На правах рукописи

Пчелинцев Валерий Анатольевич

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ВАРИАЦИОННЫМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДАМИ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Национальный исследовательский Томский государственный университет", на кафедре математического анализа.

Научный руководитель: член-корреспондент РАО, доктор физико-математических наук, профессор
Александров Игорь Александрович

Официальные оппоненты:
Чуешев Виктор Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Кемеровский государственный университет", кафедра математического анализа, профессор

Садритдинова Гулнора Долимджановна, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Томский государственный архитектурно-строительный университет", кафедра высшей математики, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск)

Защита состоится 07 ноября 2013 г. в 14 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.21, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждениия высшего профессионального образования "Национальный исследовательский Томский государственный университет", по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, II уч. корпус, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 26 сентября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета А.Н. Малютина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Ушедший в историю XX век был отмечен выдающимися достижениями в области геометрической теории однолистных функций и конформных отображений. Эта теория, возникшая первоначально на пути непосредственного развития классической теории функций комплексного переменного, за последние полвека сформировалась в одну из актуальных и интенсивно развивающихся областей современного математического анализа. Значимое место в данной теории уделяется экстремальным задачам, которые находятся в тесной связи с основными задачами как самой теории, так и многочисленными её приложениями. Начало систематическому исследованию экстремальных задач геометрической теории однолистных функций положили работы П. Кёбе, посвященные соответствию границ при конформных отображениях. Во втором десятилетии прошлого века большой вклад в развитие зарождавшейся теории внёс К. Каратеодори. Он доказал теорему о сходимости последовательности областей к ядру и рассмотрел вопрос о граничном соответствии, предложив теорию простых концов и доказав теорему о соответствии границ при конформных отображениях. Эти и многие другие задачи получили затем мощный импульс благодаря исследованиям М.А. Лаврентьева, Г.М. Голузина, П.П. Куфарева, М. Шиффера, Ю.Е. Аленицына, Н.А. Лебедева, И.А. Александрова и многих других авторов[1].

Одной из основных задач геометрической теории однолистных функций в прошлом столетии была проблема коэффициентов однолистных функций, сформулированная в 1916 г. Л. Бибербахом[2] и разрешенная в 1984 году Л. де Бранжем[3]. Привлекая внимание многих математиков, эта экстремальная задача способствовала возникновению новых идей и методов геометрической теории функций.

Большое внимание в геометрической теории однолистных функций уделяется различным экстремальным задачам, в которых речь идёт об экстремумах и множествах значений функционалов, характеризующих свойства конформных отображений. К числу трудных задач принадлежат задачи о нахождении множеств значений функционалов, зависящих от значений пар функций и их производных в фиксированных точках единичного круга и его внешности.

[1] *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. Киев, 2011.

[2] *Bieberbach L.* Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen weiche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitten // Sitzgsher. Preuss Akad. Wiss. 1916. Bd. 138. S. 940–955.

[3] *Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. Vol. 154, № 1-2. P. 137–152.

Для решения задач в геометрической теории функций были предложены новые методы, поскольку методы классического вариационного исчисления оказались недостаточными. Первым по времени своего возникновения состоятельным методом геометрической теории функций был метод площадей, разработанный в исследованиях Т. Гронуолла[4]. Под влиянием гипотезы Бибербаха в 1923 году К. Лёвнер[5] создал параметрический метод. В 30-40-х годах XX века возникли методы граничных и внутренних вариаций Шиффера[6], вариационный метод Голузина[7]. Трудные экстремальные задачи геометрической теории функций в большинстве случаев требуют одновременного использования нескольких методов исследования. В ряде вопросов общего характера обнаружилось, что некоторые методы успешно дополняют друг друга. Известным примером сочетания различных методов служит вариационно-параметрический метод Куфарева[8].

В данной диссертации параметрическим и вариационным методами исследуются задачи о нахождении множеств значений функционалов, заданных на различных классах однолистных функций. В качестве областей определения функционалов в работе рассматриваются следующие классы:
S – класс голоморфных однолистых в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $w = f(z)$ таких, что $f(0) = 0, f'(0) = 1$ и его подкласс $S_M = \{f \in S : |f(z)| < M,\ M \geq 1\}$;
Σ_0 – класс мероморфных однолистных в области $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ функций $w = F(\zeta)$, имеющих в проколотой окрестности бесконечно удалённой точки разложение вида $F(\zeta) = \zeta + a_0 + a_1/\zeta + ... + a_n/\zeta^n + ...$ и не принимающих в U^* нулевого значения;
$\mathfrak{M}$ – класс всех пар функций $(f(z), F(\zeta))$, $f(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$, мероморфных однолистных и без общих значений соответственно в круге U и в его внешности U^*;
$\mathfrak{M}'$ – класс всех пар функций $(f(z), F(\zeta))$, $f(z) \in S$, $F(\zeta) \in \Sigma_0$.

Из вышесказанного следует, что рассматриваемая в данной работе тематика является широко известной и актуальной.

Целями работы являются:
— развитие вариационного метода Голузина и параметрического метода Лёвнера;

[4] *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975.
[5] *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd. 89. S. 103–121.
[6] *Schiffer M.* Variation of the Green function and theory of the p-valued functions // Amer. J. Math. 1943. Vol. 65. P. 341–360.
[7] *Голузин Г. М.* Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19, № 2. С. 203-236.
[8] Труды П.П. Куфарева : (к 100-летию со дня рождения). Томск, 2009.

— нахождение новых случаев интегрирования уравнения Лёвнера;
— исследование множества значений конкретного функционала, зависящего от значений функций в фиксированных точках, в задаче о неналегающих областях;
— отыскание множеств значений двух функционалов заданных на множестве пар однолистных функций;

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, методы теории функций комплексного переменного, методы геометрической теории однолистных функций, методы аналитической теории дифференциальных уравнений, вариационный метод Голузина и параметрический метод Лёвнера.

Научная новизна. Основные результаты диссертационного исследования, полученные автором, являются новыми и определяются следующими положениями, выносимыми на защиту:

• Путём интегрирования уравнения Лёвнера найдено множество значений производной Шварца на классах S и S_M. Указаны граничные функции.

• Найдено множество значений одного функционала в задаче о неналегающих областях.

• Указано множество значений функционала, зависящего от значений функций класса $\mathfrak{M}'$ в фиксированных точках единичного круга и его внешности.

• Указано множество значений функционала, зависящего от значений производных отображений класса $\mathfrak{M}'$ в фиксированных точках единичного круга и его внешности.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут использоваться в научных исследованиях и спецкурсах для студентов и аспирантов механико-математических факультетов, специализирующихся по теории функций комплексного переменного. Используемые методы исследования данной работы могут быть полезны при решении экстремальных задач геометрической теории однолистных функций.

Достоверность и обоснованность всех полученных результатов. Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое обоснование в форме теорем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа ММФ ТГУ (руководитель профессор И.А. Александров), на научном семинаре отдела анализа и геометрии в Институте математики им. С.Л. Соболева (руководитель академик Ю.Г. Решетняк), а также докладывались на научных конференциях:

1. Современные проблемы теории функций и их приложения, Саратов, 27 января – 3 февраля 2012.

2. III Всероссийская молодежная конференция "Современные проблемы математики и механики", Томск, 23 – 25 апреля 2012.

3. Международная молодежная конференция "Современные методы механики", Томск, 19 – 20 сентября 2012.

4. 51-ая Международная научная студенческая конференция "Студент и науно-технический прогресс", Новосибирск, 12 – 18 апреля 2013.

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в восьми работах, в том числе четыре работы в журналах из перечня ВАК [1–4].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка обозначений. Работа изложена на 95 страницах и содержит 3 рисунка. Список литературы включает 68 наименований, в том числе 8 работ автора по теме диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор известных результатов, формулируется цель и излагается содержание работы, обосновывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Первая глава посвящается методу внутренних вариаций в геометрической теории функций комплексного переменного. Рассматривается вариант этого метода предложенный Г.М. Голузиным. Представлены вариационные формулы в классах S, Σ_0 и $\mathfrak{M}$. Результаты этой главы являются широко известными и используются в главах 3 и 4 диссертации.

Во второй главе параметрическим методом Лёвнера решается задача о нахождении множества Δ значений производной Шварца

$$\{f(z_0), z_0\} = \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2$$

при фиксированном z_0, $z_0 \in U$, на классах S и S_M с указанием граничных функций.

В разделе 2.1 приводятся определение и необходимые свойства производной Шварца.

В разделе 2.2 дано представление производной Шварца в виде дифференциального уравнения Лёвнера. Доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, $0 \le \tau < M < \infty$, – кусочно-непрерывная функция и $\zeta = \zeta(\tau, z; \mu)$, – решение уравнения Лёвнера. Тогда имеет место равенство*

$$\frac{d}{d\tau}\{\zeta, z\} = -12\frac{\mu^2(\tau)\zeta'^2}{(\mu(\tau)-\zeta)^4},$$

где ζ' означает частную производную функции ζ по переменной z.

Установлены следующие следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Множество точек*

$$\{f(z_0;\mu), z_0\} = -12\int\limits_0^\infty \frac{\mu^2(\tau)\zeta'^2}{(\mu(\tau)-\zeta)^4}\,d\tau$$

плотно в Δ на классе S.

Следствие 2. *Множество точек*

$$\{f(z_0;\mu), z_0\} = -12\int\limits_0^{\ln M} \frac{\mu^2(\tau)\zeta'^2}{(\mu(\tau)-\zeta)^4}\,d\tau$$

плотно в Δ на классе S_M.

В разделе 2.3 получены неравенства, которые определяют множество значений производной Шварца на классе S. Указаны граничные функции.

Теорема 2. *Множеством значений функционала $\{f(z_0), z_0\}$ на классе S при $z_0 = 0$ является замкнутый круг с центром в нуле и радиуса 6. Граничная точка*

$$\{f(z_0), z_0\} = 6e^{i\theta},\ 0 \le \theta < 2\pi,$$

вносится только функциями

$$L(z,\varphi,\lambda) = \frac{z}{1 - 2\cos\lambda\, e^{i\varphi}z + e^{2i\varphi}z^2}$$

при $0 \le \lambda \le \pi$ и $e^{2i\varphi} = -e^{i\theta}$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in S$ и z_0 – фиксированная точка из $U \backslash \{0\}$. Тогда множество значений функционала $\{f(z_0), z_0\}$ на классе S определяется неравенством*

$$|\{f(z_0), z_0\}| \leq \frac{6}{(1-|z_0|^2)^2}\,.$$

Граничная точка

$$\{f(z_0), z_0\} = -\frac{6e^{i\theta}}{(1-|z_0|^2)^2}\,,\ 0 \leq \theta < 2\pi,$$

реализуется только функциями

$$f(z, \varphi, \lambda, z_0) = \frac{z(az+1)}{bz^2+2cz+1}\,,$$

где

$$a = \frac{\overline{z_0} - e^{2i\varphi} z_0}{1 - e^{2i\varphi} z_0^2}\,,$$

$$b = \frac{\overline{z_0}^2 - 2\cos\lambda\, e^{i\varphi}\overline{z_0}(1-e^{2i\varphi}z_0^2) + e^{2i\varphi}(1-|z_0|^4) - e^{4i\varphi}z_0^2}{1 - 2\cos\lambda\, e^{i\varphi}z_0(1-e^{2i\varphi}z_0^2) - e^{4i\varphi}z_0^4}\,,$$

$$c = \frac{\overline{z_0} - \cos\lambda\, e^{i\varphi}(1+|z_0|^2)(1-e^{2i\varphi}z_0^2) + e^{2i\varphi}z_0(1-|z_0|^2) - e^{4i\varphi}z_0^3}{1 - 2\cos\lambda\, e^{i\varphi}z_0(1-e^{2i\varphi}z_0^2) - e^{4i\varphi}z_0^4}$$

при $0 \leq \lambda \leq \pi$ и $e^{2i\varphi} = -e^{i\theta}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

В разделе 2.4 установлено соотношение между модулями функции, её производной и её производной Шварца на классе S_M, $1 < M < \infty$.

Теорема 4. *Пусть $f(z) \in S_M$ и z_0 – фиксированная точка из круга U. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$|\{f(z_0), z_0\}| + \frac{6M^2|f'(z_0)|^2}{(M^2-|f(z_0)|^2)^2} \leq \frac{6}{(1-|z_0|^2)^2}\,.$$

Граничная точка

$$\{f(z_0), z_0\} = -\frac{6M^2|f'(z_0)|^2}{(M^2-|f(z_0)|^2)^2} + \frac{6e^{i\theta}}{(1-|z_0|^2)^2}\,,\ 0 \leq \theta < 2\pi,$$

реализуется только функциями, отображающими круг U на круг $W = \{w \in \mathbb{C} : |w| < M\}$ с надлежащими разрезами.

Граничной функцией для $\{f(z_0), z_0\} \neq 0$ в точке $z_0 = 0$ является функция

$$f_M(z, \varphi, \lambda) = \frac{2z}{h(z,\varphi,\lambda) + \sqrt{h^2(z,\varphi,\lambda) - \dfrac{4}{M^2}\, e^{2i\varphi}z^2}}\,,$$

где

$$h(z,\varphi,\lambda) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)\cos\lambda\, e^{i\varphi}z + e^{2i\varphi}z^2$$

при $0 \le \lambda \le \pi$, $e^{2i\varphi} = -e^{i\theta}$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Под радикалом понимается та непрерывная ветвь, которая обращается в единицу при $z \to 0$.

В третьей главе исследуется множество значений конкретного функционала в задаче о неналегающих областях.

В разделе 3.1 дана постановка задачи. Требуется найти множество E значений функционала

$$\xi(f,F) = \ln\frac{f^{\gamma}(z_0)}{F^{1-\gamma}(\zeta_0)} \tag{1}$$

при фиксированных γ, z_0 и ζ_0, $0 < \gamma < 1$, $0 < |z_0| < 1$ и $1 < |\zeta_0| < \infty$, на классе $\mathfrak{M}$.

Для исследования этой задачи используется вариационный метод Голузина. Установлено, что объединение образов единичного круга и его внешности при отображении граничной парой функций не имеет внешних точек.

В разделе 3.2 получены функционально-дифференциальные уравнения для граничных функций.

Теорема 5. *Каждая граничная пара функций $(f(z),F(\zeta))$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений*

$$e^{-i\alpha}\frac{\big((1-2\gamma)f(z) - (1-\gamma)f(r) + \gamma F(\rho)\big)f'^2(z)}{f(z)(f(z)-F(\rho))(f(z)-f(r))} = \frac{A}{z(r-z)(1-rz)},$$

$$e^{-i\alpha}\frac{\big((1-2\gamma)F(\zeta) - (1-\gamma)f(r) + \gamma F(\rho)\big)F'^2(\zeta)}{F(\zeta)(F(\zeta)-F(\rho))(F(\zeta)-f(r))} = \frac{B}{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)},$$

где $0 \le \alpha < 2\pi$, $r = |z_0|$, $\rho = |\zeta_0|$,

$$A = e^{-i\alpha}\gamma\,\frac{rf'(r)}{f(r)}(1-r^2) > 0,\ B = e^{-i\alpha}(1-\gamma)\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}(\rho^2-1) > 0.$$

Проведен анализ полученных уравнений. Установлено, что общей границей образа единичного круга и его внешности при отображении граничной парой функций является замкнутая жорданова аналитическая кривая.

В разделе 3.3 проведено интегрирование полученных уравнений по специально выбранным путям интегрирования. При этом первое из уравнений интегрировалось по z от 0 до r, от 0 до -1, затем по дуге $|z| = 1$ против часовой стрелки от -1 до $e^{i\varphi}$ $(\pi \le \varphi < 3\pi)$, а второе по ζ от ρ до ∞ и от

1 до ρ. Найдено уравнение границы множества E значений функционала (1).

Теорема 6. *Множество E значений функционала* (1) *на классе $\mathfrak{M}$ ограничено кривой заданной уравнением*

$$\frac{(1-\gamma)\mathbf{\Pi}(p,k')}{\gamma\mathbf{\Pi}(n,k)} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} - \frac{1}{2}\,\frac{q\mathbf{\Pi}(\phi,m,k) - h\mathbf{F}(\phi,k)}{\gamma h^{-1}\mathbf{\Pi}(n,k)}\,\frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)} + \lambda i.$$

где

$$\mathbf{\Pi}(\psi,l,\kappa) = \int\limits_0^\psi \frac{dt}{(1+l\sin^2 t)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 t}}\,,\quad \mathbf{\Pi}(\pi/2,l,\kappa) = \mathbf{\Pi}(l,\kappa)$$

– эллиптические интегралы третьего рода (*соответственно неполный и полный*),

$$\mathbf{F}(\psi,\kappa) = \int\limits_0^\psi \frac{dt}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 t}}\,,\quad \mathbf{F}(\pi/2,\kappa) = \mathbf{K}(\kappa)$$

– эллиптические интегралы первого рода (*соответственно неполный и полный*),

$$p = \frac{(1-2\gamma)F(\rho)}{\gamma F(\rho) - (1-\gamma)f(r)}\,,\quad n = \frac{(1-2\gamma)f(r)}{\gamma F(\rho) - (1-\gamma)f(r)},$$

$$k = \sqrt{\frac{(1-\gamma)f(r)}{(1-\gamma)f(r) - \gamma F(\rho)}}\,,\quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

$$\phi = \arcsin\frac{h^2}{1-\gamma}\,,\quad m = -\frac{1-\gamma}{h^2}\,,$$

$$h = \sqrt{\frac{\gamma F(\rho) - (1-\gamma)f(r)}{F(\rho) - f(r)}}\,,\quad 0 \le \lambda < 2.$$

Из теоремы 6 имеем следующие результаты.

Следствие 3. *Множество E значений функционала* (1) *при $\gamma = 1/2$ на классе $\mathfrak{M}$ ограничено следующей кривой*

$$\xi(f,F) = \frac{1}{2}\ln\left(-4^2 d\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+d^{2n}}{1-d^{2n-1}}\right)^8\right), \tag{2}$$

где

$$d = e^{-\pi\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)} + \frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right\} + \lambda i.$$

На следующих рисунках приведены графики кривой (2) при некоторых значениях r и ρ.

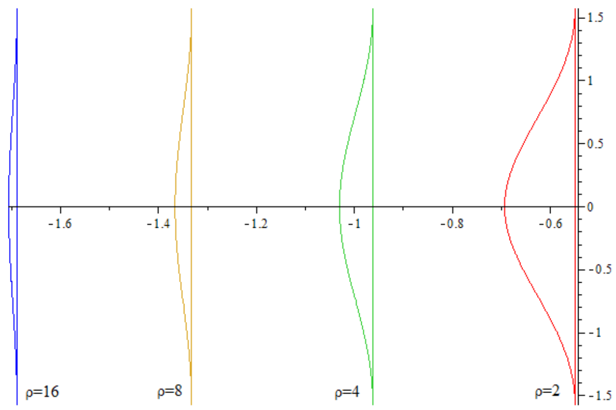

Рис. 1: Кривая (2) при $r = 0.5$ и $\rho = 2, 4, 8, 16$.

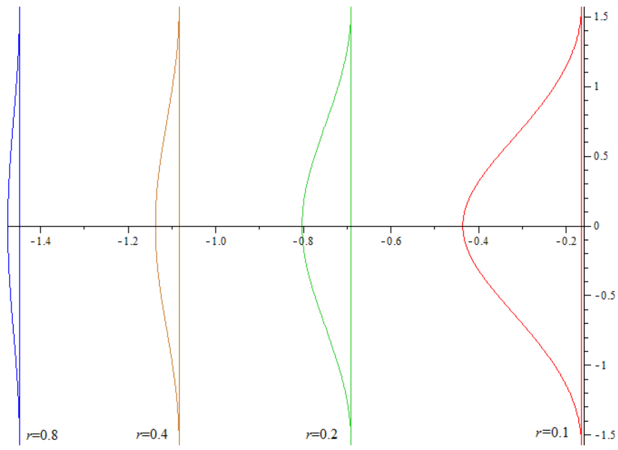

Рис. 2: Кривая (2) при $r = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ и $\rho = 2$.

Следствие 4. *В классе* $\mathfrak{M}$ *имеет место неравенство*

$$\left|\frac{f(r)}{F(\rho)}\right| \le -e^{2\xi(0)}\ .$$

Знак равенства реализуется при всяких r, $0 < r < 1$, *и* ρ, $1 < \rho < +\infty$.

Следствие 5. *В классе* $\mathfrak{M}$ *справедливо неравенство*

$$-e^{2\xi(0)} \le \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)(\rho^2-1)}}\ .$$

Знак равенства реализуется только при $\rho = \dfrac{1}{r}$.

Следствие 6. *Множество значений функционала* $\dfrac{f'(0)}{F(\rho)}$ *или функционала* $\dfrac{f(r)}{F'(\infty)}$ *на классе* $\mathfrak{M}$ *есть круг*

$$\left|\frac{f'(0)}{F(\rho)}\right| \le 4\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{\mathbf{K}\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right\},$$

$$\left|\frac{f(r)}{F'(\infty)}\right| \le 4\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-r^2})}{\mathbf{K}(r)}\right\}$$

с исключённым центром.

В главе 4 вариационным методом Голузина исследуются задачи о множествах значений двух функционалов заданных на классе пар функций однолистных в системе круг – внешность круга.

В разделе 4.1 ставится задача найти множество Δ_0 значений функционала

$$\Phi(f,F) = \ln\left(\frac{f(z_0)}{z_0}\right)^{\lambda}\left(\frac{\zeta_0}{F(\zeta_0)}\right)^{1-\lambda} \tag{3}$$

при фиксированных λ, z_0 и ζ_0, $0<\lambda<1$, $|z_0|<1$ и $|\zeta_0|>1$, на классе $\mathfrak{M}'$.

Установлено, что образ единичного круга и его внешности при отображении граничными функциями не имеют внешних точек.

В разделе 4.2 получена система функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций.

Теорема 7. *Каждая граничная пара функций* $(f(z),F(\zeta))$ *функционала* (3) *удовлетворяет в* U *и* U^* *системе функционально-дифференциальных уравнений*

$$e^{-i\alpha}\left(\frac{f(r)}{f(r)-f(z)}\right)\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 = \frac{Az^2+Bz+\overline{A}}{2(r-z)(rz-1)},$$

$$e^{-i\alpha}\left(\frac{F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\rho)}\right)\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2 = \frac{A^*\zeta^2+B^*\zeta+\overline{A^*}}{2(\zeta-\rho)(1-\rho\zeta)},$$

где $0\le\alpha<2\pi$, $r=|z_0|$, $\rho=|\zeta_0|$,

$$A = \left(e^{-i\alpha}\left(I(r)-1\right) - e^{i\alpha}\left(\overline{I(r)}+1\right)\right)r,$$

$$B = e^{-i\alpha}\left((I(r)+1)r^2 - (I(r)-1)\right) + e^{i\alpha}\left((\overline{I(r)}+1)r^2 - (\overline{I(r)}-1)\right),$$

$$A^* = \left(e^{-i\alpha}\,(\overline{J(\rho)}-1) - e^{i\alpha}\,(J(\rho)+1)\right)\rho,$$

$$B^* = e^{-i\alpha}\left((J(\rho)+1) - (J(\rho)-1)\rho^2\right) + e^{i\alpha}\left((\overline{J(\rho)}+1) - (\overline{J(\rho)}-1)\rho^2\right),$$

$$I(r) = \frac{rf'(r)}{f(r)}\,,\ J(\rho) = \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}\,.$$

В разделе 4.3 проведен анализ и выполнено интегрирование полученных уравнений. Первое уравнение из системы интегрировалось по z от 0 до r, а второе по ζ от ρ до ∞. Установлено, что граничные функции отображают единичный круг и его внешность на плоскость с разрезом по одной аналитической кривой. Указано, что множеством значений функционала (3) является круг.

Теорема 8. *Пусть $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$ и r, ρ – фиксированные точки из круга U и его внешности U^*. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda} + \ln\left(1-r^2\right)^{\lambda}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^{1-\lambda}\right| \le$$

$$\le \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)^{1-\lambda}. \quad (4)$$

Это неравенство определяет множество значений функционала (3) на классе $\mathfrak{M}'$.

Из теоремы 8 следуют следующие следствия.

Следствие 7. *Если в неравенстве (4) положить $\lambda = 1/2$, то*

$$\left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right) + \ln\left(1-r^2\right)\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\right| \le \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right).$$

Это неравенство определяет множество значений функционала $\Phi(f, F) = \ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)$ на классе $\mathfrak{M}'$.

Следствие 8. *Если в неравенстве (4) положить $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$, то получим неравенства*

$$\left|\ln\frac{f(r)}{r} + \ln(1-r^2)\right| \le \ln\frac{1+r}{1-r}\,,$$

$$\left|\ln\frac{\rho}{F(\rho)} + \ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\right| \le \ln\frac{\rho+1}{\rho-1}\,,$$

которые определяют множества значений функционалов $\ln f(r)/r$ *и* $\ln \rho/F(\rho)$ *на классах* S *и* Σ_0 *соответственно.*

Замечание 1. *Полученные в следствии (8) неравенства согласуются с раннее установленными результатами*[9].

В разделе 4.4 рассматривается задача о нахождении множества Δ_1 значений функционала

$$\Psi(f,F)=\ln\frac{f'(z_0)}{F'(\zeta_0)} \tag{5}$$

при фиксированных z_0 и ζ_0, $|z_0|<1$ и $|\zeta_0|>1$, на классе $\mathfrak{M}'$.

Установлено, что образ единичного круга и его внешности при отображении граничными функциями не имеют внешних точек. Получена система функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций.

Теорема 9. *Каждая граничная пара функций* $(f(z),F(\zeta))$ *функционала* (5) *удовлетворяет в* U *и* U^* *системе функционально-дифференциальных уравнений*

$$e^{-i\alpha}\left(\frac{f(r)(f(r)-2f(z))}{(f(z)-f(r))^2}\right)\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{V(z)}{(z-r)^2\left(z-\dfrac{1}{r}\right)^2}, \tag{6}$$

$$e^{-i\alpha}\left(\frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2}\right)\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2=\frac{V^*(\zeta)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\dfrac{1}{\rho}\right)^2}, \tag{7}$$

где $0\le\alpha<2\pi$, $r=|z_0|$, $\rho=|\zeta_0|$,

$$V(z)=Az^4+Bz^3+(C+\overline{C})z^2+\overline{B}z+\overline{A},$$

$$A=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}\left(\overline{H(r)}+1\right)-e^{-i\alpha}\left(H(r)-1\right)\right),$$

$$B=\frac{e^{-i\alpha}}{r}\left((H(r)-1)-2r^2\right)+\frac{e^{i\alpha}}{r}\left((\overline{H(r)}+1)r^2+4\right),$$

$$C=\frac{e^{-i\alpha}}{2r^2}\left((H(r)+1)r^4-(H(r)-1)+8r^2\right),$$

$$V^*(\zeta)=A^*\zeta^4+B^*\zeta^3+(C^*+\overline{C^*})\zeta^2+\overline{B^*}\zeta+\overline{A^*},$$

$$A^*=\frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha}\left(H^*(\rho)+1\right)-e^{i\alpha}\left(\overline{H^*(\rho)}-1\right)\right),$$

[9] *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975.

$$B^* = e^{i\alpha}\,\rho(\overline{H^*(\rho)}-1) - \frac{e^{-i\alpha}}{\rho}\,(H^*(\rho)+1),$$

$$C^* = \frac{e^{-i\alpha}}{2\rho^2}\left(H^*(\rho)+1) - (H^*(\rho)-1)\rho^4\right),$$

$$H(r) = 1 + \frac{rf''(r)}{f'(r)},\ H^*(\rho) = 1 + \frac{\rho F''(\rho)}{F'(\rho)}.$$

В разделе 4.5 проведен анализ и выполнено интегрирование полученных уравнений. Первое уравнение из системы интегрировалось по z от 0 до r, а второе по ζ от ρ до ∞. Установлено, что граничные функции отображают единичный круг и его внешность на плоскость с разрезами, имеющими не более двух конечных концевых точек. Найдено уравнение границы множества Δ_1 значений функционала (5).

Теорема 10. *Множество Δ_1 значений функционала* (5) *на классе $\mathfrak{M}'$ ограничено кривой, заданной уравнением*

$$\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)} = 2\ln\left[\frac{1-\overline{\mu}r}{1-r^2}\frac{\rho^2-1}{\rho-\eta}\right] - 2\ln\frac{e^{i\alpha}\overline{\eta}\left(T^2-1\right)}{4\rho T}$$
$$+ 2\ln\left[\left(\frac{1-t(r)}{1+t(r)}\right)^i\frac{\tau(\rho)-1}{\tau(\rho)+1}\right] - \pi$$
$$+ \ln\left[\frac{(1-R)(1-R|t(r)|^2)}{(1+R)(1+R|t(r)|^2)}\frac{(T-1)(T|\tau(\rho)|^2-1)}{(T+1)(T|\tau(\rho)|^2+1)}\right]^{e^{i\alpha}}$$
$$+ \ln\left[\left(\frac{(1-R\overline{t(r)})(1+Rt(r))}{(1+R\overline{t(r)})(1-Rt(r))}\right)^i\frac{(T\overline{\tau(\rho)}-1)(T\tau(\rho)-1)}{(T\overline{\tau(\rho)}+1)(T\tau(\rho)+1)}\right]^{e^{i\alpha}}.$$

Здесь μ и $\overline{\eta}$ корни следующих уравнений:

$$a_1\mu^6 + a_2\mu^5 + a_3\mu^4 + (a_4-\overline{a_4})\mu^3 - \overline{a_3}\mu^2 - \overline{a_2}\mu - \overline{a_1} = 0,$$

$$b_1\overline{\eta^6} + b_2\overline{\eta^5} + b_3\overline{\eta^4} + (b_4-\overline{b_4})\overline{\eta}^3 - \overline{b_3}\overline{\eta^2} - \overline{b_2}\overline{\eta} - \overline{b_1} = 0,$$

где

$$a_1 = e^{i\alpha}r^2,\ a_2 = -2e^{i\alpha}r\left(1+r^2\right),$$
$$a_3 = e^{i\alpha}r^2(4+r^2) + \left(2-r^2\right)\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}r^2\right),\ a_4 = -4e^{i\alpha}r,$$
$$b_1 = e^{i\alpha}\rho^2,\ b_2 = -2e^{i\alpha}\rho\left(\rho^2+1\right),$$
$$b_3 = e^{i\alpha}\left(5\rho^2+1\right) - e^{-i\alpha},\ b_4 = -4e^{i\alpha}\rho,$$

при этом рассматриваются такие корни μ и $\overline{\eta}$, что $|\mu| = |\overline{\eta}| = 1$ и правые части уравнений (6) и (7) на окружности $|z| = |\zeta| = 1$ неотрицательны;

$$t(r) = -i\frac{(1-\overline{\mu}r)\left(1-\dfrac{e^{i\alpha}\mu}{R}r\right)}{1-r^2}, \quad \tau(\rho) = \frac{(\rho-\eta)\left(\rho-\dfrac{e^{i\alpha}\overline{\eta}}{T}\right)}{\rho^2-1}.$$

Через R обозначается корень уравнения

$$R+\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(\mu e^{i\alpha} + \overline{\mu}e^{-i\alpha}r^2 + \mu e^{i\alpha}\frac{\left(1-r^2\right)^2}{(1-\mu r)^2}\right),$$

а через T корень уравнения

$$T+\frac{1}{T} = \frac{1}{\rho}\left(\eta e^{-i\alpha} + \overline{\eta}e^{i\alpha}\rho^2 - \overline{\eta}e^{i\alpha}\frac{\left(\rho^2-1\right)^2}{(\rho-\overline{\eta})^2}\right).$$

В заключении формулируются основные теоретические и практические результаты диссертации.

Благодарность. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Игорю Александровичу Александрову за постановку задач и ценные советы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций:

1. *Александров И.А., Пчелинцев В.А.* Множество значений производной Шварца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2010. – № 3 (11). – С. 5–12. – 0.48/0.24 п.л.

2. *Пчелинцев В.А.* Об одной экстремальной задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2012. – № 3 (19). – С. 22–30. – 0.54 п.л.

3. *Пчелинцев В.А.* К задаче о неналегающих областях // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1391–1400. – 0.6 п.л.

4. *Пчелинцев В.А.* Об одном функционале на классе пар функций// Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 2 (22). – С. 44–56. – 0.78 п.л.

Статьи в других научных изданиях:

5. *Пчелинцев В. А.* Одна задача о неналегающих областях // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратовской зимней школы (Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 г.). – Саратов : Научная книга, 2012. – С. 137–138. – 0.07 п.л.

6. *Пчелинцев В. А.* Множество значений функционала $I = \{f, z_0\}$ на классе S // Современные проблемы математики и механики : труды III Всероссийской молодёжной научной конференции (Томск, 23 – 25 апреля 2012 г.) / Том. гос. ун-т. – Томск, 2012. – С. 51–53. – 0.18 п.л.

7. *Пчелинцев В. А.* Эллиптические интегралы // Современные проблемы механики : материалы Международной конференции (Томск, 19 – 20 сентября 2012 г.) / Том. гос. ун-т. – Томск, 2012. – С. 13–14. – 0.06 п.л.

8. *Пчелинцев В. А.* Об одном функционале, заданном на множестве пар однолистных функций // Студент и НТП : Математика : материалы 51-й Международной научной студенческой конференции (МНСК–2013) (Новосибирск, 12 – 18 апреля 2013 г.) / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2013. – С. 31. – 0.06 п.л.

Подписано в печать 20.09.2013 г.
Формат А4/2. Ризография
Печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 04/09-13
Отпечатано в ООО "Позитив-НБ"
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а