Автоматика и телемеханика, № 7, 2013

© 2013 г. **А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук,**
Т.В. ЛЮБИНА
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

НЕМАРКОВСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ RQ-СИСТЕМА С ВХОДЯЩИМ ММР-ПОТОКОМ ЗАЯВОК[1]

В данной статье рассматривается немарковская динамическая RQ-система, т.е. однолинейная система массового обслуживания с источником повторных вызовов, входящим марковским модулированным потоком заявок и произвольным распределением времени обслуживания заявок, управляемая динамическим протоколом доступа. Проводится анализ данной RQ-системы и находятся допредельные распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов при различных распределениях времени обслуживания. Обнаружено свойство стабилизации последовательности отношений $p(i+1)/p(i)$. Для аппроксимации распределений вероятностей $p(i)$ предложено квазигеометрическое распределение дефекта n.

1. Введение

Для обеспечения надежной передачи данных требуется исследование математических моделей сетей связи случайного множественного доступа. Наиболее эффективным в проведении таких исследований является аппарат теории массового обслуживания [1–3] для так называемых RQ-систем (Retrial Queue), являющихся достаточно адекватными математическими моделями сетей случайного множественного доступа.

Анализу таких моделей посвящены работы Фалина Г.И., Хомичкова И.И., Дудина А.Н., Клименок В.И., Назарова А.А., Artalejo J.R. [4–9] и др. В [7] рассматривается проблема нестабильного функционирования сетей связи с протоколами случайного множественного доступа. Работы [4, 8] посвящены исследованию систем с повторными вызовами. Так, в [8, 9] рассматриваются динамические протоколы случайного множественного доступа, позволяющие решить проблему повторного обращения и потери информации, исследование которых выполняется методом асимптотического анализа. Допредельное исследование таких систем является исключительной ситуацией, поэтому необходимым является нахождение методов, позволяющих найти вероятностно-временные характеристики в допредельных условиях.

В данной статье рассмотрим немарковскую RQ-систему с входящим ММР-потоком, управляемую динамическим протоколом доступа. Для допредель-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» (проект № 11803).

ного исследования такой системы предлагается метод, основанный на преобразовании Лапласа матричного аргумента.

2. Математическая модель

В данной работе RQ-системой называется немарковская однолинейная система массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов (ИПВ) и входящим марковским модулированным потоком (ММР-поток) заявок, управляемая динамическим протоколом доступа. Будем полагать, что интенсивность обращения к ресурсу из ИПВ имеет вид σ/i, где i – число заявок в ИПВ, т.е. рассмотрим динамический протокол доступа.

На вход системы поступает ММР-поток (Markov modulated Poisson process) [10, 11], который определяется диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_n и матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{\nu n}$ цепи Маркова $n(t)$, управляющей ММР-потоком.

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. По завершении обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания некоторой заявки поступает другая, то поступившая заявка переходит в ИПВ. Из ИПВ после случайной задержки заявка с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью σ/i вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата, i – число заявок в ИПВ. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, то возвращается в ИПВ.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $z(t)$ – остаточное время обслуживания [12], т.е. длина интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени t, $n(t)$ – значения управляющей потоком цепи Маркова в момент времени t, $n(t) = 1, \ldots, N$, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Компонента $z(t)$ определяется только в те моменты, когда $k(t) = 1$. Тогда обозначим через

$$P\{\, k\,(t) = 0,\ n(t) = n,\ i\,(t) = i\} = P\,(0, n, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t свободен, цепь Маркова $n(t)$ находится в состоянии n, в источнике повторных вызовов находится i заявок, а через

$$P\{\, k\,(t) = 1,\ z(t) < z,\ n(t) = n,\ i\,(t) = i\} = P\,(1, z, n, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t занят, до конца обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени t, осталось время меньшее, чем z, цепь Маркова $n(t)$ находится в состоянии n, в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{k\,(t)\,, z(t), n(t), i\,(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(0,n,i,t)$ и $P(1,z,n,i,t)$ рассматриваемой RQ-системы запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial P(1,0,n,0,t)}{\partial t} = -P(0,n,0,t)\lambda_n + \dfrac{\partial P(1,0,n,0,t)}{\partial z} + \sum\limits_{\nu\neq n} P(0,\nu,0,t)q_{\nu n},\\
\dfrac{\partial P(1,z,n,0,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(1,z,n,0,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,0,n,0,t)}{\partial z} - P(1,z,n,0,t)\lambda_n +\\
+ P\,(0,n,0,t)\,\lambda_n B(z) + P\,(0,n,1,t)\,\sigma B(z) + \sum\limits_{\nu\neq n} P(1,z,\nu,0,t)q_{\nu n},\\
\dots\\
\dfrac{\partial P(1,0,n,i,t)}{\partial t} = -P(0,n,i,t)(\lambda_n+\sigma) + \dfrac{\partial P(1,0,n,i,t)}{\partial z} + \sum\limits_{\nu\neq n} P(0,\nu,i,t)q_{\nu n},\\
\dfrac{\partial P(1,z,n,i,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(1,z,n,i,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,0,n,i,t)}{\partial z} - P(1,z,n,i,t)\lambda_n +\\
+ P(1,z,n,i-1,t)\lambda_n + P\,(0,n,i+1,t)\,\sigma B(z) +\\
+ P\,(0,n,i,t)\,\lambda_n B(z) + \sum\limits_{\nu\neq n} P(1,z,\nu,i,t)q_{\nu n}.
\end{cases}$$

Для стационарного распределения $P\,(0,n,i,t) = P(0,n,i)$, $P\,(1,z,n,i,t) = P(1,z,n,i)$ эта система принимает вид

$$(1)\quad \begin{cases}
-P(0,n,0)\lambda_n + \dfrac{\partial P(1,0,n,0)}{\partial z} + \sum\limits_{\nu\neq n} P(0,\nu,0)q_{\nu n} = 0,\\
\dfrac{\partial P(1,z,n,0)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,0,n,0)}{\partial z} - P(1,z,n,0)\lambda_n + P\,(0,n,0)\,\lambda_n B(z) +\\
+ P\,(0,n,1)\,\sigma B(z) + \sum\limits_{\nu\neq n} P(1,z,\nu,0)q_{\nu n} = 0,\\
\dots\\
-P(0,n,i)(\lambda_n+\sigma) + \dfrac{\partial P(1,0,n,i)}{\partial z} + \sum\limits_{\nu\neq n} P(0,\nu,i)q_{\nu n} = 0,\\
\dfrac{\partial P(1,z,n,i)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,0,n,i)}{\partial z} - P(1,z,n,i)\lambda_n + P(1,z,n,i-1)\lambda_n +\\
+ P\,(0,n,i+1)\,\sigma B(z) + P\,(0,n,i)\,\lambda_n B(z) + \sum\limits_{\nu\neq n} P(1,z,\nu,i)q_{\nu n} = 0,
\end{cases}$$

где $\dfrac{\partial P(1,0,n,i)}{\partial z} = \left.\frac{\partial P(1,z,n,i)}{\partial z}\right|_{z=0}$.

Для дальнейшего исследования запишем систему (1) в матричном виде. Обозначив вектор-строки как

$$P(0,i) = \{P(0,1,i), P(0,2,i), \ldots, P(0,N,i)\},$$
$$P(1,z,i) = \{P(1,z,1,i), P(1,z,2,i), \ldots, P(1,z,N,i)\},$$

получим

$$(2) \qquad \begin{cases} P(0,0)(Q-\Lambda) + \dfrac{\partial P(1,0,0)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial P(1,z,0)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,0,0)}{\partial z} + P(1,z,0)(Q-\Lambda) + \\ + P\left(0,0\right) \Lambda B(z) + P\left(0,1\right) \sigma B(z) = 0, \\ \cdots \\ P(0,i)(Q-\Lambda-\sigma I) + \dfrac{\partial P(1,0,i)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial P(1,z,i)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,0,i)}{\partial z} + P(1,z,i)(Q-\Lambda) + P(1,z,i-1)\Lambda + \\ + P\left(0,i+1\right) \sigma B(z) + P\left(0,i\right) \Lambda B(z) = 0. \end{cases}$$

Чтобы решить систему (2), определим векторные характеристические функции

$$(3) \qquad H(0,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(0,i), \quad H(0,z,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(0,z,i),$$

тогда из системы (2) с учетом равенств (3) получаем следующую систему для вектор-функций $H(0,u)$ и $H(1,z,u)$:

$$(4) \qquad \begin{cases} H(0,u)(Q-\Lambda-\sigma I) + \dfrac{\partial H(1,0,u)}{\partial z} = -\sigma P(0,0), \\ \dfrac{\partial H(1,z,u)}{\partial z} - \dfrac{\partial H(1,0,u)}{\partial z} + H(1,z,u)(Q-\Lambda+e^{ju}\Lambda) + \\ + H(0,u)(\Lambda + e^{-ju}\sigma I)B(z) = \sigma P\left(0,0\right) e^{-ju} B(z). \end{cases}$$

Выразив $\dfrac{\partial H(1,0,u)}{\partial z}$ из первого уравнения системы (4) и подставив во второе, получим систему уравнений:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H(1,0,u)}{\partial z} = -\sigma P(0,0) - H(0,u)(Q-\Lambda-\sigma I), \\ \dfrac{\partial H(1,z,u)}{\partial z} + \sigma P(0,0) + H(0,u)(Q-\Lambda-\sigma I) + \\ + H(1,z,u)(Q+(e^{ju}-1)\Lambda) + H(0,u)(\Lambda+e^{-ju}\sigma I)B(z) = \\ = \sigma P\left(0,0\right) e^{-ju} B(z). \end{cases}$$

Для дальнейшего исследования перепишем второе уравнение системы (5) в виде

$$\frac{\partial H(1,z,u)}{\partial z} + H(1,z,u)(Q + (e^{ju} - 1)\Lambda) = \sigma P\,(0,0)\left[e^{-ju}B(z) - 1\right] - \tag{6}$$
$$-H(0,u)\left[(\Lambda + e^{-ju}\sigma I)B(z) + Q - \Lambda - \sigma I\right].$$

Вектор-функции $H(0,u)$, $H(1,z,u)$ и вектор $P(0,0)$ будем искать с помощью преобразования Лапласа матричного аргумента.

3. Метод преобразования Лапласа матричного аргумента

Теорема Сильвестра. Если все собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ матрицы A различны, то аналитическую функцию $f(A)$ матрицы A можно представить в виде

$$f(A) = \sum_{k=1}^{N} f(\alpha_k) \prod_{i \neq k} \frac{A - \alpha_i I}{\alpha_k - \alpha_i}. \tag{7}$$

Равенство (7) будем называть формулой Сильвестра [13].

Определение 1. Для скалярной плотности распределения вероятностей $b(x)$ преобразованием Лапласа матричного аргумента A

$$B^*(A) = \int_0^\infty e^{-Ax} b(x)dx,$$

в котором все собственные значения матрицы A имеют неотрицательные действительные части, применяя формулу Сильвестра (7), будем называть

$$B^*(A) = \int_0^\infty e^{-Ax} b(x)dx =$$
$$= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha_k x} \prod_{i \neq k} \frac{A - \alpha_i I}{\alpha_k - \alpha_i} b(x)dx = \sum_{k=1}^{N} b^*(\alpha_k) \prod_{i \neq k} \frac{A - \alpha_i I}{\alpha_k - \alpha_i}, \tag{8}$$

где

$$b^*(\alpha_k) = \int_0^\infty e^{-\alpha_k x} b(x)dx.$$

Определение 2. Для строки вектор-функции $h(x)$ размерности $1 \times N$, все элементы которого интегрируемы на интервале $(0, \infty)$, преобразованием Лапласа матричного аргумента A (матрица размерности $N \times N$, все собственные значения матрицы A имеют неотрицательные действительные части)

$$H^*(A) = \int_0^\infty h(x) e^{-Ax} dx$$

будем называть

$$
H^*(A) = \int\limits_0^\infty h(x) e^{-Ax} dx =
$$

(9)

$$
= \int\limits_0^\infty h(x) \sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha_k x} \prod_{i \neq k} \frac{A - \alpha_i I}{\alpha_k - \alpha_i} dx = \sum_{k=1}^{N} h^*(\alpha_k) \prod_{i \neq k} \frac{A - \alpha_i I}{\alpha_k - \alpha_i},
$$

где

$$
h^*(\alpha_k) = \int\limits_0^\infty h(x) e^{-\alpha_k x} dx.
$$

Лемма. Если все собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ *матрицы* A *различны, их действительные части неотрицательные и* $h(\infty) = 0$*, то выполняется равенство*

$$
\int\limits_0^\infty h'(x) e^{-Ax} dx = -h(0) + H^*(A)\ A.
$$

Доказательство леммы приведено в Приложении.

4. Нахождение вектор-функций $H(0,u)$, $H(1,u)$ и вектора $P(0,0)$

Применим преобразование Лапласа матричного аргумента A к дифференциально-матричному уравнению (6) относительно неизвестной строки вектор-функции $H(1,z,u)$.

Обозначим

$$
\frac{\partial H(1,z,u)}{\partial z} = h(1,z,u)
$$

и предположим, что существует плотность

$$
B'(z) = b(z),
$$

тогда уравнение (6) перепишем в виде

$$
\frac{\partial h(1,z,u)}{\partial z} + h(1,z,u) \left\{ Q + \left(e^{ju} - 1 \right) \Lambda \right\} =
$$
$$
= \sigma P(0,0) e^{-ju} b(z) - H(0,u) \left(\Lambda + e^{-ju} \sigma I \right) b(z).
$$

Домножив справа это равенство на матричную экспоненту e^{-Az} и выбрав значения A из множества матриц перестановочных с матрицей $Q + \left(e^{ju} - 1 \right) \Lambda$, получаем равенство

$$
\frac{\partial h(1,z,u)}{\partial z} e^{-Az} + h(1,z,u) e^{-Az} \left\{ Q + \left(e^{ju} - 1 \right) \Lambda \right\} =
$$
$$
= \sigma P(0,0) e^{-ju} b(z) e^{-Az} - H(0,u) \left(\Lambda + e^{-ju} \sigma I \right) b(z) e^{-Az}.
$$

Интегрируя это равенство по z в интервале $[0,\infty)$ и применяя равенство, указанное в лемме, запишем

$$-h(1,0,u)+H^*(1,A,u)A+H^*(1,A,u)\left\{Q+\left(e^{ju}-1\right)\Lambda\right\}=$$
$$=\sigma P(0,0)e^{-ju}B^*(A)-H(0,u)\left(\Lambda+e^{-ju}\sigma I\right)B^*(A),$$

в котором

$$h(1,0,u)=\left.\frac{\partial H(1,z,u)}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\partial H(1,0,u)}{\partial z},$$

поэтому это равенство, применяя (5), можно записать в виде

$$\sigma P(0,0)+H(0,u)(Q-\Lambda-\sigma I)+H^*(1,A,u)\left\{A+Q+(e^{ju}-1)\Lambda\right\}=$$
$$=\sigma P(0,0)e^{-ju}B^*(A)-H(0,u)(\Lambda+e^{-ju}\sigma I)B^*(A).$$

Следовательно, для преобразования $H^*(1,\alpha,u)$ имеет место равенство

$$H^*(1,\alpha,u)\left\{A+Q+(e^{ju}-1)\Lambda\right\}=\sigma P(0,0)\left\{e^{-ju}B^*(A)-I\right\}-$$
$$-H(0,u)\left\{(\Lambda+e^{-ju}\sigma I)B^*(A)+Q-\Lambda-\sigma I\right\}.$$

Полагая в этом равенстве

$$A=A(u)=-Q-(e^{ju}-1)\Lambda=-\left\{Q+(e^{ju}-1)\Lambda\right\},$$

получим, что вектор-функция $H(0,u)$ определяется равенством

$$H(0,u)\left\{(\Lambda+e^{-ju}\sigma I)B^*(A(u))+Q-\Lambda-\sigma I\right\}=$$
$$=\sigma P(0,0)\left\{e^{-ju}B^*(A(u))-I\right\}. \tag{10}$$

Отметим, что в равенстве (10) вектор $P(0,0)$ остается неопределенным, его значение найдем ниже.

Из (10) вектор-функцию $H(0,u)$ определим равенством

$$H(0,u)= \tag{11}$$
$$=\sigma P(0,0)\left\{e^{-ju}B^*(A(u))-I\right\}\left\{(\Lambda+e^{-ju}\sigma I)B^*(A(u))+Q-\Lambda-\sigma I\right\}^{-1}.$$

Для нахождения вектор-функции $H(1,u)=\lim\limits_{z\to\infty}H(1,z,u)$ в уравнении (6) выполним указанный предельный переход, получим равенство

$$H(1,u)\left\{Q+(e^{ju}-1)\Lambda\right\}=\sigma P(0,0)(e^{ju}-1)-H(0,u)\left\{e^{-ju}\sigma I+Q-\sigma I\right\}$$

при $u\neq 0$. Для тех значений u, при которых матрица $A(u)$ не вырождена, для вектор-функции $H(1,u)$ можно записать:

$$H(1,u)=\left\{\sigma P(0,0)(e^{ju}-1)-H(0,u)\left[e^{-ju}\sigma I+Q-\sigma I\right]\right\}\left\{-A(u)\right\}^{-1}, \tag{12}$$

где $H(0,u)$ определена равенством (11).

Для нахождения вектора $P(0,0)$ от характеристической функции $H(0,u)$ заменой $e^{ju}=x$ в равенстве (11) перейдем к производящей функции $G(0,x)$:

$$G(0,x)=H(0,u),$$

тогда равенство (11), положив в нем

$$A(u)=-Q-(e^{ju}-1)\Lambda=-Q-(x-1)\Lambda=\beta(x),$$

перепишем в виде

$$\begin{gathered}G(0,x)=\\ =P(0,0)\sigma\left\{B^*(\beta(x))-xI\right\}\left\{(\Lambda x+\sigma I)B^*(\beta(x))+x(Q-\Lambda-\sigma I)\right\}^{-1}.\end{gathered}\tag{13}$$

Обозначим матрицы

$$S(x)=\sigma\left\{B^*(\beta(x))-xI\right\},\quad T(x)=(\Lambda x+\sigma I)B^*(\beta(x))+x(Q-\Lambda-\sigma I),$$

равенство (13) перепишем в виде

$$G(0,x)=P(0,0)S(x)T^{-1}(x).$$

Производящая функция $G(0,x)$ определена для всех значений $x\in[0,1]$, но матрица $T(x)$ вырождена при $x=x_\nu$, где x_ν – корни уравнения $|T(x)|=0$, принадлежащие рассматриваемому интервалу $[0,1]$.

Обратную матрицу $T^{-1}(x)$ запишем в виде

$$T^{-1}(x)=\frac{1}{|T(x)|}D^T(x),$$

где элементами $D(x)_{n_1n_2}$ матрицы $D(x)$ являются алгебраические дополнения к элементам $T(x)_{n_1n_2}$ матрицы $T(x)$.

Из равенства нулю определителя $|T(x_\nu)|=0$ следует, что компоненты вектора $P(0,0)$ удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$P(0,0)S(x_\nu)D^T(x_\nu)=0.\tag{14}$$

Эта система определяет значения компонент вектора $P(0,0)$ с точностью до мультипликативной постоянной, значение которой определяется условием нормировки.

Таким образом, после определения значения вектора $P(0,0)$ значения вектор-функций $H(0,u)$ и $H(1,u)$ определяются равенствами (11) и (12). Скалярную характеристическую функцию $h(u)$ числа $i(t)$ заявок в ИПВ определим равенством

$$h(u)=Me^{jui(t)}=\left\{H(0,u)+H(1,u)\right\}E.\tag{15}$$

5. Распределение вероятностей числа заявок в ИПВ

Зная характеристическую функцию $h(u)$, распределение вероятностей $p(i)$ числа i заявок в ИПВ определим обратным преобразованием Фурье

$$p(i) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}h(u)du. \tag{16}$$

При численном интегрировании в равенстве (16) необходимо определить функцию $h(u)$, которая задана равенством (15), где вектор-функции $H(0,u)$ и $H(1,u)$ определены равенствами (11) и (12). В этих равенствах определяющее значение имеют вектор $P(0,0)$ и преобразование Лапласа $B^*(A(u))$ матричного аргумента $A(u) = -Q - (e^{ju} - 1)\Lambda$.

Процедура нахождения вектора $P(0,0)$ определена выше и сводится к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений (14) и применению условия нормировки.

Численное нахождение преобразования Лапласа матричного аргумента A реализуется применением одного из трех алгоритмов, основанных на:

1) непосредственном вычислении значений функций матричного аргумента, что возможно для достаточно ограниченного круга функций распределения $B(x)$;

2) вычислении частичных сумм сходящихся матричных рядов, приводящем к погрешности суммы остаточного ряда;

3) применении формул Сильвестра (8), (9), связанных с необходимостью определения собственных значений матрицы-аргумента и отрицательности действительных частей этих значений.

Реализацию этих алгоритмов проиллюстрируем тремя примерами.

Пример 1. Для экспоненциального распределения $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $b(x) = B'(x) = \mu e^{-\mu x}$ преобразование $B^*(A)$ Лапласа матричного аргумента имеет вид

$$B^*(A) = \int\limits_0^\infty e^{-Ax}b(x)dx = \left(I + \frac{1}{\mu}A\right)^{-1}.$$

Его значения можно определить первым алгоритмом.

Пример 2. Для детерминированного обслуживания

$$B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant b, \\ 1, & \text{если } x > b, \end{cases}$$
$$b(x) = B'(x) = \delta(x - b)$$

преобразование $B^*(A)$ имеет вид

$$B^*(A) = \int\limits_0^\infty e^{-Ax}b(x)dx = e^{-Ab} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}(-A)^n \approx \sum_{n=0}^{N}\frac{b^n}{n!}(-A)^n.$$

Таблица 1. Распределения вероятностей $p_\nu(i)$ при $\nu = 1, 2, 3, 4$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_1(i)$	0,4071	0,1619	0,1178	0,0853	0,0619	0,0451	0,0328	0,0239
$p_2(i)$	0,3942	0,1523	0,1140	0,0851	0,0637	0,0477	0,0358	0,0268
$p_3(i)$	0,3588	0,1236	0,0686	0,0795	0,0643	0,0521	0,0422	0,0342
$p_4(i)$	0,2967	0,0677	0,0578	0,0512	0,0459	0,0415	0,0377	0,0343

Здесь значения $B^*(A)$ можно определять по второму алгоритму, при этом погрешность за счет выбора N можно сделать достаточно малой.

Пример 3. Для двухпараметрического гамма-распределения с параметрами α и β преобразование Лапласа скалярного аргумента u имеет вид

$$B^*(u) = \left(1 + \frac{u}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

Это преобразование матричного аргумента A запишем в виде

$$B^*(A) = \left(I + \frac{1}{\beta}A\right)^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha_k}{\beta}\right)^{-\alpha} \frac{\prod\limits_{i \neq k} (A - \alpha_i I)}{\prod\limits_{i \neq k} (\alpha_k - \alpha_i)}.$$

При целых значениях параметра α значения $B^*(A)$ можно определять первым алгоритмом, а при дробных значениях α целесообразно применить формулу Сильвестра, реализуя третий алгоритм.

В табл. 1 приведены значения вероятностей $p_\nu(i)$ распределений (16), когда среднее значение времени обслуживания равно единице, $\sigma = 5$, а матрицы Λ и Q принимают значения

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}4 \end{bmatrix},$$

при различных распределениях времени обслуживания:

$\nu = 1$ при детерминированном обслуживании ($D_1 = 0$), остальные – для гамма-распределения времени обслуживания с параметрами $\alpha = \beta = \mu$;

$\nu = 2$ при $\mu = 5$ (малая дисперсия $D_2 = \frac{1}{\mu} = 0{,}2$);

$\nu = 3$ при $\mu = 1$ (экспоненциальное распределение с дисперсией $D_3 = 1$);

$\nu = 4$ при $\mu = 0{,}2$ (большая дисперсия $D_4 = \frac{1}{\mu} = 5$).

Основной причиной различия полученных распределений является существенное различие значений величины дисперсии D_ν времени обслуживания, значения которой составляют

$$D_1 = 0; \quad D_2 = 0{,}2; \quad D_3 = 1; \quad D_4 = 5,$$

при этом характеристики (среднее значение a_ν и дисперсия σ_ν^2) числа заявок в ИПВ значительно различаются (табл. 2).

Таблица 2. Средние значения a_ν и дисперсии σ_ν^2 числа заявок в ИПВ при различных значениях D_ν

ν	1	2	3	4
a_ν	2,17	2,41	3,33	6,09
σ_ν^2	9,04	10,94	19,64	55,11

По данным табл. 2 можно сделать вывод, что с ростом дисперсии времени обслуживания среднее значение и дисперсия числа заявок в ИПВ также возрастают.

Более тонкий анализ данных табл. 1 позволяет сделать вывод о том, что последовательности $\Delta_\nu(i) = p_\nu(i+1)/p_\nu(i)$ достаточно быстро стабилизируются и при $i \geqslant 3$–6 принимают постоянные значения с точностью до трех знаков после запятой:

$$\Delta_1(i) = 0{,}728; \quad \Delta_2(i) = 0{,}750; \quad \Delta_3(i) = 0{,}811; \quad \Delta_4(i) = 0{,}910.$$

Аналогичные результаты имеют место и при других распределениях времени обслуживания, а также для других значений параметра σ и матриц Λ и Q.

Для аппроксимации распределений вероятностей, обладающих указанным свойством стабилизации последовательности $\Delta(i)$, целесообразно предложить так называемое квазигеометрическое распределение $p(i)$ дефекта n. Дадим определение квазигеометрического распределения.

Определение 3. Квазигеометрическим распределением дефекта n с параметром ρ будем называть такое распределение вероятностей $p(i)$, для которого существуют ρ и C, такие что для $i \geqslant n$

$$p(i) = C\rho^i,$$

а при $i = n - 1$

$$p(i) \neq C\rho^i.$$

Класс квазигеометрических распределений дефекта n является $(n+1)$-параметрическим распределением. Вектор его параметров включает величину ρ, а также n из $n+1$ вероятностей $p(0), p(1), \ldots, p(n)$, на которые наложено одно условие, вытекающее из условия нормировки.

Отметим, что, например, распределение вероятностей $p(i)$ числа заявок в системе $\mathrm{M|M|}n|\infty$ является квазигеометрическим дефекта $n-1$ с параметром $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$, где λ – интенсивность входящего простейшего потока, а μ – интенсивность экспоненциального обслуживания в марковской n-линейной СМО с ожиданием.

6. Заключение

В данной статье предложен метод исследования немарковской динамической RQ-системы с входящим MMP-потоком заявок, основанный на преобразовании Лапласа матричного аргумента. Проведено исследование немарковской динамической RQ-системы с входящим MMP-потоком заявок, т.е.

получено распределение вероятностей $p(i)$ числа i заявок в ИПВ. Найдены распределения вероятностей $p_\nu(i)$ числа заявок в ИПВ при различных значениях величины дисперсии D_ν времени обслуживания.

Обнаружено свойство стабилизации последовательности $\Delta(i)$ для найденных распределений $p_\nu(i)$.

Для аппроксимации распределений вероятностей, обладающих свойством стабилизации последовательности $\Delta(i)$, предложено квазигеометрическое распределение $p(i)$ дефекта n. Указанная аппроксимация является достаточно полезной при нахождении распределения вероятностей числа заявок в ИПВ приближенными методами, такими как метод имитационного моделирования, метод асимптотического анализа, а также численными методами решения исходных систем уравнений Колмогорова для распределения вероятностей в марковских моделях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Применяя формулу Сильвестра (7) для матричной экспоненты e^{-Ax}, можно записать

$$\int\limits_0^\infty h'(x)e^{-Ax}dx = \int\limits_0^\infty h'(x)\sum_{k=1}^N e^{-\alpha_k x}\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i}dx =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int\limits_0^\infty h'(x)e^{-\alpha_k x}dx \prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left\{ e^{-\alpha_k x}\, h(x)|_{x=0}^\infty - \int\limits_0^\infty h(x)de^{-\alpha_k x}\right\}\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left\{ -h(0) + \int\limits_0^\infty h(x)e^{-\alpha_k x}\alpha_k dx\right\}\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i} =$$

$$= -h(0)\sum_{k=1}^N\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i} + \int\limits_0^\infty h(x)\sum_{k=1}^N e^{-\alpha_k x}\alpha_k\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i}dx.$$

Здесь, в силу формулы Сильвестра (7) выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^N\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i} = I, \quad \sum_{k=1}^N e^{-\alpha_k x}\alpha_k\prod_{i\neq k}\frac{A-\alpha_i I}{\alpha_k-\alpha_i} = e^{-Ax}A,$$

так как в первом случае $f(\alpha) = 1$, а во втором $f(\alpha) = e^{-\alpha x}\alpha$, поэтому можно записать равенство

$$\int\limits_0^\infty h'(x)e^{-Ax}dx = -h(0) + \int\limits_0^\infty h(x)e^{-Ax}Adx = -\,h(0) + H^*(A)\ A,$$

которое доказывает лемму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
2. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М.: КомКнига, 2005.
3. *Хинчин А.Я.* Математические методы теории массового обслуживания // Тр. Мат. ин-та им В.А. Стеклова АН СССР. 1955. Т. 49. С. 1–123.
4. *Falin G.I., Artalejo J.R.* A finite source retrial queue // Eur. J. Oper. Res. 1998. No. 108. P. 409–424.
5. *Falin G.I., Artalejo J.R.* Approximations for multiserver queues with balking/retrial discipline, OR Spektrum, 1995. P. 239–244.
6. *Хомичков И.И.* Системы массового обслуживания с повторными вызовами и вероятность потери при сдвоенных соединениях // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 2. С. 36–39.
7. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000.
8. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Сравнение асимптотической и допредельной модели сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа / Математическое моделирование и теория вероятностей. Под ред. И.А. Александрова и др. Томск: Изд-во "Пелент", 1998. С. 233–241.
9. *Назаров А.А., Одышев Ю.Д.* Исследование сети связи с динамическим протоколом "синхронная Алоха" в условиях большой загрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2001. № 1. С. 77–84.
10. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: уч. пос. Томск: НТЛ, 2004.
11. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: уч. пос. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
12. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания: учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 21.05.2011