На правах рукописи

КОСТРОМИНА Юлия Владимировна

Матрицы Мальцева двойственных групп

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Томск — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский педагогический государственного университет», на кафедре алгебры математического факультета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ФОМИН Александр Александрович

Официальные оппоненты:

Гриншпон Самуил Яковлевич доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра алгебры механико-математического факультета, профессор

Ельцова Тамара Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра высшей математики, доцент

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров

Защита состоится 23 декабря 2013 г. в 14 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.21, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, Томск, ул. Ленина, 36 (корпус 2, ауд. 304).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «18» ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Малютина Александра Николаевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена изучению абелевых групп без кручения конечного ранга. Начальный этап систематического изучения бесконечных абелевых групп пришелся на 20–30-е годы XX века. Во второй половине 30-х годов были заложены основы для изучения абелевых групп без кручения. Р. Бэр [3] на языке типов дал описание групп без кручения ранга 1, а А. Г. Курош [11], А. И. Мальцев [16] и Д. Дерри [6] с помощью матриц с p-адическими элементами получили важное с теоретической точки зрения описание групп без кручения конечного ранга. Описание Куроша–Дерри, вошедшее в монографии [15] и [17], получило широкую известность. Однако во многих ситуациях описание Мальцева оказывается более удобным. Недавно А. А. Фомин [7] показал, что описание Мальцева можно рассматривать как двойственность некоторых категорий.

В 40–50–е годы произошло выделение теории абелевых групп из общей теории групп в самостоятельное направление алгебры. В 60–70–е годы теория абелевых групп достигла своего пика развития. Рост интереса к теории абелевых групп был обусловлен в том числе и выходом монографий Л. Фукса [17], в которых освещались последние ее достижения. К этому периоду относится интересующая нас работа Р. Бьюмонта и Р. Пирса [4], в которой они ввели и описали с точностью до квазиизоморфизма класс факторно делимых групп без кручения конечного ранга. На основе описания факторно делимых групп был получен ряд хороших результатов, из которых наиболее интересными на наш взгляд являются работы [1], [5], [8], [9], [12], [14].

Другой интересующий нас класс — локально свободные группы. Они были введены Р. Уорфилдом в [13] в связи с изучением абелевых групп без кручения и их групп гомоморфизмов. В данной работе решается задача нахождения матриц Мальцева группы, двойственной локально свободной группе в смысле Уорфилда. Также решается задача нахождения матриц Мальцева группы, двойственной факторно делимой группе в смысле Д. Арнольда. Другими словами, перевода двойственности Уорфилда и двойственности Арнольда на язык матриц Мальцева. В 2007 г. в [18] А. А. Фомин ввел категорию матриц специального вида и доказал, что она эквивалентна категории факторно делимых групп и двойственна категории групп без кручения. А. А. Фомин матрицы данной категории называл редуцированными матрицами. Заметим, что это фактически те матрицы, которые А. И. Мальцев называл совершенными, а функторы двойственности категории матриц и категории групп без кручения можно рассматривать как новую версию описания Мальцева [16].

Из приведенного обзора видно, что тема исследования достаточно актуальна.

Цель работы. Целью диссертационной работы является переосмысление результатов Мальцева в контексте современного уровня развития теории абелевых групп без кручения конечного ранга и перевод на язык матриц Мальцева двойственности Уорфилда для локально свободных групп и двойственности Арнольда для факторно делимых групп.

Общая методика исследования. Исследование базируется на общих методах теории абелевых групп, модулей и категорий.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основными результатами можно считать следующие:

1. Описано строение матриц Мальцева локально свободных групп и строение матриц Мальцева факторно делимых групп.

2. Найдены соотношения между матрицами Мальцева группы без кручения G конечного ранга и матрицами Мальцева групп $\mathrm{Hom}(R, G)$ (Теорема 3) и $\mathrm{Hom}(G, R)$ (Теорема 7), где G — локально свободная группа, R — группа без кручения ранга 1.

3. Найдены соотношения между матрицами Мальцева факторно делимой группы и матрицами Мальцева двойственной ей группы в смысле Арнольда (Теорема 8).

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и может быть использована при дальнейших исследованиях в области абелевых групп без кручения.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на научно-методической конференции Рязанского военного автомобильного института (Рязань, 2009), на Всероссийском симпозиуме "Абелевы группы" (Бийск, 2010), на Всероссийской конференции посвященной 110-летию математического факультета "Математика, информатика и методика их преподавания" (Москва, 2011), на 5-ом Всероссийском симпозиуме "Абелевы группы" (Бийск, 2012), а также на научно-исследовательском семинаре кафедры алгебры МПГУ.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 72 страницах и состоит из введения, трех глав, разделенных на 7 параграфов, и списка литературы, включающего 48 наименований.

Содержание работы. Все рассматриваемые в работе группы являются абелевыми.

Во введение дается обзор результатов, обосновывающих актуальность исследования, и краткая характеристика работы.

Первая глава посвящена изложению предварительных методов и результатов, которые используются для получения основных. Она состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе приводится определение матриц Мальцева и их основные свойства.

Определение 1. *p-примитивной подгруппой* группы без кручения G при данном базисе $x_1, x_2, ..., x_r$ называется подгруппа $G^{(p)}$, образованная теми элементами g группы G, которые могут быть представлены в виде $p^\alpha g = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_rx_r$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $G_{(p^s)}$ множество всех элементов g группы $G^{(p)}$, которые могут быть представлены в виде $p^sg = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_rx_r$, где $m_i \in \mathbb{Z}$. Группа $G_{(p^s)}$ называется *s-тым слоем подгруппы* $G^{(p)}$.

Рассмотрим целочисленную квадратную матрицу порядка r: $A_s = (a_{ij}), i, j = \overline{1, r}$.

Определение 2. Матрица A_s называется *матрицей слоя* $G_{(p^s)}$, если элементы $\dfrac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ir}x_r}{p^s}$ $(i = 1, ..., r)$ порождают группу $G_{(p^s)}$.

Рассмотрим следующие преобразования матриц A_s:

(α) *умножить или разделить по модулю p^s какую-либо строку матрицы на число, не делящееся на p.*

(β) *из одной строки матрицы вычесть другую, умноженную на любое целое число.*

Определение 3. Матрица N_s группы $G_{(p^s)}$ называется *нормальной*, если она перестановкой столбцов может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \ldots & n_{1r}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \ldots & n_{2r}p^{\lambda_2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda_r} \end{pmatrix}, \text{ где} \tag{1}$$

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_r \leqslant s \tag{2}$$

и $0 \leqslant n_{ik} < p^{\lambda_k - \lambda_i}$.

Из данного определения следует, что с каждой матрицей связана подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix}$, которая приводит матрицу N_s к виду (1).

Пусть последовательность (2) имеет вид $0 \leqslant \ldots \leqslant 0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant s$ для каждого $0 < s \in \mathbb{Z}$, где первые m чисел равны нулю и $r = m + n$. Тогда p-матрица s-го слоя имеет вид:

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \ldots & n_{1n}p^{\lambda_1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^{\lambda_2} & \ldots & n_{2n}p^{\lambda_2} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Обозначим $s - \lambda_i$ через α_i. Так как $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, то $s - \lambda_1 \geqslant \geqslant s - \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant s - \lambda_n$, то есть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$.

Следуя А. И. Мальцеву [16], запишем в компактном виде последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots$, взятых по всем слоям. Элементы a_{ij} из первых m строк матриц $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ определяют целые p-адические числа $\hat{a}_{ij}$. Заметим, что количество p-адических строк — это инвариант группы G, совпадающий с числом $r(G) - r_p(G)$, где $r_p(G)$ — p-ранг группы G.

Последние n строк матрицы получаются следующим образом: так как числа n_{ij} не зависят от номера слоя, то последовательность этих чисел в обобщенной матрице можно записать соответствующим классом вычетов $\overline{n}_{ij}$.

Определение 4. Матрицы вида (3) мы будем называть *p-матрицами Мальцева группы G,* матрицу A_s — *s-той компонентой матрицы A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & ... & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & ... & \hat{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & ... & \hat{a}_{mn} \\ 0 & 0 & ... & 0 & \overline{1} & \overline{n}_{12} & ... & \overline{n}_{1n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \overline{1} & ... & \overline{n}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \dots & \dots \\ \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_n}} \end{matrix} \qquad (3)$$

Заметим, что p-матрицы Мальцева содержат информацию о типе Ричмена группы G. Из определения p-матриц Мальцева следует, что выполняются соотношения $0 \leqslant \alpha_r \leqslant \alpha_{r-1} \leqslant ... \leqslant \alpha_1$. Пусть F — свободная подгруппа ранга r группы G, порожденная базисом $x_1, x_2, ..., x_r$. Тогда имеет место следующее разложение:

$$[G/F]_p \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}}},$$

где $\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i^{(p)}}} (i = \overline{1, r})$ — циклическая группа при $\alpha_i^{(p)} < \infty$, или квазициклическая группа при $\alpha_i^{(p)} = \infty$.

Как было показано выше, показатели степени каждого простого числа p расположены в порядке возрастания: $0 \leqslant \alpha_r^{(p)} \leqslant \alpha_{r-1}^{(p)} \leqslant ... \leqslant \alpha_1^{(p)} \leqslant \infty$. Если p пробегает множество всех простых чисел, то получается возрастающая последовательность характеристик: $(\alpha_r^{(p)}) \leqslant (\alpha_{r-1}^{(p)}) \leqslant ... \leqslant (\alpha_1^{(p)})$. Эти характеристики определяют типы: $\tau_r = [(\alpha_r^{(p)})], \tau_{r-1} = [(\alpha_{r-1}^{(p)})], ..., \tau_1 = [(\alpha_1^{(p)})]$, где $\tau_r = IT(G)$ — внутренний тип группы, $\tau_1 = OT(G)$ — внешний тип группы [2]. Последовательность типов $\tau_r \leqslant \tau_{r-1} \leqslant ... \leqslant \tau_1$ — тип Ричмена группы G.

В своей работе [16] А.И. Мальцев рассмотрел вопрос о том, как меняются подгруппы $G^{(p)}$ и их p-матрицы при переходе к новому базису. А.И. Мальцев показал, что линейные преобразования базиса эквивалентны следующим преобразованиям матриц:

(γ) *к j-тому столбцу p-матрицы A прибавляется i-тый столбец, умноженный на целое число a.*

$(\gamma^{'})$ *у всех элементов i-того столбца знак меняется на обратный.*

(δ) *i-тый столбец p-матрицы A делится на некоторое натуральное простое число q.*

(ε) *i-тый столбец p-матрицы A умножается на число q.*

Определение 5. Систему p-матриц $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, ...$ будем называть *системой p-матриц группы G при базисе $x_1, x_2, ..., x_r$.*

Определение 6. Две системы p-матриц назовем *эквивалентными*, если из одной системы можно получить другую, произведя конечное число преобразований (α), (β) над каждой матрицей системы отдельно и конечное число преобразований (γ), $(\gamma^{'})$, (δ), (ε) над всеми матрицами системы одновременно.

Теорема 1 [16]. *Для того чтобы две системы совершенных p-матриц определяли изоморфные группы, необходимо и достаточно, чтобы эти системы были эквивалентными.*

Во втором параграфе вводится определение ортогонального дополнения модуля и его основные свойства.

Пусть p — простое число, $0 \leqslant s \in \mathbb{Z}$, $0 < r \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим декартову степень $M = (\mathbb{Z}_{p^s})^r$ как модуль над кольцом классов вычетов по модулю p^s. Элементами модуля M являются векторы $(\gamma_1, ..., \gamma_r)$, где $\gamma_i \in \mathbb{Z}_{p^s}, i = \overline{1, r}$.

Определение 7. Пусть $M = \mathbb{Z}^r_{p^s}$, N — подмодуль модуля M. Элемент $c = (\gamma_1, ..., \gamma_r) \in M$ называется *ортогональным подмодулю* $N \subset M$, если $\gamma_1\beta_1 + ... + \gamma_r\beta_r = 0$ для всякого элемента $b = (\beta_1, ..., \beta_r) \in N$. Множество всех элементов ортогональных подмодулю N само является $\mathbb{Z}_{p^s}$–подмодулем модуля M. Этот подмодуль обозначается $N^{\perp}$ и называется *ортогональным дополнением модуля* N.

Третий и четвертый параграфы посвящены изучению матриц Мальцева локально свободных и факторно делимых групп, соответственно.

Пусть G — группа без кручения, обозначим $R(G) = \langle 1, p^{-n} \mid pG = G; n \in \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \mathbb{Q}$; $G_p = G \bigotimes \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p.

Определение 8. Группа без кручения G называется *локально свободной над* $R(G)$ тогда и только тогда, когда G_p свободна (как $\mathbb{Q}_p$ -модуль) для всех простых p со свойством $pG \neq G$.

p-матрица локально свободной группы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{n}_{12} & ... & \overline{n}_{1r} \\ 0 & \overline{1} & ... & \overline{n}_{2r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix},$$

где $[(\alpha_r^{(p)})] = IT(G)$ и $[(\alpha_1^{(p)})] = OT(G)$.

Определение 9. Группа без кручения G называется *факторно делимой*, если она содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — делимая периодическая группа.

p-матрица факторно делимой группы без кручения имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & ... & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & ... & \hat{a}_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & ... & \hat{a}_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \widehat{\mathbb{Z}}_p \end{matrix}$$

Заметим, что данная p-матрица является квадратной, но так как последние n строк нулевые, мы их опускаем из рассмотрения.

Во второй главе описываются матрицы Мальцева двойственных по Уорфилду групп.

В пятом параграфе мы рассматриваем группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(R, G)$, где G — локально свободная группа конечного ранга, R — группа без кручения ранга 1. Будем считать, что $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$.

Пусть χ — некоторая характеристика. Обозначим через $G_\chi = \{x \in G \mid$ $\mid char(x) \geqslant \chi\}$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 2 [13]. *Пусть R — группа без кручения ранга 1 и пусть $\chi =$ $= char(1_R)$. Если G — группа без кручения конечного ранга, то*

$$\mathrm{Hom}(R, G) \cong G_\chi.$$

Теорема 3. *Пусть* $\chi = char(1_R)$, G *— локально свободная группа с базисом* $x_1, x_2, ..., \ x_r$, *относительно которого она определена набором p-матриц Мальцева по всем простым числам* p*:*

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{n}_{12}^{(p)} & ... & \overline{n}_{1r}^{(p)} \\ 0 & \overline{1} & ... & \overline{n}_{2r}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}}} \\ \in \ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}}} \\ \dots\dots \\ \in \ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}}} \end{array}$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & ... & i_r^{(p)} \end{pmatrix}$. *Если* $\chi \leqslant (\alpha_r^{(p)})$, *то базис* $x_1, x_2, ..., x_r$ *принадлежит группе* G_χ *и группа* G_χ *определяется относительно этого базиса следующим набором p-матриц Мальцева:*

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{n}_{12}^{(p)} & ... & \overline{n}_{1r}^{(p)} \\ 0 & \overline{1} & ... & \overline{n}_{2r}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}-s}} \\ \in \ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}-s}} \\ \dots\dots \\ \in \ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}-s}} \end{array},$$

и тем же набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & ... & i_r^{(p)} \end{pmatrix}$, *где* s *— p-тая компонента характеристики* χ *в группе* R.

В шестом параграфе мы рассматриваем группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(G, R)$, где G — группа без кручения конечного ранга с фиксированным базисом $x_1, ..., x_r$, R — группа без кручения ранга 1. Группа $\mathrm{Hom}(G, R)$ называется двойственной в смысле Уорфилда [13]. Также показываем связь между двойственными по Уорфилду группами и модулями, являющимися взаимно ортогональными дополнениями друг друга.

Пусть $\tau = [(m_p)]$ некоторый тип. Группа без кручения конечного ранга G принадлежит классу $\mathfrak{M}_\tau$, если G является p–делимой для всякого простого p с $m_p = \infty$ и $OT(G) \leqslant \tau$. Заметим, что группы класса $\mathfrak{M}_\tau$ являются локально свободными.

Теорема 4 [13]. *Функтор* $G \longmapsto \mathrm{Hom}(G, R)$, *где* $type(R) = \tau$, *является двойственностью на категории* $\mathfrak{M}_\tau$ *(с гомоморфизмами в качестве морфизмов).*

Будем рассматривать матрицы Мальцева для одного фиксированного простого числа p. Обозначим через s — p-ую компоненту характеристики единицы в группе R. Пусть

$A_s = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & ... & b_{rr} \end{pmatrix}$ — p-матрица s-го слоя группы $G^{(p)}$.

Обозначим через $B^1, B^2, \dots, B^r$ — столбцы матрицы A_s. Через β_{ij} будем обозначать класс вычетов, представителем которого является элемент b_{ij} для всех $i = \overline{1,r}, j = \overline{1,r}$.

Теорема 5. *Пусть G — локально свободная группа с фиксированным базисом $x_1, ..., x_r$, R — группа без кручения ранга 1 такая, что $type(R) \geqslant OT(G)$ и бесконечности у данных типов на одинаковых местах. И пусть $G^* = \mathrm{Hom}(G, R)$ — группа, двойственная группе G, с дуальным базисом $x_1^*, ..., x_r^*$, который определяется следующим образом:*

$$x_i^*(x_j) = 0, \text{ если } i \neq j;$$

$$x_i^*(x_i) = 1.$$

Пусть $c_1, c_2, ..., c_r$ — целые числа, являющиеся представителями классов вычетов $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r$ по модулю p^s. Тогда

$$\frac{c_1 x_1^* + ... + c_r x_r^*}{p^s} \in G^* \Longleftrightarrow \gamma_1 B^1 + ... + \gamma_r B^r = 0 \text{ в кольце } \mathbb{Z}_{p^s}^r.$$

Определение 10. Пусть G — локально свободная группа с базисом $x_1, ..., x_r$, $F = \langle x_1, ..., x_r \rangle$, p — простое число, такое, что G не является p-делимой, $0 \leqslant s \in \mathbb{Z}$, $G_{(p^s)}$ — s-ый слой группы G. Тогда подмодуль $N = G_{(p^s)}/F$ модуля $M = (p^{-s}F)/F \cong \mathbb{Z}_{p^s}^r$ будем называть p^s*–модулем* группы G относительно базиса $x_1, ..., x_r$.

Теорема 6. *Пусть $\tau = [(m_p)]$ — некоторый тип, R — группа ранга 1 типа τ такая, что характеристика единицы равна (m_p). G — локально свободная группа класса $\mathfrak{M}_\tau$, $x_1, x_2, ..., x_r$ — базис группы G, для которого $(\alpha_1^{(p)}) \leqslant (m_p)$. Тогда p^{m_p}-модули двойственной в смысле Уорфилда группы $\mathrm{Hom}(G, R)$ относительно дуального базиса $x_1^*, x_2^*, ..., x_r^*$ являются ор-*

тогональными дополнениями p^{m_p}-модулей группы G относительно базиса $x_1, x_2, ..., x_r$ для всех простых чисел p с $m_p < \infty$.

Теорема 7. *Пусть G — локально свободная группа ранга r с базисом $x_1, x_2, ..., x_r$, относительно которого она определена набором p-матриц Мальцева по всем простым числам p:*

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{n}_{12}^{(p)} & ... & \overline{n}_{1r}^{(p)} \\ 0 & \overline{1} & ... & \overline{n}_{2r}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix},$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & ... & i_r^{(p)} \end{pmatrix}$, R — группа без кручения ранга 1, заданная типом Бэра. И пусть $\mathrm{Hom}(G, R)$ *— группа, двойственная группе G в смысле Уорфилда, такая что $type(R) \geqslant OT(G)$ и бесконечности у данных типов на одинаковых местах. Через s обозначим p-тую компоненту характеристики единицы в группе R. Тогда группа* $\mathrm{Hom}(G, R)$ *определяется следующим набором p-матриц Мальцева:*

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{s}_{r,r-1}^{(p)} & ... & \overline{s}_{r2}^{(p)} & \overline{s}_{r1}^{(p)} \\ 0 & \overline{1} & ... & \overline{s}_{r-1,2}^{(p)} & \overline{s}_{r-1,1}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & \overline{1} & \overline{s}_{21}^{(p)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_r}} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_{r-1}}} \\ \dots & \dots \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_2}} \\ \in & \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_1}} \end{matrix},$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_r^{(p)} & i_{r-1}^{(p)} & ... & i_1^{(p)} \end{pmatrix}$, где

$s_{k,k} = 1,$

$s_{k,k-1} = \widetilde{n}_{k-1,k}$ *(через $\widetilde{n}_{ij}$ будем обозначать разность $p^{\lambda_j - \lambda_i} - n_{ij}$),*

$s_{k,k-2} = \widetilde{n}_{k-2,k} - n_{k-2,k-1} s_{k,k-1},$

$s_{k,k-3} = \widetilde{n}_{k-3,k} - n_{k-3,k-2} s_{k,k-2} - n_{k-3,k-1} s_{k,k-1},$

$\dots$

$s_{k,k-i} = \widetilde{n}_{k-i,k} - n_{k-i,k-i+1} s_{k,k-i+1} - n_{k-i,k-i+2} s_{k,k-i+2} - \dots - n_{k-i,k-1} s_{k,k-1}.$

В третьей главе описываются матрицы Мальцева факторно делимых групп, двойственных по Арнольду.

Теорема 8. *Пусть G — факторно делимая группа ранга r с базисом $x_1, x_2, ..., x_r$, относительно которого она определена набором p-матриц Мальцева по всем простым числам p:*

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & ... & \alpha_{1n}^{(p)} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \alpha_{21}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & ... & \alpha_{2n}^{(p)} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_{m1}^{(p)} & \alpha_{m2}^{(p)} & ... & \alpha_{mn}^{(p)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{\chi_1} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_2} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_m} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_{m+1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_{m+2}} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \mathbb{Z}_{\chi_r} \end{matrix},$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & ... & i_r^{(p)} \end{pmatrix}$. *И пусть G^* — группа двойственная группе G в смысле Арнольда, тогда группа G^* определяется следующим набором p-матриц Мальцева:*

$$A^{*(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{21}^{(p)} & ... & \alpha_{m1}^{(p)} \\ 0 & 1 & ... & 0 & \alpha_{12}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & ... & \alpha_{m2}^{(p)} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_{1n}^{(p)} & \alpha_{2n}^{(p)} & ... & \alpha_{mn}^{(p)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \in & \mathbb{Z}_{\kappa_{m+1}} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_{m+2}} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_r} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_1} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_2} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \in & \mathbb{Z}_{\kappa_m} \end{matrix}$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ i_r^{(p)} & i_{r-1}^{(p)} & ... & i_1^{(p)} \end{pmatrix}$.

Кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_p K_p$, определяется характеристикой $\chi = (m_p)$, а именно: $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $m_p < \infty$, и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$, если $m_p = \infty$.

Из предыдущей теоремы мы получили следующий факт, доказанный Д. Арнольдом в [1].

Теорема 9 [1]. *Существует двойственность категорий факторно делимых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами на себя,* *такая что:*

(1) $r(G) = r(G^*)$;

(2) $r_p(G^*) = r(G) - r_p(G)$.

Следующие результаты показывают, что соответствующие модули взаимно двойственных по Арнольду групп являются взаимно ортогональными.

Определение 11. Пусть $A = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \ldots & \hat{a}_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{a}_{r1} & \ldots & \hat{a}_{rr} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \ldots\ldots \\ \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \end{matrix}$ — p–матрица группы G относительно базиса $x_1, \ldots, x_r$. Модуль N называется *p–адическим модулем группы G относительно базиса $x_1, \ldots, x_r$* тогда и только тогда, когда N совпадает с подмодулем модуля $(\widehat{\mathbb{Z}}_p)^r$, порожденным строками $(\hat{a}_{11}, \ldots, \hat{a}_{1r}), \ldots, (\hat{a}_{r1}, \ldots, \hat{a}_{rr})$.

Теорема 10. *Пусть G — факторно делимая группа, $x_1, \ldots, x_r$ — базис факторно делимой группы G. Тогда p-адические модули двойственной в смысле Арнольда группы G^* относительно дуального базиса $x_1^*, \ldots, x_r^*$ являются ортогональными дополнениями p-адических модулей группы G относительно базиса $x_1, \ldots, x_r$.*

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Александру Александровичу Фомину за введение в данную тематику и обсуждение изложенных в диссертации вопросов, за поддержку и всестороннюю помощь, профессору Андрею Валерьевичу Цареву за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] *D. M. Arnold,* A duality for quotient divisible abelian groups of finite rank, Pacific J. of Math., 42, 1972, 11–15.

[2] *D. M. Arnold,* Finite Rank Abelian Torsion Free Groups and Rings, Lecture Notes in Math., v.931, 1982.

[3] *R. Baer,* Abelian groups without elements of finite order, Duke Math. J., 3, No. 1, 1937, 68–122.

[4] *R. Beaumont, R. Pierce,* Torsion free rings, Illinois J. Math., 5, 1961, 61–98.

[5] *R. Beaumont, R. Pierce,* Subrings of algebraic number fields, Acta Sci. Math. (Szeged), 22, No. 3–4, 1961, 202–216.

[6] *D. Derry,* Uber Eine Klasse von Abelischen Gruppen, Proc. London Math. Soc., 43, 1938, 490–506.

[7] *A. A. Fomin,* Invariants for abelian groups and dual exact sequences, J. of Algebra, 322, 2009, 2544–2565.

[8] *A. A. Fomin, W. Wickless,* Quotient divisible Abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc., 126, 1998, 45–52.

[9] *A. A. Fomin,* Quotient divisible mixed groups, Contempt. Math., 273, 2001, 117–128.

[10] *B. Jonsson,* On direct decompositions of torsion free abelian groups, Math. Scand., 5, 1957, 230–235; 7, 1959, 361–371.

[11] *A. G. Kurosch,*Primitive torsions freie abelsche Gruppen vom endlichen Range, Ann. Math., 38, No. 1, 1937, 175–203.

[12] *C. E. Murley,* The classification of certain classes of torsion free abelian groups, Pasific J. Math., 40, No. 3, 1972, 647–665.

[13] *R. B. Warfield,*Jr., Homomorphisms and duality for torsion–free groups, Math. Z., 107, 1968, 189–200.

[14] *О. И. Давыдова,* Факторно делимые абелевы группы ранга 1, Фунд. и прикл. матем., 2007, т. 13, № 3, с. 25–33.

[15] *А. Г. Курош,* Теория групп, Москва, 1967.

[16] *А. И. Мальцев,* Абелевы группы конечного ранга без кручения, Матем. сб., 1938, № 4, с. 45–68.

[17] *Л. Фукс,* Бесконечные абелевы группы, Т.1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.

[18] *А. А. Фомин,* Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп, Фундаментальная и прикладная математика, 2007, 13 (3), с. 223–244.

Статьи, опубликованные в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций:

1. *Ю. В. Костромина,* Исследование некоторых групп гомоморфизмов абелевых групп // Математические заметки, 2012, Т. 91, № 6, С. 942–945.

2. *Ю. В. Костромина,* Двойственность Уорфилда и матрицы Мальцева // Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, Т. 17, № 8, С. 77–94.

3. *Ю. В. Костромина,* Двойственность Арнольда и матрицы Мальцева // Вестник Томского государственного университета, 2012, № 2 (18), С. 23–28.

Статьи в других научных изданиях:

4. *Ю. В. Костромина,* Группы гомоморфизмов абелевых групп // Математика, информатика, физика и их преподавание,Сборник статей к 75-летию кафедры математического анализа МПГУ, Москва, МПГУ, 2009, С. 94–96.

5. *Ю. В. Костромина,* Матрицы Мальцева группы, двойственной группе без кручения конечного ранга// Абелевы группы, Материалы Всероссийского симпозиума, посвященного 95-летию Л. Я. Куликова, Бийск, 2010, С. 39–41.

6. *Ю. В. Костромина,* Строение матриц Мальцева группы $Hom(R, G)$ // Математика, информатика и методика их преподавания, Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета, Москва, МПГУ, 2011, С. 62–63.

7. *Ю. В. Костромина,* Матрицы Мальцева группы, двойственной факторно делимой группе// Абелевы группы, Материалы Всероссийского симпозиума, Бийск, 2012, С. 32–35.