

И.А. Александров

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки высшего профессионального образования 010100 – «Математика», 010200 – «Математика и компьютерные науки», 010800 – «Математика и математическое моделирование»



Издательство Томского университета
2013

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5 Я 73
А 46

Александров И.А.

А 46 Операционное исчисление и его применения: учеб. пособие. –
Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 144 с.

ISBN 978-5-7511-2196-9

В учебном пособии операционное исчисление построено на интегральном преобразовании Лапласа. Указывается связь с преобразованием Фурье и операционным методом Хевисайда. Даны применения к решению линейных дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, к исследованию электрических цепей и механических систем.

Для студентов-математиков и инженеров, использующих в своей работе математические методы.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5 Я 73

ISBN 978-5-7511-2196-9

© Александров И.А., 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

В операционном исчислении, основанном на интегральном преобразовании Лапласа, ставится в соответствие действительной функции действительного переменного (принимаемой за оригинал) комплексная функция комплексного переменного – изображение оригинала. Действиям над оригиналами соответствуют операции над изображениями. После их выполнения итоговое изображение можно посредством обращения интеграла Лапласа перевести в оригинал. Эти переходы облегчаются, если использовать таблицы соответствия между оригиналами и изображениями. Богатый аналитический аппарат комплексного анализа находит применения в исследовании свойств изображений, их аппроксимации, построении приближений, численных расчетах и так далее, связанных с решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, с задачами управления в технических системах, синтеза регуляторов с распределенными и дискретными параметрами, математическими задачами анализа и создания электрических цепей и т.д. Операционное исчисление позволяет, например, при решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами заменить операции дифференцирования и интегрирования алгебраическими операциями и существенно упростить нахождение решения дифференциального уравнения.

Расширение применения операционного метода в современной инженерной практике позволяет надеяться, что данное учебное пособие, включающее материал по одному из направлений приложений комплексного анализа, с которым знакомятся студенты-математики, окажется полезным всем тем, кто пользуется в своих исследованиях и практической работе математическими методами.

О содержании учебного пособия можно составить представление, ознакомившись с подробным оглавлением и задачами, содержащимися в конце каждой главы.

Автор выражает благодарность Елене Петровне Кузнецовой и Ольге Игоревне Ежовой, выполнившим всю компьютерную подготовку рукописи к печати.

Глава 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

В этой главе рассмотрены определение и основные свойства преобразования Лапласа. Оно ставит в соответствие действительной функции действительного переменного комплексную функцию комплексного переменного в форме некоторого несобственного интеграла, зависящего от параметра. Операционное исчисление строится на определенном множестве действительных функций, называемых оригиналами. Их преобразование Лапласа образует множество изображений. Изучение свойств оригиналов и изображений позволяет составлять и расширять таблицу оригиналов и изображений, широко используемую в приложениях операционного исчисления.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Из истории создания метода. Операционное исчисление является одним из методов математического анализа. Оно позволяет в ряде случаев сводить решение обыкновенных дифференциальных уравнений, а также некоторых типов уравнений в частных производных и операторных уравнений к рассмотрению более простых алгебраических задач.

Первоначальные идеи метода были удачно реализованы инженером-электриком Оливером Хевисайдом (1850–1925) в форме символического исчисления в электротехнических расчетах. Широко применяя свой метод, он не заботился о его обосновании и в ряде случаев приходил к неверным результатам.

Обоснование символического метода или, как теперь его стали называть, операционного метода было дано Томасом Бромвичем (1875–1929), Джоном Карсоном (1888–1940). Они использовали метод интегральных преобразований, развитый в теории функций комплексного переменного Огюстом Коши (1789–1857),

Жозефом Фурье (1768–1830), Пьером Лапласом (1749–1827) и другими математиками.

Уравнение, заданное в пространстве оригиналов, переводится интегральным преобразованием в уравнение в пространстве изображений, решается в нем, а затем решение переводится в пространство оригиналов. Такой процесс аналогичен логарифмированию и как логарифмирование может оказаться полезнее в конкретных исследованиях. Важные применения операционного метода приведены в четвертой главе.

Для удобства работы с излагаемым далее материалом приведем некоторые понятия и теоремы из теории функций действительного и комплексного переменного.

1.2. Кусочно-дифференцируемые функции. Действительная функция $f(t)$ действительного переменного t имеет предел A^+ (A^-) в точке $t = t_0$ справа (слева), если для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(t) - A^+| < \varepsilon$ при $t_0 < t < t_0 + \delta$ ($|f(t) - A^-| < \varepsilon$ при $t_0 - \delta < t < t_0$), то есть

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t) = A^+ \quad \left(\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) = A^- \right).$$

В случае, когда существуют пределы A^+ , A^- и они равны, то говорят, что $f(t)$ имеет предел A ($A = A^+ = A^-$) в точке t_0 , и пишут:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A.$$

Функция $f(t)$ называется непрерывной в точке $t = t_0$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$, и непрерывной на интервале (a, b) , $-\infty < a < b < +\infty$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если существуют пределы $\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t)$, но они различны, то говорят, что $f(t)$ имеет в точке $t = t_0$ разрыв первого рода, если скачок $\left| \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) \right|$ конечен, и второго рода, если скачок бесконечен.

Говорят, что функция $f(t)$ имеет в точке $t = t_0$ производную, если существует число

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Обычно его обозначают $f'(t_0)$.

Если производная $f'(t)$ существует в каждой точке промежутка (a, b) , то говорят, что $f(t)$ дифференцируема на (a, b) . Если, кроме того, функция $f(t)$ непрерывна на (a, b) , то говорят, что функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на (a, b) .

О функции $f(t)$ говорят, что она кусочно-дифференцируема, если она дифференцируема на (a, b) , за исключением конечного числа точек.

1.3. Голоморфные функции. Комплексная функция $w = f(t)$ действительного переменного определяется как отображение промежутка действительной оси в комплексную плоскость, то есть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Выделяя действительную и мнимую части функции, имеем $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $-\infty < a < t < b < +\infty$. Непрерывность (дифференцируемость) функции $w(t)$ в точке $t = t_0$ имеет место тогда и только тогда, когда обе функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ обладают в $t = t_0$ свойством непрерывности (дифференцируемости).

Уравнения $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, задают на плоскости Ouv кривую и являются её параметрическим представлением. Непрерывная кривая называется простой дугой, если $\varphi(t') \neq \varphi(t'')$ при $a \leq t' < t'' \leq b$. Простая дуга не имеет самопересечений. Непрерывная кривая называется замкнутой жордановой кривой, если $\varphi(t') \neq \varphi(t'')$ при $a \leq t' < t'' \leq b$, но $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Для комплексной функции комплексного переменного определения предела и производной аналогичны тем, которые вводятся для действительных функций действительного переменного.

Пусть в области D комплексной плоскости задана функция $w = w(z)$ со значениями в комплексной плоскости. Говорят, что число

A является пределом функции $w(z)$ в точке $z_0 \in D$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $|w(z) - A| < \varepsilon$ для всех z , удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, то есть $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = A$.

Функция $w(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = w(z_0)$. Непрерывность функции $w(z)$ в области D означает, что $w(z)$ непрерывна в каждой точке области D .

Если существует число

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0},$$

то оно называется производной функции $w(z)$ в точке $z = z_0 \in \mathbb{C}$, и его обычно обозначают $w'(z_0)$.

Функция $w(z)$ называется голоморфной в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если $w(z)$ имеет производную в каждой точке z круговой окрестности точки z_0 , то есть в $U(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, и сколь угодно мало. Функция $w(z)$ называется голоморфной в бесконечности, если $\varphi(\zeta) = w\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ голоморфна в нуле. Функция $w(z)$ называется голоморфной в области D , если она голоморфна в каждой точке этой области.

Голоморфную в точке z_0 области D функцию можно представить разложением в ряд Тейлора вида

$$w(z) = w(z_0) + \frac{w'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{w''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

с соответствующим радиусом сходимости.

Голоморфная в области D функция $w(z)$ имеет производные $w^{(k)}(z)$ любого порядка. Следовательно, производные голоморфной функции также являются голоморфными функциями в области D .

Термин «аналитическая функция» (указывающий на возможность представлять функцию степенным рядом) используется наряду с термином «голоморфная функция».

Точка z_0 называется изолированной точкой аналитической функции $w(z)$, если $w(z)$ не голоморфна в z_0 , но голоморфна в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(z_0, \varepsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, точки z_0 . В окрестности точки z_0 функция $w(z)$ представляется рядом Лорана вида

$$w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Коэффициент c_{-1} называется вычетом функции $w(z)$ в точке z_0 . Для вычета используют обозначение $\operatorname{Res}_{z=z_0} w(z)$.

Важными теоремами в теории аналитических функций являются следующие интегральные теоремы.

Теорема (интегральная теорема Коши). Если функция $w(z)$ голоморфна в области D , то интеграл по любой замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой Γ , лежащей в D со своей внутренностью, равен нулю: $\int_{\Gamma} w(\zeta) d\zeta = 0$.

Теорема (о вычетах). Если функция голоморфна в области D за исключением изолированных точек z_1, \dots, z_n , то интеграл по замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой, лежащей в D и охватывающей точки z_1, \dots, z_n , равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов функции $w(z)$ в точках z_1, \dots, z_n :

$$\int_{\Gamma} w(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} w(z).$$

Теорема (интегральная формула Коши). Если функция $w(z)$ голоморфна в области D , ограниченной замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой Γ , и непрерывна в $D \cup \Gamma$, то значение функции $w(z)$ в любой точке z_0 области D связано со значением $w(z)$ на Γ формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z)}{z - z_0} dz = w(z_0).$$

Если в сумме $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$, входящей в ряд Лорана для $w(z)$

в окрестности точки z_0 , имеется хотя бы одно, но только конечное число коэффициентов, отличных от нуля, то z_0 называется полюсом функции $w(z)$. В случае, если среди коэффициентов имеется бесконечно много отличных от нуля, то точку z_0 называют существенно особой.

Функцию $w(z)$, голоморфную в плоскости, за исключением точек, в которых $w(z)$ имеет полюсы, называют мероморфной.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

2.1. Оригинал. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Оригиналом (функцией-оригиналом)* называют действительную функцию $f(t)$ действительного переменного $t \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1⁰. $f(t)$ непрерывна на любом конечном промежутке (a, b) , $a < b$, действительной оси, за исключением конечного числа точек, в которых $f(t)$ имеет разрыв первого рода.

2⁰. $f(t) = 0$ при $t < 0$.

3⁰. $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, то есть существуют числа $A > 0$ и $s_0 \geq 0$ такие, что $|f(t)| < Ae^{s_0 t}$ для всех t . Число s_0 называют *показателем роста* функции $f(t)$.

Пример. Функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом. В точке $t = 0$ она имеет разрыв (скачок) первого рода. Её показатель роста равен нулю. Функцию $\eta(t)$ называют *единичной*. ◁

Каждую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условиям 1^0 , 3^0 определения оригинала, но не удовлетворяющую условию 2^0 , можно умножением её на $\eta(t)$ превратить в оригинал, поскольку

$$\eta(t)\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

и для $\eta(t)\varphi(t)$ выполняются условия $1^0 - 3^0$ определения оригинала. Графики функций, представленных на рис. 1, иллюстрируют различие между функцией и построенной для неё функцией-оригиналом. Для функции-оригинала, построенной для функции $\varphi(t)$, то есть для $\eta(t)\varphi(t)$, часто используют обозначение $[\varphi(t)]$. Мы в дальнейшем, рассматривая функции, будем считать их равными нулю для $t < 0$. Вместо $\eta(t)$ будем писать 1, вместо $\eta(t)\sin t$ просто $\sin t$ и так далее.

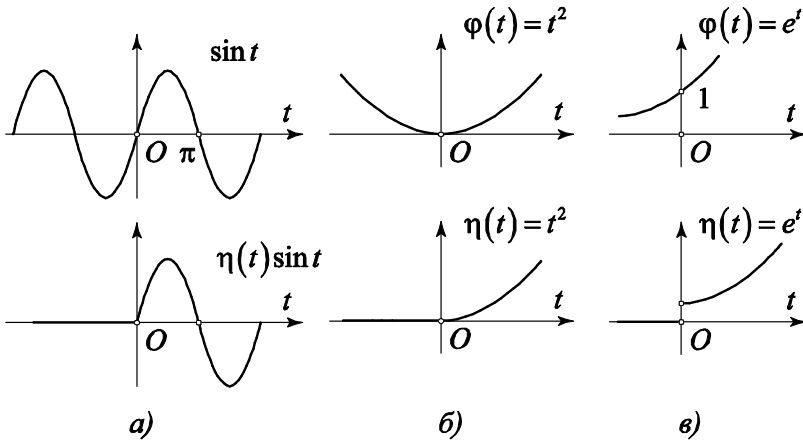


Рис. 1.

2.2. Интеграл Лапласа. Пусть $f(t)$, $0 < t < +\infty$, – действительная функция и $p = s + i\sigma$ – комплексное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Интегралом Лапласа* называют интеграл вида

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p). \quad (1)$$

Интеграл Лапласа ставит в соответствие действительной функции $f(t)$ действительного переменного комплексную функцию $F(p)$ комплексного переменного.

Теорема 1. Пусть $f(t)$ – оригинал с показателем роста $s_0 \geq 0$. Тогда интеграл (1) существует и $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\Pi_{s_0} = \{p : \operatorname{Re} p > s_0\}$.

Доказательство. Для $p \in \Pi_{s_0}$ и $t \in (0, +\infty)$

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-pt} = |f(t)|e^{-st-i\sigma t} = |f(t)|e^{-st} < Ae^{s_0 t} \cdot e^{-st} = Ae^{-(s-s_0)t}$$

и поэтому имеет место оценка интеграла

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| < \int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt < \int_0^{\infty} Ae^{-(s-s_0)t} dt = \frac{A}{s-s_0},$$

показывающая, что он абсолютно сходится. Следовательно, функция $F(p)$ существует в Π_{s_0} . Покажем, что она аналитическая. В полуплоскости Π_{s_1} , $s_1 > s_0$, интеграл

$$-\int_0^{\infty} f(t)te^{-pt} dt, \quad (2)$$

получающийся дифференцированием по p интеграла (1), сходится равномерно, поскольку

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)te^{-pt} dt \right| < \int_0^{\infty} Ate^{-(s_1-s_0)t} dt = \frac{A}{(s_1-s_0)^2}.$$

Интеграл (2) мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p . Значит, существует производная $F'(p)$ и согласно определению аналитической функции $F(p)$ аналитична в Π_{s_0} . \triangleleft

Методы теории функций комплексного переменного позволяют в определенных условиях распространить функцию $F(p)$ на область, включающую в себя полуплоскость Π_{s_0} .

2.3. Изображение. Теорема 1 позволяет корректно ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Изображением* оригинала $f(t)$ называют его интеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Для оригинала изображение единственно.

Условимся фразу «функция $f(t)$ имеет своим изображением функцию $F(p)$ » заменять любой из формул

$$f(t) \doteq F(p), F(p) \doteq f(t), L(f(t)) = F(p)$$

(символ \doteq , по-видимому, впервые использовали А.М. Эфрос и А.М. Данилевский в книге «Операционное исчисление и контурные интегралы», 1937).

Теорема 2. *Если $F(p)$ — изображение, то*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(p) = 0, \quad p = s + i\sigma \in \Pi_{s_0}.$$

Доказательство следует из неравенства $|F(p)| < \frac{A}{s - s_0}$, установленного в теореме 1. \triangleleft

Следствие 1. Изображение $F(p)$ равномерно сходится к нулю при $p \rightarrow \infty$ по любому пути, лежащему в угле

$$V_{\alpha} = \left\{ p : \left| \arg p \right| < \frac{\pi}{2} - \delta \right\}, \quad \delta > 0, \text{ и сколь угодно мало.}$$

Следствие 2. Если $F(p)$ — аналитическая функция в бесконечности, то $F(\infty) = 0$.

Примеры. Найдём изображения для следующих функций-оригиналов. Все они имеют показатель роста $s_0 = 0$.

а) $f(t) = 1$. Имеем $F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$. \triangleleft

б) $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$. Имеем $F(p) = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Действительно, интегрированием по частям находим

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} t^n de^{-pt} = \frac{1}{p} \left[t^n e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt^n \right] = \frac{n}{p} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}. \triangleleft$$

в) $f(t) = \sin t$. Изображение дается формулой $F(p) = \int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt$.

Преобразуем подынтегральную функцию, воспользовавшись формулой Эйлера. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{it} - e^{-it}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \left[\int_0^{\infty} e^{(i-p)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(i+p)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{(i-p)t}}{i-p} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{-(i+p)t}}{i+p} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{p^2 + 1}. \triangleleft \end{aligned}$$

г) Аналогично находим: $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$. \triangleleft

Установленные соответствия оригинал – изображение, а также ряд других полученных далее соответствий вошли в сводную таблицу, помещенную в конце главы 3.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПАРЫ ОРИГИНАЛ – ИЗОБРАЖЕНИЕ

3.1. Подобие и сдвиг. Рассмотрим свойства преобразования Лапласа $f(t) \doteq F(p)$, связанные с простейшими линейными преобразованиями аргумента оригинала.

Предварительно отметим свойство линейности преобразования, состоящее в том, что если $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$, то при любых комплексных числах α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Свойство линейности преобразования Лапласа следует из хорошо известного свойства интегралов

$$\int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) dt.$$

Отметим здесь, что если $f(t)$, $g(t)$ имеют показатели роста s_1 , s_2 соответственно, то интеграл в левой части сходится при $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$.

Теорема 3 (о подобии). Если $f(t)$ – оригинал и $F(p) \doteq f(t)$, то при любом $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Действительно,

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \triangleleft$$

Пример.

Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$, то согласно доказанной теореме

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Теорема 4 (о запаздывании). Если $f(t)$ – оригинал и $F(p) \doteq f(t)$, то при любом $\tau > 0$

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

Действительно, для доказательства теоремы запишем согласно определению изображения, учитывая, что $f(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$:

$$f(t - \tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Выполнив замену $t_1 = t - \tau$ переменной интегрирования, получим

$$f(t - \tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = e^{-p\tau} F(p). \triangleleft$$

Доказанная теорема широко используется для нахождения изображений оригиналов, соответствующих импульсным процессам.

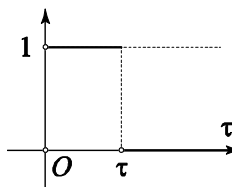


Рис. 2.

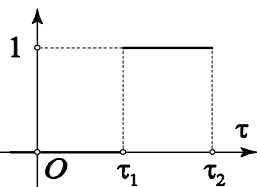


Рис. 3.

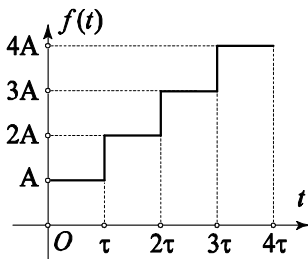


Рис. 4.

Примеры.

а) Пусть оригинал $f(t)$ представлен графиком, изображенным на рис. 2. Нетрудно видеть, что $f(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau)$. Для этой функции

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{1}{p} + \frac{e^{-p\tau}}{p} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}). \triangleleft$$

б) Пусть теперь единичный импульс начинается не в момент $t = 0$, а в момент $t = \tau_1$ и действует на протяжении времени $\tau_2 - \tau_1$ (рис. 3). Тогда согласно теореме о запаздывании его изображение равно

$$\frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau_1}) e^{-p\tau_1}. \triangleleft$$

в) Примем за оригинал функцию, график которой изображен на рис. 4. Имеем $f(t) = A[\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \dots]$.

По теореме о запаздывании

$$f(t) \doteq F(p) = A \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right]. \text{ Ряд представляет сходя-}$$

щуюся геометрическую прогрессию, поскольку $|e^{-p\tau}| = e^{-\operatorname{Re} p\tau} < 1$.

Суммируя ряд и выполнив простые преобразования суммы, получаем

$$F(p) = \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{1}{2p} \left[1 + \frac{e^{\frac{p\tau}{2}} + e^{-\frac{p\tau}{2}}}{e^{\frac{p\tau}{2}} - e^{-\frac{p\tau}{2}}} \right] = \frac{1}{2p} \left[1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right]. \triangleleft$$

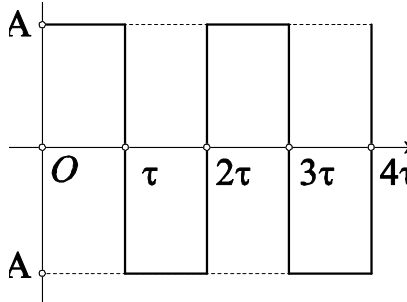


Рис. 5.

г) Периодический импульс, изображенный на рис. 5, то есть задаваемый формулой

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2n\tau < t < (2n+1)\tau, \quad \tau > 0, \\ -1, & \text{если } (2n+1)\tau < t < (2n+2)\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

можно записать в виде

$$f(t) = A \left[\eta(t) - 2\eta(t - \tau) + 2\eta(t - 2\tau) + \dots \right].$$

Следовательно, по теореме запаздывания

$$F(p) = A \left[\frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p\tau} + \frac{2}{p} e^{-2p\tau} - \dots \right] = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}. \triangleleft$$

3.2. Смещение. Двойственной к теореме о запаздывании является

Теорема 5 (о смещении изображения). Пусть $F(p) \doteq f(t)$. Тогда

для любого действительного или комплексного числа $a = \alpha + i\beta$

$$e^{at} f(t) \doteq F(p - a).$$

Действительно, согласно определению изображения

$$e^{\alpha t} \cos \beta t f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cos \beta t f(t) e^{-pt} dt,$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \sin \beta t f(t) e^{-pt} dt.$$

Отсюда согласно свойству линейности и с использованием формулы Эйлера имеем

$$e^{\alpha t} e^{i\beta t} f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{i\beta t} f(t) e^{-pt} dt.$$

Так как $e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}$, то $e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p-a)$, что и требовалось доказать. \triangleleft

Доказанная теорема помогает расширить таблицу соответствия между оригиналами и изображениями. Например, из соответствия

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ имеем}$$

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

Совершенно аналогично получаем

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛА

4.1. Дифференцирование оригинала. В дальнейшем мы будем рассматривать оригиналы $f(t)$, имеющие производные первого, второго и так далее до n -го порядка при условии, что $f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, является оригиналом, то есть функцией, удовлетворяющей условиям $1^0, 2^0, 3^0$, сформулированным в n^0 2.1. Заметим, что если $f^{(n)}(t) -$

оригинал, то
$$\int_0^x f^{(k)}(t) dt = f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0),$$
 где $f^{(k-1)}(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f^{(k-1)}(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, также оригинал. Для упрощения записи формул вместо $f^{(k)}(+0)$ будем пользоваться обозначением $f^{(k)}(0)$.

Теорема 6 (дифференцирование оригинала). Пусть $f(t)$ – оригинал и $F(p)$ – его изображение. Если $f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, – оригинал, то $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$ и вообще

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - f(0)p^{n-1} - f'(0)p^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Действительно, при $n = 1$ интегрированием по частям получаем

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Так как при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ имеем $|f(t) e^{-pt}| \leq A e^{-(s-s_0)t}$, то подстановка $t = \infty$ в первое слагаемое правой части равенства обращает это слагаемое в нуль. Это же слагаемое при $t = 0$ обращается в $f(0)$. Следовательно, $f'(t) \doteq -f(0) + pF(p)$.

При $n = 2$, используя формулу для $f'(t)$, имеем

$$f''(t) = (f'(t))' \doteq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - f(0)p - f'(0).$$

Для завершения доказательства теоремы продолжим вычисления, последовательно пользуясь тем, что $f^{(k)}(t) = (f^{(k-1)}(t))'$. \triangleleft

Следствие. Если $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$. В частности, $f'(t) \doteq pF(p)$ (производной от оригинала соответствует изображение оригинала, умноженное на p).

4.2. Интегрирование оригинала. **Теорема 7** (интегрирование оригинала). Пусть $f(t)$ – оригинал и $F(p)$ – его изображение. Тогда

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Действительно, пусть $g(t) = \int_0^t f(t) dt$ и $G(p) \doteq g(t)$. Согласно следствию предыдущей теоремы $g'(t) \doteq pG(p)$. Так как $g'(t) = f(t)$ и $f(t) \doteq F(p)$, то в силу единственности изображения $pG(p) = F(p)$, что и требовалось доказать. \triangleleft

Видим, что интегрирование оригинала $f(t)$ сводится к делению его изображения $F(p)$ на p , а дифференцирование оригинала $f(t)$ состоит из умножения изображения $F(p)$ на p и вычитания предельного значения $f(0) = f(+0)$.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

5.1. Дифференцирование изображения. Теорема 8 (дифференцирование изображения). *Если $F(p)$ – изображение оригинала $f(t)$, то*

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Действительно, так как в полуплоскости $\Pi_{s_0} = \{p : \operatorname{Re} p > s_0\}$, где s_0 – показатель роста функции $f(t)$, функция $F(p)$ – аналитическая, то она имеет в этой полуплоскости производные всех порядков. Дифференцирование функции

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

по p состоит в дифференцировании интеграла Лапласа по параметру p . Оно может быть выполнено как интегрирование по t производной по p подынтегральной функции. Имеем:

$$F'(p) = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-pt} dt,$$

то есть $F'(p) \doteq -tf(t)$. Для второй производной $F''(p)$ имеем $F''(p) \doteq (-t)^2 f(t)$ и вообще $F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$. Значит, $F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$. \triangleleft

В качестве примера применения теоремы 8 отметим, что поскольку $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, то

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Легко видеть, что

$$t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}, \quad t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

5.2. Интегрирование изображения. Теорема 9 (интегрирование изображения). Если интеграл $F(p)$ – изображение оригинала $f(t)$

и интеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ сходится, то он служит изображением

функции $\frac{f(t)}{t}$.

Действительно,

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt.$$

Полагая, что путь интегрирования от точки p до точки ∞ лежит в полуплоскости $\{p : \operatorname{Re} p > s_0\}$, получим оценку сверху модуля внутреннего интеграла

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| \leq A \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} dt,$$

из которой ясна его равномерная сходимость относительно p . Поэтому можно изменить порядок интегрирования в интеграле и получить

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_p^{\infty} e^{-pt} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \doteq \frac{f(t)}{t}. \triangleleft$$

В качестве примера применения теоремы 9 рассмотрим интегрирование изображения в соответствии $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$. Имеем

$$\int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Поэтому $\frac{\sin t}{t} \doteq \operatorname{arcctg} p$.

Применяя теорему 7 об интегрировании оригинала, найдем, что

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \doteq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

Условие о сходимости интеграла $\int_p^{\infty} F(p) dp$ в теореме 9 отбросить нельзя. В формуле $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$ интеграл $\int_p^{\infty} \frac{dp}{p-a}$ расходится и

$\frac{e^t}{t}$ не является оригиналом, так как эта функция имеет бесконечный разрыв при $t=0$.

Теоремы 8, 9 показывают, что дифференцированию изображения $F(p)$ соответствует умножение оригинала на $-t$, а интегрированию изображения соответствует деление оригинала на t .

Задачи

1. Найти изображения $F(p)$ для следующих оригиналов:

1) $f(t) = \eta(t - \tau_1) - \eta(t - \tau_2), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2.$

2) $f(t) = \begin{cases} at + b, & 0 < t < t_0, \quad a, b - \text{ постоянные;} \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$

$$3) f(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}. \quad \text{Ответ: } F(p) = \frac{1}{p - \lambda}.$$

$$4) f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau_1}, & 0 < t < \tau_1, \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ \frac{\tau_3 - t}{\tau_3 - \tau_2}, & \tau_2 < t < \tau_3, \\ 0, & t < \tau_3. \end{cases}$$

$$5) f(t) = \ln t. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{p} = \left(\ln \frac{1}{p} - C \right), C - \text{ постоянная Эйлера.}$$

$$6) f(t) = e^{bt} - e^{at}, a, b - \text{ постоянные.}$$

$$7) f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}. \quad \text{Ответ: } F(p) = \ln \frac{p-a}{p-b}.$$

$$8) f(t) = \frac{\sin t}{t}. \quad \text{Ответ: } F(p) = \text{arccotg } p.$$

$$9) f(t) = \text{ch } t \text{ cost}. \quad \text{Ответ: } F(p) = \frac{p^3}{p^4 + 4}.$$

$$10) f(t) = \frac{1}{2} \text{sh } t \text{ sint}. \quad \text{Ответ: } F(p) = \frac{p}{p^4 + 4}.$$

$$11) f(t) = \sin^4 t. \quad \text{Ответ: } F(p) = \frac{1}{8} \left(\frac{p}{p^2 + 16} - \frac{4p}{p^2 + 4} + \frac{3}{p} \right).$$

$$12) f(t) = t \sin \omega t. \quad \text{Ответ: } F(p) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

$$13) f(t) = t \cos \omega t. \quad \text{Ответ: } F(p) = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

2. Доказать теорему опережения:

$$f(t + \tau) \div e^{p\tau} \left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right].$$

Глава 2

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Прежде всего выведем формулу, определяющую функцию-оригинал через её изображение. Не каждая аналитическая функция является изображением некоторого оригинала. Приводится теорема, содержащая требования к аналитической функции, достаточные для того, чтобы она была изображением некоторого оригинала. Условиям этой теоремы удовлетворяют многие рациональные функции, имеющие широкое применение в операционном исчислении. Для них выводятся формулы, восстанавливающие оригиналы. Такая же задача решается для голоморфных изображений, имеющих нуль на бесконечности. Указываются оригиналы для произведения изображений.

§ 1. ТЕОРЕМА ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА

1.1. Формула для оригинала. Теорема 1. Если функция $F(p)$ служит изображением функции-оригинала $f(t)$, то в любой точке своей направленности функция $f(t)$ равна

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (1)$$

где интеграл берется вдоль прямой $\Gamma = \{p : \operatorname{Re} p = a\}$ и понимается в смысле главного значения (то есть

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{pt} F(p) dp).$$

Доказательство этой теоремы достаточно сложное. Сначала мы приведем схему доказательства теоремы и нестрогий вывод формулы (1).

Начнем с вычисления интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tp}}{p} dp, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2)$$

взятого по вертикальной прямой

$$\Gamma(a) = \{p : \operatorname{Re} p = a\}, \quad a > 0.$$

Эта прямая делит круг

$$U(a, R) = \{p : |p - a| = R\}, \quad a < R,$$

на области D_1, D_2 (рис. 6). Первая из них содержит точку $p = 0$.

Область D_1 ограничена прямолинейным отрезком с концами $a - iR$, $a + iR$ и дугой Γ_1 окружности с центром в точке a .

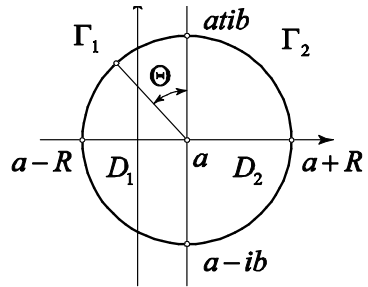


Рис. 6.

По теореме Коши о вычетах

(см. n^0 1.3)

$$\int_{a-iR}^{a+iR} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{\Gamma_1} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{Res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p}. \quad (3)$$

Покажем, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \quad \text{при } t > 0. \quad (4)$$

Представим Γ_1 параметрическим уравнением $p = a + iRe^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, и выполним замену переменного в интеграле по формуле $p = a + iRe^{i\theta}$. Для модуля интеграла справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} \frac{e^{pt}}{p} dp \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{t(a+iRe^{i\theta})}}{a+iRe^{i\theta}} \right| R d\theta \leq \frac{e^{at}}{R-a} \int_0^\pi e^{-tR \sin \theta} d\theta \leq \\ &\leq \frac{e^{at}}{R-a} \int_0^{\pi/2} e^{-tR \sin \theta} d\theta \leq \frac{e^{at}}{R-a} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2tR}{\pi} \theta} d\theta = \frac{e^{at}}{R-a} \cdot \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-tR}), \end{aligned}$$

из которой следует (4).

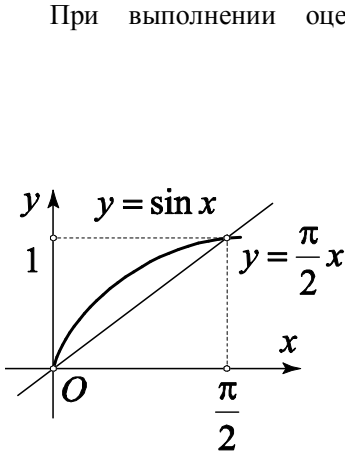


Рис. 7.

При выполнении оценки использованы формула Эйлера $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ и неравенство $\sin \theta > \frac{2\theta}{\pi}$, $0 < \theta < \pi/2$, легко следующее из геометрических свойств $\sin x$ (рис. 7).

Перейдем в (3) к пределу при $R \rightarrow +\infty$. Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} \frac{e^{tp}}{p} dp = 1 \text{ при } t > 0.$$

Повторяя с небольшими изменениями (на Γ_2 полагаем $p = a + iRe^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$) проведенные выше оценки, получаем при $t < 0$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tp}}{p} dp = 0 \text{ при } t < 0.$$

Таким образом, интеграл (2) представляет единичную функцию-оригинал.

Заменим в (2) t на $t - \tau$, где τ – фиксированное число. Легко видеть, что получили функцию

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau, \end{cases} \quad (5)$$

то есть функцию $\eta(t - \tau)$.

Подставляя в (5) сначала $t = \tau_1$, затем $t = \tau_2 > \tau_1$ и вычитая второй интеграл из первого, получим ступенчатую функцию, график которой представлен на рис. 3.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} dp = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_1, \\ 1 & \text{при } \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0 & \text{при } t > \tau_2, \end{cases}$$

то есть функцию $\eta(t - \tau_1) - \eta(t - \tau_2)$.

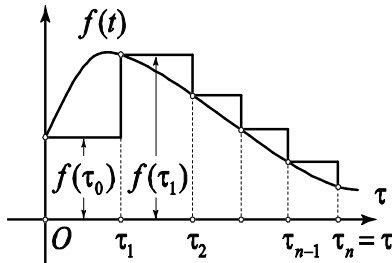


Рис. 8.

Пользуясь этим результатом, можно представить интегралом более сложную ступенчатую функцию с графиком, изображенным на рис. 8. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta'\tau_k \right] dp, \quad (6)$$

где

$$\Delta'\tau_k = \frac{1 - e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!} p + \frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!} p^2 - \dots \quad \text{и} \quad \Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k.$$

Если будем увеличивать число n так, чтобы $\max \Delta\tau_k$ стремился к нулю, то $\Delta'\tau_k$ будет бесконечно малой величиной, эквивалентной $\Delta\tau_k$, и сумма в квадратных скобках в формуле (6) в пределе перейдет в интеграл. Естественно ожидать, что в пределе получается интегральное представление функции $f(t)$ на интервале $(0, \tau)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left[\int_0^\tau f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right] dp.$$

Устремим τ к ∞ . Обозначим через

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \quad (7)$$

преобразование Лапласа функции $f(t)$. Получим в пределе изображение оригинала через изображение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (8)$$

и тем самым завершаем нестрогие рассуждения.

Формула (8) «обращает» формулу (7), то есть выражает функцию $f(t)$ через её отображение. Точно так же формулу (7) можно считать обращением формулы (8). Поэтому формулы (7) и (8) называют *формулами обращения*.

1.2. Доказательство теоремы 1. Согласно определению главного значения интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{b \rightarrow +\infty} f_b(t), \text{ где } f_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p) dp.$$

Так как $F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$ и интеграл в полуплоскости

$\{p : \operatorname{Re} p \geq a\}$ сходится равномерно относительно p , то в интеграле

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} \left[\int_0^{\infty} f(\tau) e^{p\tau} d\tau \right] dp$$

можно изменить порядок интегрирования. Имеем

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} f(\tau) \left[\int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)} dp \right] d\tau.$$

Используя формулу Эйлера, имеем

$$\begin{aligned} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)} dp &= \left[\frac{1}{t-\tau} e^{p(t-\tau)} \right]_{a-ib}^{a+ib} = \frac{1}{t-\tau} \left[e^{(a+ib)(t-\tau)} - e^{(a-ib)(t-\tau)} \right] = \\ &= \frac{e^{a(t-\tau)}}{t-\tau} \left[e^{ib(t-\tau)} - e^{-ib(t-\tau)} \right] = 2ie^{a(t-\tau)} \frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}. \end{aligned}$$

Значит,

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{a(t-\tau)} f(\tau) \frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (9)$$

Пусть t – точка непрерывности функции $f(t)$. Положим $\xi = \tau - t$ и $g(\xi) = e^{-\xi} f(t - \xi)$. Легко видеть, что $\lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = g(0) = f(t)$.

Формулу (9) преобразуем, выполнив в интеграле замену $\tau = t + \xi$ и разделив интегрирование от $-t$ до 0 и от 0 до ∞ . Получаем

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi}(I_1 + I_2), \text{ где}$$

$$I_1 = \int_{-t}^0 g(\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi, \quad I_2 = \int_0^{\infty} g(\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi.$$

$$\text{Покажем, что } I_1 = I_2 = \frac{\pi}{2} f(t).$$

Представим интеграл I_2 в виде суммы четырех интегралов:

$$I_2 = K_1(r) + K_2(r) + K_3(R) + K_4(R),$$

где $0 < r < R < \infty$ и

$$K_1(r) = g(0) \int_0^r \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi, \quad K_2(r) = \int_0^r \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} \sin b\xi d\xi,$$

$$K_3(R) = \int_r^R g(\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi, \quad K_4(R) = \int_R^{\infty} g(\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi.$$

В силу сходимости интегралов значения $K_2(r)$ и $K_4(R)$ сколь угодно малы соответственно при достаточно малом r и достаточно большом R .

Интегрируя по частям, имеем

$$K_3(R) = \left[-\frac{\cos b\xi}{b\xi} g(\xi) \right]_r^R + \frac{1}{b} \int_r^R \cos b\xi \left(\frac{g(\xi)}{\xi} \right)' d\xi,$$

откуда следует, что при фиксированных r и R и $b \rightarrow \infty$ $K_3(R)$ сколь угодно мал.

Наконец, полагая $b\xi = \eta$, получаем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{br} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $I_2 = \frac{\pi}{2} g(0) = \frac{\pi}{2} f(t)$.

Теперь обратимся к интегралу I_1 . Представим его в виде суммы четырех интегралов:

$$I_1 = k_1(r) + k_2(r) + k_3(r, \varepsilon) + k_4(\varepsilon),$$

где $-t < -t + \varepsilon < -r < 0$, $\varepsilon > 0$ и мало и

$$k_1(r) = g(0) \int_{-r}^0 \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi, \quad k_2(r) = \int_{-r}^0 \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} \sin b\xi d\xi,$$

$$k_3(r, \varepsilon) = \int_{-t+\varepsilon}^{-r} g(\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi, \quad k_4(\varepsilon) = \int_{-t}^{-t+\varepsilon} g(\xi) \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi.$$

Можно выбрать r и ε настолько малыми, что модули интегралов $k_2(r)$ и $k_4(\varepsilon)$ будут при всех b меньше любого наперед заданного числа. При фиксированных r и ε модуль интеграла $k_3(r, \varepsilon)$ стремится к нулю при $b \rightarrow \infty$. Наконец, легко показать, что $k_1(r)$ стремится к $\frac{\pi}{2} f(t)$ при $b \rightarrow \infty$. Значит, интеграл I_1 имеет то же значение, что и интеграл I_2 . Поэтому $\lim_{b \rightarrow +\infty} f_b(t) = f(t)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что оригинал $f(t)$, как показывает проведение доказательства, вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва функции $f(t)$.

1.3. Достаточное условие. Ранее отмечалось, что если $F(p)$ – изображение, то $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, оставаясь внутри угла

$-\frac{\pi}{2} - \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} + \delta$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало, при этом сходимость равномерна относительно $\arg p$. Дополним это необходимое условие указанием достаточного условия для того, чтобы заданная комплексная функция $F(p)$ комплексного переменного $p + i\omega$ была изображением некоторого оригинала.

Теорема 2. Пусть функция $F(p)$ голоморфна в полуплоскости $\{p : \operatorname{Re} p > s_0\}$ и стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$ в любой полуплос-

кости $\{p: \operatorname{Re} p \geq a\}$, $a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$. Если интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$$

абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Доказательство. Фиксируем число p_0 , $\operatorname{Re} p_0 > a$. Рассмотрим функцию

$$D\Phi(p_0) = \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right] dt. \quad (10)$$

После замены $p = a + i\sigma$, $dp = i d\sigma$, произведенной во внутреннем интеграле, получим

$$\Phi(p_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-(p_0-a)t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} F(a+i\sigma) d\sigma \right] dt.$$

Так как

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} F(a+i\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)| d\sigma,$$

то согласно условию теоремы рассматриваемый внутренний интеграл в (10) сходится равномерно относительно t . Следовательно, в формуле для $\Phi(p_0)$ можно изменить порядок интегрирования и получить, выполнив простые операции, представление $\Phi(p_0)$ при $\operatorname{Re}(p - p_0) < 0$ и $t > 0$ в виде

$$\Phi(p_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp \left[\int_0^{\infty} e^{(p-p_0)t} dt \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p - p_0} dp.$$

В силу условий теоремы на дуге $C_p = \{p: |p| = R, \operatorname{Re} p > a\}$ имеем $\max |F(p)| = \alpha_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\left| \int_{\tilde{C}_R} \frac{\Gamma(p)}{p-p_0} dp \right| \leq \frac{\alpha_R}{R-|p_0|} \pi R$$

и интеграл стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Рассмотрим область с границей, составленной из отрезка с концами $a-ib$, $a+ib$ и дугой $\tilde{C}_R \subset C_R$. Тогда

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{F(p)}{p-p_0} dp + \int_{\tilde{C}_R} \frac{F(p)}{p-p_0} dp = 2\pi i \operatorname{Re} \frac{F(p)}{p-p_0}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\Phi(p_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0} dp = F(p_0),$$

то есть

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = F(p_0), \quad t > 0.$$

Заметим теперь, что, повторяя проведенные выше рассуждения, но при $t < 0$, получаем $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{pt} F(p) dp = 0$.

Таким образом, для $f(t)$ выполнено условие 2⁰ определения оригинала. Из оценки

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)| d\sigma = M e^{at}$$

следует, что условие 3⁰ также выполняется (с показателем роста функции $f(t)$, равным a). На условии 1⁰ останавливаться не будем. <

§ 2. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

2.1. Теоремы разложения. Во многих важных задачах изображение является дробно-рациональной функцией $F(p)$, то есть имеет вид отношения многочлена $A(p)$ к многочлену $B(p)$:

$F(p) = \frac{A(p)}{D(p)}$. Будем считать, что степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$, и называть такую дробно-линейную функцию *простой*. При этом условии функция $F(p)$ голоморфна на бесконечности и

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A(p)}{B(p)} = 0.$$

Для неё, таким образом, выполняется условие на бесконечности, необходимое для изображения, представленного функцией, голоморфной в бесконечно удаленной точке. Как обычно, предполагается, что многочлены $A(p)$, $B(p)$ не имеют общих множителей. Нули многочлена $B(p)$ являются полюсами функции $F(p)$. Их множество конечно, поскольку число нулей многочлена $B(p)$ (с учетом их кратностей) равно порядку этого многочлена. В комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ за исключением нулей p_k , $k=1, \dots, n$, многочлена $B(p)$, функция голоморфна. Можно взять действительное число $a > 0$ такое, что все полюсы функции $F(p)$ окажутся лежащими в полуплоскости $\{p : \operatorname{Re} p < a\}$. Тогда интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}]$$

согласно теореме 2 является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} p. \quad (11)$$

Поэтому соответствие $f(t) \doteq F(p)$ оригинал – изображение имеет вид

$$f(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt}.$$

2.2. Простые полюсы. Теорема 3. Пусть изображение $F(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, причем степень числителя меньше степени знаменателя. Если нули знаменателя p_1, \dots, p_n простые, то оригинал находится по формуле

$$f(t) \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Действительно, функция $F(p)$ – изображение. Его можно представить разложением по главным частям – они являются простыми дробями – в виде

$$F(p) = \frac{c_1}{p - p_1} + \frac{c_2}{p - p_2} + \dots + \frac{c_n}{p - p_n},$$

где p_1, \dots, p_n – нули многочлена $B(p)$. Коэффициенты c_k находятся

по формуле вычета в простом полюсе: $c_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}$.

Так как $e^{p_k t} \doteq \frac{1}{p - p_k}$, то в силу линейности преобразования Лапласа

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \doteq \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \triangleleft$$

В приложениях, главным образом электротехнических, важен случай, когда $p_1 = 0$ и p_2, \dots, p_n – простые нули многочлена $B(p)$, отличные от нуля. В этом случае

$$F(p) = \frac{A(p)}{p(p - p_2) \dots (p - p_n)} \text{ и } \frac{A(p)}{pB(p)} \doteq \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t},$$

поскольку производная $(pB(p))' = B(p) + pB'(p)$ в точке $p = 0$ равна $B(0)$, а в точке $p = p_k$, $k = 2, \dots, n$, она равна $p_k B'(p_k)$.

Дополняя доказательство теоремы 3, можно распространить её на случай, когда полюсы многочлена $B(p)$ имеют произвольную кратность.

Теорема 4. Пусть изображение представляет собой дробно-рациональную функцию $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, причём степень числителя меньше степени знаменателя. Если нули знаменателя p_1, p_2, \dots, p_s имеют кратности n_1, n_2, \dots, n_s соответственно, то оригинал $f(t) \doteq \frac{A(p)}{B(p)}$ находится по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left[(p-p_k)^{n_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right].$$

Для доказательства представим функцию $F(p)$ в виде разложения по главным частям рядов Лорана для $F(p)$ в окрестности точки p_k :

$$F(p) = \sum_{k=1}^s \sum_{m=1}^{n_k} \frac{c_m^{(k)}}{(p-p_k)^m}$$

и при нахождении функции (11) воспользуемся известной формулой

$$\operatorname{Res}_{p-p_k} [F(p)e^{pt}] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dz^{n_k-1}} \left[(p-p_k)^{n_k} F(p)e^{pt} \right]. \triangleleft$$

Проиллюстрируем применение теорем 3, 4 на примерах.

Пример. Найдем оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{p(p+a)(p+b)}, \quad \text{где } a, b, a \neq b, \quad - \text{ действительные числа,}$$

отличные от нуля.

Здесь $A(p) = 1$, $B(p) = (p+a)(p+b)$ и по теореме 3

$$F(p) \doteq f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}. \triangleleft$$

Пример. Найдем оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p+2}{p^3(p-1)^2}.$$

Здесь $A(p) = p + 2$, $B(p) = p^3(p-1)^2$. Функция $F(p)$ в точке $p=0$ имеет полюс кратности 3. Полюс в точке $p=1$ имеет кратность 2. Применим формулу для нахождения оригинала, указанную в теореме 4. Сначала находим вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в полюсах. Имеем

$$\frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} \right] = t^2 + 5t + 8,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{p^3} e^{pt} \right] = (3t-8)e^t.$$

Таким образом,

$$\frac{p+2}{p^3(p-1)^2} \doteq (3t-8)e^t + t^2 + 5t + 8.$$

При $t \rightarrow \infty$ оригинал стремится к бесконечности. Такое его поведение связано с наличием у изображения полюса в правой полуплоскости $\{p: \operatorname{Re} p > 0\}$. \triangleleft

Для проверки вычислений, проведенных с помощью операционного метода, можно использовать предельные соотношения (их доказательство не приводим)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0),$$

и если существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} pF(p) = f(\infty).$$

2.3. Необходимое и достаточное условие. Теорема 5. Для того чтобы изображение было простой дробно-рациональной функцией, необходимо и достаточно, чтобы оригинал был линейной комбинацией функций вида $t^m e^{\lambda t}$, где m – целое положительное число, а λ – комплексное число.

Действительно, если оригинал $f(t)$ есть линейная комбинация вида $t^m e^{\lambda t}$, то есть $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k t^{m_k} e^{\lambda_k t}$, то согласно формуле

$t^m e^{\lambda t} \doteq \frac{m!}{(p - \lambda)^{m+1}}$ и свойству линейности изображение $F(p) \doteq f(t)$

будет иметь вид
$$F(p) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{m_k!}{(p - \lambda_k)^{m_k+1}}$$

и, следовательно, будет простой дробно-рациональной функцией.

Предположим, что $F(p)$ – простое дробно-рациональное изображение. Тогда оно голоморфно в бесконечно удаленной точке и обращается в ней в нуль. Поэтому $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p), B(p)$ – многочлены, причем степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$. Пусть p_k – полюсы функции $F(p)$ и n_k – их кратности. Разлагая $F(p)$ на простейшие дроби, получим

$$F(p) = \sum_k \sum_{m=1}^{n_k} \frac{a_{km}}{(p - p_k)^m},$$

где a_{km} – некоторые комплексные числа. Но

$$\frac{1}{(p - p_k)^m} \doteq \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{p_k t}.$$

Отсюда

$$\sum_k \sum_{m=1}^{n_k} \frac{a_{km} t^{m-1}}{(m-1)!} e^{p_k t} \doteq F(p),$$

и так как оригинал вполне определяется своим изображением, то

$$f(t) = \sum_k \sum_{m=1}^{n_k} \frac{a_{km} t^{m-1}}{(m-1)!} e^{p_k t}$$

является линейной комбинацией функций вида $t^m e^{\lambda t}$, что и требовалось доказать. \triangleleft

2.4. Дробно-рациональные изображения с действительными коэффициентами. Если многочлен $B(p)$ имеет действительные коэффициенты, то вместе с комплексным корнем p_k он имеет корень \bar{p}_k . Действительно, если $B(p_k) = 0$, то

$$B(\bar{p}_k) = a_n (\bar{p}_k)^n + \dots + a_0 = \overline{a_n p_k^n + \dots + a_0} = \overline{B(p_k)} = 0.$$

Пусть многочлен $A(p)$ также имеет действительные коэффициенты. Тогда

$$\frac{A(\bar{p})}{B(\bar{p})} e^{\bar{p}t} = \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt}$$

и, следовательно, сумма выражений

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right), \quad \operatorname{Res}_{p=\bar{p}_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right),$$

подсчитанных для сопряженных нулей p, \bar{p}_k многочлена $B(p)$, будет равна

$$M_k(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right].$$

Если p_k – простой нуль многочлена $B(t)$, то это выражение принимает вид

$$2 \operatorname{Re} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Таким образом, если многочлены $A(p), B(p)$ имеют действительные коэффициенты, то изображению $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ соответствует оригинал

$$f(t) = \sum_{p=p_k} \operatorname{Res} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} + \sum M_k(t),$$

где первая сумма распространяется на все действительные корни многочлена $B(p)$, а вторая – на все комплексные корни с положительными мнимыми частями.

Для изображений, у которых все корни многочлена $B(p)$ простые, приведенную формулу можно упростить и представить в виде

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteq \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (12)$$

где первая сумма распространяется на все действительные корни многочлена $B(p)$, а вторая – на все комплексные корни с положительными мнимыми частями. Слагаемые в первой сумме в формуле

(12) с ростом t стремятся к бесконечности при $p_k > 0$, стремятся к нулю при $p_k < 0$ или остаются постоянными при $p_k = 0$. Каждый член второй суммы в (12) соответствует колебательному процессу.

Пусть $p_k = s_k + i\omega_k$ и $\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} = M_k e^{i\alpha_k}$, $M_k > 0$.

Тогда

$$2 \operatorname{Re} \left[\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \right] = 2M_k \operatorname{Re} (e^{i\alpha_k} e^{s_k t}) = 2M_k e^{s_k t} \cos(\omega_k t + \alpha_k).$$

Отсюда ясно, что комплексным корням с отрицательными действительными частями s_k соответствуют аperiodические затухающие колебания. Комплексные корни $p_k = s_k + i\omega_k$ с положительными действительными частями не могут иметь место, если рассматриваемая система не допускает колебаний с неограниченно возрастающей амплитудой. Если действительная часть s_k корня $p_k = s_k + i\omega_k$ равна нулю, то реализуются гармонические колебания.

§ 3. МЕРОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Функция $F(p)$ называется мероморфной, если она голоморфна на комплексной плоскости \mathbb{C} , за исключением точек, в которых $F(p)$ имеет полюсы. Дробно-рациональные функции являются мероморфными. Более общим примером мероморфных функций являются функции $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p)$ и $B(p)$ – голоморфные в \mathbb{C}

функции (такие функции называются целыми), возможно, имеющие конечное или счетное множество нулей. Такими являются, например, функции $\operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{sh} p}{\operatorname{ch} p}$, $\operatorname{th} p = \frac{\operatorname{sh} p}{\operatorname{ch} p}$, $\operatorname{ctg} p = \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} p}$, $\operatorname{cth} p = \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} p}$.

Для ступенчатой функции $f(t)$, график которой изображен на рис. 4, изображением является мероморфная функция

$$F(p) = \frac{1}{2p} \left[1 + \operatorname{cth} \frac{pt}{2} \right].$$

Следующая теорема содержит достаточные условия для восстановления оригинала для мероморфного изображения.

3.1. Изображения с бесконечным множеством простых полюсов. Теорема 6. Пусть функция $F(p)$ голоморфна в комплексной плоскости, за исключением бесконечного множества точек p_k , $k=0,1,\dots$, $0 \leq |p_k| \leq |p_{k+1}| < \infty$, в которых $F(p)$ имеет простые полюсы. Предположим, что эти полюсы расположены в полуплоскости $\{p: \operatorname{Re} p \leq s_0\}$ и что существует система окружностей $C_n = \{p: |p| = R_n\}$, $R_1 < R_2 < \dots < R_n \rightarrow \infty$, на которой $F(p) \rightarrow 0$ равномерно относительно $\arg p$. Предположим, что для любого $a > s_0$ интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$ абсолютно сходится. Представим $F(p)$ в виде отношения голоморфной функции $A(p)$ к голоморфной функции $B(p)$, имеющей простые нули в точках p_k и только в них. Тогда $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Ограничимся, опуская детали рассуждений, указанием хода доказательства теоремы. Согласно теореме 2 функция $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Часть окружности C_n , лежащую слева от прямой $\{p: \operatorname{Re} p = a\}$, $a > s_0$, обозначим через C'_n . Пусть $a + ib_n, b_n > 0$, — точки пересечения C_n с этой прямой и Γ_n — замкнутый контур, образованный отрезком $[a - ib_n, a + ib_n]$ и C'_n . Так как интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib_n}^{a+ib_n} e^{pt} F(p) dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_n} e^{pt} F(p) dp$$

равен сумме вычетов функции $e^{pt} F(p)$ в полюсах, лежащих внутри Γ_n , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_n} e^{pt} F(p) dp = 0,$$

то

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib_n}^{a+ib_n} e^{pt} F(p) dp = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \triangleleft$$

3.2. Пример применения теоремы 6. Пусть $F(p) = \frac{1}{\operatorname{sh} p}$.

Здесь $A(p) = 1$, $B(p) = p \operatorname{sh} p = \frac{p}{2}(e^p - e^{-p})$. Точка $p_0 = 0$ — полюс порядка 2 для $F(p)$, точки $p_k = \pm 1, \pm 2, \dots$ являются для $F(p)$ простыми полюсами. В них производная $B'(p) = \operatorname{sh} p + p \operatorname{ch} p$ принимает значения $B(ik\pi) = ik\pi \cos k\pi = (-1)^k ik\pi$. Найдем вычет функции $F(p)e^{pt}$ в точке $p_0 = 0$. Имеем

$$\operatorname{Re}_{p=0} \left(\frac{1}{p \operatorname{sh} p} e^{pt} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{\operatorname{sh} p} e^{pt} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+pt) \operatorname{sh} p - p \operatorname{ch} p}{\operatorname{sh}^2 p} = t.$$

Применяя теорему 6, находим

$$\frac{1}{p \operatorname{sh} p} \doteq 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ik\pi t}}{ik\pi} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k\pi t}{k\pi}.$$

Оригинал для $F(p) = \frac{1}{p \operatorname{sh} p}$ найден. \triangleleft

§ 4. ИЗОБРАЖЕНИЯ, ГОЛОМОРФНЫЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

4.1. Изображения, представленные рядом Лорана. К восстановлению оригиналов для изображений, к которым применима тео-

рема 4, можно применить следующую достаточно общую теорему, относящуюся к изображениям, голоморфным на бесконечности.

Теорема 7. Пусть изображение $F(p)$ голоморфно в бесконечно удаленной точке и имеет в её окрестности разложение в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Тогда оригиналом $f(t) \doteq F(p)$ служит (умноженная на $\eta(t)$) функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

Согласно условию существует число $R > 0$ такое, что $F(p)$ голоморфна вне круга $\{p : |p| < R\}$. Положим $p = \frac{1}{q}$ и $F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)$.

Функция $\Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$ голоморфна в круге $\left\{q : |q| \leq \frac{1}{R}\right\}$ и, следовательно, по неравенствам Коши, $|c_k| \leq MR^k$, $M = \max_{|q|=R} |\Phi(q)|$.

С учетом этих неравенств (при любом комплексном t) получаем оценку

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MR e^{R|t|},$$

показывающую, что ряд для $f(t)$ сходится для всех комплексных t , то есть $f(t)$ является целой функцией. Из этой же оценки следует, что для всех положительных t справедлива оценка $|f(t)| < ce^{R|t|}$. Таким образом, функция $\eta(t)f(t)$ действительно является оригиналом.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-pt}$ равномерно сходится. Его можно почленно проинтегрировать от 0 до ∞ и получить

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-pt} dt \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \frac{(k-1)!}{p^k},$$

так как $t^{k-1} \doteq \frac{(k-1)!}{p^k} \cdot \triangleleft$

Можно доказать обратное предложение, предполагая, что если $f(t)$ – целая функция, удовлетворяющая неравенству $|f(t)| < Ne^{s_0|t|}$, то изображение $F(p) \doteq f(t)$ – голоморфная в бесконечно удаленной точке и $F(\infty) = 0$.

Примеры. а) Рассмотрим разложение

$$F(p) = \frac{1}{p-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}.$$

Так как функция $F(p)$ голоморфна в бесконечно удаленной точке $F(\infty) = 0$, то по теореме 7 оригинал можно найти по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} = e^t, \text{ то есть } \frac{1}{p-1} \doteq e^t. \triangleleft$$

б) Для разложения

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

согласно теореме 7 отображением является

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}.$$

Ряд заменой $t = \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\varepsilon}$ преобразуется в ряд

$$f(t) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau) = t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}),$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция.

Таким образом, имеем соответствие $t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \cdot \triangleleft$

§ 5. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ

5.1. Умножение изображений. Свойство линейности преобразования Лапласа дополняется важными для операционного исчисления свойствами связи между оригиналами и изображениями в форме произведений.

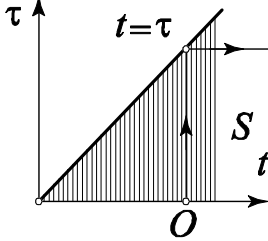


Рис. 9.

Теорема 8 (умножение изображений). Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причём если $F(p) \doteq f(t)$, $G(p) \doteq g(t)$, то

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Сначала убедимся, что функция

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

является оригиналом. Условия 1^0 , 2^0 определения оригинала очевидно выполняются. Если s_0 – наибольший из показателей роста функций $f(\tau)$, $g(\tau)$, то

$$|\varphi(t)| < A \left| \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right| = Ate^{s_0t}$$

и $\varphi(t)$ имеет конечный показатель роста.

Изображение оригинала $\varphi(t)$ дается двукратным интегралом

$$\varphi(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

распространенным на сектор S плоскости (t, τ) (рис. 9). При фиксированном t интегрирование по τ ведется в пределах от 0 до $\tau = t$, а затем t изменяется от 0 до ∞ . Так как при $\operatorname{Re} p > s_0$ двукратный интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрирования и получить, полагая $t_1 = t - \tau$,

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p\tau} g(t-\tau) dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = F(p)G(p),$$

что и требовалось доказать. \triangleleft

5.2. Свертка оригинала. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сверткой* оригиналов $f(t), g(t)$ называют функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

и обычно её обозначают $(f * g)$ или $f(t) * g(t)$.

Выше было показано, что свертка является оригиналом и что

$$(f * g) \doteq F(p)G(p).$$

Убедимся в том, что выражение для свертки не зависит от порядка, в котором берутся функции $f(t), g(t)$. В интеграле

$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ сделаем подстановку $t-\tau = \tau_1$. Имеем

$$\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 g(t-\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 = \int_0^t f(\tau_1)g(t-\tau_1)d\tau_1.$$

Следовательно, $(g * f) = (f * g)$.

5.3. Формула Дюамеля. Такое название получила формула

$$pF(p)G(p) = f'(t) * g(t) + f(0)g(t).$$

Для её доказательства представим произведение, стоящее в левой части, в виде

$$pF(p)G(p) = [pF(p) - f(0)]G(p) + f(0)G(p).$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображения для $f'(t)$ и изображения для $g(t)$. Применяя теорему умножения изображений и пользуясь свойством линейности, получаем

$$pF(p)G(p) \doteq f'(t) * g(t) + f(0)g(t). \triangleleft$$

Запишем правую часть этой формулы в развернутом виде

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau,$$

а также в виде

$$pF(p)G(p) \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

5.4. Умножение оригиналов. Двойственной к теореме умножения изображений является

Теорема 9 (умножение оригиналов) *Если $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы с показателями роста s_1, s_2 соответственно, то их произведение также является оригиналом, причем*

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq,$$

где $a > s_1$, $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

Действительно, легко проверить, что для произведения $f(t)g(t)$ выполняются все условия определения оригинала. В интеграле

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-pt} dt,$$

являющемся изображением $f(t)g(t)$, заменим $f(t)$ по формуле обращения. Получим, используя абсолютную сходимость интегралов,

$$\Phi(p) \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt} dq \right] g(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[F(q) \int_0^{\infty} g(t)e^{-(p-q)t} dt \right] dq.$$

Из условий $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, $\operatorname{Re} q = a$ имеем $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$. Поэтому внутренний интеграл можно заменить на $G(p-q)$. В итоге имеем

$$f(t)g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq. \quad \triangleleft$$

Как следствие доказанной теоремы отметим формулу

$$f^2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)F(p-q)dq.$$

Задачи

1. Используя таблицу оригиналов и изображений, а также разлагая изображение на сумму более простых функций, найти оригиналы следующих изображений:

$$1) F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p}. \quad \text{Ответ: } f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

$$2) F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)^2}. \quad \text{Ответ: } f(t) = e^t + e^{2t}(t-1).$$

$$3) F(p) = \frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}, \quad a \neq b.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt).$$

$$4) F(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at).$$

$$5) F(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2(p^2+b^2)}. \quad \text{Ответ: } f(t) = 1 - e^{-at} - ate^{-at}.$$

2. Используя теорему умножения изображений найти оригиналы для следующих изображений:

$$1) F(p) = \frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}. \quad \text{Ответ: } f(t) = \frac{1}{5}(3 \sin 3t - 2 \sin 2t).$$

$$2) F(p) = \frac{1}{(p^2-6p+13)(p^2-6p+10)}.$$

$$\text{Ответ: } f(t) = \frac{1}{6}e^{3t}(2 \sin t - \sin 2t).$$

$$3) F(p) = \frac{k}{p^2(p^2+k^2)}. \quad \text{Ответ: } f(t) = \frac{1}{k^2}(kt - \sin kt).$$

3. Найти свертку следующих оригиналов:

$$1) f(t) = e^t, g(t) = t^2. \quad 2) f(t) = \sin t, g(t) = \cos t.$$

$$3) f(t) = 1, \varphi(t) = \sqrt{1+t}. \quad 4) f(t) = t^3, \varphi(t) = t^2.$$

4. Используя теорему обращения, найти оригиналы для следующих изображений:

$$1) F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}. \quad 2) F(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)}.$$

$$3) F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}.$$

5. Применяя теоремы разложения, найти оригиналы следующих изображений:

$$1) F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \quad 2) F(p) = \frac{1}{p^4} e^{-\frac{1}{p}}.$$

$$3) F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

$$\text{Ответ: } f(p) = \frac{1}{2}(t^2 e^{2t} - 4te^{2t} - 2te^t - 6e^t).$$

$$4) F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}. \quad \text{Ответ: } -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}t^t + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

Глава 3

ОСОБЫЕ ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ

Оригиналами не исчерпывается область применения преобразования Лапласа. В этой главе оно будет использовано для функции t^a , где a – действительное число, $-1 < a < 0$, не являющейся, очевидно, оригиналом. Рассмотрение последовательностей простейших ступенчатых оригиналов с единичным импульсом приводит применение преобразования Лапласа к так называемым импульсным «функциям». Целесообразность их введения оправдывается упрощением аналитических преобразований, относящихся к быстропротекающим физическим процессам.

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОСОБЫХ ОРИГИНАЛОВ

1.1. Степенная функция с дробным показателем. Распростра-

ним в соответствующей форме соотношение $t^n \doteq \frac{n_1^1}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

на степенные функции вида t^a , где $a > -1$ – действительное число. При $a \geq 0$ функция t^a (умноженная на $\eta(t)$) является оригиналом, но при $-1 < a < 0$ она стремится к бесконечности при $t \rightarrow 0+$ и, следовательно, не является оригиналом.

Из курса математического анализа следует, что Γ -функция Эйлера

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$$

определена для любого $a > -1$. Пусть $p = re^{i\alpha}$ – точка из полуплоскости $\{p : \operatorname{Re} p > 0\}$. Заменим в интеграле переменную t на комплексную переменную q по формуле $t = pq$. Получим

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a e^{-pq} dq,$$

где интеграл берется по лучу $L = \{q : \arg q = -\alpha\}$. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

На дуге $C_R = \{q : |q| = R, -\alpha < \arg q < 0\}$ положим $q = Re^{i\varphi}$. Из оценки

$$\left| \int_{C_R} q^2 e^{-pq} dq \right| \leq R^q \left| \int_{-\varepsilon}^0 e^{rR \cos(\alpha+\varphi)} R d\varphi \right|$$

с учетом неравенства $\cos(\alpha + \varphi) > 0$ при $\varphi \in (-\alpha, 0)$ следует, что интеграл по C_R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. В силу интегральной теоремы Коши интеграл от $q^a e^{-pq}$ по границе $\partial\Delta_R$ криволинейного треугольника Δ_R , сторонами которого являются отрезок действительной оси от 0 до R , отрезок луча L от 0 до $Re^{-i\alpha}$, и дуга C_R , равен нулю. Устремляя R к бесконечности, получаем

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = -p^{a+1} \int_\infty^0 q^a e^{-pq} dq,$$

откуда, обозначая переменную q через t , имеем

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} = \int_0^\infty t^a e^{-pt} dt. \quad (1)$$

Этот же результат имеем для $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

При $a \geq 0$ функция $f(t) = t^a$ является оригиналом. Следовательно, полученное уравнение равносильно соответствию

$$t^a \doteq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}. \quad (2)$$

Так как $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то отсюда получаем из-

~~вестности~~

$$t^{\frac{n!}{p^{n+1}}} \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

При $-1 < a < 0$ интеграл в правой части формулы (1) сходится, и формула остается справедливой. Поэтому можно говорить, что при $-1 < a < 0$ функция t^a является «особым» оригиналом, а функция $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ – его особым изображением.

1.2. Примеры изображений, содержащих \sqrt{p} . В приложениях операционного исчисления часто встречаются соотношения, содержащие \sqrt{p} . Многие из них связывают особые оригиналы и особые изображения. Укажем некоторые примеры.

Известно, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

и поэтому формула (14) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

и преобразуется на основании теоремы 5 о смещении изображения (см. гл. 1) в соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{p+a}} \doteq e^{-at} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

Пользуясь правилом интегрирования оригинала, имеем

$$\frac{1}{p\sqrt{p+a}} \doteq \int_0^t e^{-a\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-x^2} dx$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p\sqrt{p+a}} \doteq \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at}).$$

В приводимых далее примерах мы не останавливаемся на обоснованиях. Они обычно обеспечиваются методами комплексного анализа.

Пусть $F(p) = \frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$. Тогда $F(p) \doteq 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$,

где, как обычно,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad 1 - \operatorname{erf}(x) = \operatorname{Erf}(x).$$

Пусть $F(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{p}}$. Тогда $F(p) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \operatorname{Erf}(\sqrt{t})$.

Пусть $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-ap}$. Тогда $F(p) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2a\sqrt{t}}$.

Пусть $F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$. Тогда $F(p) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin 2\sqrt{at}$.

Пусть $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$. Тогда $F(p) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{at}$.

1.3. Изображение логарифма. Пусть $F(p) \doteq \ln t$, $\ln 1 = 0$. Тогда по теореме о дифференцируемости изображения $t \ln t \doteq F'(p)$. Почленно вычитая из этого соотношения соотношение $t \doteq \frac{1}{p^2}$, получаем

$$t \ln t - t \doteq -F'(p) - \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда по теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$(t \ln t - t)' \doteq -pF'(p) - \frac{1}{p}$$

и, поскольку $(t \ln t - t)' = \ln t$, находим для $F(p)$ дифференциальное уравнение

$$-pF'(p) - \frac{1}{p} = F(p)$$

или, что то же самое,

$$(pF(p))' = -\frac{1}{p}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$F(p) = -\frac{\ln p}{p} - \frac{C}{p}.$$

Постоянную C находим из условия $F(1) = -C$. Значит,

$$C = -F(1) = -\int_0^{\infty} \ln t e^{-t} dt = 0,57729.$$

Число C называется постоянной Эйлера. Можно показать, что

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Таким образом,

$$\ln t \doteq \frac{1}{p} \left(\ln \frac{1}{p} - C \right).$$

1.4. Изображение функций, связанных с интегралом вероятностей. Пусть

$$f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \text{ и } F(p) \doteq f(t). \text{ Так как } [\operatorname{erf}(t)]' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2},$$

то имеем
$$f'(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

После перехода к изображениям получим

$$pF(p) = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}},$$

откуда

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Таким образом,

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

По теореме о смещении изображения имеем

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

Переходим к нахождению изображения для $\operatorname{Erf}(\sqrt{t})$. Имеем

$$e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}) = e^t - e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} = \frac{1}{p+\sqrt{p}}.$$

Таким образом,

$$e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p+\sqrt{p}}.$$

По теореме о смещении изображения имеем

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}.$$

1.5. Изображения интегралов Френеля. Функции

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du, \quad C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$$

называются соответственно синус Френеля, косинус Френеля. Найдем их изображения. Имеем

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{it}}{\sqrt{t}} - \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}} \right).$$

Пользуясь теоремой о смещении изображения $e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p-\lambda)$ и

соотношением $\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$, получаем

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right).$$

Интегрирование оригинала дает соотношение

$$\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2ip} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right)$$

и, следовательно,

$$S(t) \doteq \frac{1}{2\sqrt{2i}} \frac{\sqrt{p+i} - \sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Изображение для $S(t)$ найдено.

Повторяя с небольшими изменениями проведенные выкладки, найдем изображение для $C(t)$. Имеем

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{it}}{\sqrt{t}} + \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}} \right) \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right).$$

Интегрирование оригинала дает соотношение

$$\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right)$$

и, следовательно,

$$C(t) \doteq \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p+i} + \sqrt{p-i}}{p\sqrt{p^2+1}}.$$

Изображение для косинуса Френеля найдено.

§ 2. ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. Дельта-функция. В ряде прикладных задач приходится иметь дело с процессами типа мгновенного толчка, когда достаточно сильное воздействие происходит в очень малый промежуток времени. Пример графика такого процесса отражен на рис. 10, отвечающем функции $\delta_h(t) = \frac{1}{h} [\eta(t) - \eta(t-h)]$. Её изображением является функция

$$F_h(p) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right) = \frac{1 - e^{-ph}}{hp},$$

то есть

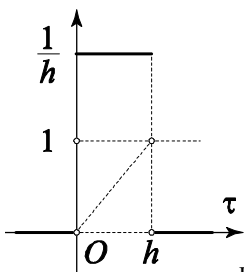


Рис. 10.

$$\delta_h(t) \doteq \Delta_h(p) = \frac{1 - e^{-ph}}{hp}.$$

Семейство функций $\delta_h(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h 1 dt = 1, \quad \text{с единичным им-}$$

пульсом, при $h \rightarrow 0$, очевидно, сходится на $(0, \infty)$ и не имеет предела в общепринятом смысле при $t = 0$. Введем, следуя Дираку,

условную функцию, которую будем считать пределом этого семейства:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Её называют δ -функцией (импульсной функцией нулевого порядка). Эта функция равна нулю всюду, за исключением точки $t = 0$, в которой δ -функция равна ∞ , и тем не менее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = 1.$$

За изображение $\Delta(p)$ δ -функции примем

$$\Delta(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{hp} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - ph + \dots)}{hp} = 1,$$

то есть будем полагать справедливым соотношение $\delta(t) \doteq p$. Изображение является особым, поскольку оно не обращается в нуль в бесконечно удаленной точке.

В пользу соотношения $\delta(t) \doteq 1$ имеется несколько соображений. Построим график интеграла функции $\delta_h(t)$, то есть функции

$$\eta_h(t) = \int_0^t \delta_h(t) dt. \quad \text{Из графика видно, что } \eta_h(t) \rightarrow \eta(t) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

и можно полагать, что

$$\int_0^t \delta(t) dt = \eta(t).$$

Но тогда $\delta(t) = \eta'(t)$, и поскольку $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$, то по правилу дифференцирования оригиналов получим $\eta'(t) \doteq p \frac{1}{p} = 1$.

Покажем, что

$$\delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

Сначала отметим, что для любой функции $\mathbf{E}(t)$, удовлетворяющей условию 1^0 оригинала, по теореме о среднем имеем

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \delta_h(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) dt = \varphi(t^*),$$

где $t^* \in (0, h)$. В результате предельного перехода при $h \rightarrow 0$ будем

считать $\int_0^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \lim_{t^* \rightarrow 0^+} = \varphi(0)$.

Полагая $\varphi(t) = e^{-pt}$, получаем

$$\delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

На δ -функцию распространяются теорема запаздывания:

$\delta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}$, теорема умножения: $1 \cdot F(p) \doteq \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$

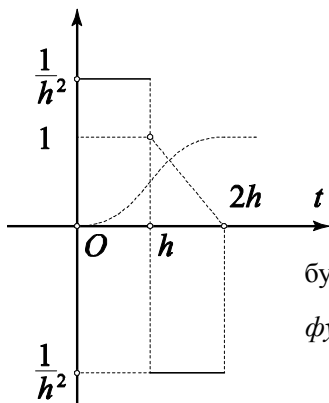
и другие основные правила операционного исчисления.

2.2. Импульсные функции высших порядков. Аналогично способу, использованному для введения δ -функции (импульсной функции нулевого порядка), проводятся построения импульсных функций первого, второго и более высшего порядка.

Рассмотрим функцию (рис. 11)

$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h} \left[\frac{\eta(t) - \eta(t-h)}{h} - \frac{\eta(t-h) - \eta(t-2h)}{h} \right].$$

Ей соответствует изображение



$$\Delta_h^{(1)} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{2e^{-hp}}{p} + \frac{e^{-2hp}}{p} \right].$$

В пределе при $h \rightarrow 0$ $\delta_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h^{(1)}(t)$ и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h^{(1)} = p. \text{ Положим } \delta_1(t) \doteq p \text{ и}$$

будем называть $\delta_1(t)$ *импульсной функцией первого порядка*.

Из рис. 11, на котором пунктиром изображен график функции $\delta_h^{(1)}(t)$, находим,

Рис. 11.

что функция

$$\eta_h^{(1)}(t) = \int_0^t dt \int_0^t \delta_h^{(1)}(t) dt$$

при $h \rightarrow 0$ стремится к единичной функции $\eta(t)$. Будем считать, что

$$\int_0^t dt \int_0^t \delta_1(t) dt = \eta(t), \quad \delta_1(t) = \frac{d^2}{dt^2} \eta(t).$$

Тогда $\delta_1(t) \doteq p^2 \frac{1}{p} = p$.

Точно так же можно ввести и рассматривать «оригинал» степени p^n — импульсную функцию n -го порядка

$$\delta_n(t) \doteq p^n, \quad \delta_n(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \eta(t).$$

ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

№ п/п	Оригинал	Изображение по Лапласу	Примечание
1	2	3	4
1	1	$\frac{1}{p}$	
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	n – натуральное число
3	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\operatorname{Re} a > -1$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	
5	a^t	$\frac{1}{p-\ln a}$	$\operatorname{Re} a > 0$
6	$\ln t$	$\frac{1}{p} \left(\ln \frac{1}{p} - C \right)$	$C = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 0,57722$ – постоянная Эйлера
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	
8	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	
9	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	
10	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	
11	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	
12	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	
13	$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$	
14	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$	

Продолжение таблицы

1	2	3	4
15	$e^{-\lambda t} t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$	
16	$t e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p+\lambda)}{[(p+\lambda)^2 + \omega^2]^2}$	
17	$t e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{(p+\lambda)^2 - \omega^2}{[(p+\lambda)^2 + \omega^2]^2}$	
18	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	Единичная функция
19	$\eta(t-\tau)$	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$	$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$
20	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	
21	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	
22	$\frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{b-a}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	
23	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$	
24	$\frac{1-e^{-at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p}$	
25	$\delta_n(t)$	p^{n-1}	Дельта-функция или импульсная функция n -го порядка
26	$\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$	$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$
27	$\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	$\operatorname{Erf}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$
28	$j_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	

Окончание таблицы

1	2	3	4
29	$j_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$	Бесселевы (цилиндрические) функции
30	$\text{ci } t$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\text{ci } t = -\int_t^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$
31	$\text{li } t$	$\frac{1}{p} \ln(1+p)$	$\text{li } t = \int_0^t \frac{d\tau}{\ln \tau}$
32	$\text{si } t$	$\frac{\pi}{2p} - \frac{\text{arctg } p}{p}$	$\text{si } t = -\int_t^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$

Задачи

1. Доказать:

а) $\delta(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}$;

б) $\int_0^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-p\tau}$;

в) если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$1 \cdot F(p) \doteq \int_0^t f(t-\tau) \delta(t-\delta) d\tau = f(t) * \delta(\tau) = f(t).$$

2. Доказать:

а) $\int_0^t dt \int_0^t \delta_1(\tau) d\tau = \eta(t)$;

б) $\delta_1(t) = p^2 \cdot \frac{1}{p} = p$.

3. Доказать:

а) $\frac{\sqrt{p+a}}{p} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at} + \sqrt{a} \text{erf}(\sqrt{at})$;

б) $\text{si } t \doteq \frac{\pi}{2p} - \frac{\text{arctg } p}{p}$, где $\text{si } t = -\int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$;

$$\text{в) } \text{cit} \doteq \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}, \text{ где } \text{cit} = - \int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du;$$

$$\text{г) } \text{lit} \doteq \frac{1}{p} \ln(1 + p), \text{ где } \text{lit} = \int_0^\infty \frac{dt}{\ln u}.$$

Глава 4

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Здесь будут рассмотрены приложения операционного метода к решению задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями и их системами, а также с некоторыми уравнениями в частных производных. Широкое распространение операционный метод получил в задачах расчетов работы электрических цепей. Будут рассмотрены примеры таких цепей, составленных из двухполюсных элементов, с целью определения в них токов и напряжений.

§ 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Основная задача. Операционный метод особенно просто применяется к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (2)$$

Будем считать, что $f(t)$ – оригинал. Тогда решение $x(t)$ задачи (1), (2) (существование и единственность которого предполагается), а также производные $x^{(k)}(t), k=1, 2, \dots, n$, будут оригиналами. Обозначим $X(p) \doteq x(t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Согласно правилам дифференцирования оригинала имеет место соотношение

$$\frac{d^k(x)}{dt^k} \doteq p^k X(p) - x(0)p^{k-1} - x'(0)p^{k-2} - \dots - x^{(k-1)}(0),$$

с использованием которого задачу (1), (2) можно перевести в соответствующую задачу для *операторного уравнения*

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = \\ & = F(p) + x_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + x_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет вид

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p), \quad (4)$$

где $A(p), B(p)$ – известные многочлены.

Функция

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)},$$

являясь решением уравнения (4), представляет собой *операторное решение* задачи (1), (2), поскольку

$$x(t) \doteq \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}.$$

Таким образом, для решения задачи (1), (2) надо найти оригинал для изображения $\frac{F(p) + B(p)}{A(p)}$. Обычно с этой целью используют

теоремы разложения, свойства линейности и таблицы оригиналов и изображений.

Приведем примеры решения дифференциальных уравнений таким методом.

1.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. Найдем решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + 2x' + (1 + a^2)x = 0$$

при начальных условиях $x(0) = x_0, x'(0) = x_1$.

Задаче соответствует операторное уравнение

$$(p^2 + 2p + 1 + a^2)X = x_0(p + 2) + x_1.$$

Операторное решение

$$X(p) = \frac{x_0(p + 2) + x_1}{p^2 + 2p + 1 + a^2}$$

преобразуем к виду

$$X(p) = \frac{x_0(p+2) + x_1}{(p+1)^2 + a^2} = x_0 \frac{p+1}{(p+1)^2 + a^2} + \frac{x_0 + x_1}{a} \frac{a}{(p+1)^2 + a^2}.$$

Воспользовавшись известными соответствиями

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

теоремой смещения и свойством линейности, находим

$$x(t) = \left(x_0 \cos at + \frac{x_0 + x_1}{a} \sin at \right) e^{-t}.$$

Полученное решение можно записать в другой форме. Пусть

$$q = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0 + x_1}{a} \right)^2}, \quad \frac{x_0}{q} = \sin \varphi, \quad \frac{x_0 + x_1}{aq} = \cos \varphi.$$

Тогда

$$x(t) = qe^{-t} \sin(at + \varphi).$$

Пример. Найдём решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + a^2x = \delta(t)$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Этой задаче соответствует операторное уравнение

$$(p^2 + a^2)X = 1.$$

Решению

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + a^2}$$

этого уравнения соответствует оригинал

$$x(t) = \frac{1}{a} \sin at.$$

Видим, что импульсное воздействие на находящийся в покое математический маятник приводит его в гармоническое колебание. Такой же результат появляется при решении задачи

$$x'' + a^2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Пример. Найдем решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + a^2 x = b \sin at$$

при начальных условиях $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Соответствующее операторное уравнение

$$(p^2 + a^2)X = \frac{ab}{p^2 + a^2} + x_0 p + x_1$$

имеет решение

$$X(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} + x_0 \frac{p}{p^2 + a^2} + \frac{x_1}{p^2 + a^2}.$$

Для нахождения оригинала $x_1(t)$ первого слагаемого

$X_1(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2}$, имеющего в точках $p = ia$, $p = -ia$ полюсы вто-

рого порядка, воспользуемся способом, указанным в теореме 4 гл. 2 и замечаниями в n^0 24 гл. 2 о изображениях с действительными коэффициентами. Получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2 \operatorname{Re} \lim_{p \rightarrow ia} \frac{d}{dp} \left[\frac{ab(p-ia)^2}{(p^2+a^2)^2} e^{pt} \right] = 2ab \lim_{p \rightarrow ia} \frac{d}{dp} \frac{e^{pt}}{(p+ia)^2} = 2ab \lim_{p \rightarrow ia} \frac{te^{pt}(p+ia) - 2e^{pt}}{(p+ia)^2} = \\ &= 2ab \operatorname{Re} \frac{te^{iat} \cdot 2ia - 2e^{iat}}{(2ia)^2} = \frac{b}{2a} \operatorname{Re} (iate^{iat} - ie^{iat}) = \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at). \end{aligned}$$

Оригиналы для второго и третьего слагаемых в сумме, представляющей $X(p)$, известны из таблицы оригиналов и изображений.

В итоге имеем решение

$$x(t) = \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at) + x_0 \cos at + \frac{x_1}{a} \sin at.$$

Пример. Найдем решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + \omega^2 x = a(\eta(t) - \eta(t-b))$$

при начальных данных $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Соответствующее операторное уравнение имеет вид

$$(p^2 + \omega^2)X = \frac{a}{p}(1 - e^{-bp}).$$

Запишем и преобразуем его операторное решение:

$$X(p) = \frac{a(1 - e^{-p})}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{a}{\omega^2}(1 - e^{-p}) \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{a}{\omega^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{e^{-bp}}{p} + \frac{pe^{-bp}}{p^2 + \omega^2} \right).$$

В результате перехода к оригиналам получим

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t - \eta(t-b) \cos \omega t) = \frac{a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} (\eta(t) - \eta(t-b)).$$

Пример. Точечная масса m совершает прямолинейные колебания, причем восстанавливающая сила $m\omega^2 x$ пропорциональна смещению. В моменты времени $t_k = k\tau$ массе сообщаются импульсы величины a . Найти движение частицы, если её начальное отклонение и начальная скорость равны нулю.

Уравнение движения имеет вид

$$mx'' + m\omega^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau),$$

где $\delta(t)$ – импульсная функция. Операторное решение дается формулой

$$X(p) = \frac{a}{m(p^2 + \omega^2)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau p} = \frac{a}{m} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-\tau p})}.$$

По теореме 6 гл. 2 оригинал представляет собой сумму вычетов функции $X(p)e^{pt}$ во всех её полюсах, то есть в точках $p_0 = 0$,

$p = \pm ia$, $p_k = \frac{2k\pi i}{\tau}$. Если τ не является целым кратным числу

$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, то все полюсы простые, и, найдя вычеты, получаем окончательно

$$x(t) = \frac{a}{m\omega^2} \left[\frac{1}{\tau} - \frac{\omega}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \cos \left(t - \frac{\tau}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau}{\tau^2 - k^2 \tau_1^2} \cos k \frac{\tau_1}{\tau} \omega t \right].$$

1.3. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

К некоторым уравнениям такого типа удастся применить операционный метод и упростить задачу нахождения решения уравнения.

Пусть $x(t) \doteq X(p)$. По правилам дифференцирования оригинала и изображения имеем

$$\begin{aligned} x &\doteq X, & x' &\doteq pX - x(0), & x'' &\doteq p^2 X - x(0)p - x'(0), \\ tx &\doteq -X', & tx' &\doteq -(pX)', & tx'' &\doteq -(p^2 X)' + x'(0), \\ t^2 x &\doteq X'', & t^2 x' &\doteq (pX)'' , & t^2 x'' &\doteq (p^2 X)'' , \\ & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Переход к изображениям в данном уравнении может привести к более простому уравнению.

Пример. Пусть требуется решить уравнение

$$tx'' + (1-n)x' + x = 0$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Соответствующее операторное уравнение

$$p^2 X'' + (p + pn - 1)X = 0$$

имеет первый порядок и допускает деление переменных. Решая уравнение, найдем

$$X = \frac{C}{pn+1} e^{-\frac{1}{p}}.$$

По таблице оригиналов и изображений получим оригинал

$$x = Ct^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{t}),$$

где $I_n(x)$ – функция Бесселя. Произвольная постоянная C появляется здесь из-за того, что $t = 0$ – особая точка решенного дифференциального уравнения.

1.4. Системы линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим применение операционного метода к решению системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на примере системы, состоящей из уравнений второго порядка:

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{vk} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{vk} \frac{dx_k}{dt} + c_{vk} x_k \right) = f_v(t), \quad v=1,2,\dots,n, \quad (5)$$

с условием, что $x_k(0) = \alpha_k$, $x'_k(0) = \beta_k$, $k=1,\dots,n$.

Будем предполагать, что функции $f_1(t), \dots, f_n(t)$ удовлетворяют условиям $1^0 - 3^0$ определения оригинала. Аналогично случаю одного уравнения, рассмотренному в n^0 4.1, будем считать $X_k(p) \doteq x_k(t)$, $F_k(p) \doteq f_k(t)$. Система (5) вместе с начальными условиями заменяется операторной системой

$$\sum_{k=1}^n (a_{vk} p^2 + b_{vk} p + c_{vk}) X_k(p) = F_v(p) + \sum_{k=1}^n [(a_{vk} p + b_{vk}) \alpha_k + a_{vk} \beta_k]. \quad (6)$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, сначала находим $X_1(p), \dots, X_n(p)$, а затем соответствующие им оригиналы $x_k(t)$.

Пример. Решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0,$$

$$(2x'' + x' - 7x) - (y' - y' + 5y) = 0$$

при начальных условиях $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Перейдем к операторной системе. Получим

$$(2p^2 - p + 9)X - (p^2 + p + 3)Y = 2p + 1,$$

$$(2p^2 + p + 7)X - (p^2 - p + 5)Y = 2p + 3.$$

Для упрощения берем сумму и разность уравнений. Имеем

$$2X - Y = 2 \frac{p+1}{p^2+4}, \quad X + Y = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда имеем операторное решение первоначально заданной системы:

$$X(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4},$$

$$Y(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} - \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4}.$$

Переходя к оригиналам, окончательно получаем

$$x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(e^t - 2 \cos 2t) - \sin 2t.$$

Пример. Решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'' - x + y + z = 0,$$

$$x + y'' - y + z = 0,$$

$$x + y + z'' - z = 0$$

при начальных условиях $x(0) = 1$,

$$y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.$$

Перейдем к операторной системе. Получим

$$(p^2 - 1)X + Y + Z = p,$$

$$X + (p^2 - 1)Y + Z = 0,$$

$$X + Y + (p^2 - 1)Z = 0.$$

Решим её с помощью определителей. Имеем

$$d = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2 - 1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = (p^2 + 1)(p^2 - 2)^2,$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 0 & p^2 - 1 & 1 \\ 0 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = p^3(p^2 - 2),$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = -p(p^2 - 2),$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & 1 & p \\ 1 & p^2 - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -p(p^2 - 2).$$

Согласно правилу Крамера

$$X = \frac{d_1}{d} = \frac{p^3}{(p^2-1)(p^2-2)}, \quad Y = \frac{d_2}{d} = -\frac{p}{(p^2-1)(p^2-2)},$$

$$Z = \frac{d_3}{d} = -\frac{p}{(p^2-1)(p^2-2)}.$$

Легко проверить, что

$$X = \frac{1}{3} \left(\frac{2p}{p^2-2} + \frac{p}{p^2+1} \right), \quad Y = Z = -\frac{1}{3} \left(\frac{p}{p^2-2} - \frac{p}{p^2+1} \right).$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, находим решение системы в виде

$$x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3} \cos t, \quad y(t) = z(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3} \cos t.$$

Пример. На струне длины l (с закрепленными концами) в точках, делящих струну на четыре равные части, помещены точечные массы m . В начальный момент эти массы находятся в покое, в состоянии равновесия, но средней массе сообщается импульс v_0 . Найти движение системы.

Для вывода дифференциального уравнения системы струна – массы при условии малых отклонений $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, точек от положения равновесия обратимся к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} = 0,$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия системы, x_k – обобщённые координаты и точка обозначает дифференцирование по времени.

Для рассматриваемой системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad \Pi = \frac{P}{l} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3),$$

где P – натяжение струны. Следовательно, уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}x_1'' + \lambda(2x_1 - x_2) &= 0, \\x_2'' + \lambda(2x_2 - x_1 - x_3) &= 0, \\x_3'' + \lambda(2x_3 - x_2) &= 0,\end{aligned}$$

где $\lambda = \frac{P}{ml}$. Пусть $X(p) \doteq x_k(t)$, $k=1,2,3$. Учитывая начальные условия $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = 0$, $\dot{x}_2 = v_0$, получаем операторные уравнения

$$\begin{aligned}X_1(p^2 + 2\lambda) - \lambda X_2 &= 0, \\-\lambda X_1 + (p^2 + 2\lambda)X_2 - \lambda X_3 &= v_0, \\-\lambda X_2 + (p^2 + 2\lambda)X_3 &= 0.\end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем

$$X_2 = \frac{(p^2 + 2\lambda)v_0}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2}, \quad X_1 = X_3 = \frac{\lambda v_0}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2}.$$

Так как

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2} &= \frac{1}{(p^2 + 2\lambda + \sqrt{2}\lambda)(p^2 + 2\lambda - \sqrt{2}\lambda)} = \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{p^2 + (2 - 2\sqrt{2})\lambda} - \frac{1}{p^2 + (2 + 2\sqrt{2})\lambda} \right]\end{aligned}$$

и

$$\frac{p^2 + 2\lambda}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p^2 + (2 - \sqrt{2})\lambda} + \frac{1}{p^2 + (2 + \sqrt{2})\lambda} \right],$$

то, полагая $\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\lambda}$, $\omega_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\lambda}$, имеем

$$x_1(t) = x_3(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right], \quad x_2(t) = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right].$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В задачах, относящихся к математической физике, требуется найти функцию, частные производные которой связаны некоторыми соотношениями, а сама искомая функция должна удовлетворять определенным дополнительным условиям. Для простоты будем рассматривать задачи о функциях $u(x, t)$ двух переменных. Первую из них будем считать пространственной координатой, а вторую – временем.

2.1. Теплопроводность. Распределение температуры $u(x, t)$ в тонком стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где a^2 – постоянный коэффициент. Предположим, что стержень полуограничен, $0 < x < \infty$, его начальная температура равна нулю: $u(x, 0) = 0$, а температура $u(x, t)$ на конце стержня изменяется по закону $u(0, t) = f(t)$.

Пусть $U(p, x) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt$. Дважды дифференцируя интеграл по x , получим

$$\frac{\partial^2 U(p, x)}{\partial x^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt.$$

Следовательно, если $U(p, x) \doteq u(x, t)$, то $\frac{\partial^2 U(p, x)}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$. Так

как $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \doteq pU(p, x)$, то уравнению (7) соответствует после перехода к изображениям обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - pU = 0 \quad (8)$$

(дифференцирование U по x обозначаем с помощью символа d , а не ∂ , поскольку в дальнейшем p рассматривается как параметр). Уравнение (8) надо решить при условии $U(p, 0) = F(p)$, где $F(p) \doteq f(t)$.

В общем решении

$$U(p, x) = Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

постоянную C_1 следует взять равной нулю, поскольку при $C_1 \neq 0$ $|U|$ будет неограниченно возрастать при $x \rightarrow \infty$. Условие $U(p, 0) = F(p)$ дает $C = F(p)$ и, следовательно,

$$U = F(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда температура на конце стержня постоянна и равна 1. Тогда $F(p) = \frac{1}{p}$, $U_1 = \frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$, и, следовательно, оригинал $u_1(x, t)$ имеет вид

$$u_1(x, t) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

В случае произвольных начальных условий $u(0, t) = f(t)$, следуя формуле Дюамеля

$$pF(p)G(p) \doteq g(0)f(t) + f * g',$$

имеем

$$u(x, t) \doteq pF(p)U_1(p) = U_1(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Выполним в интеграле замену $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$. После несложных преобразований получим функцию

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi,$$

дающую распределение температуры в полубесконечном стержне.

Легко проверить, что

$$U(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = f(t) \operatorname{erf}(\infty) = f(t).$$

2.2. Продольное колебание стержня. Предположим, что к упругому стержню длины l , закрепленному в точке $x=0$ и находящемуся в состоянии покоя, приложена к концу $x=l$ сила $A \sin \omega t$, направленная по оси стержня. Найти продольное колебание стержня.

Обозначим через $u = u(x, t)$ продольное смещение точки $x \in (0, l)$ в момент времени $t, t > 0$. Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a^2 – постоянный коэффициент, зависящий от материала стержня. Начальные и граничные условия требуют, чтобы

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(l, t) = \frac{A}{E} \sin \omega t.$$

Пусть $U(p, x) \doteq u(x, t)$. Тогда уравнение колебаний в операторной форме примет вид обыкновенного дифференциального линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$p^2 U = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

Его надо решить при условиях

$$U(p, 0) = 0, \quad \frac{dU(p, l)}{dx} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Общее решение возьмем в виде

$$U(p, x) = C_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x.$$

Согласно условию $U(p, 0) = 0$ имеем $C_1 = 0$. Из условия

$$C_2 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{sh} \frac{p}{a} x \right) \Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

получаем

$$C_2 = \frac{b}{p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{pl}{a}},$$

где $b = \frac{Aa\omega}{E}$. Следовательно, операторное решение задачи имеет вид

$$U = \frac{b}{p(p^2 + \omega^2)} \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a} p}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} p}.$$

Перейдем к нахождению оригинала. Функция U имеет полюс первого порядка в точке $p=0$ и полюсы первого порядка в нулях

функций $p^2 + \omega^2$, $\operatorname{ch} \frac{l}{a} p = \frac{e^{\frac{l}{a}p} + e^{-\frac{l}{a}p}}{2}$, то есть в точках $\pm i\omega$ и в точках

каж $\pm i \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2} \right)$, $k=1, 2, \dots$, очевидно, образующих комплексно сопряженные пары. В верхней полуплоскости лежат полюсы $i\omega_k$,

$$\omega_k = i \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2} \right), \quad k=1, 2, \dots$$

Воспользуемся теоремой разложения и замечанием к ней, относящимся к случаю симметричных относительно действительной оси полюсов. Положив $A = b \operatorname{sh} \frac{x}{a} p$, $B = p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{x}{a} p$, имеем

$$A(0) = 0, \quad A(i\omega) = bi \sin \frac{\omega x}{a}, \quad B'(i\omega) = -2\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a},$$

$$A(p_k) = bi \sin \frac{\omega_k x}{a}, \quad B'(p_k) = (-1)^k \frac{\omega_k l}{a} (\omega^2 - \omega_k^2)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{i\omega_k t} \right\} = \\ &= \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x}{\omega_k^2 - \omega^2} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}. \end{aligned}$$

Таково решение задачи, если $\omega_k \neq \omega$. Это условие обеспечивает отсутствие резонанса.

§ 3. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3.1. Двухполюсники. К важнейшим деталям, из которых конструируются электрические цепи, принадлежат сопротивление R , индукция L и ёмкость C . Их условное обозначение приведено на рис. 12.

Так как $i(t)$ и напряжение $u(t)$ на концах этих элементов связаны соотношениями

$$u(t) = Ri(t), \quad u(t) = L \frac{di}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t i(t) dt + q_0 \right], \quad (9)$$

где q_0 – начальный заряд на обкладках конденсатора; R, L, C – положительные постоянные.

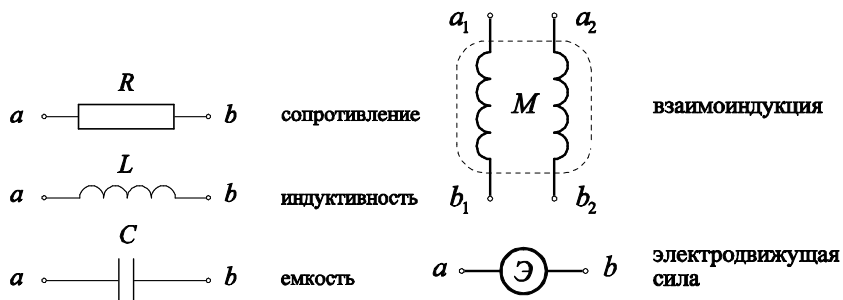


Рис. 12.

Рис. 13.

Принимая $i(t)$ и $u(t)$ за оригиналы и полагая $I(p) \doteq i(t)$, $U(p) \doteq u(t)$, запишем соотношения (9) в виде

$$U = RI, \quad U = L(pI - i_0), \quad U = \frac{1}{C_p}(I + q_0), \quad (10)$$

где $i_0 = i(0)$ – начальный ток. При $i_0 = q_0 = 0$ соотношениям (10) можно придать единую форму операторного закона Ома:

$$U(p) = Z(p)I(p), \quad (11)$$

где Z – операторное сопротивление (называемое также импедансом), которое в случае сопротивления, индукции и емкости при $i_0 = q_0 = 0$ равно соответственно

$$Z_R = R, \quad Z_L = Lp, \quad Z_C = \frac{1}{Cp}.$$

Если положить $G(p) = \frac{1}{Z(p)}$, то соотношение (11) приобретает вид

$$I(p) = G(p)U(p).$$

Функция $G(p)$ называется операторной проводимостью (или адмитансом) двухполюсника и имеет вид

$$G_R = \frac{1}{R}, \quad G_L = \frac{1}{Lp}, \quad G_C = Cp. \quad (12)$$

3.2. Взаимоиндукция. Двухполюсники a_1b_1 и a_2b_2 с величинами $L_{a_1b_1} = L_1$, $L_{a_2b_2} = L_2$ могут находиться в состоянии взаимоиндукции (рис. 13), характеризующемся коэффициентом взаимоиндукции $M = M_{a_1b_1, a_2b_2}$. В этом случае напряжение $u_{a_1b_1}(t) = u_1(t)$ на двухполюснике a_1b_1 связано не только с током $i_{a_1b_1}(t) = i_1(t)$, но также и с током $i_{a_2b_2}(t) = i_2(t)$. Точно так же напряжение $u_{a_2b_2}(t) = u_2(t)$ на двухполюснике a_2b_2 связано не только с током $i_2(t)$, но и с током $i_1(t)$. Эти связи даются формулами

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 i_1(t) + M \frac{di_2(t)}{dt}, \\ u_2(t) &= L_2 i_2(t) + M \frac{di_1(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом для коэффициента $M_{a_1b_1, a_2b_2}$ взаимоиндукции выполняются равенства

$$M_{a_1b_1, a_2b_2} = M_{a_2b_2, a_1b_1} = -M_{a_1b_1, b_2a_2},$$

и, кроме того, имеет место неравенство

$$M^2 \leq L_1 L_2.$$

В операторной форме соотношения (13) имеют вид

$$U_1(p) = L_1 I_1(p) + M [pI_2(p) - i_{20}],$$

$$U_2(p) = L_2 I_2(p) + M [pI_1(p) - i_{10}].$$

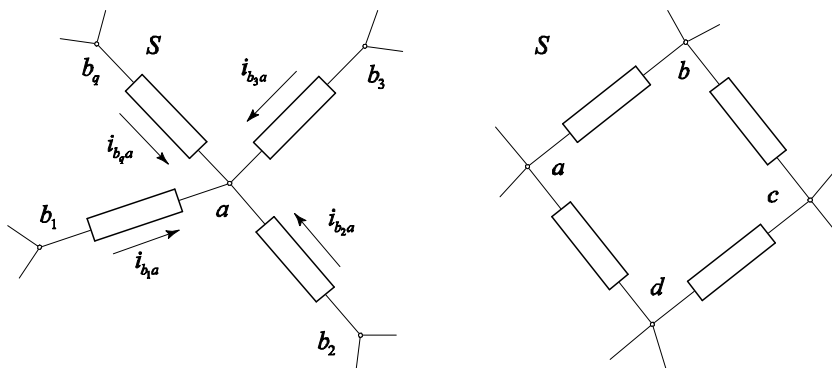


Рис. 14.

3.3. Законы Кирхгофа. Ограничимся рассмотрением электрических цепей S , представляющих собой конечную совокупность двухполюсников указанного выше вида и двухполюсников – источников напряжения и тока, полюсы которых соединены в так называемые узлы цепи. В каждом узле соединяются два или более полюсов различных элементов цепи. Примеры электрических цепей изображены на рис. 14.

Работа электрических цепей проходит в соответствии с законами Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа утверждает, что если в узле цепи S соединены двухполюсники b_1a, b_2a, \dots, b_qa , то

$$i_{b_1a}(t) + i_{b_2a}(t) + \dots + i_{b_qa}(t) = 0.$$

Это соотношение, записанное для операторных токов $I_{k,a}(p) \doteq i_{k,a}(t)$, имеет вид

$$I_{1,a}(p) + I_{2,a}(p) + \dots + I_{k,a}(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа утверждает, что если ab, bc, \dots, hk, ka – некоторая последовательность двухполюсников, входящих в цепь S , то

$$u_{ab}(t) + u_{bc}(t) + \dots + u_{hk}(t) + u_{ka}(t) = 0.$$

Это соотношение, записанное для операторных напряжений, означает, что сумма операторных напряжений по замкнутому контуру типа цикла равна нулю.

При последовательном соединении двух и более двухполюсников с импедансами Z_1, Z_2, \dots, Z_n получаем $U_1 = Z_1 I$, $U_2 = Z_2 I, \dots$, $U_n = Z_n I$, а в целом для такого участка цепи $U = ZI$. Поэтому

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n.$$

При параллельном соединении двух и более двухполюсников (или составленных из них последовательно соединенных двухполюсников) с импедансами Z_1, Z_2, \dots, Z_n получим

$$U = Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + \dots + Z_n I_n \text{ при условии } I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{Z}.$$

найдем

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n},$$

то есть $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, где $A_k = 1/Z_k$.

Таким образом, операторные сопротивления цепей в указанных соединениях можно подсчитывать по единообразным формулам.

Задача расчёта работы электрической цепи, сконструированной из двухполюсников, состоит в нахождении тока и напряжения, соответствующих каждому двухполюснику цепи. Работа цепи осуществляется по законам Кирхгофа. Если цепь состоит из двухполюсников, то необходимо найти $2n$ значений тока и напряжения, соответствующих элементам цепи. Приведем примеры расчета электрических цепей.

3.4. Колебательный контур. На рис. 15 изображена цепь S , состоящая из четырех двухполюсников: ab – сопротивление R ; bc – индуктивность L ; cd – конденсатор C ; da – источник напряжения $u(t)$. Для расчета цепи S – колебательного контура – воспользуемся сначала первым законом Кирхгофа. В каждом из четырех узлов цепи соединены по два двухполюсника. Поэтому имеем

$$i_{fb}(t) = i_{bc}(t) = i_{cd}(t) = i_{da}(t) = i(t).$$

Здесь $i(t)$ – контурный ток. Второй закон Кирхгофа дает соотношение

$$u_{ab}(t) + u_{bc}(t) + u_{cd}(t) + u_{da}(t) = 0. \quad (14)$$

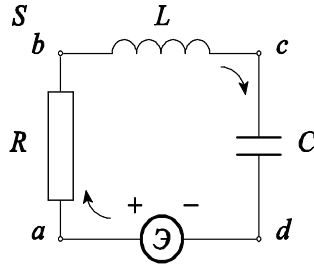


Рис. 15.

Перейдем к операторному току $I(p) \doteq i(t)$ и операторному напряжению $U(p) \doteq u(t)$. Получим из (14) и формул (10) соотношение

$$RI + L(pI - i_0) + \frac{1}{Cp}(I + q_0) = U(p),$$

где $U(p) \doteq u(t)$. Почленно умножим это соотношение на p . Получим

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) I = pU + Li_0p - \frac{q_0}{C}.$$

Таково операторное уравнение для операторного тока $I(p)$. Его

решением при $i_0 = q_0 = 0$ является $I = \frac{pU}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$,

то есть рациональная функция, умноженная на операторный ток

$U(p)$. Корни знаменателя $W_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$ либо оба вещественные и отрицательные, либо комплексно сопряженные с отрицательной действительной частью.

Предположим, что $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL} < 0$, и обозначим $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2$.

Операторный ток
$$I = \frac{pU}{L \left[\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2 \right]}$$

зависит от напряжения $u(t)$.

Предположим, что колебательный контур возбужден импульсным напряжением $u(t) = \delta(t)$. Тогда $U(p) = 1$ и

$$I = \frac{p + \frac{R}{2L} - \frac{R}{2L}}{L \left[\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2 \right]}.$$

Пользуясь теоремой сдвига и свойством линейности, находим ток

$$i(t) = \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{L} \left[\cos \omega t - \frac{R}{2L} \sin \omega t \right].$$

Предположим, что $u(t) = \eta(t) = 1$. Тогда

$$I = \frac{1}{L \left[\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2 \right]}$$

и, следовательно,

$$i(t) = \frac{1}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t.$$

В каждом из рассмотренных выше случаев в контуре с отсутствующим сопротивлением, $R = 0$, устанавливается колебательный

процесс с собственной частотой $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Теперь перейдем к рассмотрению колебательного контура S с комплексным гармоническим источником напряжения $u(t) = re^{i\alpha} e^{i\lambda t}$. Число $re^{i\alpha}$, $r > 0$, называется комплексной амплитудой гармонического колебания $u(t)$. Оно объединяет действительную амплитуду r и начальную фазу α . Для I имеем операторное уравнение

$$I = \frac{re^{i\alpha} p}{\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) (p - i\alpha)}.$$

Так как $p^2 + \frac{R}{C}p + \frac{1}{CL} = (p - p_1)(p - p_2)$, где $p_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm i\omega$, то для комплексного операторного тока $I(p)$ имеем уравнение

$$I = \frac{bp}{(p - p_1)(p - p_2)(p - i\lambda)}, b = \frac{re^{i\alpha}}{L}.$$

Для нахождения комплексного тока $i(t) = \sigma e^{i\beta} e^{i\omega t}$, $\sigma > 0$, представим I в виде суммы простых дробей

$$I = b \left[\frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \frac{D}{p - i\lambda} \right]$$

с коэффициентами

$$A = \frac{p_1}{(p - p_2)(p_1 - i\lambda)}, B = \frac{p_2}{(p_2 - p_1)(p_2 - i\lambda)}, D = \frac{i\lambda}{(i\lambda - p_1)(i\lambda - p_2)}.$$

Переходя от $I(p)$ к оригиналу $i(t) \doteq I(p)$, получаем для комплексного тока $i(t)$ представление в виде суммы

$$i(t) = b \left[Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + De^{i\lambda t} \right].$$

В ней два первых слагаемых $bAe^{-\frac{R}{2L}t} e^{i\omega t}$, $bBe^{-\frac{R}{2L}t} e^{-i\omega t}$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а третье слагаемое $bDe^{i\lambda t}$ дает значение тока, к которому стремится $i(t)$ при $t \rightarrow \infty$, и оно характеризует стационарную составляющую тока. Его частота совпадает с частотой напряжения. Поэтому $i(t) = \sigma e^{i\beta} e^{i\omega t}$ и имеет действительную амплитуду $\sigma = |bD|$, то есть

$$\sigma = \frac{r}{L} \left| \frac{i\lambda}{(i\lambda - p_1)(i\lambda - p_2)} \right| = \frac{r\lambda}{\left| -L\lambda^2 + iR\lambda + \frac{1}{C} \right|} = \frac{r}{\sqrt{R^2 + \left(L\lambda - \frac{1}{C\lambda} \right)^2}}.$$

3.5. Трансформатор. Электрическая цепь S , изображенная на рис. 16, соответствует важному прибору, предназначенному для изменения напряжения и называемому трансформатором. Он состоит

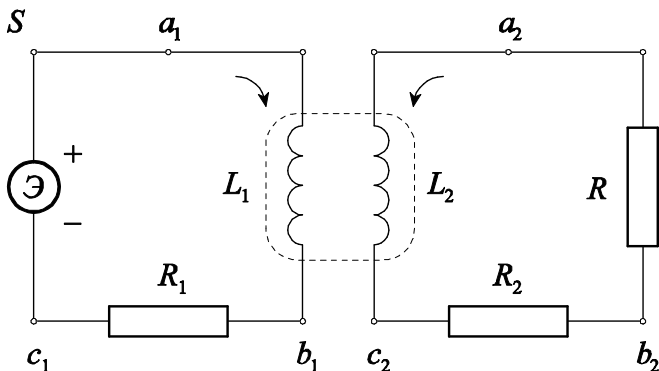


Рис. 16.

из двух обмоток (первичной и вторичной), помещенных на одной катушке. К первичной обмотке подключается источник $u(t)$ переменного напряжения, к вторичной – нагрузка в виде внешнего сопротивления. Каждая обмотка имеет индуктивность L и внутреннее сопротивление R , отмеченные номером контура. Цепь S можно рассматривать как состоящую из двух контуров, связанных индукцией. Согласно первому закону Кирхгофа

$$i_{a_1 b_1}(t) = i_{b_1 c_1}(t) = i_{c_1 a_1}(t) = i_1(t), \quad i_{a_2 b_2}(t) = i_{b_2 c_2}(t) = i_{c_2 a_2}(t) = i_2(t).$$

Таким образом, имеем ток $i_1(t)$ на первом контуре и ток $i_2(t)$ на втором контуре. Применяя второй закон Кирхгофа, получаем

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + u(t) &= 0, \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + R i_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Перейдем в этих соотношениях к операторным токам $I_1(p) \doteq i_1(t)$, $I_2(p) \doteq i_2(t)$ и операторному напряжению $U(p) \doteq u(t)$. Получаем

$$\begin{aligned} L_1(I_1 p - i_{10}) + R_1 I_1 + M(p I_2 - i_{20}) &= U(p), \\ L_2(I_2 p - i_{20}) + (R_2 + R) I_2 + M(p I_1 - i_{10}) &= 0 \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}(L_1 p + R_1)I_1 + MpI_2 &= U + L_1 i_{10} + Mi_{20}, \\ MpI_1 + (L_2 p + R_2 + R)I_2 &= L_2 i_{20} + Mi_{10}.\end{aligned}$$

При отсутствии начальных токов операторные токи I_1, I_2 связаны с коэффициентом M взаимоиндукции и сопротивлениями R_1, R_2, R двумя линейными относительно I_1, I_2 уравнениями

$$\begin{aligned}(L_1 p + R_1)I_1 + MpI_2 &= U, \\ MpI_1 + (L_2 p + R_2 + R)I_2 &= 0.\end{aligned}$$

Будем считать внутреннее сопротивление каждого контура достаточно малым и положим $R_1 = R_2 = 0$. Решая систему

$$\begin{aligned}L_1 p I_1 + Mp I_2 &= U, \\ Mp I_1 + (L_2 p + R) I_2 &= 0,\end{aligned}$$

получаем

$$I_2 = \frac{MU}{(M^2 - L_1 L_2)p + L_1 R}, \quad I_1 = \frac{(L_2 p + R)U}{p[(M^2 - L_1 L_2)p + L_1 R]}.$$

Наибольший технический интерес представляет трансформатор, в котором, кроме отсутствия внутренних сопротивлений, разность $M^2 - L_1 L_2$ достаточно мала: $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$. Положим в полученном решении $M^2 - L_1 L_2 = 0$ и тогда будем иметь

$$I_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{U}{R}, \quad I_1 = \left(\frac{L_2}{L_1 R} + \frac{1}{p L_1} \right) U.$$

Для гармонического изменения напряжения $u(t) = \sigma e^{i\omega t}$ операторным напряжением будет $U(p) = \frac{\sigma}{p - i\omega}$, и, следовательно,

$$i_2(t) = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{\sigma}{R} e^{i\omega t}, \quad i_1(t) = \frac{L_2}{L_1} \frac{\sigma}{R} e^{i\omega t} + \frac{\sigma}{L_1} \left(\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \Big|_0^t \right).$$

Отсюда для отношения амплитуд напряжений $u_1(t), u_2(t)$ на сопротивление R при выходе трансформатора на стационарный режим получаем

$$|u_2| = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} |u_1|.$$

Величина $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ называется коэффициентом трансформации. При

$L_2 > L_1$ трансформатор повышает напряжение, а при $L_2 < L_1$ получаем понижение напряжения.

3.6. Шунтированный контур. На рис. 17 представлен контур, составленный из индукции L , емкости C , шунтированный сопротивлением R . Операторное сопротивление с учетом последовательного и параллельного соединения двухполюсников представим формулой

$$Z = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}},$$

соответствующей отсутствию начального тока и начального заряда на обкладках конденсатора

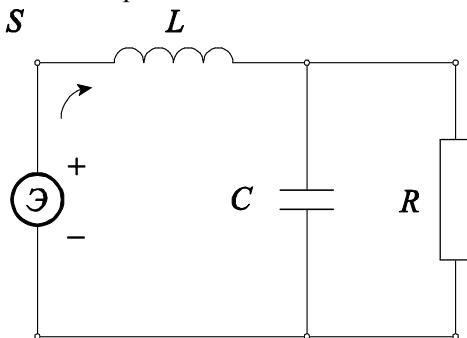


Рис. 17.

Будем считать, что $u(t) = U_0 = \text{const}$. Тогда для операторного тока $I(p)$ согласно второму закону Кирхгофа имеем

$$I = \frac{U_0 (RCp + 1)}{p(LCRp^2 + Lp + R)}.$$

Представим квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, в виде

$$LCRp^2 + Lp + R = LCR \left[\left(p + \frac{1}{2CR} \right)^2 - \frac{1}{4C^2R^2} + \frac{1}{LC} \right].$$

Если $L < 4C^2R^2$, то, обозначая $\frac{1}{2RC} = \sigma$, $\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2} = \omega^2$,

получим

$$I = \frac{U_0(RCp+1)}{LCRp \left[(p+\sigma)^2 + \omega^2 \right]} = \frac{U_0}{L \left[(p+\sigma)^2 + \omega^2 \right]} + \frac{U_0}{LCRp \left[(p+\sigma)^2 + \omega^2 \right]}.$$

Временный ток, соответствующий первому слагаемому в этой сумме, дается формулой $\frac{U_0}{L\omega} e^{-\sigma t} \sin \omega t$.

Оригинал для изображения $\frac{1}{p \left[(p+\sigma)^2 + \omega^2 \right]}$

можно получить, интегрируя соответствие

$$\frac{\omega}{(p+\omega)^2 + \omega^2} \doteq e^{-\sigma t} \sin \omega t,$$

дающее соответствие $\frac{\omega}{p \left[(p+\omega)^2 + \omega^2 \right]} \doteq \int_0^t e^{-\sigma t} \sin \omega t dt$,

или получить его, воспользовавшись теоремой разложения (см. гл. 2 п. 2.1).

В итоге для временного тока находим

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\sigma t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\sigma}{\omega} - \frac{R}{\omega t} \right) \sin \omega t \right] \right\}.$$

Процесс имеет колебательный характер.

Если $L > 4C^2R^2$, то, повторяя с необходимыми изменениями предыдущие вычисления, найдем для временного тока формулу

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\sigma t} \left[ch\lambda t + \left(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{R}{\lambda} \right) \delta h\lambda t \right] \right\},$$

где $\lambda^2 = \frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC}$. Процесс имеет аperiодический характер.

З а д а ч и

1. Найти операторное решение уравнения

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 1, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

2. Найти решение уравнения

$$x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0), x'''(0) = -14.$$

3. Найти решение уравнения

$$x^{IV} + 4x''' + 4x'' = 0; x(0) = x_0, x'(0) = x_1, x''(0) = x_2, x'''(0) = x_3.$$

4. Найти решение уравнения

$$x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2; x(0) = x_0, x'(0) = x_1.$$

5. Найти решение уравнения

$$x''' + x = \frac{1}{2}t^2 e^t; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

6. Дифференциальное уравнение вибратора при наличии возмущающей силы $f(t)$ имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = \frac{1}{m}f(t)$. Найти $x(t)$ при условии:

$$x(0) = \frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{k_{1m}} \int_0^t t^{-n(t-\tau)} \sin k_1(t-\tau) f(\tau) d\tau$, где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

7. Найти решения следующих интегральных уравнений:

1) $y(t) = at + \int_0^t \sin(t-u) y(u) du$. Ответ: $y(t) = a \left(t + \frac{1}{6}t^2 \right)$.

2) $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \int_0^t e^{t-u} y(u) du$. Ответ: $y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{2t}$.

8. Найти решение системы уравнений:

$$x'' - 4x' - y' + y = 1,$$

$$x' + 6x + y'' - y' = e^{4t},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, x'(0) = x_1, y'(0) = y_1.$$

9. Движение заряженной частицы массы m и заряда e , находящегося в электрическом поле E , параллельном оси Ox , и в магнит-

ном поле H , параллельном оси Oz , определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= Ee + \frac{eH}{c} \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{eH}{c} \frac{dx}{dt}, \quad (c = \text{const}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Найти x, y, z , если частица в момент времени $t=0$ обладает скоростью (u, v, w) и находится в начале координат.

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{Hv + cE}{H\alpha} (1 - \cos \alpha t) + \frac{u}{\alpha} \sin \alpha t, \\ y &= -\frac{Hv + cE}{H\alpha} (\alpha t - \sin \alpha t) - \frac{u}{\alpha} (1 - \cos \alpha t), \quad \text{где } \alpha = \frac{eH}{mc}, \\ z &= -wt. \end{aligned}$$

10. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} x' - x + 2y &= 0, \\ x'' - 2y &= 2t - \cos 2t, \end{aligned}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

11. Продольное движение самолёта, происходящее при малом возмущении режима горизонтального прямолинейного полёта с постоянной скоростью, определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= a_2 u_2 - \varphi, \\ \frac{du_2}{dt} &= 2u_1 + b_2 u_2 - q, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= q, \\ \frac{dq}{dt} &= h_2 u_2 + h_6 q, \end{aligned}$$

где a_2, b_2, h_2, h_6 – постоянные. Найти u_1, u_2, φ, q .

Ответ: Для записи решения введём функции:

$$x_s(t) = e^{-\alpha_s t} \left(C_s^{(1)} \cos \beta_1 t + D_s^{(1)} \sin \beta_1 t \right) + e^{-\alpha_s t} \left(C_s^{(2)} \cos \beta_2 t + D_s^{(2)} \sin \beta_2 t \right),$$

где $s=1, 2, 3, 4$, $-\alpha_1 \pm i\beta_1 = p_{12}$, $-\alpha_2 \pm i\beta_2 = p_{34}$, $-\alpha_2 \pm i\beta_2 = p_{34}$,
суть корни многочлена

$$\Delta(p) = p^4 - (b_2 + h_6)p^3 + p^2(b_2 h_6 - 2a_2 + h_2) + 2a_2 h_6 p + 2h_2,$$

предполагается, что корни многочлена комплексные, сопряженные, с отрицательными действительными частями. Решение системы имеет вид: $u_1 = x_1, u_2 = x_2, \varphi = x_3, q = x_4$.

Глава 5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

В своих работах по теплопроводности Фурье впервые (1807 г.) применил представление периодической функции рядом по простейшим периодическим функциям. К их числу относится, например, функция $A \sin(\omega x + \alpha) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ с периодом $2\pi/\omega$. В этой главе излагаются результаты, в основном в справочной форме и в объемах, необходимых для установления связей преобразования Фурье и преобразования Лапласа, относящиеся к операционному методу.

§ 1. РЯД ФУРЬЕ

1.1. Функции с периодом 2π . Предположим, что функцию $f(x)$ можно представить в виде равномерно сходящегося на сегменте $[-\pi, \pi]$ ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Подсчитывая интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx,$$

находим для коэффициентов $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, ряда формулы

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \\ n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Эти формулы имеют смысл для широкого множества функций $f(x)$, определенных на $[-\pi, \pi]$.

Рядом Фурье для $f(x)$ называют ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

и отмечают его отношение к $f(x)$ формулой

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3)$$

указывающей, что ряд записан с коэффициентами, вычисленными по формулам (1). Из определения ряда Фурье не следует, что $f(x)$ в него разлагается. Но если ряд (2) равномерно сходится, то его суммой является $f(x)$.

1.2. Достаточные условия разложения функции в ряд Фурье.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ с периодом 2π непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, и абсолютно интегрируема на этом сегменте. Тогда $f(x)$ разлагается в ряд Фурье в каждой точке, в которой она дифференцируема.

Другое достаточное условие распространяется на функции, удовлетворяющие условию Дирихле. Оно состоит в том, что сегмент, на котором определена функция $f(x)$, можно разбить на конечное число сегментов так, что внутри каждого из них функция $f(x)$ монотонна и ограничена.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда $f(x)$ разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке непрерывности, а в точках разрыва x ряд Фурье сходится к $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Для четных функций, то есть для функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $f(-x) = f(x)$, формулы (1) дают

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

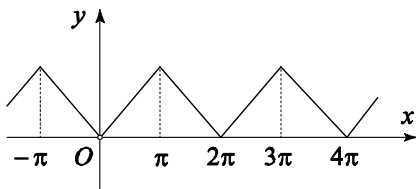


Рис. 18.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x < \pi$, имеющую период 2π (рис. 18).

Функция $f(x)$ – четная. Поэтому для неё $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ нечетное,} \\ 0, & n \text{ четное,} \end{cases}$$

и, следовательно, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$. <

Для нечетных функций, то есть для функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $f(-x) = -f(x)$, формулы (1) дают

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

имеющую период 2π (рис. 19).

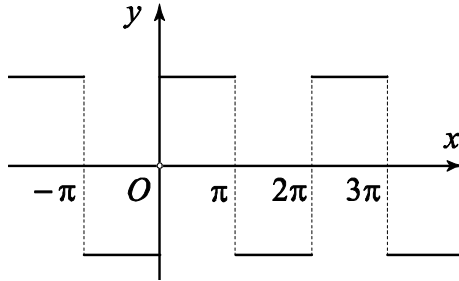


Рис. 19.

Функция $f(x)$ – нечетная. Поэтому

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{2n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{2n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ нечетное,} \\ 0, & n \text{ четное,} \end{cases}$$

и, следовательно,

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots <$$

1.3. Комплексная форма ряда Фурье. В частичной сумме

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряда Фурье (2) преобразуем общий член с помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Имеем

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} - ib_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{jnx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-jnx} \right).$$

Введем обозначения

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

и запишем, используя их и выполняя простейшие преобразования, $S_N(x)$ в виде

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

В новых обозначениях вместо коэффициентов a_n, b_n , заданных формулами (1), получаем формулу для c_n :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом 2π имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (4)$$

Последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ комплексных чисел c_n , даваемых формулой (4), называется спектральной последовательностью функции $f(x)$, а последовательность $\{|c_n|\}_{n=0}^{\infty}$ – её амплитудным спектром. Формула (4) показывает, что спектральная последовательность и функция $f(x)$ однозначно определяют друг друга.

Используя терминологию операционного исчисления, функцию $f(x)$ можно считать играющей роль оригинала, а спектральную последовательность – её изображением.

Имеет место формула Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

1.4. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом.

Пусть функция $f(x)$ имеет период $2l$, $l > 0$. Полагая $x = at$, получаем функцию $f(at)$ с периодом $2l/a$. Подберем a так, чтобы $2l/a = 2\pi$, то есть $a = l/\pi$. Тогда подстановка $x = lt/\pi$ приводит к функции $f(lt/\pi)$ с периодом 2π .

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-l, l]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого ро-

да, и абсолютно интегрируема на этом сегменте. Тогда согласно теореме 1 имеем в точках дифференцируемости:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos n\pi t dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin n\pi t dt.$$

Возвращаясь в этих формулах от переменной t к переменной $x = lt/\pi$, получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (5)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (6)$$

Ряд (5) с коэффициентами, определяемыми формулами (6), называется *рядом Фурье* для функции $f(x)$ с периодом $2l$. В комплексной форме этот ряд имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{-in\pi x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{in\pi x}{l}} dx. \quad (7)$$

§ 2. КONTИНУАЛЬНЫЙ АНАЛОГ РЯДА ФУРЬЕ

2.1. Двойной интеграл Фурье. Распространение формул (7) посредством выполнения в них предельного перехода при $l \rightarrow \infty$ приводит к следующей важной теореме.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, имеет на каждом конечном интервале не более конечного числа точек разрыва и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то есть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Тогда в каждой точке x , в которой $f(x)$ дифференцируема,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt. \quad (8)$$

Правую часть в этой формуле называют *двойным интегралом* Фурье.

Не приводя здесь доказательства теоремы 3, укажем лишь его основные составляющие.

В каждой точке x_0 , $|x_0| < l$, в которой $f(x)$ дифференцируема, имеем

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x_0}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x_0}{l} \right).$$

Заменяя здесь коэффициенты a_0, a_n, b_n их интегральными представлениями по формулам (6), учитывая, что $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ и полагая $u_n = \frac{n\pi}{l}$ (тогда

$\Delta u_n = \frac{\pi}{l}$), получим

$$f(x_0) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^l f(x) \cos u_n (x - x_0) dx.$$

Устремив $l \rightarrow \infty$, в пределе получим

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos u(x - x_0) dx. \quad (9)$$

Нахождение предела проводится с привлечением нескольких неочевидных соотношений, которые здесь не приводим. Остается заменить в (9) x_0 на x и x на t , чтобы прийти к (8).

2.2. Интеграл Фурье. Внутренний интеграл в формуле (8) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt \cdot \cos ux + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \cdot \sin ux = \\ &= a(u) \cos ux + b(u) \sin ux, \end{aligned}$$

где

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt, \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt, \quad u \geq 0. \quad (10)$$

Формула (8) принимает вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(u) \cos ux + b(u) \sin ux) du. \quad (11)$$

Выражение, стоящее в правой части этой формулы, называют *интегралом Фурье для функции $f(x)$* . Формулу (11) можно рассматривать как континуальный аналог ряда Фурье для $f(x)$.

2.3. Комплексная форма записи интеграла Фурье. Поступая как в п⁰ 1.3, преобразуем подынтегральную функцию в (11). Имеем

$$a(u) \cos ux + b(u) \sin ux = a(u) \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} - ib(u) \frac{e^{iux} - e^{-iux}}{2} = c(u) e^{iux} + c(-u) e^{-iux},$$

где

$$c(u) = \frac{a(u) - ib(u)}{2}, \quad c(-u) = \frac{a(u) + ib(u)}{2}.$$

Тогда интеграл в (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (a(u) \cos ux + b(u) \sin ux) du &= \int_0^{\infty} (c(u) e^{iux} + c(-u) e^{-iux}) du = \\ &= \int_0^{\infty} c(u) e^{iux} du + \int_0^{\infty} c(-u) e^{-iux} du = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iux} du. \end{aligned}$$

С учетом формул (10) коэффициенты $c(u)$ можно записать в виде

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos ut - i \sin ut) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt.$$

Таким образом, в точках дифференцируемости функции $f(x)$ её интеграл Фурье имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iux} du, \quad (12)$$

где

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt. \quad (13)$$

Функция $c(u)$ называется *спектральной функцией для $f(x)$* . Здесь она выполняет роль спектральной последовательности в разложении функции в ряд Фурье.

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ЛАПЛАСА И ФУРЬЕ

3.1. Преобразование Лапласа и комплексный интеграл Фурье. Пусть s_0 – показатель роста оригинала $f(t)$ и $F(p) \doteq f(t)$ – изображение (по Лапласу) функции $f(t)$ (умноженное на $\eta(t)$), то есть

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \operatorname{Re} p > s_0.$$

Известно, что функция $F(p)$ голоморфна в полуплоскости $\{p : \operatorname{Re} p > s_0\}$. По теореме об обращении интеграла Лапласа имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Заменим в интеграле переменную интегрирования, положив $p = a + i\sigma$. Имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+i\sigma)t} F(a+i\sigma) d\sigma.$$

Введем обозначения, полагая

$$g(t) = e^{-at} f(t), \quad G(\sigma) = \frac{1}{2\pi} F(a+i\sigma).$$

Тогда для $g(t)$ и $G(\sigma)$ получаем формулы

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} G(\sigma) d\sigma, \quad (14)$$

и

$$G(\sigma) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-i\sigma t} dt, \quad (15)$$

показывающие, что первая из них – интеграл Фурье для $G(\sigma)$, а вторая – представление $G(\sigma)$ через $g(t)$ (то есть через $e^{-at}\eta(t)f(t)$). Формулы с точностью до обозначений совпадают с (12), (13).

3.2. Преобразование Хевисайда. Согласно интегральному преобразованию Лапласа оригиналу $f(x)$ с показателем роста s_0 ставится в соответствие комплексная функция $F(p)$ комплексного переменного

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \operatorname{Re} p > s_0.$$

В методе Хевисайда осуществляется переход от функции $f(x)$ к функции

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

то есть $F^*(p) = pF(p)$.

Таким образом, изображение функции $f(x)$ по Хевисайду отличается от её изображения по Лапласу множителем p .

З а д а ч и

1. Представить интегралами Фурье следующие функции:

$$1) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ e^x, & x < 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2} du, x > 0.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ -e^x, & x < 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \sin ux}{1+u^2} du, x > 0.$$

$$3) f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{1+x^2} = \int_0^{\infty} e^{-u} \cos ux du.$$

$$4) f(x) = \frac{x}{1+x^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{x}{1+x^2} = \int_0^{\infty} e^{-u} \sin ux du.$$

2. Написать интеграл Фурье в комплексной, а затем в действительной форме для следующих функций:

$$1) f(x) = e^{-a|x|}, a > 0. \quad \text{Ответ: } f(x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + u^2} e^{iux} du,$$

$$f(x) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + u^2} du.$$

2) $f(x) = x^{-ax}, a > 0$.

Ответ: $f(x) = -i \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{(a^2 + u^2)^2} e^{iux} du,$

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{(a^2 + u^2)^2} \sin ux du.$$

3. Написать преобразование Фурье для следующих функций:

1) $g(t) = e^{-|t|}$.

Ответ: $G(u) = \frac{2}{1 + u^2}.$

2) $g(t) = te^{-|t|}$.

Ответ: $G(u) = -4 \frac{u}{(1 + u^2)^2}.$

Глава 6

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Управление многими процессами производится с участием кусочно-постоянных функций. Их значения сохраняются на данном временном промежутке и при переходе к смежному промежутку меняются скачком на другое постоянное значение. Принимая такие функции за оригиналы, можно построить, используя преобразование Лапласа, дискретное преобразование Лапласа. Оно является математической основой теории линейных импульсных систем, работа которых связана с передачей и преобразованием последовательности сигналов.

§ 1. РЕШЕТЧАТЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ

1.1. Решетчатая функция. Пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел и $g(t)$ – порожденная ею функция, определенная следующим образом: $g(t) = h_0$ на промежутке $(0,1)$, $g(t) = h_1$ на промежутке $(1,2)$ и, вообще, $g(t) = h_n$ для $n < t < n+1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (рис. 20). Функцию $g(t)$ называют *решетчатой*. Считаем, что $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Для оригинала $f(t)$, то есть для функции, удовлетворяющей условиям $1^0, 2^0, 3^0$, (см. гл. 1, n^0 2.1), решетчатую функцию $f^*(t)$ задаем, полагая $f^*(t) = f(n) = h_n$ при $n \leq t < n+1$, доопределяя $f^*(t)$ при необходимости, условием $f(n) = \lim_{t \rightarrow n+0} f(t)$.

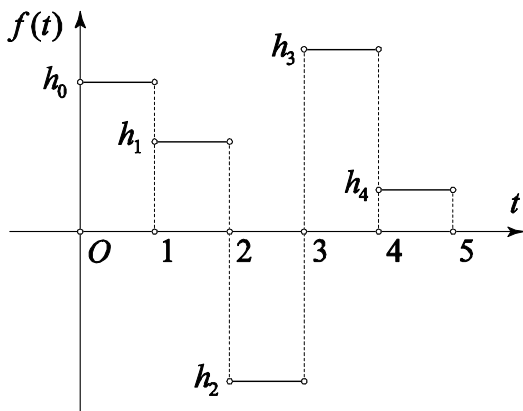


Рис. 20.

Решетчатую функцию $g(t)$ можно записать в виде суммы

$$g(t) = h_n \sum_{n=0}^{\infty} [h(t-n) - \eta(t-n-1)], \quad (1)$$

где $\eta(t)$ – единичная функция.

Пример. Пусть $h_n = n+1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(t-n) - \eta(t-n-1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\eta(t-n) - \sum_{m=1}^{\infty} m\eta(t-m) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta(t-n). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Из условия $|f(t)| < Ae^{s_0 t}$, $A > 0$, $s_0 \geq 0$, характеризующего порядок роста оригинала $f(t)$, следует, что $|f^*(t)| = |f(n)| = |h_n| < Ae^{s_0 n}$. В дальнейшем числовую последовательность $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем считать любой, удовлетворяющей условиям $|h_n| < Ae^{s_0 n}$, $n \in \mathbb{N}$, в том числе составленной из комплексных чисел.

Изображением (по Лапласу) решетчатой функции вида (1) является функция

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n [\eta(t-n) - \eta(t-n-s)] e^{-pt} dt = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \int_n^{n+1} e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{e^{-p(n+1)} - e^{-np}}{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-np} \frac{1 - e^{-p}}{p} = \Delta_1(p) H(e^{-p}),
 \end{aligned}$$

где $\Delta_1(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p}$ и

$$H(z) = h_0 + h_1 z + \dots + h_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n. \quad (2)$$

Комплексную функцию $H(z)$ комплексного переменного z называют z -преобразованием последовательности $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$. При условии $|h_n| < Ae^{s_0 n}$, $n \in \mathbb{N}$, ряд (2) сходится в круге $U(0, R) = \{z : |z| < R\}$, $R = \frac{1}{\sqrt[n]{Ae^{s_0}}}$, и его сумма $H(z)$ голоморфна в $U(0, R)$.

Согласно теореме Тейлора коэффициенты ряда (2) представляются интегралом

$$h_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{H(z)}{z^{n+1}} dz, \quad (3)$$

взятом по окружности $\gamma_\rho = \{z : |z| = \rho\}$, $0 < \rho < R$, в направлении против хода часовой стрелки.

1.2. Дискретное преобразование Лапласа. Перейдем от переменного z к переменному q , положив

$$z = e^{-q}, q = s + i\tau.$$

Устанавливаемое этой формулой соответствие между z -плоскостью и q -плоскостью не является взаимно однозначным, поскольку в силу периодичности показательной функции $e^{-q+2k\pi i} = e^{-q}$ при любом целом k . Однако в любой горизонтальной полосе q шириной 2π на q -плоскости, например в полосе $\Delta = \{q : -\pi < \text{Im } q < \pi\}$, функция $z = e^{-q}$ однозначно и конформно отображает её на z -плос-

кость, разрезанную по отрицательной части действительной оси. Кругу $U(0, R) = \{z; |z| < R\}$ соответствует в полосе Δ полуполоса, в которой

$$\operatorname{Re} q > \ln \frac{1}{R} = a.$$

При замене $z = e^{-q}$ окружность γ_R переходит в отрезок с концами в точках $a - i\pi, a + i\pi$, а формула (3) примет вид

$$h_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} G^*(q) e^{nq} dq,$$

где $G^*(q) = H(e^{-q})$.

Функцию

$$G^*(q) = h_0 + h_1 e^{-q} + \dots + h_n e^{-nq} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-nq} \quad (4)$$

называют *дискретным преобразованием Лапласа* или *D-преобразованием* последовательности $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Условимся использовать для решетчатой функции $g(n), q(n) = h_n$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначение $g(n)$. Тогда (4) примет вид

$$g(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} G^*(q) e^{nq} dq. \quad (5)$$

Устанавливаемое этой формулой соответствие между решетчатой функцией $g(n)$ и функцией $G^*(q)$ обозначают: $g(n) \doteq G^*(q)$ и говорят, что *оригиналу* $g(n)$ *соответствует изображение* $G^*(q)$ и что изображению $G^*(q)$ соответствует оригинал $g(n)$. В дальнейшем оригинал обозначается маленькой буквой, а изображение – той же, но заглавной буквой со звездочкой.

§ 2. СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Запаздывание и опережение. Примеры. 1) Решетчатой функции, порожденной последовательностью $h_0, h_1 = h_2 = \dots = 0$, со-

ответствует согласно формуле (4) $F^*(q) = h_0$. Видим, что оригинал совпадает с изображением. \triangleleft

2) Пусть $f(t) = \eta(t)$ – единичная функция: $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$, $\eta(t) = 0$ при $t < 0$. Так как $f(n) = 1$ при $n = 0, 1, \dots$, то $F^*(q) = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + \dots$ и, значит,

$$\eta(t) \doteq \frac{e^q}{e^q - 1}. \triangleleft \quad (6)$$

3) Функции-оригиналу $f(t) = e^{at}$ соответствует решетчатая функция, построенная для последовательности $\{e^{a_n}\}_{n=0}^{\infty}$. Для неё дискретное преобразование имеет вид $F^*(q) = 1 + e^{-aq} + e^{-2aq} + \dots$ и, значит,

$$e^{an} \doteq \frac{e^q}{e^q - e^a}. \quad (7)$$

При $a = 0$ имеем вновь формулу (6). \triangleleft

Непосредственно из определения D -преобразования следует для любых действительных или комплексных A, B

$$Af(n) + Bg(n) \doteq AF^*(q) + BG^*(q).$$

Пользуясь этим свойством линейности, формулой Эйлера и формулой (7), имеем

$$\sin \omega n = \frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{e^q}{e^q - e^{i\omega}} - \frac{e^q}{e^q - e^{-i\omega}} \right) = \frac{e^q \sin \omega}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}.$$

При $\omega = 0$ решетчатая функция и её изображение равны нулю, что следует и из примера 1.

$$\text{Аналогично находим, что } \cos \omega n \doteq \frac{(e^q - \cos \omega)e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}.$$

Теорема 1 (о запаздывании и опережении). Если k – целое положительное число, то

$$f(n - k) \doteq e^{-qk} F^*(q), \quad (8)$$

$$f(n+k) \doteq e^{qk} \left(F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) e^{-qr} \right). \quad (9)$$

Для доказательства (8) напишем:

$$f(n-k) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k) e^{-qn} = \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k) t^{-qn} = \sum_{r=0}^{\infty} f(r) e^{-q(k+r)} = e^{-qk} F^*(q).$$

Аналогичные преобразования приводят к (9). Действительно,

$$f(n+k) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) e^{-qn} = \sum_{r=k}^{\infty} f(r) e^{-q(r-k)} = e^{qk} \left(\sum_{r=0}^{\infty} f(r) e^{-qr} - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) e^{-qr} \right).$$

Применим первую часть теоремы 1 к функции $\eta(n)$. Получим с использованием (6)

$$\eta(n-k) \doteq \frac{e^q}{e^q - 1} e^{-qk} = \frac{1}{(e^q - 1) e^{q(k-1)}}.$$

В частности,

$$\eta(n-1) \doteq \frac{1}{e^q - 1}. \quad (10)$$

2.2. Смещение. Теорема 2. Если a – любое действительное или комплексное число, то

$$e^{an} f(n) \doteq F^*(q-a).$$

Действительно, из определения (9) имеем

$$e^{an} f(n) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{an} e^{-qn} = F^*(q-a),$$

что и требовалось доказать.

2.3. Дифференцирование и интегрирование изображения.

Теорема 3. Дифференцирование изображения $F^*(q)$ ступенчатой функции $f(n) \doteq F^*(q)$ соответствует умножению $f(n)$ на $-n$.

Действительно, так как ряд (2)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$$

равномерно сходится внутри круга $U(0, R)$, то согласно теореме Вейерштрасса ряд можно почленно дифференцировать, причем функция

$$H'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n h_n z^{n-1}$$

голоморфна в $U(0, R)$ и её производная $H''(z)$ представляется результатом почленного дифференцирования разложения $H'(z)$ в степенной ряд. Это свойство сохраняется при многократном повторении дифференцирования.

Производная

$$F^{*k}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-nf(n)) a^{-nq}$$

является изображением ступенчатой функции-оригинала $-nf(n)$, то есть

$$-nf(n) \doteq F^{*k}(q).$$

Продолжая дифференцирование, получаем соответствие

$$(-1)^k n^k f(n) \doteq F^{*(k)}(q) \quad (11)$$

и тем самым завершаем доказательство теоремы. \triangleleft

Применим теорему 3 к соответствию (6) $\eta(n) \doteq \frac{e^q}{e^q - 1}$. Получаем

$$n \doteq \frac{e^q}{(e^q - 1)^2}, \quad n^2 \doteq \frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}, \quad n^3 \doteq \frac{e^q(e^{2q} + 4e^q + 1)}{(e^q - 1)^4}, \dots \quad (12)$$

Произведение $x(x-1)\dots(x-(m-1))$, составленное из m множителей, каждый из последующих на единицу меньше предыдущего,

называют *факториальной* функцией и обозначают $x^{[m]}$. Факториальная функция – многочлен степени $m, m \in \mathbb{N}$, имеющий простые нули в точках $x = 0, x = 1, \dots, x = m - 1$.

Нетрудно в результате простых действий получить из (11) формулу

$$\frac{n^{[m]}}{m!} \doteq \frac{e^q}{(e^q - 1)^{m+1}},$$

обобщающую (6).

Теорема 4. Пусть $f(n) \doteq F^*(q)$ и $f(0) = 0$. Тогда

$$\frac{f(n)}{n} \doteq \int_q^\infty F^*(q) dq. \quad (13)$$

Действительно, интегрируя изображение

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-qn}$$

по q от q до ∞ , имеем, полагая $\left. \frac{f(n)}{n} \right|_{n=0} = 0$, что

$$\int_q^\infty F^*(q) dq = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} e^{-qn}.$$

Почленное интегрирование ряда возможно в силу его равномерной сходимости. \triangleleft

Применим теорему 4 к соотношению (10) $\eta(n-1) \doteq \frac{1}{e^q - 1}$. По-

лучим

$$\frac{\eta(n-1)}{n} = \int_q^\infty \frac{dq}{e^q - 1} = \ln \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

ФОРМУЛЫ СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ D-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

№	Оригинал $f(n)$	Изображение $F^*(q)$
1	2	3
1	$\eta(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0, \\ 1 & \text{при } n \geq 0 \end{cases}$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$
2	n	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}$
3	n^2	$\frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}$
4	n^3	$\frac{e^q(e^{2q} + 4e^q + 1)}{(e^q - 1)^4}$
5	n^4	$\frac{e^q(e^{3q} + 11e^{2q} + 11e^q + 1)}{(e^q - 1)^5}$
6	$n^{[2]} = n(n-1)$	$2 \frac{e^q}{(e^q - 1)^3}$
7	$n^{[k]} = n(n-1) \dots (n-k+1)$	$k! \frac{e^q}{(e^q - 1)^{k+1}}$
8	$e^{\alpha n}$	$\frac{e^q}{e^q - e^\alpha}$
9	$ne^{\alpha n}$	$\frac{e^q e^\alpha}{(e^q - e^\alpha)^2}$
10	$n^2 e^{\alpha n}$	$\frac{e^q e^\alpha (e^q + e^\alpha)}{(e^q - e^\alpha)^3}$
11	$n^{[2]} e^{\alpha n}$	$2 \frac{e^q e^{2\alpha}}{(e^q - e^\alpha)^3}$
12	$n^{[k]} e^{\alpha n}$	$k! \frac{e^q e^{k\alpha}}{(e^q - e^\alpha)^{k+1}}$
13	$\sin \omega n$	$\frac{e^q \sin \omega}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}$
14	$\cos \omega n$	$\frac{(e^q - \cos \omega) e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}$
15	$sh \omega n$	$\frac{e^q sh \omega}{e^{2q} - 2e^q ch \omega + 1}$
16	$ch \omega n$	$\frac{(e^q - ch \omega) e^q}{e^{2q} - 2e^q ch \omega + 1}$

Окончание таблицы

1	2	3
17	$e^{an} \sin \omega n$	$\frac{e^q e^\alpha \sin \omega}{e^{2q} - 2e^q e^\alpha \cos \omega + e^{2\alpha}}$
18	$e^{an} \cos \omega n$	$\frac{(e^q - e^\alpha \cos \omega)e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + e^{2\alpha}}$
19	$\frac{\sin \omega n}{n}$	$\omega + \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{e^q - \cos \omega}$
20	$(-1)^n \frac{\sin \omega n}{n}$	$\omega - \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{e^q + \cos \omega}$

2.4. Конечная разность. Дальнейшее изложение свойств дискретного преобразования Лапласа проводится с привлечением понятия конечной разности функций.

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительного переменного t на промежутке (a, b) , $-\infty < a < b < \infty$. Фиксируем $h > 0$. Разностью первого порядка для функции $f(t)$ в точке t с шагом $\Delta t = h$ называют выражение

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t),$$

разностью второго порядка – выражение

$$\Delta^2 f(t) = \Delta \Delta f(t) = f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t) = f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)$$

и вообще разностью k -го порядка – выражение

$$\begin{aligned} \Delta^k f(t) &= \Delta \Delta^{k-1} f(t) = f(t+kh) - C_k^1 f(t+(k-1)h) + \\ &+ C_k^2 f(t+(k-2)h) - \dots + (-1)^k f(t), \end{aligned} \quad (14)$$

где $C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Видим, что для записи разности k -го порядка в точке t надо знать значения функции в точках $t, t+h, \dots, t+kh$. Обратно, если известны конечные разности $\Delta f(t), \dots, \Delta^k f(t)$, то через них можно выразить значение функции $f(t)$ в точках $t+h, \dots, t+kh$, поскольку

$$f(t+sh) = f(t) + C_s^1 \Delta f(t) + C_s^2 \Delta^2 f(t) + \dots + \Delta^s f(t), s = 1, 2, \dots, k.$$

Для решетчатой функции шаг $h=1$, и поэтому $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Например, если $f(n) = n^2$, то

$$\Delta f(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1, \quad \Delta^2 f(n) = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2, \\ \Delta^3 f(n) = \Delta^4 f(n) = 0.$$

Разность первого порядка $\Delta f(n)$ геометрически можно представить как тангенс угла α_n в прямоугольном треугольнике с катетом $f(n+1) - f(n)$, противолежащим углу α_n , и катетом 1, прилежащим к этому углу, то есть $\Delta f(n) = \operatorname{tg} \alpha_n$.

2.5. Разность и сумма решетчатой функции. Теорема 5 (о разности решетчатой функции). Если $f(n) \doteq F^*(q)$, то для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^q - 1)^k F^*(q) + \\ + e^q \left[(e^q - 1)^{k-1} f(0) + (e^q - 1)^{k-2} \Delta f(0) + \dots + (e^q - 1) \Delta^{k-2} f(0) + \Delta^{k-1} f(0) \right]. \quad (15)$$

Действительно, согласно формуле (9) при $k=1$ $f(n+1) \doteq e^q (F^*(q) - f(0))$. Так как $f(n) \doteq F^*(q)$, то для разности первого порядка имеем

$$\Delta f(n) \doteq (e^q - 1) F^*(q) - e^q f(0), \quad (16)$$

то есть (15) при $k=1$.

Применяя формулу (16), получаем для разности второго порядка:

$$\Delta^2 f(n) \doteq (e^q - 1) \left[(e^q - 1) F^*(q) - e^q f(0) \right] - e^q \Delta f(0) = \\ = (e^q - 1)^2 F^*(q) - (e^q - 1) e^q f(0) - e^q \Delta f(0),$$

то есть (15) при $k=2$. Продолжим вычисления $\Delta^3 f(n) = \Delta \Delta^2 f(n)$, $\Delta^4 f(n) = \Delta \Delta^3 f(n), \dots$. В итоге после конечного числа шагов приходим к (15).

Формула (15) приобретает наиболее простой вид, если $f(0) = \Delta f(0) = \dots = \Delta^{k-1} f(0) = 0$:

$$\Delta^k f(n) = (e^q - 1)^k F^*(q).$$

Аналогом интеграла от функции-оригинала является для решетчатой функции $f(n)$ сумма $g(n)$, определенная следующим образом:

$$g(0) = 0, g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k), n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Из этого определения следует, что $f(n)$ является разностью первого порядка для $g(n)$:

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n) = f(n).$$

Теорема 6 (о сумме решетчатой функции). *Если $f(n) \doteq F^*(q)$, то для любого $n = 1, 2, \dots$*

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \doteq \frac{F^*(q)}{e^q - 1}. \quad (18)$$

Действительно, пусть сумме $g(n)$ решетчатой функции $f(n)$ соответствует изображение $G^*(q) \doteq g(n)$. Так как $g(0) = 0$ и $\Delta g(n) = f(n) \doteq (e^q - 1)G^*(q) = F^*(q)$, то

$$G^*(q) = \frac{F^*(q)}{e^q - 1},$$

и теорема доказана. <

2.6. Свертка решетчатых функций. Пусть $f(n), g(n)$ – решетчатые функции. Их *сверткой* называют решетчатую функцию

$$f(n) * g(n) = \sum_{r=0}^n f(n-r)g(r). \quad (19)$$

Теорема 7. Пусть $F^*(q) \doteq f(n)$, $G^*(q) \doteq g(n)$. Тогда

$$F^*(q)G^*(q) \doteq f(n) * g(n),$$

то есть произведению изображений соответствует свертка оригиналов.

Доказательство. Умножим обе части равенства

$$G^*(q) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} g(r)$$

на $F^*(q)$ и внесем этот множитель под знак суммы. Получим

$$F^*(q)G^*(q) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} F^*(q)g(r).$$

По теореме 1 о запаздывании $e^{-qr} F^*(q) \doteq f(n-k)$. Поэтому и в силу свойства линейности

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} F^*(q)g(r) \doteq \sum_{r=0}^{\infty} f(n-r)g(r) = \sum_{r=0}^n f(n-r)g(r).$$

При записи последнего учтено, что $f(n-r) = 0$ при $r > n$. Теорема доказана.

2.7. Свертка изображений. Такое название имеет функция

$$F^*(q) * G^*(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} F^*(s)G^*(q-s)ds. \quad (20)$$

Предполагается, что $F^*(q)$, $G^*(q)$ голоморфны в полуплоскости $\{q: \operatorname{Re} q > \alpha\}$ и что $\gamma > \alpha$. Тогда свертка голоморфна в полуплоскости $\{q: \operatorname{Re} q > \alpha + \gamma\}$. В этой полуплоскости $\operatorname{Re}(q-s) > \alpha$ и обе подынтегральные функции на отрезке интегрирования голоморфны.

Теорема 8. Пусть $f(n) \doteq F^*(q)$, $g(n) = G^*(q)$. Тогда

$$f(n)g(n) \doteq F^*(q) * G^*(q), \quad (21)$$

то есть произведению оригиналов соответствует свертка изображений.

Доказательство. Обозначим $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$ и пусть

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \quad \text{Оба ряда сходятся в круге } U(0, R).$$

Вычислим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} F\left(\frac{1}{\zeta}\right) G\left(\frac{1}{z}\right) \frac{d\phi}{\zeta}, \quad |z| > \frac{\rho}{R}, \quad (22)$$

взятый по окружности $\gamma_\rho = \{\zeta: |\zeta| = \rho\}$, $0 < \rho < R$. Представив подынтегральную функцию в виде произведения рядов, разложим подынтегральную функцию по степеням $1/\zeta$ и применим для вычисления $I(z)$ теорему о вычетах.

Получим

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

и, следовательно, $I(e^{-q})$ является дискретным преобразованием Лапласа последовательности $\{f(n)g(n)\}_{n=0}^{\infty}$. В интеграле (22) положим $z = e^{-q}$, $\zeta = e^{-s}$. Тогда

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = F^*(s), \quad G\left(\frac{\zeta}{z}\right) = G^*(n-s),$$

а окружность γ_ρ преобразуется в отрезок с концами $\gamma - \pi i, \gamma + \pi i$. Значит,

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \pi i}^{\gamma + \pi i} F^*(s) G^*(q-s) ds, \quad \text{то есть } I(z) = F^*(q) * G^*(q).$$

Итак,

$$f(n)g(n) \doteq F^*(q) * G^*(q).$$

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

3.1. Разностные уравнения. Уравнения вида

$$\Phi[n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)] = 0 \quad (23)$$

и уравнения вида

$$\Phi[n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)] = 0, \quad (24)$$

где $f(n)$ – решетчатая функция, называются *разностными* уравнениями или уравнениями *в конечных разностях*. Пользуясь формулами (14) и (15), можно уравнение (23) свести к уравнению (24) и, наоборот, свести уравнение (24) к уравнению (23).

Ограничимся рассмотрением среди уравнений (24) лишь линейных разностных уравнений k -го порядка с постоянными коэффициентами.

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n), \quad (25)$$

где $f(n)$ – решетчатая функция, $a_n \neq 0, a_k \neq 0$, при начальных условиях

$$f(0) = f_0, f(1) = f_1, \dots, f(k-1) = f_{k-1}. \quad (26)$$

Для нахождения решения задачи (25), (26) применим к обеим частям уравнения (25) дискретное преобразование Лапласа. Пользу-

ьясь теоремой 1 об опережении и формулой (19), получим уравнение для нахождения изображения $F^*(q)$ искомой функции $f(n)$:

$$M(q)F^*(q) = \Phi^*(q) + N(q),$$

где

$$M(q) = a_0 e^{qk} + a_1 e^{q(k-1)} + \dots + a_k, \quad \Phi^*(q) \doteq \varphi(n),$$

$$N(q) = a_0 \sum_{r=0}^{k-1} f_r e^{-qr} + a_1 \sum_{n=0}^{k-2} f_n e^{-qn} + \dots + a_k.$$

Далее, пользуясь таблицей формул соответствия решетчатой функции и дискретного преобразования Лапласа и, при необходимости, формулой обращения (5), находим $f(n)$.

Пример. Найти решение уравнения

$$f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0 \quad (27)$$

при начальных условиях $f(0) = f_0, f(1) = f_1$.

Перейдем к изображению $F^*(q) \doteq f(n)$, пользуясь формулой (19). Получим

$$e^{2q} [F^*(q) - f_0 - f_1 e^{-q}] - 5e^q [F^*(q) - f_0] + 6F^*(q) = 0.$$

Отсюда

$$F^*(q) = \frac{f_0 e^{2q} + (f_1 - 5f_0) e^q}{5e^q + 6},$$

и, следовательно, $F^*(q)$ является рациональной относительно e^q функцией. Представим её в виде

$$F^*(q) = f_0 - \frac{2(f_1 - 3f_0)}{e^q - 2} + \frac{3(f_1 - 2f_0)}{e^q - 3}.$$

Перейдем к $f(n) \doteq F^*(q)$. Получаем решение уравнения (27)

$$f(n) = -(f_1 - 3f_0)2^n + (f_1 - 2f_0)3^n$$

при заданных начальных условиях.

Найденное решение является общим решением, если считать f_0, f_1 произвольными постоянными. Его можно записать в виде

$$f(n) = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

3.2. Линейное уравнение в конечных разностях. Линейное уравнение вида (25), то есть уравнение

$$a_0 \Delta^k f(n) + a_1 \Delta^{k-1} f(n) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n), \quad (28)$$

где $\varphi(n)$ – ступенчатая функция, $a_0 \neq 0, a_k \neq 0$ при начальном условии

$$f(0) = f_0, \Delta f(0) = f_1, \dots, \Delta^{k-1} f(0) = f_{k-1}, \quad (29)$$

можно свести согласно формуле (15) к линейному уравнению вида (25) и затем получить его решение указанным выше способом.

Пример. Найти решение уравнения

$$\Delta^2 f(n) - 2\Delta f(n) + f(n) = 2\eta(n)$$

при начальных условиях $f(0) = 0, \Delta f(0) = 1$.

Перейдем к изображению $F^*(q) \doteq f(n)$, пользуясь формулой (15). Получим

$$(e^q - 1)^2 F^*(q) - 2(e^q - 1)F^*(q) - e^q = \frac{2e^q}{e^q - 1}.$$

Отсюда имеем

$$F^*(q) = \frac{e^{2q} + e^q}{(e^q - 1)(e^q - 2)^2}.$$

Так как

$$\frac{e^{2q} + e^q}{(e^q - 1)(e^q - 2)^2} = \frac{2}{e^q - 1} - \frac{1}{e^q - 1} + \frac{6}{(e^q - 2)^2},$$

то после перехода к оригиналам получим

$$f(n) = 2 - 2^{n-1} + 6(n-1)2^{n-2} = 2 + \left(\frac{3}{2}n - 2\right)2^n.$$

З а д а ч и

1. Построить график решетчатой функции:

1) $f^*(t) = \eta(t-n)$; 2) $f^*(t) = (-1)^n \eta(t-n)$;

3) $f^*(t) = 2^n \eta(t-n)$.

2. Найти разделенные разности для факториальной функции $x^{[k]}$.

Ответ: $\Delta x^{[k]} = kx^{[k-1]}, \Delta^2 x^{[k]} = k(k-1)x^{[k-2]}, \dots$

3. Доказать: если $f(n) \doteq F^*(q)$, то

$$1) \lim_{q \rightarrow \infty} F^*(q) = f(0); \quad 2) \lim_{q \rightarrow \infty} e^q [F^*(q) - f(0)] = f(1).$$

4. Последовательность Фибоначчи $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ составлена из действительных чисел, каждое из которых равно сумме двух предыдущих: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Найти выражение для общего члена последовательности.

$$\text{Ответ: } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

5. Найти решение уравнения $f(n+4) - 16f(n) = 30n + 7$ при начальных условиях $f(0) = 1, f(1) = -5$.

6. Найти решение уравнения $\Delta^2 f(n) - 6\Delta f(n) + 9f(n) = 0$ при начальных условиях $f(0) = 1, f(1) = -1$.

7. Найти общее решение уравнения $\Delta^3 f(n) - 3\Delta f(n) - 2f(n) = n$.

ЛИТЕРАТУРА

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.;Л.: ГИТТЛ, 1951 (и последующие издания).

Лурье Л.М. Операционное исчисление и его применения к задачам механики. М.;Л.: ГИТТЛ, 1950.

Канторович М.И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Наука, 1986.

Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука, 1991.

Араманович И.Г., Луц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968.

Александров И.А. Комплексный анализ. Ч. 1, 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012.

Эфрос А.М., Данилевский А.М. Операционное исчисление и контурные интегралы. ДНТВУ, 1937.

Лыков А.В. Теплопроводность нестационарных процессов. М.: Госэнергоиздат, 1948.

Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1964.

Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М.: ИЛ, 1948.

Мартыненко В.С. Операционное исчисление. Киев: Выща школа, 1990. 361 с.

Старков В.Н. Операционное исчисление и его применения. СПб.: С.-Петербург. ун-т, 2000. 65 с.

Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.

Glaeske H. J., Prudnikov A.P., Skornik K.A. Operational calculus and related topics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London and New York, 2006.