ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Математика и механика № 1(9)

МАТЕМАТИКА

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, М.М. Никольская (Савинкова)

IF-ГРУППЫ[1]

В настоящей статье исследуются *IF*-группы, то есть группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе. Доказаны некоторые общие свойства *IF*-групп, установлена связь между сепарабельными *IF*-группами и их базисными подгруппами. Получено полное описание периодически полных *IF*-групп.

Ключевые слова: *IF-группа*, *вполне характеристическая подгруппа*, *широкая подгруппа*, *инварианты Ульма – Капланского*, *периодически полная группа.*

Исследованию абелевых групп, содержащих собственные подгруппы, изоморфные самой группе, посвящен ряд работ. Например, в [1] рассматривались следующие группы:

I-группы – группы, изоморфные собственной подгруппе;

IP-группы – группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе;

ID-группы – группы, изоморфные собственному прямому слагаемому.

В частности, в [1] доказано, что если G – редуцированная абелева группа, такая, что G/pG – конечная группа для любого простого числа p, то G не является *ID*-группой.

В [2] исследуются абелевы p-группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе.

В [3] рассматриваются квазиминимальные группы. (Абелева группа A называется квазиминимальной, если она изоморфна всем ее подгруппам той же мощности, что и сама группа A.) В [3] доказано, в частности, что если G – бесконечная абелева p-группа, то G – квазиминимальная группа тогда и только тогда, когда $G \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$ или G является прямой суммой циклических групп порядка p.

В настоящей статье исследуются абелевы группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Определение 1. Абелеву группу назовем *IF*-группой, если она изоморфна некоторой собственной вполне характеристической подгруппе.

Всюду далее в этой статье под словом «группа» будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Для исследования *IF*-групп нам понадобятся следующие результаты.

Теорема 1 [4, теорема 2.8]. Пусть $B = \underset{k \in \boldsymbol{N}}{\oplus} B_k$, где $B_k = \oplus\, \mathbf{Z}(p^k)$. L – вполне характеристическая подгруппа группы B тогда и только тогда, когда $L = \underset{k \in \boldsymbol{N}}{\oplus} p^{n_k} B_k$, где:

[1] Авторы поддержаны ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 года.

1) $n_k \le k$ для всех $k \in \mathbf{N}$;

2) $n_k \le n_{k+r} \le n_k + r$ для всех $k \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$.

Теорема 2. Если $A = \underset{i\in I}{\oplus} A_i$ и S – вполне характеристическая подгруппа группы A, то $S = \underset{i\in I}{\oplus}(S \cap A_i)$, где $S \cap A_i$ – вполне характеристическая подгруппа группы A_i для каждого $i \in I$.

Эту теорему можно доказать, обобщая рассуждения, проведенные в [5] при доказательстве леммы 9.3.

Рассмотрим вначале случай ограниченных групп.

Теорема 3. Всякая ограниченная p-группа не является IF-группой.

Доказательство. Пусть B – ограниченная p-группа и p^m – наибольший из порядков элементов группы B. Тогда $B = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} B_k$, где $B_k = \oplus\, \mathbf{Z}(p^k)$ [5, с. 107]. Пусть L – вполне характеристическая подгруппа группы B. Тогда по теореме 1

$$L = p^{n_1} B_1 \oplus p^{n_2} B_2 \oplus \ldots \oplus p^{n_m} B_m ,$$

где n_k удовлетворяют неравенствам 1) и 2) этой теоремы. Если $n_m = 0$, то из того, что $n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_m = 0$, получаем, что $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m = B$, а следовательно, L не является собственной подгруппой группы B. Значит, $n_m \ge 1$. Имеем $p^{n_m} B_m = \oplus \boldsymbol{Z}\left(p^{m-n_m}\right)$, откуда следует, что в группе L нет циклических прямых слагаемых порядка p^m и поэтому L не изоморфна B. ■

Лемма 4. Пусть $A = \underset{i\in I}{\oplus} A_i$ и пусть $C = \underset{i\in I}{\oplus} C_i = \underset{i\in I}{\oplus} C_i'$, где C_i и C_i' – подгруппы группы A_i для каждого $i \in I$. Тогда $C_i = C_i'$ для каждого $i \in I$.

Доказательство. Покажем, что $C_i \subset C_i'$. Пусть $c_i \in C_i$. Тогда $c_i \in C$ и, следовательно, $c_i \in \underset{i\in I}{\oplus} C_i'$. Имеем $c_i = c_{i_1}' + c_{i_2}' + \ldots + c_{i_k}'$, где $c_{i_j}' \in C_{i_j}'$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$. Так как C_i и C_i' – подгруппы группы A_i для каждого $i \in I$, то $c_i \in A_i$, $c_{i_j}' \in A_{i_j}$. Учитывая, что A – прямая сумма групп A_i ($i \in I$), получаем, что для некоторого j ($j = \overline{1,k}$) $i_j = i$ и $c_{i_j}' = c_i$, а для всех остальных j $c_{i_j}' = 0$. Значит, $c_i \in C_i'$. Аналогично, $C_i' \subset C_i$ для каждого $i \in I$. Следовательно, $C_i = C_i'$ для каждого $i \in I$. ■

Теорема 5. Пусть $B = \underset{i\in I}{\oplus} B_i$, где B_i – вполне характеристическая подгруппа группы B для каждого $i \in I$. B является IF-группой тогда и только тогда, когда существует хотя бы один индекс $i \in I$, для которого группа B_i является IF-группой.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть S – собственная вполне характеристическая подгруппа группы B, такая, что $B \cong S$. Имеем $S = \underset{i\in I}{\oplus} S_i$, где $S_i = S \cap B_i$ – вполне характеристическая подгруппа группы B_i для каждого $i \in I$. Пусть φ – изоморфное отображение группы B на S. φ можно рассматривать как эндоморфизм группы B. Обозначим через φ_i ($i \in I$) ограничение эндоморфизма φ на подгруппе B_i. Так как B_i – вполне характеристическая подгруппа группы B, то φ_i – эндоморфизм группы B_i для каждого $i \in I$. Пусть $b \in B$, $b = b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \in B_{i_j}$,

$i_j \in I,\ j = \overline{1,k}$. Имеем

$$\varphi b = \varphi\left(b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}\right) = \varphi b_{i_1} + \varphi b_{i_2} + \ldots + \varphi b_{i_k} = \varphi_{i_1} b_{i_1} + \varphi_{i_2} b_{i_2} + \ldots + \varphi_{i_k} b_{i_k} .$$

Следовательно, $\varphi B = \sum\limits_{i \in I} \varphi_i B_i$. Так как $\varphi_i B_i \subset B_i$, то $\sum\limits_{i \in I} \varphi_i B_i = \bigoplus\limits_{i \in I} \varphi_i B_i$ [5, с. 50]. Итак, $S = \varphi B = \bigoplus\limits_{i \in I} \varphi_i B_i$ и $S = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$, где $\varphi_i B_i$ и S_i – подгруппы группы B_i для каждого $i \in I$. По лемме 4 $\varphi_i B_i = S_i$. Так как φ – изоморфизм, то $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ и, следовательно, $\mathrm{Ker}\,\varphi_i = 0$ для каждого $i \in I$. Значит, φ_i – изоморфное отображение B_i на S_i. Учитывая, что $S \neq B$, получаем, что существует хотя бы один индекс $i_0 \in I$, такой, что $B_{i_0} \cong S_{i_0}$ и $B_{i_0} \neq S_{i_0}$, т.е. группа B_{i_0} является *IF*-группой.

Достаточность. Пусть $B = \bigoplus\limits_{i \in I} B_i$, где B_i является вполне характеристической подгруппой группы B для каждого $i \in I$. Пусть для некоторого $i_0 \in I$ B_{i_0} является *IF*-группой. Докажем, что B является *IF*-группой. Так как B_{i_0} – *IF*-группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S_{i_0} группы B_{i_0} , такая, что $S_{i_0} \cong B_{i_0}$. Пусть $S = S_{i_0} + \left(\bigoplus\limits_{\substack{j \in I \\ j \neq i_0}} B_j\right)$. По свойствам прямых сумм [5, с. 50] получаем, что $S = S_{i_0} \oplus \left(\bigoplus\limits_{\substack{j \in I \\ j \neq i_0}} B_j\right)$. Так как $S_{i_0} \neq B_{i_0}$, то S – собственная подгруппа группы B. Из того, что $S_{i_0} \cong B_{i_0}$, получаем, что

$$S = S_{i_0} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i_0}} B_j\right) \cong B_{i_0} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i_0}} B_j\right) = \bigoplus_{i \in I} B_i = B ,$$

т.е. $S \cong B$. Пусть η – произвольный эндоморфизм группы B и $s \in S$. Тогда $s = s_{i_0} + b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \in B_{i_j}$, $i_j \in I,\ j = \overline{1,k}$, $s_{i_0} \in S_{i_0}$. Имеем

$$\eta s = \eta\left(s_{i_0} + b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}\right) = \eta s_{i_0} + \eta b_{i_1} + \eta b_{i_2} + \ldots + \eta b_{i_k} .$$

Так как B_{i_j} – вполне характеристические подгруппы группы B для каждого $j = \overline{1,k}$, то $\eta b_{i_j} \in B_{i_j}$. S_{i_0} является вполне характеристической подгруппой группы B_{i_0} , а B_{i_0} является вполне характеристической подгруппой группы B. Значит, S_{i_0} – вполне характеристическая подгруппа группы B, и поэтому $\eta s_{i_0} \in S_{i_0}$. Получили, что $\eta s \in S$ для произвольного элемента $s \in S$ и, следовательно, S – вполне характеристическая подгруппа группы B. Таким образом, B содержит собственную вполне характеристическую подгруппу S, такую, что $S \cong B$, т.е. B – *IF*-группа. ■

Следствие 6. Периодическая группа является *IF*-группой тогда и только тогда, когда некоторая ее p-компонента является *IF*-группой.

Доказательство. Действительно, пусть A – периодическая группа. Тогда $A = \bigoplus\limits_{p} A_p$ [5, с. 55], где A_p – p-компоненты группы A. A_p являются вполне характеристическими подгруппами группы A. По теореме 5 получаем утверждение следствия. ■

Теорема 7. Всякая ограниченная группа не является *IF*-группой.

Доказательство. Пусть B – ограниченная группа. Тогда B – периодическая группа. Понятно, что любая p-компонента группы B – также ограниченная p-группа. Поскольку по теореме 3 ограниченные p-группы не являются *IF*-группами, то в силу следствия 6 группа B не является *IF*-группой. ■

Рассмотрим нередуцированные и делимые p-группы.

Пусть A – p-группа. Через $A[p^k]$, где k – целое неотрицательное число, обозначим, как обычно [5, с. 15], следующую подгруппу группы A: $\{a\in A \mid p^k a = 0\}$; если же $k=\infty$, то полагаем $A[p^\infty]=A$. Если a – элемент порядка p^k группы A, то через $e(a)$ обозначим его экспоненту, то есть $e(a)=k$. Далее нам понадобится следующий результат, в котором мы используем то, что всякую абелеву группу A можно представить в виде $A = R\oplus D_0 \oplus \left(\bigoplus\limits_p D_p\right)$, где R – редуцированная группа, D_0 – делимая группа без кручения, D_p – делимые p-группы (p пробегает множество всех простых чисел; некоторые из групп R, D_0, D_p могут быть нулевыми).

Теорема 8 [6]. Пусть A – абелева группа, $A = R\oplus D_0 \oplus \left(\bigoplus\limits_p D_p\right)$, где R – редуцированная группа, D_0 – делимая группа без кручения, D_p – делимые p-группы. Подгруппа S группы A вполне характеристична в A тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих двух видов:

1) $S = R'\oplus\left(\bigoplus\limits_p D_p\left[p^{k_p}\right]\right)$, где $R' = \bigoplus\limits_p R_p'$ – периодическая вполне характеристическая подгруппа группы R (R_p' – p-компонента группы R') и $k_p \geq \sup\left\{e(r) \mid r\in R_p'\right\}$ (k_p – целое неотрицательное число или символ ∞);

2) $S = R'\oplus D_0 \oplus \left(\bigoplus\limits_p D_p\right)$, где R' – вполне характеристическая подгруппа группы R.

Теорема 9. Нередуцированная p-группа A является *IF*-группой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть является *IF*-группой.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A – нередуцированная p-группа. Тогда она имеет вид $A = R\oplus D_p$, где D_p – делимая p-группа, R – редуцированная p-группа. Пусть A – *IF*-группа, тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S\cong A$ и $S\neq A$. По теореме 8 S имеет один из следующих двух видов:

1) $S = R'\oplus D_p\left[p^{k_p}\right]$, где $k_p \geq \sup\{e(r) \mid r\in R'\}$, R' – вполне характеристическая подгруппа группы R;

2) $S = R'\oplus D_p$, R' – вполне характеристическая подгруппа группы R.

Рассмотрим первый случай. Пусть $k_p \neq \infty$, тогда $D_p\left[p^{k_p}\right] = \left\{d\in D_p \mid p^{k_p} d = 0\right\}$ – ограниченная группа, а значит, она не содержит делимых подгрупп. Следовательно, S – редуцированная группа. Так как A – нередуцированная группа и $S\cong A$, то получаем противоречие.

Если $k_p = \infty$, то первый случай совпадет со вторым.

Рассмотрим второй случай. Пусть $S = R' \oplus D_p$, где R' – вполне характеристическая подгруппа группы R. Так как $A = R \oplus D_p$ и $S \cong A$, то получаем, что $R' \cong R$ и R' – собственная подгруппа группы R. Значит, R – IF-группа.

Достаточность. Пусть A – нередуцированная p-группа вида $A = R \oplus D_p$. Пусть R – IF-группа. Тогда существует вполне характеристическая подгруппа R' группы R, такая, что $R' \cong R$ и $R' \neq R$. Рассмотрим группу $S = R' \oplus D_p$. S – собственная вполне характеристическая подгруппа группы A и $S \cong A$. Следовательно, A – IF-группа. ■

Теорема 10. Делимая p-группа не является IF-группой.

Доказательство. Пусть A – делимая p-группа, тогда $A = D_p$. Предположим противное, пусть A – IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$ и $S \neq A$. Тогда по теореме 8 имеют место следующие случаи:

1) $S = D_p\left[p^{k_p}\right]$, где k_p– любое целое неотрицательное число или ∞;

2) $S = D_p$.

Рассмотрим первый случай. Если $k_p \neq \infty$, то $S = D_p\left[p^{k_p}\right] = \left\{d \in D_p \mid p^{k_p} d = 0\right\}$ – ограниченная группа, а значит, она не является делимой группой. Так как A – делимая p-группа и $S \cong A$, то получаем противоречие.

Если $k_p = \infty$, то $S = D_p$, и первый случай совпадет со вторым.

Рассмотрим второй случай. Пусть $S = D_p$. Так как $A = D_p$, то S не является собственной подгруппой группы A. Значит, A – не является IF-группой. ■

Теорема 11. Делимая периодическая группа не является IF-группой.

Доказательство. Пусть A – делимая периодическая группа. Тогда $A = \underset{p}{\oplus} A_p$, где A_p – делимые p-группы. Применяя теорему 10 и следствие 6, получаем, что A не является IF-группой. ■

Теорема 12. Для нередуцированной периодической группы A следующие условия эквивалентны:

1) A является IF-группой;

2) некоторая p-компонента группы A не является делимой группой и имеет редуцированную часть, которая является IF-группой;

3) редуцированная часть группы A является IF-группой.

Доказательство.

1) ⇒ 2) Пусть A – нередуцированная периодическая группа, являющаяся IF-группой. Тогда по следствию 6 некоторая ее p-компонента является IF-группой, причем по теореме 10 эта p-компонента не является делимой группой. Применяя теорему 9, получаем, что в этой p-компоненте ее редуцированная часть является IF-группой.

2) ⇒ 3) Каждую из p-компонент A_p группы A можно записать в виде $A_p = R_p \oplus D_p$, где R_p – редуцированная p-группа, а D_p – делимая p-группа. Тогда редуцированная часть R группы A может быть записана в виде $R = \underset{p}{\oplus} R_p$. Так как хотя бы одна из групп R_p в силу условия 2 является IF-группой, то по следствию 6 группа R является IF-группой.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть R_p и D_p соответственно редуцированная и делимая части p-компоненты A_p группы A, то есть $A_p = R_p \oplus D_p$. Тогда имеем $A = \left(\underset{p}{\oplus} R_p\right) \oplus \left(\underset{p}{\oplus} D_p\right)$. Понятно, что $\underset{p}{\oplus} R_p$ – редуцированная часть группы A. В силу следствия 6 для некоторого простого числа p группа R_p является IF-группой. Применяя теорему 9, получаем, что для этого простого числа p группа A_p является IF-группой, а тогда по следствию 6 и группа A является IF-группой. ■

Теоремы 11 и 12 сводят исследование периодических IF-групп к исследованию редуцированных примарных IF-групп.

Перейдем теперь к рассмотрению сепарабельных p-групп. Рассмотрим вначале прямые суммы циклических p-групп. Так как любая ограниченная группа не является IF-группой, то нам нужно рассмотреть неограниченные группы.

Обозначим через $\mathbf{N}_0$ множество всех целых неотрицательных чисел, а через $f_A(k)$ – k-й инвариант Ульма – Капланского p-группы A, то есть ранг факторгруппы $p^kA[p] \,/\, p^{k+1}A[p]$. Нам понадобится следующее определение.

Определение 2. Пусть A – сепарабельная p-группа. Строго возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $i_0, i_1,\ldots, i_n,\ldots$ назовем допустимой для группы A, если для инвариантов Ульма – Капланского этой группы выполняется система равенств

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i), \quad k \in \boldsymbol{N}_0 . \tag{1}$$

Теорема 13. Пусть B – неограниченная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп и пусть все инварианты Ульма – Капланского группы B конечны. Группа B не является IF-группой тогда и только тогда, когда для нее существует только одна допустимая последовательность и эта последовательность имеет вид 0, 1, 2,…

Доказательство. *Необходимость.* Запишем группу B в виде $B = \underset{k \in \boldsymbol{N}}{\oplus} B_k$, где $B_k = \oplus\, \mathbf{Z}(p^k)$. Заметим, что для инвариантов Ульма – Капланского группы B справедливы равенства: $f_B(m) = r(B_{m+1})$ для всякого $m \in \mathbf{N}_0$, где $r(B_{m+1})$ – ранг группы B_{m+1}. Пусть группа B не является IF-группой. Предположим, что для группы B существует допустимая последовательность $r_0, r_1, r_2,\ldots$, отличная от допустимой последовательности 0, 1, 2,… В силу конечности инвариантов Ульма – Капланского неограниченной p-группы B имеем $r_0 \neq 0$.

Построим подгруппу L группы B следующим образом:

$$L = pB_1 \oplus p^2 B_2 \oplus \ldots \oplus p^{r_0} B_{r_0} \oplus p^{r_0} B_{r_0+1} \oplus p^{r_0+1} B_{r_0+2} \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus p^{r_1-1} B_{r_1} \oplus p^{r_1-1} B_{r_1+1} \oplus p^{r_1} B_{r_1+2} \oplus p^{r_1+1} B_{r_1+3} \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus p^{r_2-2} B_{r_2} \oplus p^{r_2-2} B_{r_2+1} \oplus p^{r_2-1} B_{r_2+2} \oplus p^{r_2} B_{r_2+3} \oplus \ldots \oplus p^{r_3-3} B_{r_3} \oplus \ldots,$$

то есть

$$L = \oplus p^{n_k} B_k ,$$

где $n_{r_j} = n_{r_{j+1}} = r_j - j$ ($j \in \mathbf{N}_0$); $n_{r_j+k} = r_j - j + k - 1$ ($1 < k < r_{j+1} - r_j + 1$). L – собственная подгруппа группы B. Используя теорему 1, получим, что L – вполне характеристическая подгруппа группы B. Более того, $L \cong B$ в силу равенства соответствующих инвариантов Ульма – Капланского. Действительно, из построения группы L и с учетом равенств (*) получаем для всякого $m \in \mathbf{N}_0$

$$f_L(m) = f_B(r_m) + f_B(r_m+1) + \ldots + f_B(r_{m+1} - 1) = f_B(m).$$

Значит $L \cong B$, но $L \neq B$. Это противоречит тому, что B не является IF-группой.

Достаточность. Если L – вполне характеристическая подгруппа группы B, то согласно теореме 1 она имеет вид

$$L = \underset{k \in \boldsymbol{N}}{\oplus} p^{n_k} B_k ,$$

где n_k удовлетворяет неравенствам 1) и 2) теоремы 1. Имеем

$$f_L(n) = r\left(\underset{n \in N}{\oplus} p^{n_k} B_k \mid p^{n_k} B_k = \oplus Z\left(p^{n+1}\right)\right) = r\left(\underset{n \in N}{\oplus} p^{n_k} B_k \mid k - n_k = n+1\right) =$$
$$= \sum_{k \in N}\left(r\left(p^{n_k} B_k\right) \mid k - n_k = n+1\right) = \sum_{k \in N}\left(r\left(B_k\right) \mid k - n_k - 1 = n\right) =$$
$$= \sum_{k \in N}\left(f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n\right).$$

Таким образом,

$$f_L(n) = \sum_{k \in N}\left(f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n\right). \qquad (2)$$

Из теоремы 1 следуют такие соотношения:

$$(k+1) - n_{k+1} - 1 \geq (k+1) - (n_k+1) - 1 = k - n_k - 1; \qquad (3)$$

$$(k+1) - n_{k+1} - 1 \leq (k+1) - n_k - 1 = (k - n_k - 1) + 1. \qquad (4)$$

Пусть $i_n = \min\limits_{k \in N}\{k-1 \mid k - n_k - 1 = n\}$. Тогда из (2) – (4) получаем

$$f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i). \qquad (5)$$

Среди сумм правой части равенств (5) могут быть и вырожденные, т.е. состоящие из одного слагаемого (это получается в случае, когда $i_{n+1} = i_n+1$). Пусть $L \cong B$. Тогда с учетом равенства (5) для всякого целого неотрицательного числа n

$$f_B(n) = f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i).$$

Последовательность $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ является допустимой для группы B, и поэтому в силу условия теоремы следует, что $i_n = n$ для всякого n. Учитывая, что $i_n = \min\limits_{k \in N}\{k-1 \mid k - n_k - 1 = n\}$, получаем $n_k = 0$ для всякого k, т.е. $L = B$. Значит, B не является IF-группой. ■

Рассмотрим произвольные сепарабельные p-группы.

Теорема 14. Сепарабельная p-группа не является IF-группой, если ее базисная подгруппа не является IF-группой.

Доказательство. Пусть A – сепарабельная p-группа, у которой базисная подгруппа B не является IF-группой. Не умаляя общности, можно считать, что A – редуцированная p-группа. Если A – ограниченная группа, то в силу теоремы 3 A не является IF-группой (заметим, что в этом случае базисная подгруппа группы A совпадает с A). Пусть A – неограниченная группа. Предположим, что A – IF-группа. Тогда существует собственная вполне характеристическая подгруппа S

группы A, такая, что $S \cong A$. Так как A – редуцированная сепарабельная p-группа, то A не содержит элементов бесконечной высоты [7, с. 7]. S – неограниченная вполне характеристическая подгруппа группы A, и поэтому S – широкая подгруппа группы A [4, с. 423]. Следовательно, $S \cap B$ – базисная подгруппа группы S [4, с. 422].

Если $S \cap B = 0$, то, учитывая, что факто-ргруппа любой p-группы по ее базисной подгруппе является делимой группой, получаем, что S – делимая группа, чего быть не может, так как A – редуцированная группа.

Если $S \cap B = B$, то S содержит базисную подгруппу B группы A. Имеем $S + B = A$, так как S – широкая подгруппа группы A; а из того, что $B \subset S$, следует $S + B = S$, чего быть не может, так как S – собственная подгруппа группы A.

Итак, $S \cap B$ – собственная ненулевая подгруппа группы B. Так как $S \cong A$, то базисные подгруппы групп S и A также изоморфны, т.е. $S \cap B \cong B$. Так как S – широкая подгруппа группы A, то $S \cap B$ является широкой подгруппой группы B [8, следствие 2.8]. Итак, мы получили, что базисная подгруппа B группы A имеет собственную вполне характеристическую подгруппу $S \cap B$, изоморфную B. Противоречие. ■

Теорема 15. Неограниченная сепарабельная p-группа с конечными инвариантами Ульма – Капланского не является IF-группой, если для нее существует только одна допустимая последовательность и эта последовательность имеет вид 0, 1, 2,…

Доказательство. Пусть A – неограниченная сепарабельная p-группа с конечными инвариантами Ульма – Капланского и пусть B – ее базисная подгруппа. Пусть 0, 1, 2,… – единственная допустимая последовательность для группы A. В силу теоремы 14 достаточно показать, что B не является IF-группой. Так как B является прямой суммой циклических групп и $f_A(k) = f_B(k)$ [5, с. 186], то по теореме 13 B – не IF-группа. ■

Следствие 16. Неограниченная сепарабельная p-группа не является IF-группой, если ее инварианты Ульма – Капланского конечны и образуют возрастающую последовательность.

Доказательство. Пусть A – неограниченная сепарабельная p-группа. Пусть последовательность инвариантов Ульма – Капланского группы A является возрастающей и все эти инварианты являются конечными. Рассмотрим допустимую последовательность $i_0, i_1,\ldots, i_n,\ldots$ Тогда выполняются равенства (1). Рассмотрим равенство

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i) = f_A(i_k) + f_A(i_k+1) + \ldots + f_A(i_{k+1}-1),$$

где k – произвольное неотрицательное целое число. Поскольку последовательность инвариантов Ульма – Капланского группы A возрастающая, то каждое такое равенство будет вырожденным, т.е. для каждого $k \in \mathbf{N}_0$ $f_A(k) = f_A(i_k)$, причем $i_k = k$. Таким образом, допустимая последовательность $i_0, i_1,\ldots, i_n,\ldots$ совпадает с последовательностью 0, 1, 2,…, а значит, по теореме 15 группа A не является IF-группой. ■

Периодически полной p-группой называется периодическая часть $T(\overline{B})$ p-адического пополнения $\overline{B}$ прямой суммы B циклических p-групп [7. С. 22]. Впервые эти группы стал изучать Л.Я. Куликов, он называл их замкнутыми группами [9].

Теорема 17. Периодическая полная p-группа является IF-группой тогда и только тогда, когда ее базисная подгруппа является IF-группой.

Доказательство. Учитывая теорему 14, надо доказать только достаточность. Пусть A – периодически полная p-группа и B – ее базисная подгруппа, являющаяся IF-группой. В силу теоремы 3 B – неограниченная группа, и поэтому A – также неограниченная группа. Так как B – IF-группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы B, такая, что $B \cong S$. Понятно, что S является собственной широкой подгруппой группы B. Существует собственная широкая подгруппа S^* группы A, такая, что $S^* \cap B = S$ [4, теорема 2.9], причем S – базисная подгруппа группы S^* [4, с. 422]. S^* как широкая подгруппа периодически полной группы является периодически полной группой [10]. Итак, получили, что в группе A есть собственная вполне характеристическая подгруппа S^*, такая, что базисная подгруппа B группы A изоморфна базисной подгруппе S группы S^*. Так как A и S^* – периодически полные группы, то $A \cong S^*$, то есть A является IF-группой. ■

Теорема 18. Для периодически полной p-группы A с конечными инвариантами Ульма – Капланского следующие условия эквивалентны:

1) A не является IF-группой;

2) базисная подгруппа группы A не является IF-группой;

3) A – ограниченная группа или A – неограниченная группа, для которой существует только одна допустимая последовательность и эта последовательность имеет вид 0, 1, 2,…

Доказательство.

1) ~ 2) Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно следует из теоремы 17.

2) ⇒ 3) Пусть B – базисная подгруппа группы A, причем B не является IF-группой. Если A – ограниченная группа, то $A = B$. Если же A – неограниченная группа, то B – неограниченная группа. Учитывая теорему 13 и то, что для каждого $k \in \mathbf{N}_0$ $f_A(k) = f_B(k)$ [5, с. 186], получаем, что для группы A существует только одна допустимая последовательность и эта последовательность имеет вид 0, 1, 2,…

3) ⇒ 1) Если A – ограниченная группа, то по теореме 3 A не является IF-группой. Если A – неограниченная группа, для которой существует только одна допустимая последовательность и эта последовательность имеет вид 0, 1, 2,…, то ее базисная подгруппа B обладает теми же свойствами. Тогда по теореме 13 B не является IF-группой, но тогда с учетом эквивалентности 2) ~ 1) и группа A не является IF-группой. ■

Следствие 19. Если для периодически полной p-группы A существует такое натуральное число m, что $f_A(n) = m$ для каждого $n \in \mathbf{N}_0$, то A является IF-группой.

Доказательство. Пусть A – периодически полная p-группа и пусть для каждого $n \in \mathbf{N}_0$ $f_A(n) = m$, где m – некоторое натуральное число. Понятно, что A неограниченная группа. Рассмотрим последовательность 1, 2, 3,… Эта последовательность допустима для группы A, так как $f_A(n) = f_A(n+1)$ для каждого $n \in \mathbf{N}_0$. Следовательно, по теореме 18 группа A является IF-группой. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beaumont R.A.*, *Pierce R.S.* Isomorphic direct summands of abelian groups // Math. Annalen. 1964. V. 153. P. 21 – 37.
2. *Monk G.S.* Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Ill. J. Math. 1970. V. 14. No. 1. P. 164 – 177.
3. *Goldsmith B.*, *Óhógáin S.*, *Wallutis S.* Quasi-minimal groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. No. 8. P. 2185 – 2195.

4. *Benabdallah K.M., Eisenstadt B.J., Irwin J.M., and Poluianov E.W.* The structure of large subgroups of primary Abelian groups // Acta Math. Acad. Scient. Hung. 1970. V. 21. No. 3 – 4. P. 421 – 435.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.
6. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56 – 92.
7. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.
8. *Pierce R.S.* Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. Chicago, 1963. P. 215 – 310.
9. *Куликов Л.Я.* К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. 1945. № 16. С. 129 – 162.
10. *Гриншпон С.Я.* О некоторых классах примарных абелевых групп почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам // Изв. вузов. Математика. 1976. № 2. С. 23 – 30.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: grinshpon@math.tsu.ru
НИКОЛЬСКАЯ (Савинкова) Мария Михайловна – ассистент кафедры высшей математики Томского государственного архитектурно-строительного университета, аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: mary_s83@mail.ru

Статья принята в печать 10.02.2010 г.