

УДК 519.6

**Б.М. Шумилов**

**«ЛЕНИВЫЕ» ВЕЙВЛЕТЫ ЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ И АЛГОРИТМ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ**

В статье изучен неизвестный ранее тип «ленивых» вейвлетов для эрмитовых кубических сплайнов. Получен алгоритм вейвлет-разложения в виде двух независимых трехдиагональных систем линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием.

**Ключевые слова:** эрмитовы кубические сплайны, вейвлеты, разложение

Вейвлетом называется малая, то есть короткая или быстро затухающая волна, множество сжатий и смещений которой порождает некоторое пространство ограниченных функций на всей числовой оси [1 – 3]. За счет сжатия вейвлеты выявляют с разной степенью подробности различие в характеристиках измеренного сигнала, а путем сдвига способны проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. Свойство локальности вейвлетов обеспечивает им известное преимущество при анализе нестационарных сигналов, например, по сравнению с преобразованием Фурье. К недостаткам ортонормальных вейвлетов [1] относится то, что они не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые. Недостатком сплайн-вейвлетов [2] является то, что для них не существует явных конечных формул разложения. Поэтому при вычислениях используют приближенные соотношения для главных коэффициентов разложения [2] либо решают системы линейных алгебраических уравнений [3]. В данной работе для случая эрмитовых кубических сплайнов [4] рассмотрен неизвестный ранее тип «ленивых» вейвлетов, для которых предложен эффективный алгоритм вейвлет-анализа на основе конечных неявных соотношений разложения.

**1. Построение систем «ленивых» эрмитовых сплайн-вейвлетов**

Основой для построения вейвлет-преобразования является набор вложенных пространств ...  $V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \dots$ . В данном случае пространство  $V_L$  является пространством эрмитовых кубических сплайнов на отрезке  $[a, b]$  с равномерной сеткой узлов  $\Delta^L: u_i = a + (b - a) i / 2^L, i = 0, 1, \dots, 2^L, L \geq 0$ , и базисными функциями  $N_{i,0}^L(v) = \varphi_3(v - i), N_{i,1}^L(v) = \psi(v - i) \forall i, v = 2^L (u - a) / (b - a) + 1$ , с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами двух функций вида

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} (1-t)^2(1+2t), & 0 \leq t \leq 1, \\ t^2(3-2t), & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0, 2]; \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} t(1-t)^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -t^2(1-t), & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0, 2]. \end{cases}$$

На любой сетке  $\Delta^L, L \geq 0$ , интерполяционный кубический эрмитов сплайн может быть представлен как

$$S^L(u) = \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,0} N_{i,0}^L(u) + \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,1} N_{i,1}^L(u), \quad a \leq u \leq b, \quad (1)$$

где коэффициенты  $C_i^{L,k}$ ,  $k = 0, 1$ , являются узловыми значениями и соответственно производными аппроксимируемой функции. Если записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки,  $\phi^L = [N_{0,1}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,1}^L]$ , и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора,  $C^L = [C_0^{L,1}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,1}]^T$ ,

то уравнение (1) переписывается как  $S^L(u) = \phi^L(u) C^L$ .

Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений и локальных уточняющих подробностей. Пусть «более грубый» уровень представления в  $V_{L-1}$  получается из «более подробного» уровня представления в  $V_L$  посредством удаления каждого второго отсчета. Тогда базисными функциями для  $V_{L-1}$  будут функции  $N_{i,k}^{L-1}$ , в два раза большие по ширине с центрами в четных целых числах. Пространство вейвлетов  $W_{L-1}$  определяется как дополнение  $V_{L-1}$  до  $V_L$ , так что любая функция в  $V_L$  может быть записана в виде суммы какой-то функции в  $V_{L-1}$  и какой-то функции в  $W_{L-1}$ . В [3] на примере сплайнов первой степени было предложено в качестве базисных функций в  $W_{L-1}$  использовать базисные функции в  $V_L$  с центрами в нечетных целых числах («ленивые» вейвлеты). Тогда формулы для вейвлет-коэффициентов приобретают локальный вид и для данного случая независимо получены в [5]. А в [6] эти формулы были применены к более подходящей схеме вычисления производных для анализа негладких данных.

Мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов для  $W_{L-1}$  функции  $N_{i,k}^L$  в  $V_L$  с центрами в четных целых числах. Поскольку  $W_{L-1}$  должно являться дополнением  $V_{L-1}$  в  $V_L$ , размерности этих пространств должны удовлетворять соотношению  $\text{Dim}(V_L) = \text{Dim}(V_{L-1}) + \text{Dim}(W_{L-1})$ . Иногда для этого достаточно ограничиться рассмотрением периодического случая, когда первая и последняя контрольные точки совпадают. Это соответствует аппроксимации замкнутых кривых и поверхностей. Для незамкнутых кривых предлагается вычитать из исходных координат уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю точки. Тогда две базисные функции по краям отрезка  $[a, b]$  удаляются из базиса, и размерности полученных пространств  $V_L^0, W_{L-1}^0$  равны  $2(2^L+1) - 2 = 2^{L+1}$  и  $2^L$  соответственно. Следовательно,  $\text{Dim}(V_L^0) = \text{Dim}(V_{L-1}^0) + \text{Dim}(W_{L-1}^0)$ .

Обозначим базисные сплайн-функции и коэффициенты эрмитового кубического сплайна с отсутствующими элементами по концам отрезка аппроксимации как  $\phi_0^L$  и  $C_0^L$ . Аналогично, обозначим базисные вейвлет-функции как  $M_{i,0}^{L-1} = \phi_3(v-2i)$ ,  $M_{i,1}^{L-1} = \psi(v-2i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2^{L-1}$ , и запишем их в виде матрицы-строки,  $\psi_0^L = [M_{0,1}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \dots, M_{2^L,1}^L]$ . Соответствующие вейвлет-коэффициенты на уровне разрешения  $L$  будем собирать в вектор,  $D_0^L = [D_0^{L,1}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \dots, D_{2^L}^{L,1}]^T$ . Тогда с использованием обозначения для блочных матриц вейвлет-преобразование может быть записано как [3]

$$C_0^L = [P_0^L \mid Q_0^L] \begin{bmatrix} C_0^{L-1} \\ D_0^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$



### 2. Алгоритм с применением расщепления

Следующее утверждение дает последовательность вычисления коэффициентов вейвлет-анализа по известным коэффициентам сплайн-разложения на любом уровне разрешения  $L$ .

**Теорема 1.** Пусть величины  $\Xi^L = [\xi_0^{L,1}, \xi_1^{L,0}, \xi_1^{L,1}, \dots, \xi_{2^L}^{L,1}]^T$ ,  $L \geq 1$ , получены из соотношений вида

$$\xi_i^{L,0} = C_i^{L,0}, i = 2, 4, \dots, 2^L - 2; \quad \xi_i^{L,1} = C_i^{L,1}, i = 0, 2, \dots, 2^L;$$

$$\begin{bmatrix} -11 & 1 & & & & \\ 1 & -10 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1^{L,0} \\ \xi_3^{L,0} \\ \vdots \\ \xi_{2^{L-1}}^{L,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{L,0} \\ C_3^{L,0} \\ \vdots \\ C_{2^{L-1}}^{L,0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 1 & & & & \\ 1 & -10 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1^{L,1} \\ \xi_3^{L,1} \\ \vdots \\ \xi_{2^{L-1}}^{L,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{L,1} \\ C_3^{L,1} \\ \vdots \\ C_{2^{L-1}}^{L,1} \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$\xi_1^{1,k} = C_1^{1,k}, \quad k = 0, 1.$$

Тогда коэффициенты вейвлет-разложения представляют собой результат матричного умножения

$$\begin{bmatrix} C_0^{L-1} \\ D_0^{L-1} \end{bmatrix} = R^L \Xi^L, \tag{4}$$

где

$$R^1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\dots, R^L = \begin{bmatrix} 0 & -48 & 32 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & -4 & -4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & & & & & & & & \\ & & 24 & 16 & 0 & 0 & -24 & 16 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & 0 & -4 & -4 & 0 & \ddots & 0 & -4 & 4 & & & \\ & & & & & & 0 & 24 & 16 & 0 & \ddots & 0 & -24 & 16 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & 0 & 48 & 32 & 0 & \\ 1 & 24 & -16 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 & -4 & 0 & & & & & & & \\ & & -12 & -8 & 0 & 1 & 12 & -8 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & 0 & 4 & 4 & 1 & \ddots & 0 & 4 & -4 & & & \\ & & & & & & 0 & -12 & -8 & 0 & \ddots & 1 & 12 & -8 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & 0 & -24 & -16 & 1 & \end{bmatrix}.$$

**Доказательство.** Согласно построению, на каждых трех внутренних шагах сетки  $\Delta^L$  перекрываются по две пары широких базисных функций и вейвлетов и пять пар узких базисных функций. Поэтому после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке  $[-1, 2]$  можно записать конечное неявное соотношение разложения

$$\sum_{i=-2}^2 a_i \varphi_3(2x-i) = \sum_{j=-1}^0 b_j \varphi_3(2x-1-2j) + \sum_{j=-1}^0 b_j^1 \psi(2x-1-2j) + \sum_{j=-1}^0 c_j \varphi_3(x-j) + \sum_{j=-1}^0 c_j^1 \psi(x-j), \quad (5)$$

где  $\varphi_3(2x-i)$  – эрмитовы базисные сплайны на густой сетке,  $\varphi_3(x-j)$ ,  $\psi(x-j)$  – эрмитовы базисные сплайны на прореженной сетке,  $\varphi_3(2x-1-2j)$ ,  $\psi(2x-1-2j)$  – базисные вейвлеты на прореженной сетке.

Тогда для определения неизвестных коэффициентов согласно табл. 1 имеем соответственно при

$$\begin{aligned} x = -\frac{1}{2}: & \quad a_{-2} = c_{-1} \frac{1}{2} + c_{-1}^1 \left(-\frac{1}{8}\right), & \quad 0 = c_{-1} \frac{3}{2} + c_{-1}^1 \left(-\frac{1}{4}\right), \\ x = 0: & \quad a_{-1} = b_{-1} + c_{-1}, & \quad 0 = b_{-1}^1 \cdot 2 + c_{-1}^1, \\ x = \frac{1}{2}: & \quad a_0 = c_{-1} \frac{1}{2} + c_0 \frac{1}{2} + c_{-1}^1 \frac{1}{8} + c_0^1 \left(-\frac{1}{8}\right), & \quad 0 = c_{-1} \left(-\frac{3}{2}\right) + c_0 \frac{3}{2} + c_{-1}^1 \left(-\frac{1}{4}\right) + c_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right), \\ x = 1: & \quad a_1 = b_0 + c_0, & \quad 0 = b_0^1 \cdot 2 + c_0^1, \\ x = \frac{3}{2}: & \quad a_2 = c_0 \frac{1}{2} + c_0^1 \frac{1}{8}, & \quad 0 = c_0 \left(-\frac{3}{2}\right) + c_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид

$$a_{-1} = a_1 = 0, \quad b_0 = 4, \quad b_{-1} = 4, \quad c_{-1} = c_0 = -4, \quad b_{-1}^1 = 12, \quad b_0^1 = -12, \\ c_{-1}^1 = -24, \quad c_0^1 = 24, \quad a_{-2} = a_2 = 1, \quad a_0 = -10.$$

Таким образом, из соотношения (5) выделяется неявное трехчленное разложение вида

$$\varphi_3(2x+2) - 10\varphi_3(2x) + \varphi_3(2x-2) = 4\varphi_3(2x+1) + 4\varphi_3(2x-1) + 12\psi(2x+1) - 12\psi(2x-1) - 4\varphi_3(x+1) - 4\varphi_3(x) - 24\psi(x+1) + 24\psi(x).$$

Таблица 1

Значения базисных функций и их производных в точках отрезка  $[0, 2]$

$x$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_3'(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	$\varphi_3(2x)$	$\varphi_3'(2x)$	$\psi(2x)$	$\psi'(2x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/2	1/2	3/2	-1/8	-1/4	1	0	0	2
1	1	0	0	1	0	0	0	0
3/2	1/2	-3/2	1/8	-1/4	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0

Совершенно аналогично, с помощью табл. 1 нетрудно убедиться, что для эрмитовых базисных сплайнов производных имеет место неявное трехчленное разложение вида

$$\psi(2x+2) - 10\psi(2x) + \psi(2x-2) = -4\varphi_3(2x+1) + 4\varphi_3(2x-1) - 8\psi(2x+1) - 8\psi(2x-1) + 4\varphi_3(x+1) - 4\varphi_3(x) + 16\psi(x+1) + 16\psi(x).$$

В нечетных узлах выполняются тождества для базисных сплайн-вейвлетов  $\varphi_3(2x \pm 1)$ ,  $\psi(2x \pm 1)$ .

По краям отрезка аппроксимации, согласно построению, от выступающих за края функций  $\psi$  остаются половинки, тогда как функции  $\varphi_3$  отбрасываются полностью. Поэтому на двух крайних слева шагах сетки  $\Delta^L$  после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке  $[0, 2]$  получаются разложения

$$\sum_{i=0}^2 a_i \varphi_3(2x-i) = b_0 \varphi_3(2x-1) + \sum_{j=-1}^0 b_j^1 \psi(2x-1-2j) + c_0 \varphi_3(x) + \sum_{j=-1}^0 c_j^1 \psi(x-j); \quad (6)$$

$$\sum_{i=-1}^2 \hat{a}_i \psi(2x-i) = \hat{b}_0 \varphi_3(2x-1) + \sum_{j=-1}^0 \hat{b}_j^1 \psi(2x-1-2j) + \hat{c}_0 \varphi_3(x) + \sum_{j=-1}^0 \hat{c}_j^1 \psi(x-j). \quad (7)$$

Тогда для отыскания коэффициентов соотношения (6), согласно табл. 1 имеем соответственно при

$$\begin{aligned} x=0: & \quad 0 = b_{-1}^1 \cdot 2 + c_{-1}^1, \\ x=\frac{1}{2}: & \quad a_0 = c_0 \frac{1}{2} + c_{-1}^1 \frac{1}{8} + c_0^1 \left(-\frac{1}{8}\right), & \quad 0 = c_0 \frac{3}{2} + c_{-1}^1 \left(-\frac{1}{4}\right) + c_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right), \\ x=1: & \quad a_1 = b_0 + c_0, & \quad 0 = b_0^1 \cdot 2 + c_0^1, \\ x=\frac{3}{2}: & \quad a_2 = c_0 \frac{1}{2} + c_0^1 \frac{1}{8}, & \quad 0 = c_0 \left(-\frac{3}{2}\right) + c_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид

$$a_1 = 0, c_{-1}^1 = -48, b_{-1}^1 = c_0^1 = 24, b_0^1 = -12, c_0 = -4, b_0 = 4, a_2 = 1, a_0 = -11.$$

Таким образом, из соотношения (6) выделяется неявное двухчленное разложение вида

$$-11\varphi_3(2x) + \varphi_3(2x-2) = 4\varphi_3(2x-1) + 24\psi(2x+1) - 12\psi(2x-1) - 4\varphi_3(x) - 48\psi(x+1) + 24\psi(x).$$

Аналогично, для отыскания коэффициентов соотношения (7) имеем

$$\begin{aligned} x=0: & \quad 2\hat{a}_{-1} = \hat{b}_{-1}^1 \cdot 2 + \hat{c}_{-1}^1, \\ x=\frac{1}{2}: & \quad 0 = \hat{c}_0 \frac{1}{2} + \hat{c}_{-1}^1 \frac{1}{8} + \hat{c}_0^1 \left(-\frac{1}{8}\right), & \quad 2\hat{a}_0 = \hat{c}_0 \frac{3}{2} + \hat{c}_{-1}^1 \left(-\frac{1}{4}\right) + \hat{c}_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right), \\ x=1: & \quad 0 = \hat{b}_0 + \hat{c}_0, & \quad 2\hat{a}_1 = \hat{b}_0^1 \cdot 2 + \hat{c}_0^1, \\ x=\frac{3}{2}: & \quad 0 = \hat{c}_0 \frac{1}{2} + \hat{c}_0^1 \frac{1}{8}, & \quad 2\hat{a}_2 = \hat{c}_0 \left(-\frac{3}{2}\right) + \hat{c}_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид

$$\hat{a}_{-1} = \hat{a}_1 = 0, \hat{b}_0 = 4, \hat{c}_0 = -4, \hat{c}_{-1}^1 = 32, \hat{b}_{-1}^1 = -16, \hat{b}_0^1 = -8, \hat{c}_0^1 = 16, \hat{a}_2 = 1, \hat{a}_0 = -9.$$

Таким образом, из соотношения (7) выделяется неявное двухчленное разложение вида

$$-9\psi(2x) + \psi(2x-2) = 4\varphi_3(2x-1) - 16\psi(2x+1) - 8\psi(2x-1) - 4\varphi_3(x) + 32\psi(x+1) + 16\psi(x).$$



расщепления системы по четным и нечетным узлам алгоритм сводится к решению независимо двух трехдиагональных систем уравнений (3), что предпочтительно с точки зрения распараллеливания вычислений. После этого на любом уровне разрешения  $L$  вычисление коэффициентов вейвлет-разложения по известным коэффициентам эрмитового кубического сплайна с нулевыми значениями по концам отрезка аппроксимации осуществляется по явным конечным формулам (4). Теорема 1 доказана.

### 3. Пример

Рассмотрим в качестве тестовой функцию Хартена [6]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x \leq \frac{1}{3}, \\ |\sin(4\pi x)|, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Эта кусочно-гладкая функция имеет разрывы первого рода в точках  $x=1/3$  и  $2/3$  и угол (разрыв первой производной) в точке  $x=1/2$ . Ее производная – также кусочно-гладкая функция.

На рис. 1 представлены результаты реконструкции вейвлет-анализа интерполяционного эрмитового кубического сплайна  $S_3(t)$  с числом разбиений  $n=2^L$  на интервале  $0 \leq x \leq 1$  при условии точного вычисления производных. Здесь и далее длина шага  $\Delta x = 1/n$ , где верхний уровень разрешения  $L=5$ , то есть  $n=32$ , сплошной линией обозначается исходная функция. На рис. 2 представлены аналогичные результаты реконструкции вейвлет-анализа эрмитового кубического сплайна  $S_3(t)$  при условии численного вычисления производных. При этом выброс на месте разрыва производной приобретает симметричный вид.

Сравнение с результатами вычисления по локальным формулам [6] показывает, что графики для обоих типов вейвлетов выглядят совершенно одинаково, однако для локальной схемы обнуляется вейвлет-коэффициент функции на самом нижнем уровне разрешения, тогда как для нелокальной схемы становится малым центральный из вейвлет-коэффициентов производных на верхнем уровне разрешения.

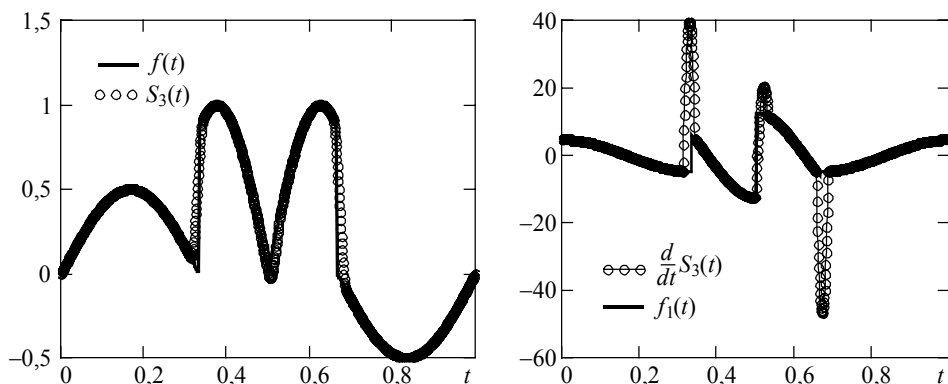


Рис. 1. Графики вейвлет-реконструкции эрмитового кубического сплайна при условии точного вычисления производных



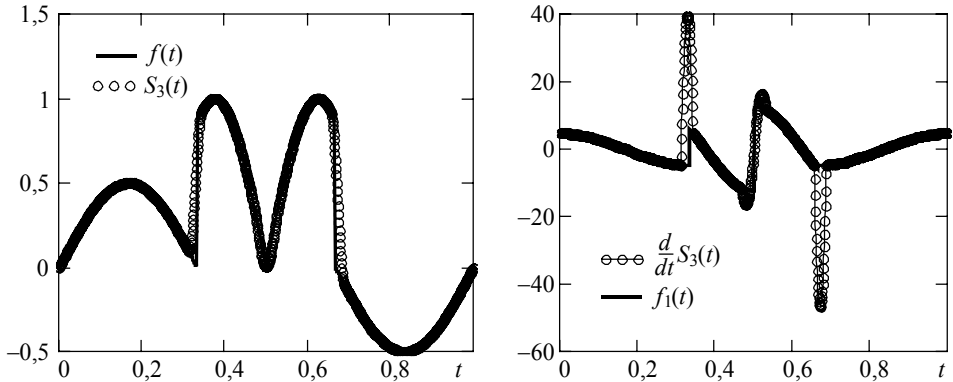


Рис. 2. Графики вейвлет-реконструкции эрмитового кубического сплайна при условии численного вычисления производных

### Заключение

Представленные в статье схемы построения «ленивых» эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов и получения для них неявных соотношений разложения могут быть распространены и на сплайны более высокой степени [8] и предоставляют широкие возможности для создания эффективных параллельных алгоритмов построения и использования эрмитовых сплайн-вейвлетов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д., Вейвлеты в компьютерной графике: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Warming R., Beam R. Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp. 2000. V. 22:1. P. 269–317.
6. Aràndiga F., Baeza A., Donat R. Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2004. V. 9. P. 263–273.
7. Heil C., Strang G., Strela V. Approximation by translate of refinable functions // Numer. Math. 1996. V. 73. P. 75–94.
8. Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Турсунов Э.А. Новый тип эрмитовых мультивейвлетов пятой степени // Пятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям: Тез. докл. (1–3 декабря 2009 года). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009, С. 57–58.

Шумилов Борис Михайлович  
Томский государственный университет  
E-mail: b\_shumilov@math.tsu.ru

Поступила в редакцию 26 октября 2010 г.