_n g}{R_0} th\left(\xi_n\widetilde{H}\right), \tag{10.20}$$

$$I_y = \pi\rho R_0^5\left[\frac{\widetilde{H}^3}{3}+\frac{3}{4}\widetilde{H}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ch\left(\xi_n\widetilde{H}\right)-1}{\xi_n^2\left(\xi_n^2-1\right)sh\left(\xi_n\widetilde{H}\right)}\right],$$

$$J_y^0 = \frac{\pi R_0^4}{4}.$$

Проведем качественный асимптотический анализ этих коэффициентов. Прежде всего, видно, что присоединенная масса λ_n не зависит от глубины жидкости. Кроме того, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ или, что то же самое, при $\xi_n \to \infty$. Точно так же

$$\lim_{\xi_n\to\infty}\lambda_{0n} = 0 \quad u \quad \lim_{\xi_n\to\infty} M_n = 0, \qquad \lim_{\xi_n\to\infty}\omega_n^2 = \infty.$$

но

$$\lim_{\xi_n\to\infty} I = \pi\rho R_0^5\left(\frac{\widetilde{H}^3}{3}+\frac{3}{4}\widetilde{H}\right).$$

Следовательно, в этом случае жидкость не оказывает динамического воздействия на твердое тело. Этот вывод уже был отмечен при рассмотрении асимптотики «медленных» движений (см.(9.1)), которая соответствует тому же предельному случаю $\omega_n^2 \to \infty$. Причем такое положение не меняется от того, какая модель – плавающей или жесткой «крышки» – применима для описания движения системы.

Г л а в а 11

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Наибольший практический интерес представляют те формы баков, для которых, к сожалению, решение краевых гидродинамических задач не может быть найдено в виде конечных соотношений. Многолетние исследования и практика расчетов показали, что наиболее эффективным численными методами решения таких задач являются вариационные.

11.1. Задача на собственные значения

Сформулируем вариационную задачу, эквивалентную краевой (10.3). Для этого воспользуемся вариационным принципом Гамильтона. Для ньютоновских систем, к которым относится наша система, вводится кинетический потенциал – разность кинетической и потенциальной энергии (см. раздел 6). В случае собственных колебаний это будет

$$L = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{Q} \left(\nabla \Phi\right)^2 - \frac{1}{2}\rho g \int\limits_{\Sigma_0} \varsigma^2 ds\,.$$

Следовательно, действие по Гамильтону есть

$$S_1 = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\int\limits_{Q} \left(\nabla \Phi\right)^2 dQ - g \int\limits_{\Sigma_0} \varsigma^2 ds \right] dt.$$

После подстановки сюда

$$\Phi\left(r,t\right) = A\cos\omega t \Psi\left(\bar{r}\right) \text{ и } \varsigma = \frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_{x=0}$$

и интегрирования по времени на отрезке $t_1 = 0,\ \ t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ найдем

$$S_1(\Psi)=\frac{\pi\rho}{2\omega}\left[\int_Q(\nabla\Psi)^2\,dQ-\sigma^2\int_{\Sigma_0}\Psi^2 ds\right],\quad \sigma^2=\frac{\omega^2{}''}{g}\ . \qquad (11.1)$$

В соответствии с вариационным принципом Гамильтона действительные движения жидкости описывается теми функциями $\Psi(\bar{r})$, которые доставляют стационарное значение функционалу (11.1), т.е.

$$\delta S_1(\Psi)=0, \qquad (11.2)$$

где δ – обозначает изохронную вариацию.

Мы докажем это, показав, что (11.2) выполняется только для тех функций $\Psi(\bar{r})$, которые являются решением задачи (10.3). Найдем вариацию (11.1) и удовлетворим ее требованию (11.2):

$$\delta S_1=\int_Q\nabla\Psi\cdot\nabla\delta\Psi dQ-\sigma^2\int_{\Sigma_0}\Psi\delta\Psi ds=0\,.$$

Применим к первому интегралу формулу Грина и получим

$$\begin{aligned}\delta S_1=&-\int_Q\Delta\Psi\delta\Psi dQ+\sigma^2\int_{S+\Sigma_0}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\delta\Psi ds+\\&+\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\sigma^2\Psi ds\right)\delta\Psi=0.\end{aligned} \qquad (11.3)$$

Здесь учтено, что в случае малых (линейных) колебаний Q, S и Σ_0 считаются неизменными во времени и что $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_{\Sigma_0}=\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{\Sigma_0}$.

В силу независимости и произвольности вариаций равенство (11.3) будет выполняться, только если коэффициенты при $\delta\Psi$ в каждом из интегралов равны нулю. С другой стороны, если Ψ есть решение краевой задачи (10.3), то $\delta S_1=0$, т.е. Ψ доставляет стационарное значение функционалу (11.1). Что и требовалось показать: решение задачи (10.3) эквивалентно нахождению минимума функционала (11.1).

Теперь о том, как найти минимум функционала $S_1(\Psi)$. Воспользуемся для этого методом Ритца. Его основная идея состоит в следующем. Строится минимизирующая последовательность в виде разложения Ψ в ряд по функциям $\gamma_i(\bar{r})$:

$$\Psi^{(k)}=c_1^{(k)}\gamma_1+c_2^{(k)}\gamma_2+\ldots+c_k^{(k)}\gamma_k\,. \qquad (11.4)$$

Элементы этой последовательности γ_i есть функции $\overline{r}$ и называются координатными, а их совокупность – базисом или координатной системой.

К этим функциям предъявляется ряд требований: во-первых, при любом k элементы базиса (11.4) линейно независимы; во-вторых, функции $\gamma_i\left(i=1,2,...\right)$ образуют полную в Q систему функций в смысле сходимости $\left(i\to\infty\right)$ по энергии; в-третьих, они непрерывны в Q вместе с первой производной и квадратично суммируемы в Q.

Подстановка (11.4) в функционал (11.1) превращает его в функцию неизвестных $c_i^{(k)}$

$$S_1\left(\Psi^{(k)}\right)=\int\limits_Q\left(\sum_{i=1}^{k}c_i^{(k)}\nabla\gamma_i\right)^2dQ-\left(\sigma^{(k)}\right)^2\int\limits_{\Sigma_0}\left(\sum_{i=1}^{k}c_i^{(k)}\gamma_i\right)^2ds\,.$$

Очевидно, что в такой постановке вопроса $S_1\left(\Psi^{(k)}\right)$ достигает минимума при тех значениях $c_i^{(k)}$, при которых обращаются в нуль первые производные

$$\frac{\partial S_1^{(k)}}{\partial c_i^{(k)}}=0\quad\left(i=1,2,...k\right)$$

Это необходимое условие. Производные имеют вид

$$\frac{\partial S^{(k)}}{\partial c_j^{(k)}}=2\sum_{i=1}^{k}c_j^{(k)}\int\limits_Q\nabla\gamma_i\nabla\gamma_j dQ-2\left(\sigma^{(k)}\right)^2\sum_{j=1}^{k}c_j^{(k)}\int\limits_{\Sigma_0}\gamma_i\gamma_j ds,$$

$$\left(i=1,2,...k\right).$$

Введем обозначения:

$$a_{ij}=\int\limits_Q\nabla\gamma_i\nabla\gamma_j ds,\quad b_{ij}=\int\limits_{\Sigma_0}\gamma_i\cdot\gamma_j ds$$

Пусть мы выбрали базис в классе функций гармонических в Q. Тогда с помощью формулы Грина можно для a_{ij} и b_{ij} записать формулы:

$$a_{ij}=\int\limits_{S+\Sigma_0}\gamma_i\frac{\partial\gamma_j}{\partial n}ds=\int\limits_{S+\Sigma_0}\gamma_j\frac{\partial\gamma_i}{\partial n}ds,\ b_{ij}=\int\limits_{\Sigma_0}\gamma_i\gamma_j ds,\quad(11.5)$$

а само условие минимума $S_1\left(\Psi^{(k)}\right)$ представить в виде так называемой системы уравнений Ритца

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^{(k)}\left(a_{ij} - \left(\sigma^{(k)}\right)^2\right) = 0, \quad \left(i = 1,2...k\right) \tag{11.6}$$

или в матричном виде

$$\left\| A - \left(\sigma^{(k)}\right)^2 B \right\| \cdot \bar{c}^{(k)} = 0 . \tag{11.7}$$

Элементы симметричных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ k – порядка есть a_{ij} и b_{ij} из (11.5). Вектор $\bar{c}^{(k)}$ есть вектор неизвестных коэффициентов разложения (11.4)

$$\bar{c}^{(k)} = \left\{c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, ..., c_k^{(k)}\right\}.$$

Алгебраическая (11.6) или, что то же, матричная (11.7) проблема на собственные значения имеет нетривиальное решение, если равен нулю определитель

$$D\left[\left(\sigma^{(k)}\right)^2\right] = \left(A - \left(\sigma^{(k)}\right)^2 B\right) = 0 . \tag{11.8}$$

Корни определителя (11.8) $\left(\sigma_j^{(k)}\right)^2 \left(j = 1,2,...k\right)$ – собственные значения (11.7); соответствующие им векторы $\bar{c}_j^{(k)}$ – собственные векторы, каждый из которых порождает функцию (11.4). Эти функции являются k – приближением к j – форме собственных колебаний жидкости, а корни $\left(\sigma_j^{(k)}\right)^2$ являются k-приближением к j-собственной частоте собственных колебаний жидкости.

11.2. Вариационный метод решения краевой задачи для потенциала Жуковского

Выше мы рассмотрели однородную задачу на собственные значения. Задачи для потенциалов Жуковского (10.2) являются неоднородными. Выпишем задачу для Φ_{22} в виде

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_{22} = 0 \quad \text{в } Q \\ &\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = f\left(\bar{r}\right) \quad \text{на } S + \Sigma_0 \end{aligned} \tag{11.9}$$

причем f – известная функция, ее конкретный вид зависит от геометрии бака:

$$f = zn_x - xn_z .$$

Применим к решению неоднородной задачи (11.9) метод Трефтца. Этот метод основан на представлении искомой функции в виде разложения в ряд конечной длины по некоторой последовательности функций $\{\gamma_i\}$.

Причем элементы этой последовательности должны быть линейно независимыми в области определения решения, удовлетворять условиям полноты в Q, уравнению краевой задачи, быть квадратично суммируемыми со своими первыми производными.

Итак, рассмотрим функционал

$$S_2(\Phi_{22}) = \int_Q (\nabla \Phi_{22})^2 dQ - 2 \int_{s+\Sigma_0} f\Phi_{22} ds . \qquad (11.10)$$

Покажем, что своими уравнениями Эйлера он имеет краевую задачу (11.9). Для этого его изохронную вариацию приравняем нулю

$$\delta S_2 = \int_Q \nabla \Phi_{22} \cdot \nabla \delta\Phi_{22} dQ - \int_{S+\Sigma_0} f \delta\Phi_{22} ds = 0 ,$$

Преобразуем объемный интеграл по формуле Грина

$$\delta S_2 = -\int_Q \Delta\Phi_{22} \delta\Phi_{22} dQ + \int_{S+\Sigma_0} \left(\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} - f \right) \delta\Phi_{22} ds ,$$

после чего видно, что $\delta S_2 = 0$ в том случае, когда Φ_{22} есть решение краевой задачи (11.9).

Будем в соответствии с методом Трефтца разыскивать решение Φ_{22} в виде

$$\Phi_{22}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(k)} \gamma_i(\bar{r}), \qquad (11.11)$$

где $\gamma_i(\bar{r})$ удовлетворяют перечисленным выше условиям и, в частности, элементы базиса $\{\gamma_i\}$ – гармонические в Q функции, т.е. $\Delta\gamma_i = 0$ $(j = 1,2,...k)$. Подставим (11.11) в (11.10) и потребуем, чтобы

$$\delta S_2 = \delta \left[\sum_{j=1}^{k} \left(c_j^{(k)} \int_Q \nabla\gamma_i ds \right)^2 - 2 \int_{S+\Sigma_0} f \sum_{j=1}^{k} c_j^{(k)} \frac{\partial \gamma_j}{\partial n} ds \right] = 0.$$

Как и прежде, $S_2^{(k)}$ теперь рассматриваем как функцию неизвестных констант $c_j^{(k)}$ и стационарное значение S_2 находим из условий

$$\frac{\partial S_2^{(k)}}{\partial c_j^{(k)}} = 0, \quad j = 1,2,...k\ .$$

В результате приходим к неоднородной системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_j^{(k)}$

$$\sum_{j=1}^{k}\left(c_j^{(k)}\alpha_{ij} - \beta_i\right) = 0, \quad i = 1,2,...k\ ,$$

где

$$\alpha_{i,j} = \int\limits_{S+\Sigma_0} \gamma_i \frac{\partial \gamma_j}{\partial n} ds, \quad \beta_i = \int\limits_{S+\Sigma_0} f \frac{\partial \gamma_j}{\partial n} ds$$

11.3. Пример: оценка частоты первого тона колебаний жидкости в сфере

Пусть сфера частично заполнена жидкостью. Считаем, что заполнение среды менее, чем наполовину (рис. 11.1), т.е. $H / R_0 < 1$.

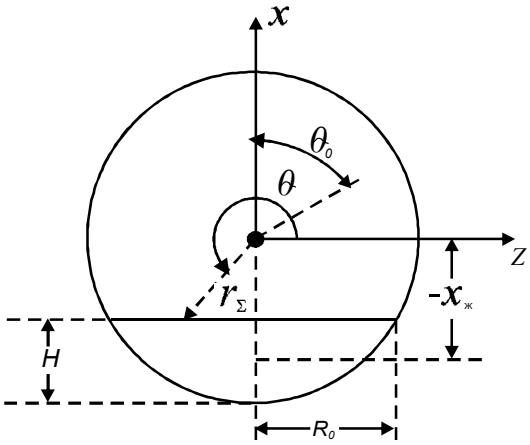


Рис. 11.1

Введем сферическую систему координат *O, r, θ, β*, так что $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\cos\beta$, $z = r\sin\theta\sin\beta$.

Условимся об обозначениях: R_c – радиус сферы, *Ro* – радиус свободной поверхности, *H* – глубина заполнения сферы.

Уравнение Лапласа в сферических координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

и имеет частными решениями гармонические внутри сферы функции, которые принимаются за элементы базиса

$$\gamma_m = r^m P_m^1(\cos\theta)\sin\beta,$$

где $P_m^1(\cos\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра первого рода. Они отвечают перечисленным выше требованиям полноты и линейной независимости в *Q* при любом $m = 0,1,2\ldots$, непрерывности вместе с первыми производными, суммируемости и, естественно, уравнению Лапласа.

Функции $P_m^1(\cos\theta)$ рассчитываются по формуле

$$P_m^1(\cos\theta) = \\ = \sin\theta\left[\cos^{m-1}\theta - \frac{(m-1)(m-2)}{2(2m-1)}\cos^{m-3}\theta + \ldots\right]. \qquad (11.12)$$

Пример будем решать «вручную». Поэтому ограничимся в (11.4) *k* = 1, так что из (11,12) имеем

$$\Psi^{(1)} = c_1\gamma_1 = c_1 r\sin\theta\sin\beta.$$

Рассчитаем подынтегральные выражения элементов матрицы Ритца (см.пункт 11.1)

$$a_{11} = \int_Q (\nabla\gamma_1)^2 dQ, \quad b_{11} = \int_{\Sigma_0} (\gamma_1)^2 ds.$$

В сферических координатах

$$\nabla = \bar{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \bar{i}_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{i}_\beta\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

Поэтому

$\nabla\gamma_1 = \bar{i}_r \sin\theta \sin\beta + \bar{i}_0 \cos\theta \sin\beta + \bar{i}_\beta \cos\beta$ и, следовательно, $(\nabla\gamma_1)^2 = 1$, а значит, $a_{11} = Q$.

Рассчитаем Q (см. рис.11.1):

$$Q = \int_0^{2\pi} d\beta \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{r_\Sigma}^{R_c} r^2 dr, \text{ где } r_\Sigma = -\frac{R_c - H}{\cos\theta},$$

$$\theta_0 = \arccos\frac{R_c - H}{R_c}.$$

Поэтому

$$Q = \frac{2\pi}{3} \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \sin\theta \left[\frac{(R_c - H)^3}{\cos^3\theta} + R_c^3 \right] d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[\begin{array}{l} -R_c^3 \cos\theta \Big|_{\pi-\theta_0}^{\pi} + \\ + \dfrac{(R_c - H)^3}{2} \left(\dfrac{1}{\cos^2\theta} \right) \Big|_{\pi-\theta_0}^{\pi} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} H^2 (3R_c - H).$$

Для b_{11} имеем

$$b_{11} = (R_c - H)^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\beta d\beta \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \left[r^2 \sin^2 Q \right]_{r=r_\Sigma} d\theta,$$

Интегрирование дает

$$b_{11} = \pi (R_c - H)^4 \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \frac{\sin^3\theta}{\cos^5\theta} d\theta =$$

$$= \frac{(R_c - H)^4}{4} \left[\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^4\theta} \right]_{\pi-\theta}^{\pi} = \frac{H^2 (2R_c - H)^2}{4}.$$

Делением a_{11} на b_{11} находим первое приближение первой собственной частоты:

$$\left(\sigma_1^{(1)}\right)^2 = \frac{4}{3} \frac{3R_c - H}{(2R_c - H)^2}. \qquad (11.13)$$

За этой, на первой взгляд мало что говорящей оценкой величины первой собственной частоты, стоит определенная физическая аналогия. Установим ее. Найдем центр масс жидкости $x_Ж$, частично заполняющей сферу (рис. 11.1).

Так как

$$mx_Ж = \rho \int\limits_Q x dQ, \quad \text{то } x_Ж = \frac{1}{Q} \int\limits_Q x dQ,$$

где

$$\int\limits_Q x dQ = \int\limits_Q r \cos\theta dQ = \int\limits_0^{2\pi} d\beta \int\limits_{\pi-\theta_0}^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_{r_\Sigma}^{R_C} r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int\limits_{\pi-\theta_0}^{\pi} \sin\theta \cos\theta \left[r^4 \right]_{r_\Sigma}^{R_C} dr\, dQ.$$

Следовательно,

$$\int\limits_Q x dQ = -\frac{\pi H^2}{4}\left(2R_c - H\right)^2 \quad \text{и} \quad x_Ж = -\frac{3}{4}\frac{\left(2R_c - H\right)^2}{3R_c - H}.$$

Сравнивая это выражение с (11.13), видим, что

$$\left(\omega_1^{(1)}\right)^2 = g\left(\sigma_1^{(1)}\right)^2 = \frac{g}{l},$$

где $l = -x_Ж$ – длина подвеса математического маятника, масса которого – сегмент жидкости в невозмущенном состоянии – сосредоточена в его центре масс.

Если бы мы вычислили второе приближение $\left(\sigma_1^{(2)}\right)^2$, то обнаружили бы, что оно дает первую собственную частоту колебаний физического маятника: колебания твердой «чечевицы», образованной затвердевшей в сфере жидкостью.

Глава 12

УЧЕТ ВЯЗКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

До сих пор предполагалось, что жидкость, заполняющая топливные баки, идеальная, а ее движение – безвихревое. Это упрощает математическое описание динамической схемы и ее исследование. Однако при этом из поля зрения пропадает одно из важных ее внутренних свойств – рассеяние энергии колебаний, обусловленное силами вязкого трения и характерное для реальных жидкостей. Это существенно, несмотря на то, что в рассматриваемых объектах с гладкими стенками баков диссипация энергии колебаний весьма слабая – за период колебаний диссипирует малая доля общей энергии системы.

12.1. Динамически эквивалентное твердое тело с учетом собственного демпфирования колебаний жидкости

В развитие анализа установившихся гармонических колебаний системы с идеальной жидкостью в баках (см. 9.2) введем в динамическую схему (8.10) линейное демпфирование колебаний жидкости:

$$\begin{aligned}
&\left(m^0+m\right)\ddot{z}+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{q}_m\lambda_m=F_z,\\
&\left(I^0+I\right)\ddot{\psi}+\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{q}_m\lambda_{0m}=M_y,\\
&M_m\left(\ddot{q}_m+\beta_m\dot{q}_m+\omega_m^2 q\right)+\lambda_m\ddot{z}+\lambda_{0m}\ddot{\psi}=0,\\
&m=1,2,...
\end{aligned}\qquad (12.1)$$

Здесь β_m – коэффициент демпфирования собственных колебаний жидкости в отсеке. Будем предполагать демпфирование слабым в смысле

$$\beta_m^2 << \omega_m^2 .$$

Диссипативные обобщенные силы, порожденные вязкими свойствами жидкости, в уравнениях движения твердого тела учитывать не будем. Проводя те же выкладки и в рамках тех же предположений, что и в пункте 9.2, но с учетом линейного демпфирования в уравнениях колебаний жидкости, получим уравнения движения динамически эквивалентного твердого тела:

$$\begin{aligned} &\mu_{zz}(\omega)\ddot{z} + \mu_{z\psi}(\omega)\ddot{\psi} + \beta_{zz}(\omega)\dot{z} + \beta_{z\psi}(\omega)\dot{\psi} = F_y, \\ &\mu_{\psi\psi}(\omega)\ddot{\psi} + \mu_{\psi z}(\omega)\ddot{z} + \beta_{\psi\psi}(\omega)\dot{\psi} + \beta_{\psi z}(\omega)\dot{z} = M_y. \end{aligned} \qquad 12.2)$$

Выпишем только те коэффициенты, которые рассмотрим ниже

$$\mu_{zz}(\omega) = m^0 + m - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)^2 + \beta_n^2 \omega_n^2} \cdot \frac{\lambda_n^2}{M_n},$$

$$\beta_{zz}(\omega) = \omega^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \lambda_n^2}{M_n \left[\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)^2 + \beta_n^2 \omega_n^2\right]}.$$

Видно, что в отличие от (9.6) коэффициенты зависят еще от характеристик собственного демпфирования колебаний жидкости и, кроме того, во всем диапазоне частот возбуждения $\left(0 \le \omega^2\right)$ остаются конечными величинами. Интересно, что максимум коэффициента демпфирования $\beta_{zz}(\omega)$ (так же как и $\beta_{z\psi}, \beta_{z\psi}$ и $\beta_{\psi\psi}$) достигается на частотах возбуждения ω^2, практически совпадающих с частотами собственных колебаний жидкости ω_n^2.

Действительно, из условий экстремума $\left.\frac{d\beta_{zz}}{d\omega}\right|_{n=j} = 0$ следует, что максимум β_{zz} будет при $\omega^2 = \frac{2\omega_j^2 - \beta_j^2}{2} \approx \omega_j^2$,

так как по предположению $\beta_j^2 << \omega_j^2$.

Нетрудно показать, что $\mu_{zz} = 0$ достигается на частотах возбуждения, равных

$$\omega^2 = \frac{\omega_j^2}{1 - \dfrac{\lambda_j^2}{M_j\left(m^0 + m\right)}}.$$

Это говорит о том, что нули функции $\mu_{zz}(\omega)$ при слабом в смысле $\beta_j^2 << \omega_j^2$ демпфировании не зависят от величины β_j. Точно так же простейшие выкладки показывают, что в отличие от системы без демпфирования точке $\omega = \omega_1$ на кривой $\mu_{zz}(\omega)$ соответствует не разрыв, а конечное значение $\mu_{zz} = m^0 + m$.

Рассмотренные примеры имеют целью обратить внимание на качественное изменение динамических свойств системы, когда в ней учитывается диссипация энергии колебаний жидкости.

Эти и другие различия в динамике реальных и идеальной жидкостей вызваны тем, что для течений вязких жидкостей характерно наличие сдвиговых напряжений. Это принципиально меняет картину течения. Из гидродинамики известно, что течение даже маловязкой жидкости нельзя считать малоизмененным течением идеальной и что не существует асимптотического перехода от решения для вязкой жидкости к решению для идеальной при исчезновении вязкости. Дело в том, что граница раздела жидкость – непроницаемая смоченная поверхность является источником вихреобразования. Математическая реализация этого экспериментального факта достигается заданием на этой границе краевого условия прилипания: скорость частиц жидкости $\overline{u}$ относительно смоченной поверхности равна нулю. Поэтому на этой границе всегда $\mathrm{rot}\overline{u} \neq 0$.

В дальнейшем вихри диффундируют от границы внутрь потока, завихряя его. Сейчас не важны количественные оценки завихренности (они, конечно, зависят от вязкости жидкости, скорости течения и др. факторов). Важно наличие процесса, с помощью которого энергия колебаний жидкости в баке преобразуется в энергию вихревого движения. Ясно, что завихренность не может быть большой в области малых градиентов скорости. Отсюда следует, что силы вязкого трения, пропорциональные по Ньютону градиенту скорости, проявляются прежде всего вблизи границ раздела сред, где эти

градиенты велики. Этот (естественный) механизм демпфирования характерен для баков с гладкими стенками. Если демпфирование не зависит от амплитуды колебаний жидкости, как в (12.1), то его называют линейным.

Нелинейное демпфирование, т.е. зависящее от амплитуды колебаний, имеет место в баках с острыми кромками. Кромки являются источниками формирования вихрей, которые со временем диффундируют, заполняя объем жидкости. Кромкой нужно считать не только, например, край тонкой пластинки, но и всякую точку на смоченной поверхности, при приближении к которой по этой поверхности справа и слева параметры течения и их производные терпят разрыв. Важно, что образование таких вихрей (срыв вихрей с кромки) слабо зависит от вязкости жидкости, просто этот процесс начинается раньше или позже. На вихреобразование при обтекании кромки обычно расходуется больше энергии жидкости, чем на вихреобразование у гладкой поверхности. Поэтому для увеличения демпфирования колебаний жидкости в бак при необходимости встраиваются демпферы в виде радиальных или кольцевых ребер или других плохообтекаемых устройств.

12.2. Количественные характеристики рассеяния энергии колебаний

Вначале дадим определение маловязкой жидкости: это такая жидкость, при колебании которой в данных условиях диссипация энергии ΔE за период колебаний $2\pi/\omega$ мала в сравнении с полным ее запасом E в этом периоде ее колебаний, т.е.

$$\Delta E << E . \qquad (12.3)$$

Это условие позволяет не «привязывать» полную энергию к определенному моменту времени в течение рассматриваемого периода колебаний.

В теории колебаний для количественной оценки затухания вводится логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \ln \frac{s_i}{s_{i+1}}, \qquad (12.4)$$

где s_i – амплитуда *i-го* периода колебаний.

Для систем, в которых выполняется условие (12.3), справедливы соотношения:

$$\frac{\triangle s_j}{s_j} \approx \frac{\triangle s_j}{s_{j+1}} \ll 1, \qquad \triangle s_j = s_j - s_{j+1} > 0.$$

Разлагая (12.4) в ряд Тейлора в окрестности $\Delta s_i = 0$, получим

$$\delta = \frac{\Delta s_i}{s_{i+1}} + \mathrm{O}\left(\frac{\Delta s_i^2}{s_i^2}\right)$$

или с той же точностью

$$\delta = \frac{\Delta s_i}{s_i} + \mathrm{O}\left(\frac{\Delta s_i^2}{s_i^2}\right). \tag{12.5}$$

Установим связь логарифмического декремента с коэффициентом демпфирования β и коэффициентом затухания α.

Решение уравнения

$$\ddot{s} + \beta\dot{s} + \omega^2 s = 0$$

имеет вид

$$s = s_0 e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \sin\left(t\sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}}\right).$$

Отсюда имеем, что за *i-ый* период колебаний $\left(t_i << t << t_1 + \frac{2\pi}{\omega}\right)$ изменение амплитуды будет

$$\Delta s_i = s_0\left(e^{-\frac{\beta}{2}t_i} - e^{-\frac{\beta}{2}\left(t_i + \frac{2\pi}{\omega}\right)}\right)$$

и, следовательно, из (12.5) получаем

$$\delta = 1 - e^{-\frac{\pi\beta}{\omega}}$$

или для $\beta^2 << \omega^2$

$$\delta = \frac{\pi\beta}{\omega}. \tag{12.6}$$

Этот же результат можно получить, опираясь на энергетические соображения. Пусть средняя за период энергия системы E связана с ее начальным значением соотношением

$$E = E_0 e^{-\beta t} = E_0 e^{-2\alpha t}.$$

Отсюда видно, что $\beta = 2\alpha$.

За период колебаний изменение энергии будет

$$\Delta E = \frac{2\pi}{\omega}\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi\beta}{\omega}E,$$

откуда, учитывая (12.6), найдем

$$\delta = \frac{\pi\beta}{\omega} = -\frac{\Delta E}{2E}. \qquad (12.7)$$

Тождественное совпадение (12.5) и (12.7) с принятой выше точностью легко установить, если E и ΔE представить в виде

$$E = \frac{1}{2}cs_i^2, \quad \Delta E = \frac{1}{2}c\left(s_i^2 - s_{i+1}^2\right).$$

Формула (12.5) применяется преимущественно при обработке экспериментальных данных, т.к. измерение амплитуды колебаний наиболее естественно и просто, а формула (12.7) – при решении задач численными методами, поскольку относительные ошибки интегральных характеристик процесса меньше относительных ошибок расчета локальных характеристик расчета (можно сравнить – сходимость решения равномерная и в среднем).

12.3. Постановка задачи о колебаниях вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд

Полагаем, что жидкость вязкая (ньютоновская), несжимаемая и однородная. Если через $\overline{u}\left(\overline{x},t\right) = \left\{u_1, u_2 u_3\right\}$ обозначить вектор скорости частиц жидкости в эйлеровом представлении, то уравнение сохранения массы (неразрывности) выражается формулой

$$\mathrm{div}\overline{u} = \nabla\cdot\overline{u} = 0, \quad \nabla = \sum_{i=1}^{3}\overline{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (12.8)$$

где $\overline{e}_i$ – орты декартовой системы координат o, x_1, x_2, x_3, связанной с полостью, а $\overline{x} = \left\{x_1, x_2, x_3\right\}$.

Течение жидкости подчиняется уравнениям Навье − Стокса

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f} - \nabla p + \mu \Delta \bar{u}$$

или, так как

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u},$$

то

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \bar{u} = \frac{\bar{f}}{\rho}, \qquad (12.9)$$

где $\bar{f}$ – вектор внешних массовых сил, $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости, а слагаемое $\nu \Delta \bar{u}$ есть ускорение жидкой частицы, обусловленное вязкими напряжениями. Как известно из гидродинамики, эти напряжения образуют симметричный тензор $\tilde{\sigma}$ с компонентами

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1,2,3). \qquad (12.10)$$

Чтобы в (12.9) ускорение вязких напряжений представить в виде $\nu \Delta \bar{u}$, нужно иметь в виду, что сила определяется градиентом напряжений. В нашем случае

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} = -\mu \Delta \bar{u} .$$

Полные напряжения (с учетом гидродинамических) образуют также симметричный тензор с компонентами

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij} p + \nu \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\text{где} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \qquad (12.11)$$

$$i, j = 1,2,3.$$

О краевых и начальных условиях. На смоченной поверхности это условие прилипания – равенство нулю относительной скорости жидкости

$$\bar{u}(\bar{x} \in S, t) = 0 .$$

На свободной поверхности $F = x_1 - \varsigma(x_2, x_3, t)$, как и в случае идеальной жидкости, зададим кинематическое и динамические условия. Кинематическое краевое условие сохраняет свой физический смысл и вид (3.9) и в обозначениях этой главы есть

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \varsigma = u_1 \text{ или } u_n = -\frac{1}{|\nabla F|}\frac{\partial F}{\partial t},$$

где $\bar{n}$ – внешняя к Σ нормаль.

Динамические краевые условия тоже сохраняют свой физический смысл – непрерывность изменения напряжений при переходе через границу раздела сред. Однако если в идеальной жидкости сводятся эти напряжения только к нормальным – гидродинамическому давлению p, то в вязкой жидкости есть еще касательные, порожденные сдвиговыми (12.10). Предполагая, что над Σ находится идеальный газ под давлением p_0, динамические краевые условия запишутся в виде

$$\tau_{nn} = p_0, \quad \tau_{n\tau_1} = \tau_{n\tau_2} = 0 \text{ при } \bar{x} \in \Sigma$$

или

$$\begin{aligned} & p - 2\nu\frac{\partial u_n}{\partial n} = p_0, \\ & \frac{\partial u_n}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_{\tau_1}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \tau_2} + \frac{\partial u_{\tau 2}}{\partial n} = 0. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial \tau_1}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \tau_2}$ – производные по касательным, причем векторы $\bar{n}, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ образуют правый ортогональный базис – прямоугольную систему координат, связанную с текущей точкой (x_1, x_2, x_3) свободной поверхности.

Начальные условия задают в момент времени t=0 форму свободной поверхности $x_1 = \varsigma(x_2, x_3, 0) = \varsigma^0(x_2, x_3)$, поле скоростей в области Q $\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{u}_0(\bar{x})$ и согласованное с ним поле давлений $p(\bar{x}, 0) = p^0(\bar{x})$.

12.4. Колебания пластины, погруженной в полупространство вязкой жидкости

Рассмотрим одну из задач, допускающую точное решение уравнений Навье–Стокса и имеющую при определенных условиях значение для исследования процессов диссипации энергии колебаний жидкости в сосуде.

Пусть вязкая жидкость занимает полупространство, ограниченное плоской пластиной. Пластина совершает колебательное движение в своей плоскости с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Вводится декартова система координат o, x_1, x_2, x_3 таким образом, что занятая жидкостью область соответствует $x_3 > 0$, а пластина колеблется в плоскости ox_1x_2 вдоль оси ox_1 со скоростью

$$V = V_0 e^{i\omega t}. \tag{12.13}$$

Скорость жидкости удовлетворяет обычным для такого течения краевым условиям:

$$u_1 = V, u_2 = u_3 = 0 \text{ при } x_3 = 0 \text{ и}$$
$$\overline{u} = 0 \text{ при } x \to \infty. \tag{12.14}$$

При такой постановке задачи видно, что искомые переменные будут функциями только x_3 и t. Поэтому, во-первых, из уравнения неразрывности (12.8) и краевых условий (12.14) получается, что

$$u_2 = 0 \text{ и, так как } \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \text{ то } u_3 = 0.$$

Во-вторых, с учетом последнего равенства конвективная составляющая ускорения в уравнении Навье − Стокса (12.9) равна нулю, т.е.

$$(\overline{u} \cdot \nabla)\overline{u} = 0.$$

В-третьих, как следствие этих же обстоятельств $p = \text{const}$ во всей области течения.

После этих упрощений векторное уравнение (12.9) Навье − Стокса преобразуется к одномерному (только для координаты x_3) уравнению теплопроводности относительно искомой функции

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = f_1, \quad u_1 = u_1(x_3, t) \tag{12.15}$$

при краевом условии

$$u_1(0,t) = V_0 e^{i\omega t}.$$

Начальные условия можно не задавать, так как разыскивается периодическое по времени решение.

В (12.4) можно считать $f_1 = 0$, если только никакие, кроме сил, обладающих потенциалом (вида $\bar{f}_1 = -\nabla g x_1$), другие силы на жидкость не действуют и если давление p в краевые условия не входит, как и в этой задаче. В этом случае вводится новая искомая переменная $\Pi = p - g x_1$ и все проведенные выше выкладки, как и выводы, остаются в силе, но уже для модифицированного давления Π. Поэтому в дальнейшем в (12.15) полагаем $f_1 = 0$.

Решение этой краевой задачи известно:

$$u_1 = V_0 e^{\frac{x_3}{h}(i-1)} e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где $h = \sqrt{\dfrac{2\nu}{\omega}}$ – так называемая глубина проникновения нормальной к пластинке волны возмущения жидкости.

Это решение позволяет найти касательное напряжение на пластине

$$\sigma_{31} = \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right]_{x_3 = 0} = -\rho V_0 \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right), \qquad (12.17)$$

которое, как видно, сдвинуто по фазе на $\pi/4$ по отношению к скорости пластины.

12.5. Линеаризация

Большие трудности решения поставленной выше нелинейной краевой задачи побуждают к поиску физически оправданных и математически обоснованных путей ее упрощения. Очевиден, прежде всего, путь линеаризации. Линеаризация, в частности, предполагает пренебрежение в уравнении движения (12.9) конвективной составляющей ускорения по сравнению с инерционной. Это возможно, если

$$\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right| >> \left| (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right|.$$

Если колебания свободной поверхности в сосуде с характерным размером R_0 происходят на частоте ω и с амплитудой s_0, то

$$\left|\overline{u}\right| \sim s_0 \omega$$

и это последнее неравенство будет выполняться при

$$s_0 << R_0.$$

В соответствии с этим условием малости амплитуды введем и обозначим через ε малый параметр задачи

$$\frac{s_0}{R_0} \sim \varepsilon.$$

При построения приближения краевой задачи с точностью до малых порядка ε^2 уравнение неразрывности (12.8) и краевые условия на смоченной поверхности $\left(\overline{u} = 0\right)$ своего вида не изменяют. Уравнения Навье–Стокса примут вид

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu \Delta \overline{u} = \overline{f}\,. \tag{12.18}$$

Изменятся и краевые условия на свободной поверхности. Так, кинематическое условие будет

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = u_1\,. \tag{12.19}$$

Для линеаризации динамических краевых условий используем следующие из разложений в ряды Тейлора в окрестности невозмущенной свободной поверхности Σ_0 приближения искомых функций и их производных. После пренебрежения малыми порядка ε^2 и выше получим

$$u_i\left(x_1 = \varsigma, x_2, x_3, t\right) = u_1\big|_{x_1=0} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{x_1=\varsigma} = \left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{x_1=0} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Выкладки, аналогичные приведенным в разд. 4, показывают, что для низших гармоник колебаний

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_{x_1=\varsigma} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_i}\right)_{x_1=\varsigma} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{x_1=0} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Запишем линейные приближения краевых условий (12.12)

$$\begin{aligned} &p - 2\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = p_0, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \end{aligned} \tag{12.20}$$

которые выполняются с точностью $\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)$.

Важным итогом линеаризации, как уже отмечалось в разд. 4, существенно упрощающим решение краевой задачи в результате пренебрежения малыми порядка ε^2 и выше, является не только линеаризация уравнений и краевых условий. Важным является еще то, что при этом задача с заранее неизвестной и переменной по времени границей $S + \Sigma$ преобразовалось в задачу с фиксированной границей $S + \Sigma_0$.

Линеаризованную краевую задачу (12.18) – (12.29) нужно еще дополнить соответствующими начальными условиями, заданными в области Q с границей $S + \Sigma_0$.

12.6. Диссипация энергии колебаний

Пусть энергия колебаний жидкости E связана с ее начальным значением E_0 соотношением

$$E = E_0 e^{-\beta t},$$

где β – коэффициент демпфирования колебаний вязкой жидкости. Тогда скорость диссипации будет

$$\frac{dE}{dt} = -\beta E$$

и коэффициент затухания

$$\beta = -\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}.$$

Если известно решение краевой задачи для уравнения (12.9), то энергию и скорость ее изменения можно рассчитать по формулам:

$$E = \frac{1}{2}\rho\int_Q u^2 dQ, \qquad \frac{dE}{dt} = \rho\int_Q \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}dQ. \tag{12.21}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в формуле для dE/dt. Заменим $\partial\bar{u}/\partial t$ с помощью (12.9):

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \rho\int_Q \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}dQ = \\ &= \rho\int_Q \bar{u}\cdot\left(-(\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\bar{u}\right)dQ.\end{aligned} \tag{12.22}$$

Вектор $\bar{f}$ здесь не выписывается, так как в силу закона сохранения массы $\int_Q \bar{u}dQ = 0$.

Первое и вторе слагаемые справа в (12.22) представимы в виде

$$\begin{aligned}\bar{u}\left[(\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\right] &= (\bar{u}\cdot\nabla)\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = \\ &= div\left[\bar{u}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\right].\end{aligned} \tag{12.23}$$

Преобразуем еще последнее слагаемое под интегралом в (12.21):

$$\rho\,\nu\,\bar{u}\cdot\Delta\bar{u} = \rho\nu\sum_i u_i\Delta u_i = \sum_i u_i\sum_j \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}. \tag{12.24}$$

Заменим каждое из слагаемых по формуле

$$u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\sigma_{ij}\right) - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Тогда вместо (12.24) будем иметь, суммируя по i и j,

$$\rho\nu\bar{u}\cdot\Delta\bar{u}=\operatorname{div}\left(\bar{u}\cdot\tilde{\sigma}\right)-\sum_i\sum_j\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

или в силу симметрии $\left(\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\right)$:

$$\rho\nu\bar{u}\cdot\Delta\bar{u}=\operatorname{div}\left(\bar{u}\cdot\tilde{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\mu\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (12.25)$$

Подставим (12.23)–(12.24) в (12.25)

$$\frac{dE}{dt}=-\rho\int_Q\bar{u}\,div\left[\bar{u}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-\bar{u}\cdot\tilde{\sigma}\right]dQ-$$

$$-\frac{1}{2}\mu\sum_i\sum_j\int_Q\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2dQ$$

Первый интеграл по формуле Гаусса–Остроградского преобразуем в поверхностный по замкнутой поверхности $S+\Sigma$:

$$\frac{dE}{dt}=-\rho\int_{S+\Sigma}\left[\bar{u}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-\bar{u}\cdot\tilde{\sigma}\right]d\bar{s}-$$

$$-\frac{1}{2}\mu\sum_i\sum_j\int_Q\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2dQ,$$

где $d\bar{s}$ – элемент поверхности, ориентированный по внешней к $S+\Sigma$ нормали $\bar{n}$. Интеграл по этой поверхности равен нулю вследствие того, что поток энергии (подынтегральная функция есть плотность этого потока) вне объема Q отсутствует.

Таким образом, для скорости диссипации энергии получаем

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{1}{2}\mu\sum_i\sum_j\int_Q\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2dQ=$$

$$=-\sum_i\sum_j\int_Q\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dQ. \qquad (12.26)$$

Если ввести плотность функции диссипации

$$\varphi = \frac{1}{2}\mu \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = -\sum_i \sum_j \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (12.27)$$

и функцию диссипации

$$F_\mu = -\frac{dE}{dt} = \int_Q \varphi dQ,$$

то для коэффициента затухания α будем иметь

$$\beta = -\frac{F_\mu}{2E}. \quad (12.28)$$

12.7. Безразмерные переменные

Приведем краевую задачу (12.8), (12.9), (12.12) плюс кинематическое краевое условия и начальные условия к безразмерному виду. Для этого определим характерные масштабы независимых переменных T (время) и R_0 (линейный размер). В задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью за R_0 принимается размер свободной поверхности (ее радиус или радиус отсека) и в качестве T – обратная круговая частота колебаний свободной поверхности ω^{-1}.

В безразмерных переменных уравнение неразрывности своего вида не изменит (звездочкой отмечаются безразмерные величины и операторы):

$$\mathrm{div}^* \bar{u}^* = 0,$$

а уравнения движения (12.9) записываются в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^* \bar{u}^* + \left(\bar{u}^* \cdot \nabla^* \right) \bar{u}^* + \nabla^* p^* - \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\nabla^2 \right)^* \bar{u}^* = \bar{f}^*.$$

Здесь

$u^* = u/\omega R_0$ и $p^* = p/\rho\omega^2 R_0^2$ – безразмерные скорость и давление; $\mathrm{Re} = \dfrac{\omega R_0^2}{\nu}$ – число Рейнольдса; $f^* = \dfrac{f}{\rho g Fr}$ – безразмерная

объемная сила; g – напряженность поля внешних массовых сил и F_r – число Фруда: $Fr = \dfrac{\omega^2 R_0}{g}$.

Очевидно, что не изменится и форма записи кинематического краевого условия и краевых условий для касательных напряжений на свободной поверхности, а также форма записи начальных условий.

Краевое условие для нормальных напряжений на Σ в безразмерных переменных будет иметь вид

$$p^* - p_0^* = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^* u_n^*.$$

В дальнейшем индекс «*» в формулах, записанных в безразмерных переменных, опускается. Размерную и безразмерную формы записи можно различать по наличию критериев подобия.

Глава 13

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.

Решение краевой задачи (12.8), (12.9), (12.12) в наиболее полной постановке и во всем практически интересном диапазоне изменения входных данных и параметров представляет, как отмечалось, большие математические и вычислительные трудности. Поэтому получили развитие подходы к анализу задач, основанные на асимптотических приближениях как в постановке, так и в конструировании их решений.

Наибольший прогресс в решении задач динамического взаимодействия отсека и жидкости достигнут в тех случаях, когда их постановка существенно опирается на два допущения. Первое предполагает, что колебания свободной поверхности происходят с малой амплитудой s_0 и краевая задача может быть линеаризована по малому параметру $\varepsilon \sim s_0/R_0 << 1$. Это допущение уже было использовано при линеаризации краевой задачи.

В соответствии со вторым допущением предполагается, что движение жидкости происходит при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} >> 1$. В связи с этим в краевой задаче появляется еще один малый параметр $\varepsilon \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ – величина порядка относительной толщины пограничного слоя. Наличие этого малого параметра также позволяет провести соответствующее упрощение краевой задачи и синтезировать асимптотические по вязким эффектам приближения к решению.

Отметим важное отличие в конструировании асимптотических решений по каждому их этих малых параметров.

Задача с малым параметром s_0/R_0 относится к классу регулярных возмущений: такие возмущения дают равномерную точность и зависимость от величины малого параметра во всем поле течения. Примером решения задачи регулярных возмущений является задача о нелинейных колебаниях идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд.

Задача с малым параметром $\mathrm{Re}^{-1/2}$ относится к классу задач особых возмущений, в которых бесконечно малое изменение параметра приводит к конечным изменениям решения. В частности, движение маловязкой жидкости не является слабо измененным движением идеальной жидкости и приближение его невязким течением (нулевое приближение) не имеет смысла. Оно должно дополняться поправками пограничного слоя; нулевое и последующие приближения имеют различный порядок дифференциальных уравнений и должны затем сращиваться одним из физически и математически подходящих способов.

Известны несколько способов внесения в асимптотические решения этих поправок, рассмотрим один из них.

13.1. Приближение ламинарного пограничного слоя

Рассмотрим линеаризованную краевую задачу с точки зрения упрощений, которые наступают в том случае, когда $\mathrm{Re} >> 1$. В табл.13.1. приведены значения чисел *Re* для гравитационных колебаний некоторых жидкостей в цилиндрическом отсеке при большой глубине заполнения $H > R_0$ и $g = 9{,}8 м/с^2$ по первому несимметричному тону $(\xi_1 = 1{,}841)$. Из этой таблицы видно, когда «работает» условие $\mathrm{Re} >> 1$.

Таблица 13.1

Жидкость	$\nu \cdot 10^{-6}\ \frac{м}{с^2}$	Число Re		
		$R_0 = 1 м$	$R_0 = 10^{-1} м$	$R_0 = 10^{-2} м$
Вода	10	$4 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^1$
Этиловый спирт	0,3	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^2$
Керосин	0,8	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^2$

Известно, что при $\mathrm{Re} >> 1$ возникает своеобразная картина течения: вязкость жидкости существенно влияет на параметры ее течения только в пристеночном (так называемом пограничном) слое. Здесь нормальная к твердой границе составляющая градиента скорости много меньше, чем касательная и чем градиент скорости вне этого слоя.

Предполагая, что толщина пограничного слоя много меньше минимального радиуса кривизны отсека, оценку порядка его величины

можно провести на двумерной модели движения жидкости вблизи плоской пластины.

Пусть h_L – толщина ламинарного пограничного слоя, а u – скорость жидкости вне его. Тогда в пограничном слое тангенциальные напряжения имеют порядок

$$\sigma \sim \mu \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \sim \mu \frac{|u|}{h_L},$$

где y – расстояние, измеряемое от пластины внутрь потока. В то же время в основном потоке вне пограничного слоя

$$\sigma \sim \mu \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \sim \mu \frac{|u|}{R_0}.$$

Следовательно, вязкие тангенциальные напряжения в пограничном слое в R_0/h_L раз больше любых других.

Получим искомую оценку для h_L. Если амплитуда колебаний жидкости вдоль пластины s_0, а круговая частота этих колебаний ω, то для удельной силы инерции имеем

$$\rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \sim \rho s_0 \omega^2. \tag{13.1}$$

Для величины удельной силы вязкого трения оценка будет следующей:

$$\mu \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \sim \mu \frac{s_0 \omega}{h_L^2}. \tag{13.2}$$

Приравнивая эти силы, получим

$$h_L \sim \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/2},$$

или в относительных переменных:

$$\frac{h_L}{R_0} \sim \mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{13.3}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче при $\mathrm{Re} >> 1$ имеют место два характерных размера – h_L и R_0, которые образуют малый параметр h_L/R_0. Это позволяет в соответствии с теорией возмущений расщепить поле течения на две области: одна из них малой тол-

щины h_L – область пограничного слоя, где существенно проявляются вязкие силы, и вторая – область вне пограничного слоя с характерным размером R_0, где этими силами можно пренебречь и использовать модель течения идеальной жидкости.

Получим, имея в виду приведенные выше оценки (13.1)–(13.3), уравнения нестационарного пограничного слоя, которые будут справедливы у смоченной и свободной поверхностей. Как и прежде, предполагается, что смоченная поверхность S плоская. Свяжем с S декартову систему координат так, что ось ox_3 перпендикулярна этой плоскости и направлена внутрь жидкости, а оси ox_1 и ox_2 лежат в этой плоскости.

Очевидно, что из-за малой толщины пограничного слоя движение жидкости в нем можно считать с точностью до малых порядка $\mathrm{O}\left(\mathrm{Re}^{-1/2}\right)$ двумерным вдоль обтекаемой границы, т.е.

$$\left|u_\tau\right| >> \left|u_n\right| .$$

Действительно, из уравнения неразрывности (12.8), переписанного в проекциях на нормаль и касательную к S

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} = 0 ,$$

следует оценка

$$\left|\frac{u_n}{h_L}\right| \sim \left|\frac{u_\tau}{R_0}\right| , \text{ т.е. } \left|u_n\right| \sim \mathrm{Re}^{-1/2}\left|u_\tau\right| . \qquad (13.4)$$

Учитывая это, проведем сравнительную оценку по порядку величин членов в уравнении (12.18) в пограничном слое на S. Так как $|u_1| \sim |u_2| \sim \omega s_0$, $|u_3| \sim \omega s_0 \dfrac{h_L}{R_0}$, то составляющей скорости u_3 можно пренебречь и, кроме того,

$$\left|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}\right| \sim \frac{\omega s_0}{h_L^2} , \qquad \left|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right| \sim \frac{\omega s_0}{R_0^2} \quad (i, j = 1,2).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}\right| >> \left|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}\right| \sim \left|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right| \qquad (i = 1,2).$$

С учетом этих оценок и пренебрегая величинами порядка $h_L \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ малости и выше, найдем из (12.18) уравнения движения вблизи S в приближении пограничного слоя:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2, \qquad (13.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad div\overline{u} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x_3 < h_L.$$

Теперь о пограничном слое вблизи свободной поверхности, которую в первом (линейном) приближении по малому параметру s_0/R_0 можно отождествить с Σ_0.

Пограничный слой на свободной поверхности, так же как пограничный слой на смоченной поверхности, следует рассматривать как феноменологическую модель течения с числами $\mathrm{Re} >> 1$ вблизи Σ_0, которая позволяет сращивать решения в «вязкой» и «невязкой» областях движения жидкости. Действительно, на свободной поверхности должны выполняться условия отсутствия касательных напряжений (12.19). В то же время на некотором малом расстоянии от Σ_0 вглубь жидкости течение предполагается безвихревым $\left(\mathrm{rot}\overline{u} = 0\right)$. Эти условия несовместимы. Чтобы их согласовать, вводится допущение, что на этом малом расстоянии, которое и определяется как толщина пограничного слоя, вязкие эффекты, генерируемые на свободной поверхности, затухают и за пределами пограничного слоя $\mathrm{rot}\overline{u} = 0$.

Введем в этом случае декартову систему координат o, x_1, x_2, x_3, связанную с Σ_0 – зеркалом свободной поверхности, ось ox_1 перпендикулярна Σ_0 и направлена вовне жидкости так, что пограничный слой занимает область $-h_L < x_1 < 0$. Проделывая

аналогичные вышеприведенным оценки и выкладки, получим искомые уравнения в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2,$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = f_3, \qquad (13.6)$$
$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad div\overline{u} = 0 \quad \text{при} \quad -h_L < x_1 < 0$$

Краевые условия на S и Σ_0 не выписываются, их конкретный вид зависит от цели решения задач (13.5) и (13.6). Начальные условия остаются прежними.

Таким образом, благодаря наличию малого параметра $\varepsilon \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ краевая задача для уравнений (12.18), (12.19) расщепляется на две: одна имеет областью определения решения пограничный слой, примыкающий к границам $S + \Sigma_0$ объема Q, а вторая – остальной объем жидкости. Первая из этих задач описывает с помощью уравнений (13.5) и (13.6) течение жидкости в пограничных слоях на S и Σ_0 соответственно. Вторая – в ядре течения, т.е. основном объеме, где эффекты вязкости с точностью до малых порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$ не проявляются и где в связи с этим при $\mathrm{Re} \to \infty$ жидкость можно считать идеальной и описать ее движение уравнениями Эйлера вместо уравнений Навье −Стокса. После пренебрежения в (12.18) диффузионной составляющей ускорения эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \nabla p = \overline{f}, \quad \mathrm{div}\overline{u} = 0. \qquad (13.7)$$

На воображаемой поверхности раздела этих областей $S' + \Sigma'$, отстоящей на h_L от $S + \Sigma_0$ вглубь жидкости, задаются краевые условия, «сшивающие» решения вязкой и эйлеровой задач непрерывным образом. Причем с ошибкой порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$, поверхность раздела областей $S' + \Sigma'$ затем сносится на $S + \Sigma_0$ и, следовательно, отождествляется с границами области Q.

13.2. Количественные оценки рассеивания энергии колебаний на основе энергетических соотношений

Вначале проведем на физическом уровне строгости анализ влияния определяющих параметров и условий движения жидкости на демпфирование колебаний. С этой целью используем энергетические соотношения разд. 12. При этом обратим внимание на то, что приведенные там соотношения для энергии E (12.21) и скорости ее рассеяния dE/dt (12.26), так же как и формула для вязких напряжений на пластине (12.16), получены были на основе полных уравнений Навье − Стокса и без каких-либо ограничений на величину числа Re. Здесь же, естественно, считается, что $\mathrm{Re} >> 1$.

Для кинетической энергии колебаний жидкости в отсеке с характерным размером R_0, если $|u| \sim \omega < s_0 >$, имеет место оценка

$$E_к \sim \rho\omega^2 < s_0 >^2 R_0^3, \tag{13.8}$$

где $< s_0 >$ – средняя за период $2\pi/\omega$ амплитуда колебаний, например

$$< s_0 > = \frac{\omega}{\pi}\left|\int_0^{\pi/\omega} s_0 \sin \omega t dt\right| = \frac{2}{\pi} s_0 .$$

При оценке порядка величины плотности функции дисссипации (12.27), как прежде, полагается, что минимальный радиус кривизны отсека ($\sim R_0$) много больше h_L, и в связи с этим допустимо использовать (12.16), где нужно положить

$$|V_0| \sim \omega < s_0 >, \quad \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right| \sim \omega < s_0 > h_L^{-1},$$

поэтому

$$|\varphi| \sim \omega^2 < s_0 >^2 \rho\nu h_L^{-2}. \tag{13.9}$$

«Интегрируя» φ по объему жидкости, занятому пограничным слоем $Q_h \sim R_0^2 h_L$, найдем, что

$$F_\mu \sim \rho < s_0 >^2 \nu^{1/2} \omega^{5/2} R_0^2 .$$

В результате следует оценка для коэффициентов демпфирования

$$\beta \sim \frac{\omega^{1/2}\nu^{1/2}}{R_0} = \omega \,\mathrm{Re}^{-1/2}, \qquad (13.10)$$

из которой видно, что этот коэффициент растет как корень квадратный из частоты колебаний. Этим подтверждается известный из экспериментов факт, что высшие гармоники колебаний свободной поверхности трудно возбудить и что они быстро затухают.

Более строгая количественная зависимость для β в рамках энергетического подхода может быть получена, если вместо оценки величины скорости $|u| \sim \omega < s_0 >$ использовать ее значение из решения уравнений (13.7) для идеальной жидкости при соответствующих краевых условиях.

Известно, что при движении идеальной жидкости в потенциальном поле массовых сил

$$\bar{f} = \nabla U = -g\bar{e}_1$$

и, если это движение развивается из начального безвихревого, исходная краевая задача сводится к нахождению потенциала Φ, такого, что

$$\bar{u} = \nabla\Phi(\bar{x},t), \quad \nabla^2\Phi = 0 \quad при\ \bar{x} \in Q, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0,$$
$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right]_{\Sigma_0} = 0. \qquad (13.12)$$

Эта и соответствующая ей задача на собственные значения были рассмотрены выше (5.3).

Пусть решение задачи на собственные значения получено. Тогда для m тона колебаний жидкости с амплитудой s_{0m} может быть рассчитано после скоростей

$$\bar{u}(\bar{x},t) = s_{0m}\omega_m \nabla\Psi_m \sin\omega_m t, \quad \omega_m^2 = \sigma_m^2 g$$

и кинетическая энергия колебаний жидкости

$$E_k = \frac{1}{2}\rho s_{0m}^2 \omega_m^2 \cos^2\omega_m t \int_Q (\nabla\Psi_m^2)dQ.$$

Максимальное значении E_k есть

$$E = \frac{1}{2g}\rho s_{0m}^2 \omega_m^4 \int_{\Sigma_0} \psi_m^2 ds \qquad (13.12)$$

и равно вследствие консервативности системы (13.11) полному запасу энергии колебаний с амплитудой s_{0m}.

Заметим, что здесь сразу введено предположение о том, что вязкость при $\mathrm{Re} >> 1$ не влияет на частоту колебаний.

Функцию плотности диссипации энергии φ получим из (12.27) с учетом (12.17). Без решения уравнения Навье − Стокса более полной и точной, чем в (12.17), информации о вязких напряжениях в жидкости не имеется. Однако в рамках принятого здесь приближения пограничного слоя этой информации достаточно, поскольку вязкие возмущения быстро затухают при удалении от S. Привлекая (12.16), не трудно видеть, что при любой вязкости имеет место оценка

$$\varphi = \sigma_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \sim \frac{\mu V_0^2}{h^2} e^{-\frac{2x_3}{h}} \sim \frac{\mu V_0^2}{h^2} e^{-\frac{2\sqrt{2}x_3}{h_L}} \sim \rho\omega V_0^2 e^{\frac{2\sqrt{2}x_3}{h_L}} .$$

Это значит, что для маловязкой жидкости на расстоянии порядка толщины пограничного слоя $h_L = \sqrt{2}h$ от смоченной поверхности величина $|\varphi|$ примерно в e^3 раз меньше, чем на S.

Поэтому в (12.26) интеграл по объему Q можно заменить интегралом по объему пограничного слоя, а в подынтегральном выражении принять согласно (12.16), что вблизи S

$$V_0 = -\omega_m s_{0m}\frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau} e^{-\frac{R_0 - x_3}{h}} \cos\left(\omega_m t + \frac{\pi}{4}\right).$$

В связи с этим распределение вязких напряжений и градиентов скорости поперек течения будет

$$\sigma_{n\tau} = -\rho\omega_m s_{0m}\sqrt{\frac{\omega\nu}{2}}\frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau} e^{-\frac{R_0 - x_3}{h}} \cos\left(\omega_m t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial n} = -\omega_m s_{0m}\sqrt{\frac{\omega_m}{2\nu}}\frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau} e^{-\frac{R_0 - x_3}{h}} \cos\left(\omega_m t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, $\varphi = \rho\omega_m^2 s_{0m}^2 \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau}\right) e^{-2\frac{R_0 - x_3}{h}} \cos^2\left(\omega_m t + \frac{\pi}{4}\right)$

и для среднего за период колебаний $2\pi/\omega$ значения функции диссипации F_μ будем иметь

$$F_\mu = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_{R_0 - ч_3}^{P_0} dx \int_S \varphi ds = \frac{\rho\omega_m^2 s_{0m}^2 h_L}{2\sqrt{2}} \int_S \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau}\right)^2 ds \,. \quad (13.13)$$

Из (13.12), (13.13) находится окончательное выражение для коэффициента демпфирования колебаний

$$\beta_m = \frac{F_\mu}{2E} = \frac{g h_L}{\sqrt{2}\omega_m} \frac{\int_S \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau}\right)^2 ds}{\int_{\Sigma_0} \Psi_m^2 ds} \,. \quad (13.14)$$

В приведенных выше формулах $R_0 = x_3$ соответствует координате $x_3 \in S$, а $\omega^2 s_0^2 \left(\partial \Psi_m / \partial \tau\right)^2$ есть квадрат касательной к S составляющей скорости.

Из формулы (13.14) может быть получено в конечном виде выражение логарифмического декремента колебаний $\delta_m = \beta_m / \omega_m$ для отсека в форме прямого кругового цилиндра, для которого известно аналитическое решение Ψ_m (10.16).

Это выражение имеет вид

$$\delta_m = \frac{\pi}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}} \left[\frac{\xi_m^2 + 1}{\xi_m^2 - 1} + \frac{2\xi_m (1 - H)}{sh(2\xi_m H)} \right], \quad (13.15)$$

где ξ_m – частотные параметры задачи на собственные значения для потенциала $\Psi(\bar{x})$.

Из этой формулы для большой относительной глубины заполнения отсека $H > 1$ следует

$$\lim_{H \to \infty} \beta_m = \frac{\omega_m}{\sqrt{2}} \mathrm{Re}^{-1/2} \left(\frac{\xi_m^2 + 1}{\xi_m^2 - 1} \right) \quad (m = 1,2,..). \quad (13.16)$$

Видно, что оценка (13.10) с точностью до константы порядка единицы совпадает с решением (13.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К.А.* Динамика ракет / К.А Абгарян, И.М. Раппопорт. – М.: Машиностроение, 1969.

2. *Игдалов И.М.* Ракета как объект регулирования / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.Д. Поляков, Ю.Д. Шептун. Днепропетровск: АРТ–Пресс, 2004.

3. *Колесников К.С.* Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980.

4. *Микишев Г.Н.* Динамика твердого тела с полостями заполненными жидкостью / Г.Н. Микишев, Б.И. Рабинович. – М: Машиностроение, 1968.

5. *Моисеев Н.Н.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н.Н Моисеев, В.В. Румянцев. – М.: Наука, 1965.

6. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ... 3
Введение ... 4
1. Возмущенное движение. Упрощающие предположения ... 10
1.1. Постановка задачи о возмущенном движении ... 10
1.2. Линеаризация уравнений возмущенного движения ... 13
1.3. Гипотеза замороженных коэффициентов. Примеры ... 15
1.4. Границы применимости гипотезы замороженных коэффициентов ... 22
2. Задача о движении жидкости, целиком заполняющей подвижный отсек ... 25
2.1. Постановка краевой задачи ... 25
2.2. Относительное движение жидкости ... 28
2.3. Давление в жидкости ... 29
3. Краевая задача о движении жидкости, частично заполняющей подвижный отсек ... 32
4. Линеаризация гидродинамических задач ... 40
5. Краевая задача о собственных колебаниях жидкости, частично заполняющей сосуд ... 44
6. Кинетический потенциал возмущенного движения твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью ... 49
6.1. Принцип Гамильтона-Остроградского ... 49
6.2. Энергия системы ... 51
7. Уравнения возмущенного движения по модели жесткой «крышки» ... 64
8. Уравнения возмущенного движения на основе модели плавающей «крышки» ... 67
9. Анализ некоторых динамических свойств твердого тела с отсеком, содержащим жидкость ... 74
9.1. Асимптотика «медленных» и «быстрых» движений ... 74
9.2. Динамика системы в режиме установившихся гармонических колебаний ... 76
9.3. Влияние параметров системы на частоты ее собственных колебаний ... 80
10. Решение краевых задач динамики жидкости, частично заполняющей цилиндрический отсек ... 89
10.1. Решение задачи на собственные значения ... 90
10.2. Решение задачи для потенциала Жуковского ... 92
10.3. Расчет коэффициентов уравнений возмущенного движения по модели жесткой «крышки» ... 95
11. Вариационные методы решения гидродинамических задач ... 97
11.1. Задача на собственные значения ... 97
11.2. Вариационный метод решения задачи для потенциала Жуковского ... 100

11.3. Пример: оценка частоты первого тона колебаний жидкости в сфере 102
12. Учет вязких свойств жидкости в динамической схеме 106
12.1 Динамически эквивалентное твердое тело с учетом собственного демпфирования колебаний жидкости 106
12.2. Количественные характеристики рассеяния энергии колебаний 109
12.3 Постановка задачи о колебаниях вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд 111
12.4. Колебания пластины, погруженной в полупространство вязкой жидкости 114
12.5. Линеаризация 115
12.6. Диссипация энергии колебаний 117
12.7. Безразмерные переменные 120
13. Асимптотические приближения в решении задачи о колебаниях маловязкой жидкости 122
13.1. Приближение ламинарного пограничного слоя 123
13.2. Количественные оценки рассеивания энергии колебаний на основе энергетических соотношений 128
Литература 132

Учебное издание

Игорь Борисович БОГОРЯД

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ РАКЕТ

Учебное пособие
Издание 2-е, исправленное и переработанное

Редактор В.С. Сумарокова
Компьютерная верстка Т.В. Дьяковой

Подписано в печать 09.12.2013.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Печ. л. 8,5; усл. печ. л. 7,9; уч.-изд. л. 8,1. Тираж 100. Заказ №

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
ООО «Интегральный переплет», 634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1