

УДК 538.94

Явление прерывистой текучести как базовая модель исследования неустойчивостей деформационных процессов

П.В. Макаров, М.О. Еремин

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, 634021, Россия
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, 634050, Россия

Разработана феноменологическая модель прерывистой текучести, в которой макроскопическая скорость пластической деформации определяется кинетикой дислокаций. В модели учтены деструктивные процессы, обусловленные накоплением повреждений сдвигового и объемного характера. В основе модели лежат уравнения механики деформируемого твердого тела и определяющие уравнения релаксационного типа. Нагружаемое упругопластическое тело рассматривается как нелинейная динамическая система, эволюция которой по законам синергетики в существенной мере определяется отрицательными и положительными обратными связями. В развиваемом подходе эти связи реализуются через определяющие уравнения первой группы (релаксационные уравнения) и определяющие уравнения второй группы (кинетические уравнения, задающие скорости накопления деформационных дефектов и повреждений). Отрицательная обратная связь за счет релаксации стабилизирует деформационный процесс к некоторому состоянию локального динамического равновесия. Положительная обратная связь дестабилизирует процесс, приводя систему в критическое состояние. Численный эксперимент выполнен в 2D- и 3D-постановках. Статистический анализ флуктуаций напряжений от среднего тренда показал, что модель упругопластической среды в состоянии прерывистой текучести демонстрирует характерную для нелинейных динамических систем эволюцию через состояния динамического хаоса и самоорганизованной критичности к глобальной катастрофе.

Ключевые слова: нелинейная динамика, численное моделирование, прерывистая текучесть, самоорганизованная критичность, статистика флуктуаций

Jerky flow model as a basis for research in deformation instabilities

P.V. Makarov and M.O. Eremin

Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS, Tomsk, 634021, Russia
National Research Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

A phenomenological jerky flow model was developed in which macroscale plastic strain rates are defined by dislocation kinetics. The model takes into account destructive processes governed by shear and bulk defect accumulation. At the heart of the model lie equations of solid mechanics and relaxation-type constitutive equations. A loaded elastoplastic solid is treated as a nonlinear dynamic system whose evolution, according to synergetic laws, is much contributed by negative and positive feedbacks expressed, respectively, through constitutive equations of the first group (relaxation equations) and constitutive equations of the second group (kinetic equations for strain-induced defect and damage accumulation rates). The negative feedback stabilizes deformation by relaxation, bringing the process to some local dynamic equilibrium. The positive feedback destabilizes deformation, driving the system to a critical state. Numerical experiment was performed in 2D and 3D statements. Statistical analysis of stress fluctuations about the average trend shows that the jerky flow model of an elastoplastic medium demonstrates evolution characteristic of nonlinear dynamic systems: through states of dynamic chaos and self-organized criticality to a global catastrophe.

Keywords: nonlinear dynamics, numerical simulation, jerky flow, self-organized criticality, fluctuation statistics

1. Введение

Впервые идеи о многомасштабности и иерархической природе процессов деформации и разрушения любых твердых тел и прочных сред были обобщены в рамках нового научного направления — физической мезо-

механики материалов в научной школе академика РАН В.Е. Панина [1–4]. Дальнейшее развитие идей физической мезомеханики связано с формированием представлений о нагружаемых прочных средах как многомасштабных, иерархически организованных, нелинейных

динамических системах [5–10]. Эволюция таких динамических систем изучается в рамках междисциплинарной науки — нелинейной динамики. Проникновение ее идей и методологии в различные области знания и человеческой деятельности, от игр и до методов статистического планирования экономических, социальных и исторических альтернатив, также приходится на последние два десятилетия [11–15].

Главной задачей таких исследований является выяснение возможных сценариев эволюционных процессов в зависимости от базовых свойств изучаемых динамических систем и внешних управляющих воздействий. Применительно к твердым телам, материалам и конструкциям одной из важных задач является прогноз их надежного функционирования, включая прогноз разрушения.

В ряду решений этих задач установление наиболее общих закономерностей и особенностей неустойчивости и неоднородности пластического течения, особенно на заключительной стадии предразрушения, становится особенно актуальным. Этим можно объяснить возросший в последнее десятилетие интерес к изучению особенностей прерывистой деформации. На микроуровне — уровне элементарных актов пластической деформации — пластическое течение всегда неоднородно. Однако пространственная и временная микро-неоднородность пластического течения практически не проявляет себя на макроуровне, и мы наблюдаем гладкие кривые течения. Выявляемая при прерывистой текучести макроскопическая неоднородность пластического течения, выраженная в существенных отклонениях напряжений течения от среднего тренда, может быть только результатом скоррелированного поведения многих дислокаций. Последнее означает, что на мезоуровне процесс детерминирован самоорганизацией популяций дислокаций.

Явление прерывистой текучести является важным объектом изучения еще и по той причине, что кооперативные процессы и связанная с ними самоорганизация явно проявляются на макроскопическом уровне деформационных кривых. Изучение статистических характеристик локальных отклонений напряжений пластического течения от среднего тренда позволяет выяснить особенности эволюционных сценариев на различных стадиях деформационного процесса, включая подготовку макроскопической катастрофы: глобальной потери устойчивости при переходе к закритической стадии деформирования и формированию шейки.

Основные задачи настоящего исследования состоят в том, чтобы представить математическую модель для описания неустойчивого прерывистого пластического течения, в том числе вблизи глобальной потери устойчивости, и численно изучить процесс формирования неустойчивостей пластического деформирования и его

эволюцию по мере приближения к глобальной катастрофе.

Как известно, явление прерывистой деформации можно разделить на два типа: 1) эффект Портевена–Ле Шателье, наблюдаемый в условиях испытания образцов на жесткой машине при постоянной скорости деформирования $\dot{\epsilon} = \text{const}$; 2) эффект Савара–Массона при деформировании на мягкой машине при постоянной скорости нагружения $\dot{\sigma} = \text{const}$. В настоящей работе большинство результатов получено при моделировании нагружения при $\dot{\epsilon} = \text{const}$. В этих условиях нагружения материал проявляет неустойчивости следующего вида: 1) в виде зуба текучести как переход из состояния преимущественно упругого деформирования к новому состоянию развивающейся пластичности; 2) собственно прерывистая текучесть как процесс локальной потери устойчивости на масштабах мезоскопического уровня; 3) макроскопическая глобальная потеря устойчивости деформационного процесса при образовании шейки и/или формировании магистральных трещин. Все эти виды неустойчивостей деформационного процесса отражены в результатах настоящей работы.

Обычно эффект Портевена–Ле Шателье наблюдается в ряде разбавленных сплавов внедрения и замещения (сплавов алюминия, меди, мягких сталях), некоторых металлических композитах [16, 17], причем для каждого материала эффект проявляется в определенной температурно-скоростной области [18, 19]. Этим температурно-скоростным областям проявления эффекта Портевена–Ле Шателье отвечают обратная скоростная и аномальная температурная зависимости напряжений течения, т.е. с ростом скорости деформирования напряжение течения не увеличивается, а уменьшается, а с повышением температуры напряжения течения остаются либо независимыми от ее увеличения, либо также повышаются. Таким образом, эффект Портевена–Ле Шателье есть неустойчивость S-типа, сопровождаемая обратной скоростной чувствительностью напряжений течения [18–20]. Такова общепринятая точка зрения. Микроскопическая модель эффекта была предложена А. Котреллом [21], впоследствии уточнена в работах [22, 23], а описываемый этой моделью процесс получил название динамического деформационного старения. На мезоуровне прерывистая текучесть сопровождается локализацией деформации в полосах, отвечающих зубцам различного типа (А, В, С). Такие полосы локализованной деформации могут как оставаться стационарными, так и распространяться по образцу. Часто по типу зубцов называют и характерные для них полосы локализованной деформации. Весьма условно можно считать, что полосы типа А — это полосы, зарождающиеся обычно у захватов или других концентраторов напряжений в образце и непрерывно распространяющиеся по образцу. Полосы типа В зарождаются эстафетно,

каждая последующая полоса зарождается вблизи предыдущей. Считается, что для полос типа С характерен процесс их хаотичного зарождения по всей длине образца [18, 19]. В целом при прерывистой текучести часто наблюдаются полосы всех типов, достаточно хорошо изучены закономерности в смене типа полос (зубцов) по мере развития прерывистой текучести [18, 19]. Подробные обзоры и исследования по этой тематике можно найти в работах [18, 19, 24, 25]. В целом в 70-х годах полагалось, что микроскопические механизмы эффекта прерывистой текучести в основном установлены, а все сложности и многообразие его макроскопических проявлений объяснялись случайными кумулятивными эффектами в дислокационной структуре на уровне некоррелированных элементарных актов в системе дислокаций. Позднее в 80–90 гг. прошлого столетия по мере проникновения идей нелинейной динамики в физику пластичности пришло понимание, что эффекты прерывистой текучести могут быть поняты и объяснены только с учетом процессов пространственно-временной корреляции множества элементарных дислокационных актов. Ответ на ключевой вопрос, случайна или детерминирована скачкообразная деформация, изменился кардинально. Стало понятно, что процессы самоорганизации в дислокационной подсистеме нагружаемых материалов при прерывистой текучести играют главную роль, а ведущими масштабами становятся масштабы мезоуровня. Сама природа дала в руки исследователей объект, на котором можно изучать такие важные свойства нелинейных динамических систем как самоорганизация, динамический хаос, переходы от динамического хаоса к самоорганизованной критичности, или, как еще называют самоорганизованную критичность, к слабому хаосу. В экспериментах было обнаружено, что полосы типа С отвечают состоянию динамического хаоса в нагружаемом образце как динамической системы, а полосы типа В — состоянию самоорганизованной критичности, четко прослеживается эволюция «динамический хаос → самоорганизованная критичность → глобальное разрушение» [19, 26].

Всем этим особым состояниям нагружаемого материала как нелинейной динамической системы присущи характерные для них статистики распределений флуктуаций напряжений от среднего тренда. Случайному распределению или белому шуму отвечает гауссово распределение, динамическому хаосу и самоорганизованной критичности — так называемые распределения с тяжелыми хвостами [19, 26, 27]. Состоянию динамического хаоса отвечают колоколообразные распределения типа пуассоновского, а самоорганизованной критичности — степенные распределения. По этой причине одним из главных инструментов изучения особенностей эволюционного процесса стало изучение статистик распределений флуктуирующих параметров [19, 26–31]. Синхронные измерения при деформировании

(в том числе для гладких кривых течения) и при разрушении различных образцов акустической эмиссии, электромагнитной эмиссии, тепловых структур [18, 19, 26, 32] и изучение статистических свойств этих сопутствующих деформационному процессу и разрушению сигналов позволяют понять, на каком этапе и как функционируют и самоорганизуются элементарные акты микро- и мезоструктурных масштабов, как изменяется глобальный характер эволюции системы в целом. Особый интерес представляет изучение переходных процессов, отвечающих изменениям эволюционного сценария, например переход системы от состояния динамического хаоса к самоорганизованной критичности [19, 26].

Одной из главных проблем является решение задачи о механизмах подготовки в системе глобальной катастрофы. В этом контексте необходимо дать ответ на вопрос, как скоррелированные микроструктурные изменения, сопровождающие формирование очага макро-разрушения, отражаются в статистике измеряемых сигналов, в том числе в особенностях флуктуаций напряжений при прерывистой текучести.

Фактически ставится следующий вопрос. Существуют ли предвестники катастрофического разрушения? И если существуют, то какие и можно ли их надежно выявить? В контексте задачи изучения особенностей прерывистой текучести этот вопрос можно сформулировать следующим образом. Как изменяется статистика флуктуаций напряжений вблизи глобальной потери устойчивости нагружаемого образца при прерывистой текучести? Какие предвестники (если они есть) сигнализируют о наступлении закритической стадии деформирования?

Уже сейчас можно с уверенностью говорить, что нагружаемый материал на этапе предразрушения эволюционирует к состоянию самоорганизованной критичности, о котором подробнее будет сказано ниже. В этом состоянии в динамической системе возможны лавины (т.е. катастрофы) любого масштаба, причем даже незначительное внешнее воздействие способно привести к глобальной катастрофе (так называемые триггерные воздействия). Это породило скепсис по отношению к возможностям прогноза для систем с самоорганизованной критичностью. Однако, как уже нами отмечалось ранее [9, 33], в подобных нелинейных системах развиваются и другие процессы, в них, например, формируются долгоживущие кластеры как результат процессов корреляции и самоорганизации [34]. Эволюция таких кластерных структур вблизи глобальной катастрофы может быть предвестником ее наступления. Процесс формирования крупномасштабного очага разрушения — это долговременный процесс, которому отвечает продолжительная квазистационарная стадия накопления повреждений (трещин) разных масштабов в локализованной области будущего макроскопического разру-

шения. Переход эволюции системы (разрушения в данном случае) от сравнительно медленной квазистационарной стадии к сверхбыстрому катастрофическому режиму (режиму с обострением [35]) должен как-то отразиться в статистике флуктуирующих параметров, и мы предполагаем, что предвестники катастрофического разрушения должны существовать. В явлении прерывистой текучести просматривается глубокая аналогия с сейсмическими процессами, для которых подобные предвестники выявлены. Так, явление асейсмического крипа по разломам, природа которого не вполне ясна, обычно сопровождается так называемым эпизодическим тремором. Эти вибрации считают случайными [36], их источниками полагают мелкие трещины, образующиеся в процессе асейсмического крипа крупного блока по разлому. Явление эпизодического тремора во многом схоже с тремором напряжений при прерывистой текучести. Скорее всего, этот процесс не случаен, являясь частным случаем многомасштабного процесса разрушения, он должен демонстрировать характерные корреляционные характеристики, наблюдаемые при формировании магистральных трещин. В этом контексте уместно привести слова С.В. Гольдина, высказанные им в частной беседе по поводу перспектив прогноза землетрясений. Речь шла о том, что установлено огромное количество различных предвестников землетрясений, есть множество наблюдений за сейсмическим процессом, а надежных и достаточно общих методик прогноза нет. Сергей Васильевич сказал следующее: «В шахматах всего шесть фигур и несколько правил, а сколько партий можно разыграть. В земной коре в каждом конкретном случае также разыгрывается своя партия».

В случае анализа флуктуаций при прерывистой текучести или разрушения образцов ситуация более оптимистичная, чем поиск предвестников при землетрясениях. В последнем случае предвестники являются косвенными признаками разрушения и несут информацию о сопутствующих разрушению геосреды явлениях: уровне грунтовых вод, который сильно зависит еще и от метеорологических условий, содержания в водах различных примесей, например радона или хлора, электропроводности и т.д. В случае прерывистой текучести или изучения стадии предразрушения мы анализируем флуктуации напряжений, непосредственно связанных как с процессами макроскопического неоднородного деформирования и соответствующими релаксационными явлениями на микроуровне, так и с особенностями подготовки очага макроскопического катастрофического разрушения.

2. Свойство самоорганизованной критичности динамических систем

Хорошо известно, что открытые нелинейные динамические системы под внешними воздействиями способны к самоорганизации. При этом динамические сис-

темы находятся вдали от состояния термодинамического равновесия, а их самоорганизация обеспечивается дальнедействующими корреляциями между элементарными носителями возмущений [37–39]. Динамическое состояние системы при этом обеспечивается колебаниями ее параметров около определенного, поддерживаемого самой системой среднего значения. В классических примерах эффектов Белоусова–Жаботинского при химических реакциях, образования ячеек Бенара в подогреваемом слое вязкой жидкости и других подобных случаях колебания параметров и образование динамических структур являются периодическими или квазипериодическими процессами. Оказалось, что для очень многих нелинейных многомасштабных, иерархически организованных динамических систем, обладающих большим числом возможных энергетических состояний, подобные колебания параметров могут носить нерегулярный хаотический порядок. В этих случаях средние значения колеблющихся параметров обеспечиваются образованием лавин разных масштабов, причем в таких нелинейных динамических системах «возможны лавины любых масштабов» [40]. При таком состоянии системы в ней не существует статистически независимых масштабов, а значит, нет характерного масштаба процесса. Одной из наиболее популярных физических моделей подобных динамических систем стала модель кучи песка, средний угол наклона которой поддерживается сходом лавин разных масштабов, начиная от минимального (единичные песчинки) до максимально возможного для данного изучаемого объекта, причем масштаб лавин не зависит от величины внешнего воздействия и флуктуаций [34, 40]. Любое, даже незначительное воздействие может вызвать лавину максимального масштаба, т.е. спровоцировать катастрофу. Важнейшим свойством подобных динамических систем является то, что собственное критическое состояние поддерживается самой системой «хаотическим», макроскопически скоррелированным движением. Нет необходимости извне подстраивать какие-либо ее параметры.

В 1987 г. авторы [28] установили, что распределение лавин по размерам подчиняется степенному закону ($P \sim L^{-n}$, где P — плотность вероятности возникновения лавины масштаба L ; n — число порядка единицы). Подобные нелинейные динамические системы, способные самостоятельно поддерживать собственное критическое состояние за счет процессов, развивающихся во всей иерархии масштабов, были названы системами, обладающими свойствами самоорганизованной критичности [28, 29].

Таким образом, свойство самоорганизованной критичности связано с пространственной фрактальной организацией динамической системы, проявляет масштабную инвариантность или скейлинг, в ходе которого изменения параметров системы обладают характерными корреляционными функциями и соответствующим

спектром лавин. Указанные особенности во многом определяются параметрами взаимодействия дискретных элементов динамической системы [29, 30, 41].

Свойство самоорганизованной критичности и соответствующие степенные законы распределения являются фундаментальным свойством эволюции большинства многомасштабных, иерархически организованных динамических систем. Такими системами являются биологические, экономические и социальные системы, различные природные и физические объекты, в том числе нагружаемые материалы, горные массивы и геосреды. Статистика природных катастроф (землетрясений, ураганов, наводнений), техногенных аварий (разрушений различных конструкций, взрывов на производствах), а также многие другие бедствия (обвалы на биржах, утечки информации и т.д.) подчиняются, как правило, степенным законам распределения [27, 40].

Поскольку эти системы в силу своих внутренних свойств стремятся к критическому состоянию, изучение особенностей самоорганизованной критичности необходимо как для разработки методов прогноза и защиты от возможных катастроф, так и для создания соответствующих управляющих воздействий на систему с целью минимизации рисков и снижения возможных ущербов. Таким образом, несмотря на бесконечное разнообразие возможных эволюционных сценариев реальных природных и физических систем, можно считать достоверно установленным, что в процессе эволюции большинство нелинейных динамических систем приходят в состояние самоорганизованной критичности, которое характеризуется следующими общими для них свойствами [9, 27–29, 40]: 1) нелинейностью, выраженной, в том числе, в характере положительных и отрицательных обратных связей, а также в пороговой динамике кинетических процессов, развивающихся во всей иерархии масштабов динамической системы; 2) неравновесностью и гетерогенностью динамической системы; 3) наличием в динамической системе большого числа возможных энергетических и метастабильных состояний; 4) пространственно-временным самоподобием процессов, развивающихся на разных масштабах динамической системы; 5) фрактальностью пространственно-временных структур, отраженной во фликер-шумовой структуре частотного спектра, что свидетельствует о дискретном характере процессов переноса и пространственно-временном самоподобии эволюционного процесса; 6) дальнедействующими корреляциями между структурными элементами и процессами во всей иерархии масштабов, которые и определяют макроскопическую глобальную динамику системы; 7) отсутствием характерного масштаба (или его потерей в ходе эволюционного процесса по мере приближения динамических систем к состоянию самоорганизованной критичности), а также отсутствием статистически независимых масштабов; 8) наличием в системе медленной

динамики, т.е. динамических скоррелированных процессов, существенно более медленных, чем информационный обмен в динамической системе; это означает, что скорости внешних управляющих динамической системой воздействий должны быть существенно меньшими, чем скорости внутренних обменных и релаксационных процессов.

Авторы концепции самоорганизованной критичности [28] также предложили теоретическую модель, основанную на нелинейных уравнениях типа уравнений Лоренца, открывших эру динамического хаоса [14]. В последующие полтора-два десятилетия после открытия явления самоорганизованной критичности было предложено множество различных моделей, имитирующих различные природные и физические процессы и проявляющие в том числе свойства самоорганизованной критичности. Большинство экспериментальных данных по самоорганизованной критичности в этот период было получено на искусственных объектах: при исследовании динамики роста кучи песка, движения наждачной бумаги по нейлоновому покрытию и др. [30]. Это был период исследований общих свойств решений базовых уравнений синергетики (нелинейной динамики), когда многие исследователи полагали, что эволюцию различных нелинейных динамических систем можно описать этими базовыми уравнениями. Решения этих уравнений открыли безграничное разнообразие мира нелинейных систем и позволили понять наиболее общие закономерности различных эволюционных процессов при бесконечном разнообразии конкретных эволюционных сценариев конкретных природных, физических и иных динамических систем. Однако нелинейная наука, оперирующая по большей части базовыми уравнениями, оказалась практически бессильной при попытках решения важных прикладных задач эволюции реальных динамических систем, включая прогноз различных критических ситуаций.

Действительно, любые имитационные модели, в том числе и базовые уравнения нелинейной динамики, не являясь моделями реальных процессов в смысле их физической обоснованности и строгости, могут в лучшем случае только симитировать какие-либо характерные черты реального процесса, уже известные нам из экспериментов, и не способны воспроизвести реальный сценарий эволюции изучаемой динамической системы. Видимо, и по этой причине в научной литературе высказываются мнения, что существующие теории самоорганизованной критичности, в том числе и в том виде, как ее определили основатели этой парадигмы [28], не вполне соответствуют как наблюдаемым явлениям, так и современным физическим экспериментам [30, 41, 42].

Все современные методы прогноза эволюции реальных объектов основаны на методах физического моделирования и мониторинга реальных процессов. Здесь методы нелинейной динамики очень эффективны как

методы анализа данных физического эксперимента и мониторинга. Появилось много работ, в которых данные экспериментов по изучению деформации, в том числе прерывистой текучести и разрушения, анализируются методами нелинейной динамики [19, 26, 30–32]. В последние годы также стали появляться работы, в которых анализируются особенности эволюционных процессов реальных объектов на основе изученных особенностей численных решений уравнений математической физики, являющихся физически обоснованными моделями этих процессов (уравнений газовой динамики, механики деформируемого твердого тела, физики плазмы и др.) [9, 43–48].

Нами было показано, что численные решения уравнений механики деформируемого твердого тела демонстрируют все особенности эволюционных процессов, включая самоорганизацию, самоорганизованную критичность, катастрофические стадии эволюции и т.д., известные как из наблюдений эволюционных процессов реальных динамических систем, так и из решений базовых уравнений нелинейной динамики. Причем численные решения уравнений механики деформируемого твердого тела демонстрируют эти фундаментальные свойства нелинейных динамических систем, если задача деформирования и/или разрушения сформулирована как задача эволюции нагружаемого твердого тела, т.е. записаны положительные и отрицательные обратные связи, регулирующие деформационный процесс, а сама нагружаемая среда рассматривается как многомасштабная динамическая система [8, 9, 48–50].

К сожалению, пока не представляется возможным проанализировать общие свойства решений фундаментальных уравнений математической физики. Мы можем анализировать только результаты конкретного численного эксперимента, однако эти уравнения являются строгими в физическом смысле моделями изучаемых процессов. Уравнения механики деформируемого твердого тела вместе с определяющими уравнениями (уравнениями состояния) позволяют на строгом физическом уровне решать различные задачи прикладного характера. Конечно, реальные среды (металлы, горные породы и геосреды и т.д.) устроены неизмеримо сложнее по сравнению с возможностями соответствующих определяющих уравнений, и мы не можем учесть в моделях многие, возможно важные, детали, но выяснить не только качественные, но также и количественные эволюционные характеристики реальных деформационных процессов на основе анализа численных решений уравнений механики деформируемого твердого тела — вполне реальная задача. Такая возможность появилась, когда стало понятно, что фундаментальные уравнения математической физики, в том числе и уравнения механики деформируемого твердого тела, не только являются обоснованными моделями реальных процессов,

но и являются базовыми уравнениями математической теории эволюции этих физических систем [8, 9], демонстрируя в своих решениях все характерные особенности эволюционных процессов, открытых нелинейной динамикой.

3. Модель эволюции напряженно-деформированного состояния при однородном и прерывистом пластическом течении

После открытия явления прерывистой текучести на протяжении более полувека были детально изучены виды и условия возникновения различных проявлений неустойчивостей пластического течения. На основе этих исследований были предложены как микроскопические, так и феноменологические модели эффекта Портевена–Ле-Шателье. Достаточно полно история этого вопроса и соответствующие обзоры даны в [18, 19, 24, 25].

Центральными были идеи о том, что эффект Портевена–Ле-Шателье является результатом неустойчивости S-типа и отрицательной скоростной чувствительности напряжения течения как проявление такого типа неустойчивости. В основе большинства как микроскопических, так и предложенных на их основе феноменологических моделей лежала модель Котрелла [21], согласно которой облака примесных атомов оказывают тормозящее воздействие на движущиеся дислокации до тех пор, пока их скорости не превысят некоторого критического значения. Отрыв дислокаций от примесных атомов приводит к уменьшению напряжения течения. Этот эффект динамического деформационного старения в той или иной форме лег в основу подавляющего большинства микроскопических и феноменологических моделей. Эта же идея легла в основу первоначальной теории зуба текучести.

Согласно этим представлениям феноменологическая модель изменения напряжения течения $d\sigma$ должна учитывать как деформационное упрочнение, так и изменения напряжения, обусловленные скоростью деформирования, температурой и в общем случае нелокальностью процесса деформирования, что приводит к уравнению вида [18, 19]:

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\dot{\epsilon}, T} d\epsilon + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right)_{\epsilon, T} d \ln \dot{\epsilon} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\epsilon, \dot{\epsilon}} dT, \quad (1)$$

где σ — напряжение пластического течения; ϵ — деформация; $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации; T — температура.

Понятно, что частные производные в (1) также зависят от микроструктуры и эти зависимости должны отражать конкретные микромеханизмы деформирования. В целом было достигнуто понимание, что подобный подход, строго говоря, относится к изолированным частицам, которые не взаимодействуют между собой, а значит, в лучшем случае подобная модель может описать только временную неустойчивость в изолированной

частице и не может воспроизвести пространственную картину и эволюционный процесс в целом.

Заметим также, что феноменологическое влияние скорости деформирования и температуры эквивалентны в том смысле, что как локальные увеличения температуры, так и различные иные механизмы, при дислокационном скольжении приводящие к повышению плотности и/или скорости дислокаций, будут в конечном счете причиной изменений напряжений течения вследствие повышения скорости пластической деформации.

Следующий шаг в построении феноменологических моделей эффекта Портевена–Ле-Шателье был направлен на введение в теорию нелокальных моделей. Так как пространственная неоднородность деформирования проявляется через образование полос локализованной деформации, их движение и взаимодействие, а сама пространственная связь обусловлена упругими напряжениями, то к напряжению течения стали добавлять диффузионный член, содержащий вторые производные деформации [19]. Например, в случае одноосного растяжения вдоль оси Ox напряжение течения предлагалось записывать в следующем виде:

$$\sigma = h\varepsilon + F(\dot{\varepsilon}) + k\varepsilon_{xx}, \quad (2)$$

где h — коэффициент деформационного упрочнения; k — коэффициент нелокальности; ε_{xx} — вторая производная деформации.

Учет нелокальности на уровне определяющих соотношений — важный шаг, но любое определяющее уравнение только связывает между собой напряжения, деформации и другие параметры в изолированных и не взаимодействующих частицах. По этой причине деформационный процесс и тем более пространственно-временное распределение и перераспределение деформационных параметров в нагружаемом образце не могут быть в принципе описаны без интегрирования по пространству и времени всей системы уравнений, описывающих деформационный процесс во всем образце. В связи со сказанным, попытки многих исследователей проанализировать деформационный процесс, в том числе явление прерывистой текучести, только на базе анализа решений разнообразных моделей, являющихся, по сути, уравнениями состояния, имеют ограничения принципиального характера и могут выступать только как тесты для выяснения роли различных механизмов. Для решения этой проблемы необходимо решать систему уравнений механики деформируемого твердого тела, наиболее полно описывающую деформационный процесс в образце как нелинейной системе с учетом упругих взаимодействий частиц материала. В качестве определяющих могут быть использованы различные феноменологические уравнения, интегрально учитывающие определенные эффекты микроскопического и мезоскопического масштабов, в том числе и многие из уже разработанных.

Ранее авторами отмечалось [8, 9, 47], что именно система уравнений механики деформируемого твердого тела совместно с соответствующими уравнениями состояния является наиболее полной динамической теорией пластичности и позволяет описывать пространственно-временную эволюцию нагружаемого упругопластического тела. Данная система включает в себя определяющие уравнения первой группы, связывающие между собой макроскопические параметры (напряжения, деформации, скорости деформаций, температуру и т.д.), определяющие уравнения второй группы — кинетические уравнения, описывающие изменения макропараметров в зависимости от процессов микро- и мезоуровней. Эта система уравнений также должна включать положительные и отрицательные обратные связи между макропараметрами, дестабилизирующие и стабилизирующие соответственно деформационный процесс [8, 47]. Только в этом случае нагружаемое твердое тело будет рассмотрено как нелинейная динамическая система, а полученные решения опишут конкретный эволюционный сценарий в зависимости от параметров системы и заданных условий нагружения.

Так как пластическое течение — процесс сугубо релаксационный, то определяющие уравнения необходимо записывать в релаксационной форме [48, 51, 52], за исключением тех случаев, когда известно состояние, к которому система должна прийти, например приведение напряжений к известному значению напряжения на круге текучести Мизеса. В этом случае процедура снесения напряжений на круг текучести эквивалентна мгновенной релаксации напряжений до заданного значения.

Хотелось бы также отметить, что несмотря на общее понимание того, что пластическое течение — процесс релаксационный, этот факт не находит должного отражения во многих предлагаемых моделях, в частности кратко обсужденных выше, основанных на уравнениях вида (1) и (2). Развиваемые модельные представления фактически игнорируют релаксацию как процесс, управляющий балансом силовых воздействий и возможной реакцией нагружаемого материала.

Таким образом, полная система уравнений, описывающая эволюцию напряженно-деформированного состояния нагружаемого упругопластического тела, включает систему уравнений в частных производных механики деформируемого твердого тела, выражающих:

1) фундаментальные законы сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

количества движения

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + \rho F_i, \quad (3)$$

энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt},$$

2) эволюционные уравнения первой группы, записанные в релаксационной форме (4):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \lambda(\dot{\theta}^t - \dot{\theta}^p) \delta_{ij} + 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij}^t - \dot{\epsilon}_{ij}^p), \\ \sigma_{ij} &= -P\delta_{ij} + S_{ij}, \\ \dot{P} &= -K \frac{\dot{V}}{V}, \\ \frac{D S_{ij}}{Dt} &= 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\theta} \delta_{ij} \right), \\ \frac{D S_{ij}}{Dt} &= \dot{S}_{ij} - S_{ik} \dot{\omega}_{jk} - S_{jk} \dot{\omega}_{ik}, \\ \dot{\epsilon}_{ij}^t &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right), \\ \dot{\omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где D/Dt — коротационная производная Яуманна, учитывающая поворот элементов среды при деформировании.

В релаксационном уравнении (первое уравнение в (4)) приращения напряжений $\Delta\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \Delta t$ пропорциональны приращениям полных скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^t$, а релаксируют напряжения пропорционально развитию неупругой составляющей скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ до некоторого состояния динамического равновесия, определяемого как релаксацией, в соответствии с возможностями среды генерировать деформационные дефекты, так и балансом между процессами деформационного упрочнения и деградацией прочностных и упругих параметров среды по мере нарастания деструктивных процессов. При $\dot{\epsilon}_{ij}^p > \dot{\epsilon}_{ij}^t$ в (4), $\Delta\sigma_{ij} < 0$, идет релаксация, реализуется отрицательная обратная связь, стабилизирующая деформационный процесс в состоянии динамического равновесия [8, 48, 51]. При $\dot{\epsilon}_{ij}^p < \dot{\epsilon}_{ij}^t$, $\Delta\sigma_{ij} > 0$, напряжения растут, в этом случае непосредственно реализуется положительная обратная связь, т.к. с ростом напряжений усиливаются деструктивные процессы, приводящие в конечном итоге к катастрофе — макроскопическому разрушению. На определенном этапе деформирования плотность дефектов становится близкой к предельной. Процесс деформационного упрочнения выходит на насыщение, нарастает локализация и усиливаются процессы деградации прочности. Определяющую роль в переходе эволюции прочности среды в сверхбыстрый катастрофический режим будут играть особенности накопления средой локализованных повреждений и соответствующая деградация физико-механических параметров, о чем будет сказано далее:

Разрушение материала в развиваемом подходе описано как процесс обвальной деградации прочности ма-

териала до нуля при формировании трещин на сверхбыстрой катастрофической стадии эволюции напряженно-деформированного состояния. Однако на этапе предразрушения среда остается консолидированной при $Y \rightarrow 0$. Функцию деградации среды (поврежденность) $D = D(t, \mu_\sigma, \epsilon) \leq 1$ представим в виде зависимости от накапливаемой средой неупругой деформации $\epsilon_{\text{тек}}$ и вида напряженного состояния μ_σ (коэффициента Лоде–Надаи):

$$\begin{aligned} D &= \\ &= \int_{t_0}^t \frac{[H(\mu_\sigma)(\epsilon_{\text{тек}} - \epsilon_0^c)^2 + (1 - H(\mu_\sigma))(\epsilon_{\text{тек}} - \epsilon_0^t)^2] dt}{\epsilon_*^2 [H(\mu_\sigma) t_*^c + (1 - H(\mu_\sigma)) t_*^t]}, \quad (5) \\ \epsilon_* &= \epsilon_{0*} (1.01 + \mu_\sigma)^2, \\ \mu_\sigma &= 2 \frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} - 1. \end{aligned}$$

Здесь $H(x)$ — функция Хевисайда; $\epsilon_{\text{тек}} = \epsilon_{\text{инт}} + \theta$, $\epsilon_{\text{инт}}$ — интенсивность тензора полных деформаций; θ — объемная деформация; $\epsilon_0^c, \epsilon_0^t$ — начальные степени деформации на упругой стадии, по достижении которых в материале начинается накопление повреждений в областях сжатия и растяжения соответственно; S_1, S_2, S_3 — главные значения девиатора тензора напряжений; t_* имеет смысл характерного времени процесса накопления повреждений; ϵ_{0*} — параметр модели. Причем скорости накопления повреждений, определяемые множителем $1/t_*^t$, для локальных областей сдвига-растяжения, где $\mu_\sigma < 0$, существенно выше, чем в областях сжатия-сдвига ($\mu_\sigma > 0$). Этот процесс дополнительно регулируется параметром $\epsilon_* = \epsilon_*(\mu_\sigma)$ в (5). Таким образом, отклик среды на вид напряженного состояния (ее текущая прочность) формируется в среде в процессе ее нагружения. Следовательно, прочностные параметры будут деградировать существенно быстрее в тех областях среды, где коэффициент Лоде–Надаи $\mu_\sigma < 0$, т.е. преимущественный характер напряженно-деформированного состояния определялся областями растягивающих напряжений.

Полагаем, что в силу неупорядоченной ориентации множества зерен, процесс релаксации изотропен и каждая компонента тензора напряжений в (4) релаксирует сходным образом, пропорционально релаксации динамического предела текучести Y'_0 , который совпадает с мгновенным значением интенсивности напряжений σ_i . В этом случае релаксационное уравнение (4) можно записать через интенсивность напряжений в виде:

$$\dot{\sigma}_i = 3G(\dot{\epsilon}_i^t - \dot{\epsilon}_i^p), \quad (6)$$

где G — модуль сдвига; $\dot{\epsilon}_i^t$ — интенсивность полных скоростей деформаций; $\dot{\epsilon}_i^p$ — интенсивность пластической составляющей. Релаксационный процесс организован следующим образом. Из закона Гука находится приращение интенсивности текущих напряжений, которое пропорционально приращению интенсивности пол-

ных деформаций. Если эти напряжения превысили статический предел текучести, определяемый по формуле $Y'_0 = Y_0 + \Delta Y(\epsilon^P)$, где $\Delta Y(\epsilon^P)$ — приращение статического предела текучести за счет деформационного упрочнения, то выполняется процедура релаксации по формуле (6). Затем все значения текущих напряжений нормируются по величине отрелаксированной интенсивности напряжений:

$$\sigma_{ij}^{\text{рел}} = \sigma_{ij}^{\text{тек}} \frac{\sigma_i^{\text{рел}}}{\sigma_i^{\text{тек}}}. \quad (7)$$

Таким образом, в каждой частице среды, на каждом этапе деформирования, устанавливается индивидуальное значение динамического напряжения течения. Это динамически равновесное напряжение течения превышает статический предел текучести в соответствии со скоростью чувствительностью материала, определяемой текущим состоянием микроструктуры. Скорость интенсивности пластических деформаций определяется из уравнения Орована $\dot{\epsilon}_i^P = gb\rho(\epsilon^P)f(\epsilon^P)v(Y)$, где g — ориентационный множитель; b — модуль вектора Бюргерса; $\rho(\epsilon^P)f(\epsilon^P)$ — плотность подвижных дислокаций; $v(Y)$ — скорость подвижных дислокаций.

Кинетика накопления деформационных дефектов задана следующими уравнениями. Плотность дислокаций ρ определяется в соответствии с кинетикой, изложенной в работах [51–53]:

$$\rho(\epsilon^P) = \rho^* + (\rho^0 - \rho^*)e^{-A\epsilon^P/(gb)}, \quad (8)$$

где ρ^0, ρ^* — начальная и предельная плотность дислокаций соответственно; A — параметр, определяемый расстоянием, проходимым дислокацией между последовательными актами размножения; ϵ^P — накопленная пластическая деформация. Доля подвижных дислокаций уменьшается с ростом пластической деформации и определяется выражением [51, 52]

$$f(\epsilon^P) = f^* + (f^0 - f^*)e^{-B\epsilon^P/(gb)}, \quad (9)$$

где f^0, f^* — начальная и предельная доли подвижных дислокаций соответственно; B — параметр, определяемый расстоянием, проходимым дислокацией до ее закрепления.

Скорость дислокаций определяется следующим образом:

$$v(Y) = v_0 \frac{ST^2}{1+ST^2}, \quad ST = \frac{Y - Y_0 - Y_{bs}}{\beta}, \quad (10)$$

где v_0 — предельная скорость дислокаций, равная сдвиговой скорости звука; Y — интенсивность касательных напряжений; Y_0 — начальный предел текучести; β — коэффициент дислокационного торможения; Y_{bs} — напряжение, определяющее деформационное упрочнение:

$$Y_{bs} = \alpha bG\sqrt{\rho(\epsilon^P)}, \quad (11)$$

где α — коэффициент междислокационного взаимодействия.

В расчетах соответствующие коэффициенты дислокационной кинетики подбирались по данным экспериментов по растяжению образцов изучаемых материалов и в соответствии с реальными значениями дислокационных параметров [51, 52].

На рис. 1 приведены расчеты σ – ϵ -диаграмм для мягкой стали для различных скоростей деформирования в сравнении с данными экспериментов работы [54], выполненные по приведенной модели (без учета повреждаемости). Параметры дислокационной кинетики подбирались таким образом, чтобы не только расчеты совпадали с экспериментами, но и расчетные плотности дислокаций и другие дислокационные параметры соответствовали наблюдаемым [52].

Величина и форма зуба текучести в модели полностью определяются балансом скоростей деформирования: полной локальной скоростью деформирования $\dot{\epsilon}^t = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^P$, определяемой скоростью растяжения и упругими взаимодействиями частиц. Скорость релаксации на начальном участке диаграммы определяется как начальной плотностью дефектов, так и возможностями среды накапливать деформационные дефекты и формировать локальные значения скоростей пластического течения $\dot{\epsilon}^P$. Процесс релаксации начинается сразу при достижении напряжениями величин статического предела текучести Y'_0 при $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ (на рис. 1 показан пунктиром).

Когда накопленных в процессе деформирования дислокаций еще не достаточно для быстрой релаксации, средние напряжения продолжают расти согласно релаксационному уравнению (4). По мере накопления деформационных дефектов растет неупругая составляющая полной скорости деформации $\dot{\epsilon}^P$, увеличивая скорость релаксации, что ведет к снижению напряжения пластического течения. Кривая течения все больше отклоняется

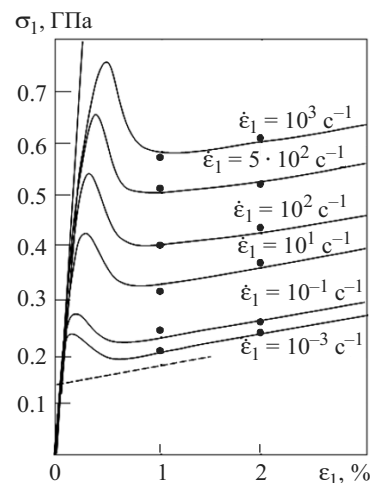


Рис. 1. Расчетная σ – ϵ -диаграмма мягкой стали в сравнении с экспериментами (•) работы [54] при следующих параметрах дислокационной модели: $\rho_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$, $\alpha = 10^{11} \text{ см}^{-2}$, $b = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, $v_0 = 3.25 \cdot 10^5 \text{ см/с}$

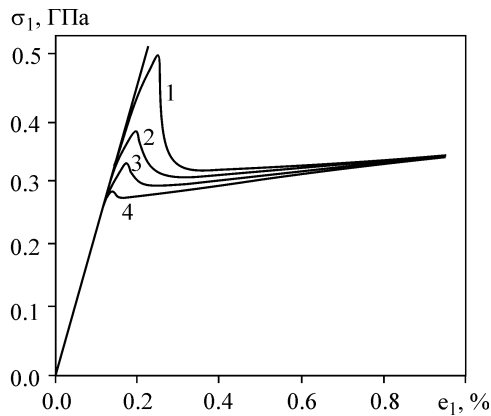


Рис. 2. Зависимость зуба текучести от начальной плотности дислокаций $\rho_0 = 10^6$ (1), 10^7 (2), 10^8 (3), 10^{10} см^{-2} (4)

няется от прямой, отвечающей упругому нагружению, достигает максимального значения и снижается до равновесного значения. Таким образом, релаксационная модель обеспечивает динамическое равновесие между прилагаемой скоростью деформирования и реакцией материала, определяемой эволюцией его микроструктуры. В нагружаемой среде на каждом этапе деформационного процесса вырабатывается некоторое равновесное динамическое напряжение течения.

На рис. 2 показано влияние начальной плотности дефектов на скорость релаксации на начальном этапе нагружения и как результата на величину зуба текучести. В этих расчетах был использован упрощенный линейный вариант для функции роста плотности дефектов:

$$\rho \approx \rho_0 + \rho^* \frac{A}{|g|b} \epsilon^p = \rho_0 + \alpha \epsilon^p, \quad (12)$$

где $\alpha \approx \rho^* A / (gb) \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$.

Таким образом, релаксационный подход к моделированию кривых течения полностью объясняет как особенности скоростной чувствительности нагружаемых материалов, так и возникновение и величину зуба текучести без привлечения каких-либо специальных микромеханизмов, например динамическое деформационное старение. Если особенности дислокационной кинетики таковы, что в широком диапазоне скоростей деформирования обеспечивается высокая скорость пластического течения $\dot{\epsilon}^p$, достаточная для полной релаксации напряжений, то скоростная чувствительность такого материала будет минимальной, кривые течения будут гладкими без зуба текучести и максимально близкими к квазистатической кривой деформирования.

Нами было изучено также влияние начальной неоднородности нагружаемых образцов на вид кривых течения. Полагая, что произвольная начальная ориентация зерен поликристаллического образца приводит к заметному отличию напряжений начала пластического тече-

ния в отдельных зернах, для каждой частицы (зерна) случайным образом задавался индивидуальный предел текучести. Величина разброса пределов текучести ΔY_{ijk} от среднего значения $Y_{\text{ср}}$ ($Y_{ijk} = Y_{\text{ср}} + \Delta Y_{ijk}$) для отдельных зерен варьировалась в широких пределах. Здесь индексами i, j, k помечено геометрическое распределение зерен в трех направлениях X, Y, Z соответственно (X — длина образца, ось нагружения, Y — ширина образца, Z — его толщина). Значение ΔY_{ijk} бралось до $\pm 50\%$ от среднего значения. Во всех случаях нагружения наблюдались идеально гладкие кривые течения, как показано на рис. 3. Первыми деформируются наиболее слабые зерна, рост неупругой деформации, а значит и нарастание деформационного упрочнения в этих зернах, приводит к выравниванию напряжений течения во всей зеренной структуре. Наиболее прочные зерна могут быть вовлечены в процесс пластического течения на поздних этапах деформирования, когда среднее значение напряжения деформирования образца сравняется с величиной их начальных пределов текучести.

Таким образом, релаксационная модель обеспечивает подстройку всех зерен под общий процесс деформирования. Понятно, что пространственное распределение неупругой деформации в результате такой подстройки оказывается существенно неоднородным.

4. Моделирование прерывистой текучести. Анализ особенностей статистики флуктуаций напряжений течения

Условие устойчивости пластического течения определяется простым соотношением $d\sigma_i/d\epsilon_i > 0$, следовательно, пока в среде присутствует деформационное упрочнение, пластическое течение будет устойчиво. Прерывистая текучесть будет реализовываться, когда в среде постоянно будет происходить локальное нарушение этого условия в областях релаксации и его после-

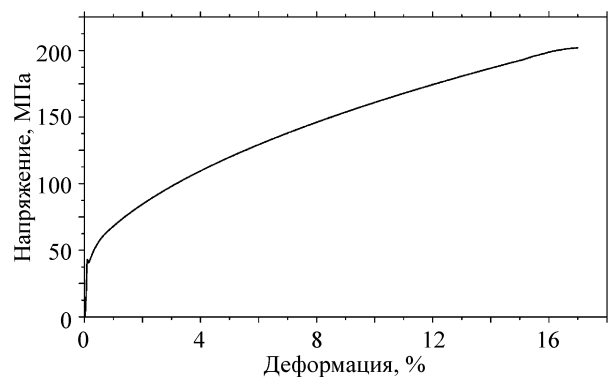


Рис. 3. Расчет кривой течения в случае устойчивого развития деформационного процесса. Отклонение пределов текучести в различных зернах от среднего значения достигало 20 %, т.е. $\Delta Y_{ijk} \leq 0.2 Y_{\text{ср}}$

дующее восстановление вследствие догрузки и/или в результате упругих взаимодействий локально разупрочненных частиц с соседними элементами.

Так как общий средний тренд σ – ϵ -диаграммы демонстрирует макроскопическое упрочнение и глобальную устойчивость деформационного процесса, то при прерывистой текучести наблюдается временное локальное «разупрочнение» с последующим возрастанием деформирующего напряжения. Слово «разупрочнение» взято в кавычки потому, что это кажущееся разупрочнение, обусловленное динамическими эффектами. Локализация деформации в полосах сдвига приводит к высоким скоростям пластической деформации $\dot{\epsilon}^p$ и, как результат, к релаксации и пониженному значению мгновенного равновесного напряжения течения. Это напряжение, конечно, выше статического (при $\dot{\epsilon}^t \sim 0$), но ниже того значения, которое бы установилось при устойчивом процессе деформирования при данной скорости деформации $\dot{\epsilon}^t$. Каждая частица упрочняется согласно закону деформационного упрочнения, приводящего к соответствующему значению статического предела текучести. Хорошо известно, что прерывистая текучесть наблюдается в определенном интервале скоростей деформирования (и температур). Выше и ниже этих скоростей эффект не наблюдается. Феноменология этого процесса следующая. При невысоких скоростях деформирования средняя скорость пластической деформации $\dot{\epsilon}^p$ оказывается хоть и не высокой, но достаточной для обеспечения необходимой релаксации и установления соответствующего равновесного динамического состояния. Материал как система оказывается способным

обеспечить устойчивость деформационного процесса. При высоких скоростях деформирования вырабатывается высокий уровень динамического деформирующего напряжения и, соответственно, высокие скорости пластической деформации, также достаточные для установления динамического равновесия.

В диапазоне средних скоростей деформирования, когда $\dot{\epsilon}_{cp}^t \approx \dot{\epsilon}_{cp}^p$, деформационный процесс может оказаться неустойчивым. Деформационных дефектов может оказаться недостаточно, чтобы обеспечить необходимую для установления динамического равновесия релаксацию. В этом случае материал как динамическая система, находящаяся в состоянии самоорганизованной критичности, поддерживает средний уровень динамических напряжений течения сериями лавин — локальных неустойчивостей деформационного процесса. Каждая точка на σ – ϵ -диаграмме есть усредненный по всем частицам макроскопический уровень пластического течения при достигнутой на данный момент средней макроскопической деформации образца. Последующее приращение деформации будет осуществлено на фоне увеличения среднего напряжения течения, если иметь в виду общий тренд. Следовательно, в каждый конкретный момент времени, потеря локальной устойчивости пластического течения происходит хоть и в малых локальных областях образца — полосах локализованного сдвига, но достаточно многочисленных и/или протяженных, чтобы этот процесс отразился на усредненной макродиаграмме. По этой причине это явление мезоуровня, обусловленное корреляциями множества элементарных актов на микроскопическом уровне.

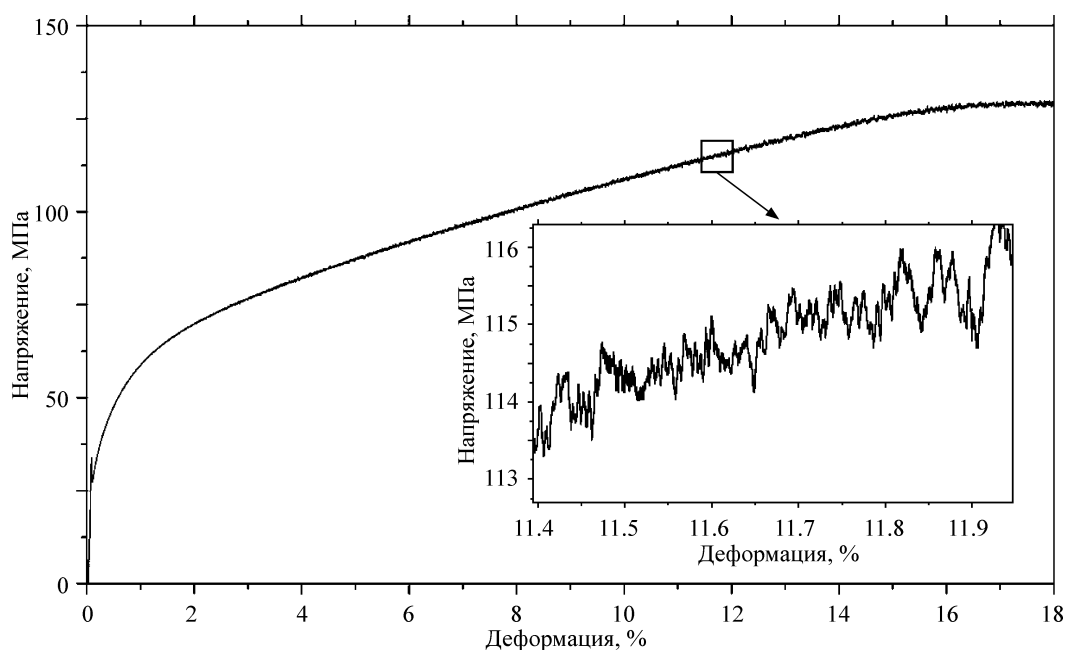


Рис. 4. Расчет кривой течения в случае неустойчивого развития деформационного процесса. Отклонение пределов текучести в различных зернах от среднего значения достигало 20 %, т.е. $\Delta Y_{ijk} \leq 0.2 Y_{cp}$

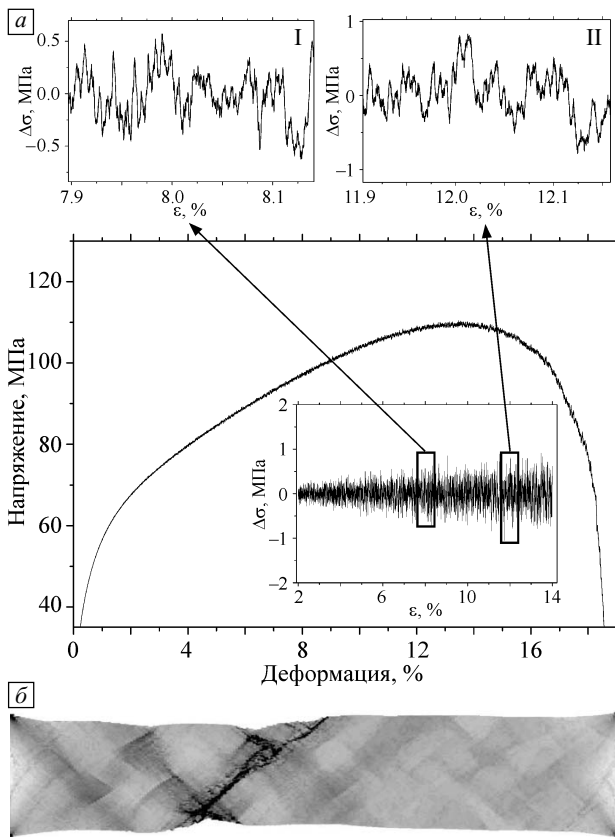


Рис. 5. 2D-моделирование прерывистой текучести: σ – ε -диаграмм с учетом процессов деструкции (а), локализация пластической деформации на стадии формирования шейки (б)

Как явление мезоуровня прерывистая текучесть усиливает процесс локализации деформации по сравнению с устойчивой пластической деформацией, так как при каждом акте локальной потери устойчивости релаксация осуществляется при высоких локальных значениях скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}^P$ (также и в экспериментах [18, 19]), что дает дополнительный прирост неупругой деформации в каждом таком релаксационном акте $\Delta\varepsilon^P = \dot{\varepsilon}^P \Delta t$, чего нет в случае локально устойчивого процесса деформирования.

Другой важный эффект прерывистой текучести, являющийся следствием более интенсивных релаксационных процессов, заключается в том, что равновесное динамическое напряжение течения, отвечающее тренду при соответствующей скорости формирования, оказывается ниже, чем напряжения течения при локально устойчивом пластическом течении при тех же скоростях деформирования ($\Delta\sigma \sim \dot{\varepsilon}^P \Delta t$). Этот эффект понижения сопротивления пластического течения при прерывистой текучести проявляется на макроуровне вплоть до отрицательной скоростной чувствительности (а также аномальной температурной), т.е. как понижение, а не повышение деформирующего напряжения с ростом скорости

деформирования, и является исключительно эффектом мезо- и макромасштабов, определяемых особенностями релаксации. Это подтверждается и тем, что не обнаружено особых микромеханизмов при прерывистой текучести [19] и с точки зрения анализа микропроцессов обратная скоростная чувствительность является физически кажущейся величиной [55]. В работе [19] показано, что при отсутствии прерывистой текучести макролокализация никогда не приводит к обратной скоростной чувствительности. Из сравнения расчетов напряжений течения при устойчивом процессе деформирования (рис. 3) и при наличии неустойчивостей (рис. 4), выполненных при прочих равных условиях, видно, что наличие прерывистой текучести заметно понижает величину напряжения течения.

Все расчеты выполнены для модельных материалов с прочностными параметрами, близкими к параметрам сплавов Al–Mg, при деформировании которых наблюдается прерывистая текучесть. Обычно прерывистая текучесть наблюдается в диапазоне скоростей деформирования $\dot{\varepsilon} = 10^{-6} \dots 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. По соображениям ограничений возможностей вычислительного кластера, расчетные скорости деформирования варьировались в диапазоне $\dot{\varepsilon} = 10^{-3} \dots 10 \text{ с}^{-1}$. При таких скоростях деформирования один расчет на высокопроизводительном кластере занимал несколько часов при общей деформации до 10–20%. При явном учете зеренной структуры для выполнения 3D-расчетов необходимое время расчетов возрастало до суток и более.

Типичный расчет σ – ε -диаграмм с учетом процессов деструкции показан на рис. 5, а (2D-расчеты), на врезках I и II приведена пространственная структура флуктуаций напряжений от среднего тренда. Картина локализации деформации на стадии формирования шейки показана на рис. 5, б. Типичная картина эволюции формирующихся полос локализованной деформации для двух средних степеней деформации представлена на рис. 6.

Для изучения статистических закономерностей флуктуаций напряжений от среднего тренда при прерывистой текучести были изучены PDF-зависимости (функции плотностей распределения флуктуаций напря-

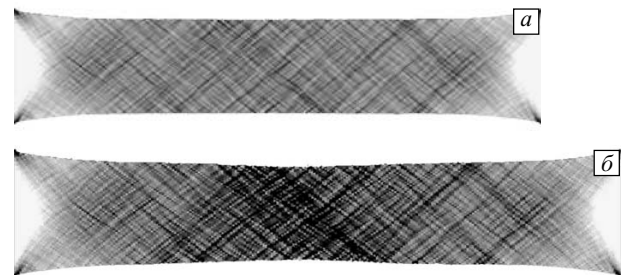


Рис. 6. Типичное распределение полос локализованной деформации, формирующихся в условиях прерывистой текучести

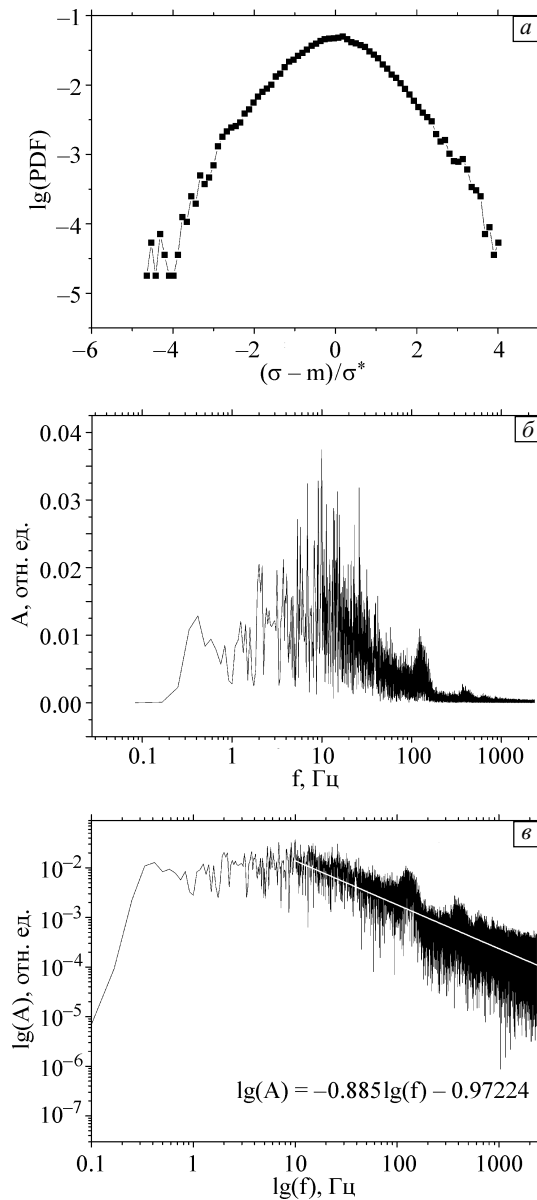


Рис. 7. Статистический анализ кривой течения, показанной на рис. 5: PDF-зависимость (а), фликер-шумовая структура сигнала в полулогарифмических (б) и двойных логарифмических координатах (в)

жений), а также амплитудно-частотные характеристики или фликер-шумовая структура исследуемого сигнала. PDF-зависимости определялись следующим образом. Весь спектр флуктуаций напряжений разбивался на K интервалов и подсчитывалось количество точек, попавших в каждый интервал. По оси ординат откладывается величина $\lg(n/N)$, где n — число точек в интервалах K ; N — общее количество точек. По оси абсцисс откладываются значения $(\sigma - m)/\sigma^*$, где σ — значение середины каждого интервала; m — математическое ожидание; σ^* — среднее квадратичное отклонение.

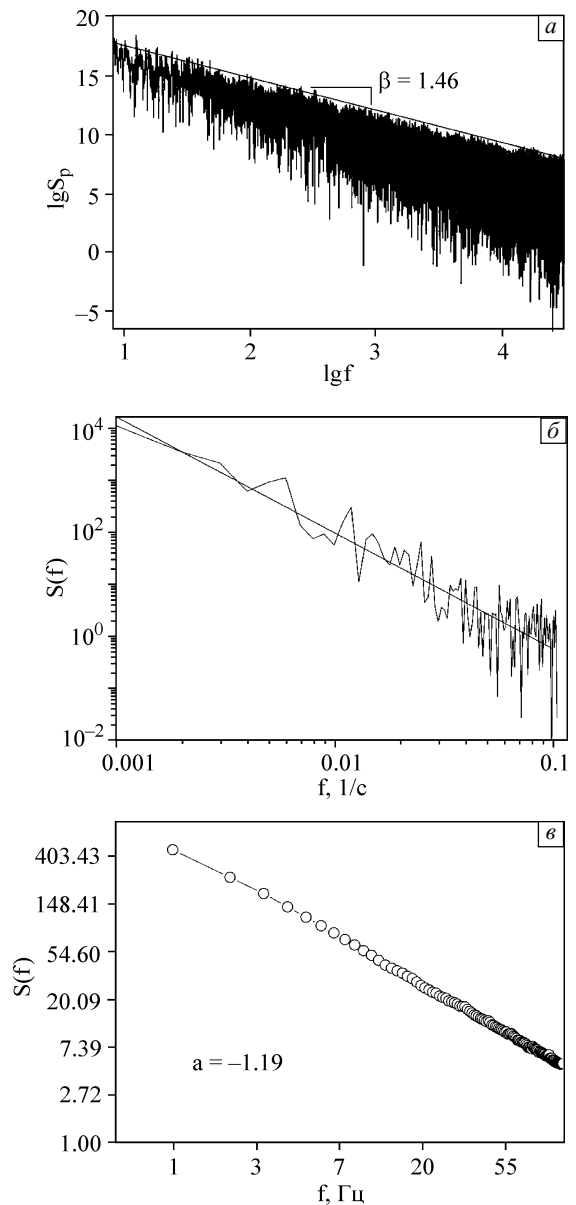


Рис. 8. Экспериментальные исследования фликер-шумовой структуры сигналов различных динамических систем, находящихся в состоянии самоорганизованной критичности: электромагнитного сигнала при разрушении льда [26] (а); высокочастотного сейсмического шума [56] (б); Фурье-спектра лавин магнитного потока в джозефсоновской решетке [30] (в)

Расчет статистической плотности распределения флуктуаций напряжений для случая прерывистой текучести, показанного на рис. 5, приведен на рис. 7, а, на рис. 7, б и в показана фликер-шумовая структура этого сигнала в полулогарифмических и двойных логарифмических координатах соответственно.

Распределения, подобные приведенному на рис. 7, а, называют распределениями с «тяжелыми хвостами» [27] и могут свидетельствовать о том, что динамическая

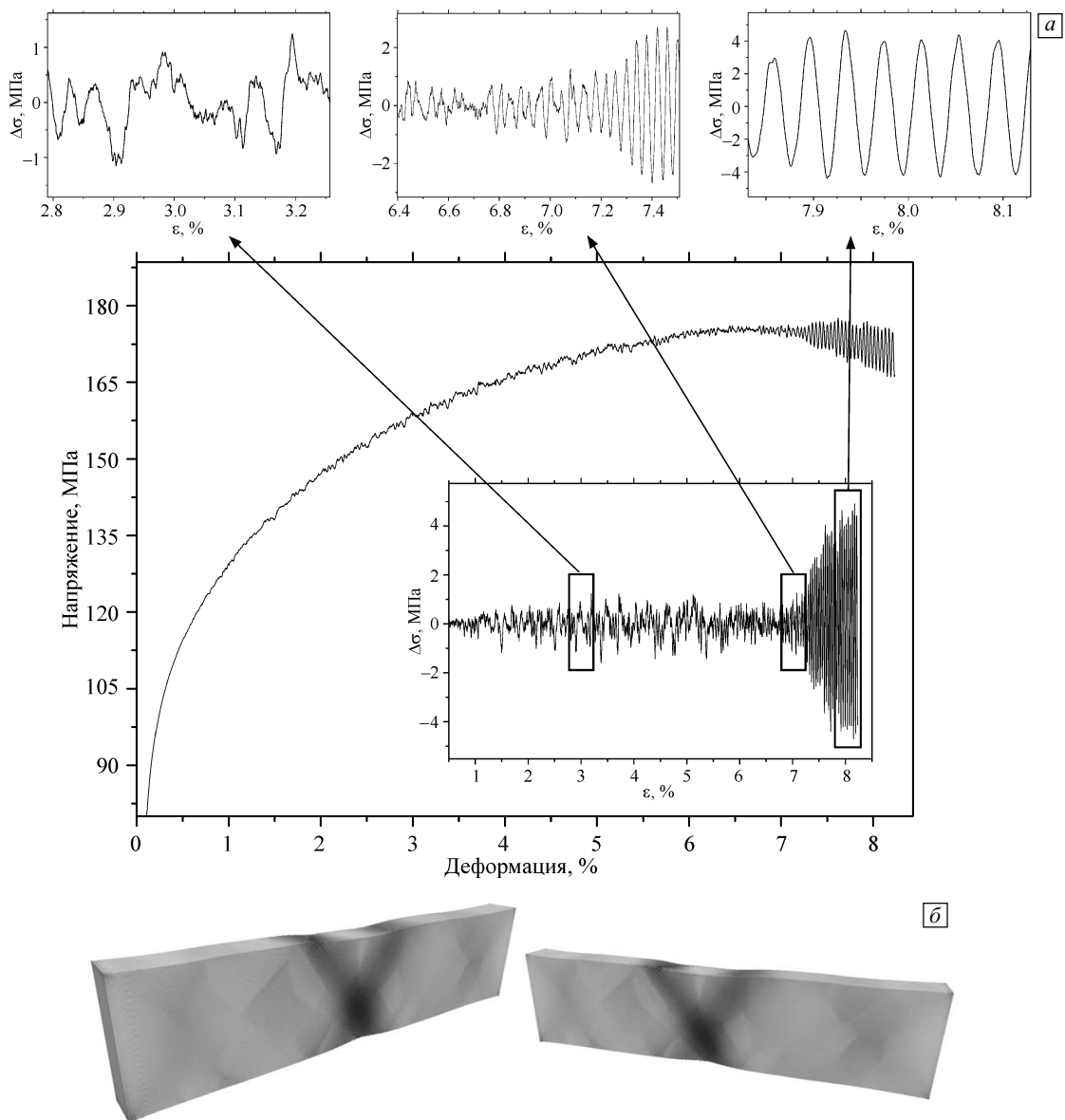


Рис. 9. 3D-моделирование прерывистой текучести: σ - ϵ -диаграмма и осцилляции напряжений относительно тренда (а); локализация пластической деформации в области формирующейся шейки (два вида с противоположных сторон) (б)

система находится в состоянии самоорганизованной критичности. Однако подобные колоколообразные распределения, близкие к пуассоновскому, характерны для состояния динамического хаоса, для которого можно выделить характерные лидирующие масштабы. Важнейшим признаком самоорганизованной критичности является фликер-шумовая структура сигнала с показателем степени $\beta \sim 1$. Степенное распределение амплитудно-частотной зависимости вида $A(f) \sim f^{-\beta}$, где A — амплитуда шумового сигнала; f — его частота, $\beta \sim 1$, приведенное на рис. 7, б и в, свидетельствует о состоянии самоорганизованной критичности нагружаемого образца. Как известно, для самоорганизованной критичности характерно отсутствие выделенного

масштаба. Последнее означает, что в системе сформировалась масштабно-инвариантная гетерогенная структура систем полос локализованной деформации (или трещин в случае разрушения). Известно, что для случайных гауссовых процессов — белого шума — показатель $\beta = 0$. Значение $\beta \approx 1$ и более в амплитудно-частотном спектре свидетельствует о существовании долговременных корреляций в динамике полос локализованной деформации.

Близкие значения показателя β характерны для динамики многих нелинейных систем, находящихся в состоянии самоорганизованной критичности. При разрушении льда в работе [26] был изучен спектр сигналов электромагнитной эмиссии и был сделан вывод о «не-

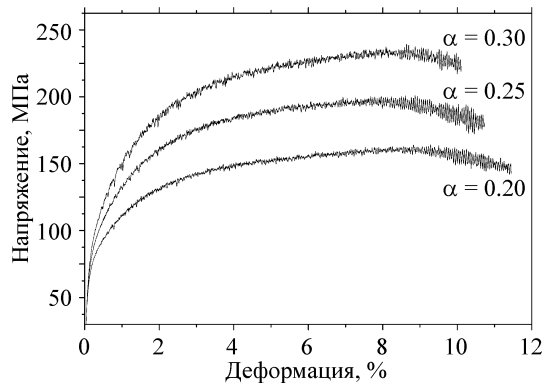


Рис. 10. Рассчитанные кривые прерывистого течения для трех вариантов деформационного упрочнения (3D-моделирование)

устойчивом характере динамики формирования дислокационной структуры льда на мезоскопическом уровне». На рис. 8, а приведен полученный в этой работе спектр мощности измеренного электромагнитного сигнала на стадии, предшествующей глобальному разрушению ($S_p(f) \sim f^{-\beta}$). Аналогичные зависимости спектров мощности для высокочастотного сейсмического шума [56] и спектра Фурье лавин магнитного потока в джозефсоновской решетке, находящейся в состоянии самоорганизованной критичности [30] показаны на рис. 7, б и в соответственно.

Таким образом, полученные в расчетах статистические характеристики флуктуаций напряжений при прерывистой текучести полностью идентичны подобным характеристикам реальных физических динамических систем, находящихся в состоянии самоорганизованной критичности.

Хотя 2D-расчеты в целом качественно верно описывают процесс эволюции напряженно-деформированного состояния нагружаемого образца, многие важные детали оказываются существенно искаженными. Наклон полос локализованной деформации в 2D-расчетах оказывается равным приблизительно 45° (рис. 6), в то время как при 3D-моделировании этот угол, как и в экспериментах, равен приблизительно 55° . Более важно другое. Как и при моделировании гидродинамических неустойчивостей и турбулентности при течении газов, которая воспроизводится только при 3D-моделировании, так и при моделировании прерывистой текучести в 3D-постановке появились новые важные детали. «Увеличение размерности явления (переход от двумерных течений к пространственным) сопровождается физическими эффектами, которые в задачах меньшей размерности либо отсутствуют, либо проявляются в количественно иной степени» [43]. 3D-модель позволила выявить характерные нарастающие автоколебания при формировании шейки, которые обусловлены переключением деформационного процесса с одной сопряженной полосы на другую, и которые не воспроизводились

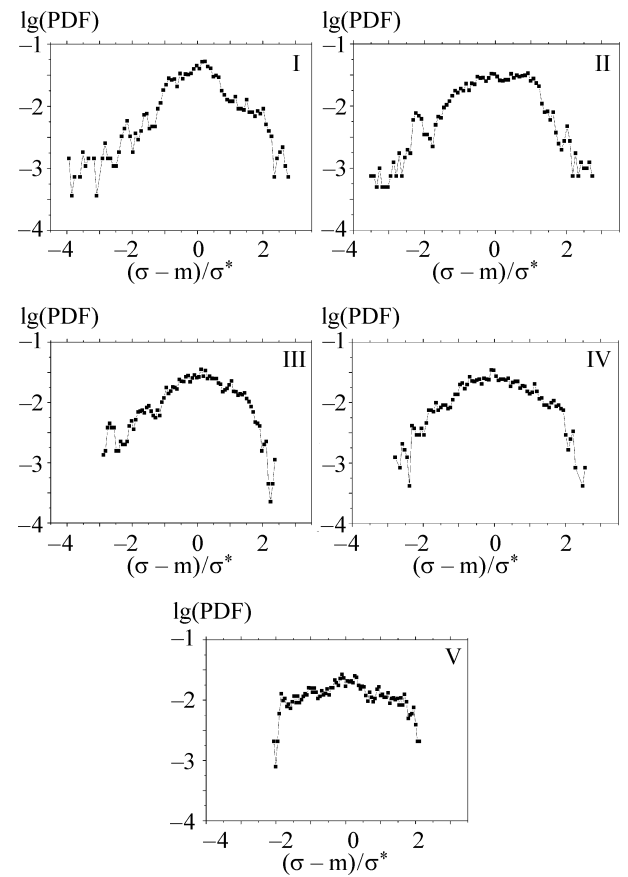
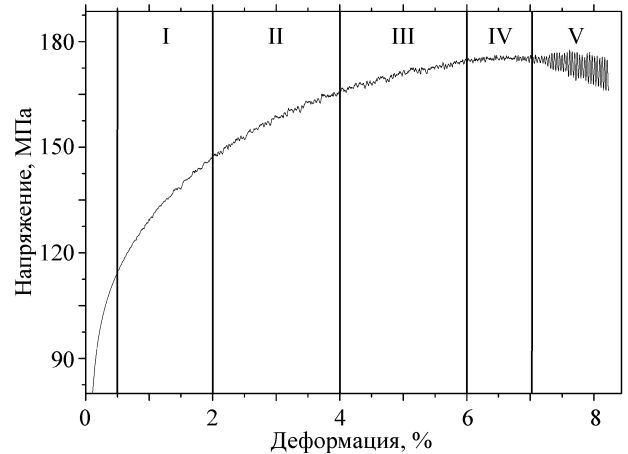


Рис. 11. Эволюция плотности распределения флуктуаций напряжений по мере приближения деформационного процесса к катастрофе

в 2D-расчетах (рис. 9). На рис. 10 представлены рассчитанные кривые прерывистого течения при 3D-моделировании для разных вариантов деформационного упрочнения (коэффициент $\alpha = 0.2 \dots 0.3$). Флуктуации напряжения течения от среднего тренда имеют ярко выраженный характер. Данные кривые соответствуют типичным кривым, получаемым при растяжении сплавов Al–Mg.

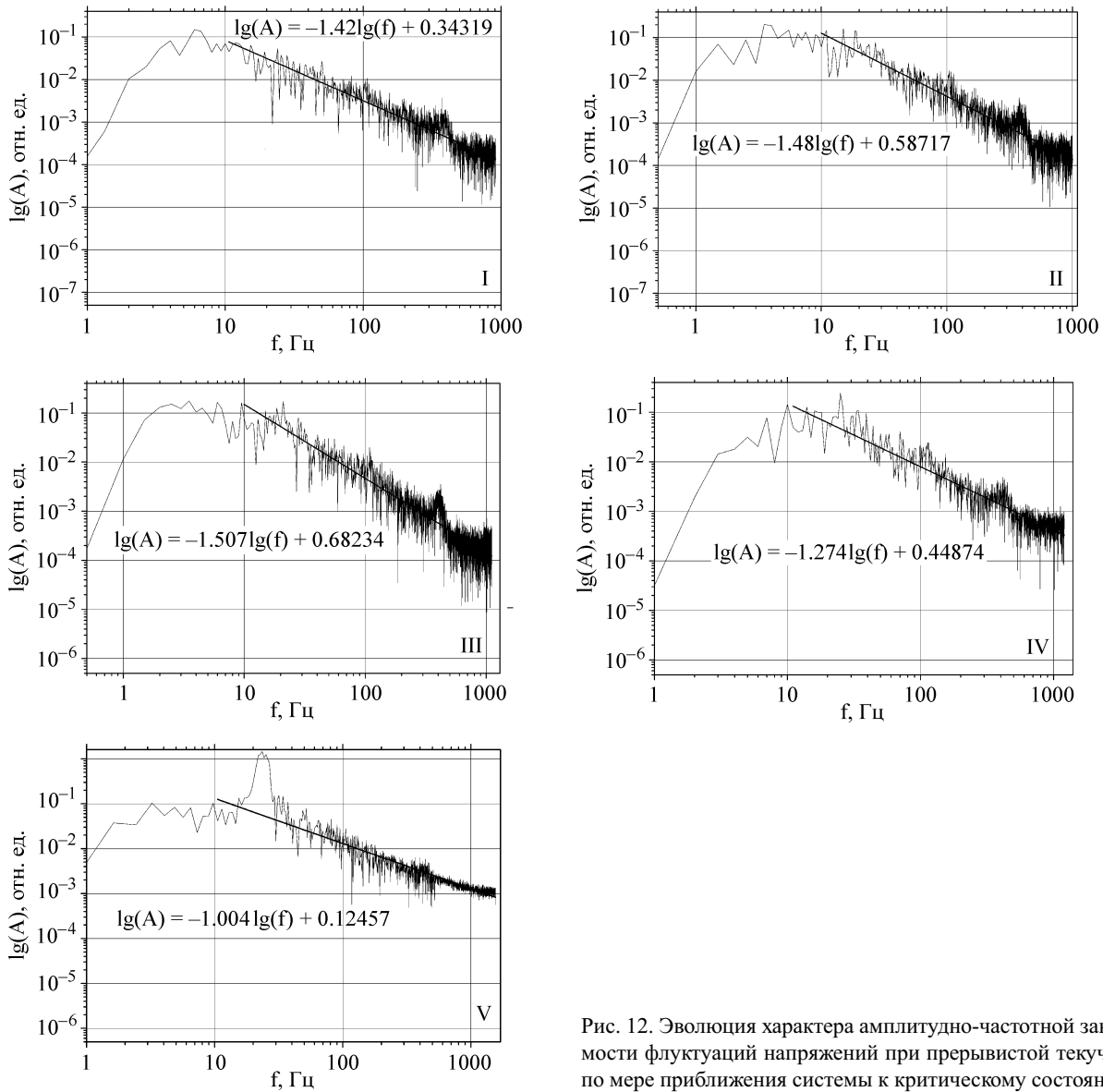


Рис. 12. Эволюция характера амплитудно-частотной зависимости флуктуаций напряжений при прерывистой текучести по мере приближения системы к критическому состоянию

Также претерпел изменения сам характер флуктуаций напряжений, что видно из сравнения графиков плотностей распределения флуктуаций напряжений для 2D- и 3D-расчетов (рис. 7, а и рис. 11). На рис. 11 показана эволюция характера PDF зависимости с ростом деформации и приближением глобальной катастрофы — образования шейки. Для прогноза глобальной катастрофы необходимо проследить динамику статистических параметров по мере эволюции системы к глобальной потере устойчивости. Наиболее информативным показателем приближения динамической системы к катастрофе оказалась эволюция степенного показателя β амплитудно-частотной характеристики шумового сигнала, приведенная на рис. 12 и соответствующая эволюции PDF зависимости на участках I–V σ – ϵ -диаграммы. На этапе эволюции системы от состояния ди-

намического хаоса к состоянию самоорганизованной критичности абсолютное значение показателя β растет до величины $\beta \approx 1.5$, затем резко падает на последней стадии до единицы, что свидетельствует об увеличении вероятности глобальной катастрофы ($\lg A = -\beta \lg f + C$). Такое поведение является типичным для графиков повторяемости сейсмических событий в законе Гуттенберга–Рихтера. Обычно в области наиболее крупных катастрофических событий наклон графика увеличивается, что говорит о меньшей вероятности крупномасштабной катастрофы. Причина такого поведения не вполне ясна, наиболее вероятной является естественное ограничение катастроф очень больших масштабов, налагаемое физико-механическими и прочностными параметрами геосреды на современном этапе ее эволюции. Другой вероятной причиной такого поведения не-

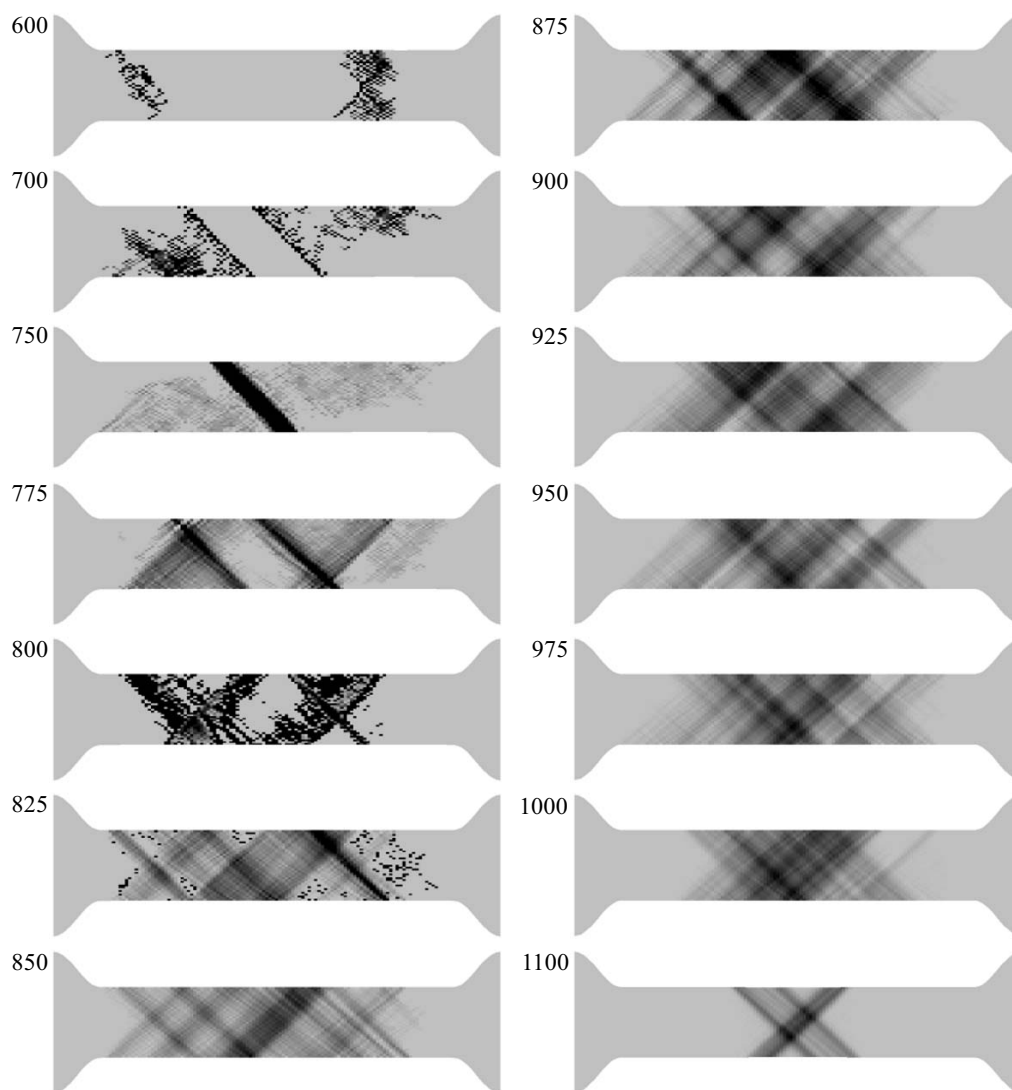


Рис. 13. Динамика фронтов локализованной деформации при растяжении образца. Цифрами указано условное время процесса

линейной динамической системы может быть ее пространственная ограниченность. Соответственно, уменьшение наклона свидетельствует об увеличении вероятности крупномасштабного события. Перед крупным Алтайским землетрясением 2003 г. наблюдалось заметное уменьшение угла наклона графика повторяемости в Чуйско-Курайском регионе, что свидетельствовало о нарастании вероятности крупномасштабной катастрофы.

Наиболее ярким «предвестником» глобальной катастрофы является переход системы в автоколебательный режим с нарастающей амплитудой (рис. 9, а). Это состояние отвечает переходу деформационного процесса на закритическую стадию эволюции и активного формирования шейки. Однако о таком переходе желательно знать заранее. Возможными предвестниками подобных переходов могут быть процессы медленной ди-

намики, деформационные фронты, подпитывающие очаг формирующегося разрушения [9]. Этот процесс иллюстрируется рис. 13. Фронты идентифицированы по скоростям неупругого деформирования и действительно движутся в формирующийся очаг макроскопического разрушения. Это проблема дальнейшего изучения.

5. Заключение

Изложенный подход к моделированию явления прерывистой текучести основан на численном изучении процессов деформирования и разрушения твердых тел как процессов их эволюции, включая заключительную катастрофическую стадию глобальной потери устойчивости при формировании шейки или образования макроскопической магистральной трещины. При таком подходе нагружаемое твердое тело рассматривается как

типичная многомасштабная нелинейная динамическая система, эволюционирующая по законам нелинейной динамики. Подходы и методы нелинейной динамики уже более 15 лет применяются для анализа данных экспериментов при изучении пластического течения и разрушения различных сред.

Однако какой-либо достаточно общей теории, позволяющей изучать нагружаемые твердые тела и среды как типичные нелинейные динамические системы, не существовало. Ранее нами было показано, что такой общей теорией являются уравнения механики деформируемого твердого тела (как и все уравнения математической физики для тех объектов, математическими моделями которых они являются), которые вместе с соответствующими определяющими уравнениями являются эволюционными уравнениями реальных процессов деформации и разрушения. Для постановки задачи деформирования и разрушения как эволюционной необходимо прописать отрицательные и положительные обратные связи и задать управляющие параметры, регулирующие эволюционный процесс. Было также показано, что численные решения уравнений механики деформируемого твердого тела в этом случае демонстрируют все характерные черты эволюционных сценариев, включая локализацию, смены сценариев эволюции, динамический хаос и самоорганизованную критичность. Разрушение на всех масштабах на заключительных стадиях всегда переходит в сверхбыстрый катастрофический этап — режим с обострением [8, 9, 33, 48, 53].

Явление прерывистой текучести имеет фундаментальное значение, так как на его примере можно подробно исследовать особенности и закономерности неустойчивости деформационных процессов, в том числе и при формировании очага глобального разрушения. В работе ставилась задача построить феноменологическую модель прерывистой текучести и выяснить, существуют ли предвестники перехода процессов локальной потери устойчивости к глобальной катастрофе.

Предложена феноменологическая модель прерывистой текучести, которая основывается на следующих базовых идеях:

- 1) описание явления прерывистой текучести как процесса сугубо релаксационного (как и любого пластического течения);

- 2) процесс неустойчивого пластического течения регулируется обратными связями, отрицательной обратной связью, стабилизирующей деформационный процесс к некоторому состоянию локального динамического равновесия за счет релаксации, и положительной обратной связью, дестабилизирующей деформационный процесс в тех локальных областях, где релаксация недостаточно развита и напряжения растут.

Показано, что эффект прерывистой текучести — явление мезо- и макроуровня — не регулируется процес-

сами микроуровня. Неустойчивости пластического течения развиваются в тех локальных областях нагружаемого материала, в которых скорости общей деформации, ответственные за рост упругих напряжений и скорости пластических деформаций, приводящие к релаксации, оказываются приблизительно равными. Нагружаемый материал как нелинейная динамическая система, находящаяся в состоянии самоорганизованной критичности реагирует типичным для динамических систем способом — переходом в состояние локальной неустойчивости и генерацией лавин разных масштабов (дислокационных потоков в данном случае), релаксирующих локально растущие напряжения и поддерживающих таким образом квазиравновесное состояние. В каждом конкретном случае можно установить конкретные микромеханизмы, приводящие к таким дислокационным лавинам, многие из таких механизмов уже установлены. В этом смысле явление прерывистой текучести принципиально не может быть объяснено исходя только из рассмотрения микроуровня, так как поведение любой иерархической системы в принципе не сводимо к поведению ее подсистем (в данном случае система — образец, подсистема — дислокационный континуум). В случае прерывистой текучести развитие неустойчивостей полностью регулируется на уровне макропараметров — локальными скоростями нагружения и способностью материала в этих локальных областях релаксировать растущие напряжения. В этом смысле обратная скоростная чувствительность является «физически кажущейся», так как повышенная релаксация при прерывистой текучести устанавливает динамически равновесное напряжение на уровне заметно меньшем, чем при устойчивой пластической деформации.

В работе показано, что для надежного анализа особенностей неустойчивостей деформационного процесса, особенно на заключительной стадии предразрушения, необходимо выполнять 3D-моделирование. Только в этом случае удастся получить нарастающие автоколебания, обусловленные процессом активного формирования шейки, и получить углы наклона графиков амплитудно-частотной зависимости близкие к наблюдаемым.

Также показано, что численные решения уравнений механики деформируемого твердого тела демонстрируют как состояние динамического хаоса, так и самоорганизованной критичности. Анализ статистики флуктуаций, напряжений от среднего тренда, в том числе анализ амплитудно-частотных характеристик этих флуктуаций показал, что нагружаемый материал как типичная нелинейная динамическая система эволюционирует от состояния динамического хаоса к самоорганизованной критичности и глобальной катастрофе. На стадии активного формирования шейки вблизи глобальной потери устойчивости абсолютное значение пока-

зателя β амплитудно-частотной характеристики резко уменьшилось от значений 1.5 до 1.0, что является надежным свидетельством роста вероятности глобальной катастрофы. Завершающая стадия формирования шейки в представленных расчетах сопровождалась развитием автоколебательного процесса с нарастающей амплитудой колебаний.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.Ю. Перышкину, выполнившему расчеты по движению деформационных фронтов.

Работа выполнена при поддержке базового проекта Ш.23.1.4, интеграционного проекта СО РАН № 90, проекта РФФИ № 12-05-00503 и Минобрнауки России по государственному контракту № 14.515.11.0084.

Литература

1. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации. – Новосибирск: Наука, 1985. – 229 с.
2. Физическая мезомеханика и компьютерное моделирование материалов / Под ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с., Т. 2. – 320 с.
3. Панин В.Е. Основы физической мезомеханики // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 5–22.
4. Панин В.Е., Гриняев В.Е., Данилов В.И. и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. – Новосибирск: Наука, 1990. – 225 с.
5. Панин В.Е. Синергетические принципы физической мезомеханики // Физ. мезомех. – 2000. – Т. 3. – № 6. – С. 5–36.
6. Ananthakrishna G., Hema Ramachandran. Jerky flow, stick-slip in geological materials and earthquake models // Non-linearity and Breakdown in Soft Condensed Matter Lecture Notes in Physics. – 1994. – V. 437. – P. 78–106.
7. Ananthakrishna G., Naronha S.J., Fressengeas C., Kubin L.P. Cross-over from chaotic to self-organized critical dynamic in jerky flow of single crystals // Phys. Rev. E. – 1999. – V. 60. – No. 3. – P. 5455–5462.
8. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 19–35.
9. Макаров П.В. Самоорганизованная критичность деформационных процессов и перспектива прогноза разрушения // Физ. мезомех. – 2010. – Т. 13. – № 5. – С. 97–112.
10. Малыгин Г.А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов // УФН. – 1999. – Т. 169. – № 9. – С. 979–1010.
11. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
12. Нелинейность в современном естествознании // Синергетика. От прошлого к будущему / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 424 с.
13. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М. Эдиториал УРСС, 2002. – 342 с.
14. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 366 с.
15. Курдюмов С.П., Клязев Е.Н. У истоков синергетического видения мира: режимы с обострением // Самоорганизация и наука: опыт философского осмысления. – М.: Аргус, 1994. – С. 162–186.
16. Derugin Ye.Ye., Panin V.E., Schmauder S., Soppa E. The effects of macrolocalization of deformation in Al-based composites with Al_2O_3 inclusions // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., Blackwell Publishing Ltd. – 2003. – V. 26. – P. 295–304.
17. Панин, В.Е., Дерюгин Е.Е. Мезомеханика формирования полосовых структур на мезо- и макромасштабных уровнях // ФММ. – 2003. – № 6. – С. 1–15.
18. Кристалл М.М. Взаимосвязь неустойчивости и неоднородности пластической деформации: Закономерности и особенности прерывистой текучести на примере Al–Mg сплавов / Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Тольятти: Тольяттинский гос. ун-т, 2002. – 248 с.
19. Лебедев М.А. Самоорганизация и коллективные эффекты при неустойчивой пластической деформации кристаллов / Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Черноголовка: ИФТТ РАН, 2002. – 248 с.
20. Пустовалов В.В. Влияние сверхпроводящего перехода на низкотемпературную скачкообразную деформацию металлов и сплавов // ФНТ. – Т. 26. – № 6. – С. 515–535.
21. Котрелл А.Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. – М.: Гос. научн.-техн. изд-во лит-ры по черной и цветной металлургии, 1958. – 267 с.
22. McCormick P.G. A model for the Portevin–Le–Chatelier in substitutional alloys // Acta Met. – 1972. – V. 20. – P. 351–354.
23. Van den Benkel A. Theory of the effect of dynamic strain ageing on mechanical properties // Phys. Stat. Sol. A. – 1975. – V. 30. – P. 197–206.
24. Михлик Д.В. Динамика деформационных полос и разрушение металлических сплавов, демонстрирующих неустойчивое пластическое течение // Дисс. ... канд. техн. наук. – Тамбов: Тамбовский гос. ун-т, 2009. – 134 с.
25. Шуклинов А.В. Структурно-чувствительные переходы между скачкообразной и устойчивой пластической деформацией сплавов Al–Mg // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Тамбов: Тамбовский гос. ун-т, 2007. – 139 с.
26. Шибков А.А., Казаков А.А. Электромагнитная эмиссия при одноосном сжатии льда. III. Динамика и статистика дислокационных лавин и трещин // Кристаллография. – 2009. – Т. 54. – № 2. – С. 323–330.
27. Писаренко В.Ф., Родкин М.В. Распределения с тяжелыми хвостами: приложения к анализу катастроф // Серия: Вычислительная сейсмология. Вып. 38. – М.: ГЕОС, 2007. – 242 с.
28. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 59. – P. 381–384.
29. Jensen H.J. Self-organized Criticality. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 153 p.
30. Матюжен Э.В., Мартынец В.Г., Безверхий П.П. Состояние самоорганизованной критичности в джоульсоновской решетке // Вестник СибГУТИ. – 2009. – № 3. – С. 137–145.
31. Пантелеев И.А., Froustey C., Наймарк О.Б. Структурно-скейлинговые переходы и универсальность статистики флуктуаций при пластическом течении металлов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 70–81.
32. Карпинтери А., Лачидонья Дж., Пуцци С. Прогноз развития трещин в полномасштабных конструкциях на основе анализа показателя b и статистики Юла // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 75–87.
33. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П. Модель землетрясения как сверхбыстрый катастрофический этап эволюции нагружаемой геосреды // Физ. мезомех. – 2010. – Т. 13. – Спец. вып. – С. 29–35.
34. Кузнецов И.В., Колесникова Н.М., Ломовской И.В., Ротвайн И.М. Обратная задача и прогноз на моделях клеточных автоматов // Синергетика. Исследования и технологии / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – С. 192–220.
35. Курдюмов С.П. Режимы с обострением. Эволюция идеи / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.
36. Nadeau R.M., Dolenc D. Nonvolcanic tremors deep beneath the San Andreas Fault // Science. – 2005. – V. 307. – P. 389.
37. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 342 с.
38. Глендорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 280 с.

39. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 405 с.
40. Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П. Приложение 2. Нелинейная динамика и проблемы прогноза // Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: Физматлит, 2007. – С. 425–451.
41. Frigg R. Self-organized criticality — what it is and what it isn't // Stud. Hist. Phil. Sci. – 2003. – V. 34. – P. 613–624.
42. Laherre E., Sornette D. Stretched exponential distribution in nature and economy: "Fat tails" with characteristic scale // Eur. Phys. B. – 1998. – V. 2. – No. 4. – P. 525–539.
43. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Численное моделирование гидродинамических неустойчивостей и турбулентности // Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: КомКнига, 2008. – С. 183–210.
44. Еленин Г.Г. Вычислительный эксперимент с моделями неидеальных реакционных систем. Мезоскопические пространственно-временные структуры // Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: КомКнига, 2008. – С. 78–115.
45. Змиевская Г.И. Стохастическое моделирование неравновесных процессов // Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: КомКнига, 2008. – С. 255–330.
46. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П. и др. Моделирование поведения геосреды при ведении горных работ // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. – 2008. – № 2. – С. 18–30.
47. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П. Сценарии эволюции горного массива над выработкой // Физ. мезомех. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 65–82.
48. Макаров П.В., Еремин М.О. Модель разрушения хрупких и квази-хрупких материалов и геосред // Физ. мезомех. – 2013. – Т. 16. – № 1. – С. 5–26.
49. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П. и др. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. – Новосибирск: Академич. изд-во «Гео», 2007. – 235 с.
50. Макаров П.В. Эволюционная природа блочной организации геоматериалов и геосред. Универсальный критерий фрактальной делимости // Геология и геофизика. – 2007. – Т. 48. – № 7. – С. 724–746.
51. Макаров П.В. Сдвиговая прочность и вязкость металлов в ударных волнах // Ударные волны и экстремальные состояния вещества. – М.: Наука, 2000. – С. 219–254.
52. Макаров П.В. Математическая многоуровневая модель упруго-пластического деформирования структурно-неоднородных сред // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Томск: ИФПМ СО РАН, 1995. – 251 с.
53. Евтушенко Е.П., Еремин М.О., Костандов Ю.А., Макаров П.В., Смолин И.Ю., Шитовский И.Е. Моделирование разрушения хрупких и квазихрупких тел и геосред // Физ. мезомех. – 2012. – Т. 15. – № 3. – С. 35–44.
54. Пресняков А.А., Аубакирова Р.К. К вопросу о скоростной чувствительности напряжений течения при растяжении // ФММ. – 1985. – Т. 60. – № 1. – С. 205–206.
55. Korbel A., Dybiec H. The problem of the negative strain rate sensitivity of metals under the Portevin–Le Chatelier deformation conditions // Acta Met. – 1981. – V. 29. – P. 89–93.
56. Мухамедов В.А. Фрактальные свойства высокочастотного сейсмического шума для задач прогноза землетрясений / Препринт Туркменский гос. ун-т. – Ашхабад, 2001. – 48 с.

Поступила в редакцию
26.07.2013 г.

Сведения об авторах

Макаров Павел Васильевич, д.ф.-м.н., проф., зав. лаб. ИФПМ СО РАН, проф. ТГУ, pvm@ispms.tsc.ru
Еремин Михаил Олегович, прогнр. ИФПМ СО РАН, асп. ТГУ, bacardi@sibmail.com