

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОГО МАР-ПОТОКА

А.Н. Моисеев, А.А. Назаров

Томский государственный университет  
E-mail: alexander-moiseev@mail.ru; anazarov@fpmk.tsu.ru

Представлено исследование МАР-потока, имеющего высокие условные интенсивности наступления событий. Показано, что в асимптотике (в условии неограниченного роста интенсивности) число событий, наступивших в таком потоке за фиксированный интервал времени, является нормальным. Получены характеристики этого распределения.

**Ключевые слова:**

Марковский поток событий, асимптотический анализ.

**Key words:**

Markovian arrival process, asymptotical analysis.

Применение специальных видов потоков событий в моделях массового обслуживания [1] позволяет сделать эти модели более адекватными реальным процессам в телекоммуникационных системах. В настоящей работе представлено исследование так называемого МАР-потока (Markovian Arrival Process) [2] в условии неограниченного роста его интенсивности. Результаты аналогичных исследований для МАР и прочих видов специальных потоков в других предельных условиях представлены в [3–5].

Итак, рассмотрим МАР-поток [6]. Пусть управляющая этим потоком цепь Маркова имеет  $K$  состояний, переходы между состояниями определяются матрицей инфинитезимальных характеристик  $NQ = \{Nq_{vk}\}_{v,k=1,\overline{K}}$ , где скаляр  $N$  имеет смысл большой величины (в теоретическом исследовании предполагается, что  $N \rightarrow \infty$ ). При этом матрица  $Q$  обладает свойством

$$q_{vv} = -\sum_{k \neq v} q_{vk},$$

или в матричном виде:

$$QE = 0, \tag{1}$$

где  $E$  – единичный вектор-столбец, а  $0$  – нулевой вектор-столбец. Вероятность наступления события в потоке при переходе управляющей цепи Маркова из состояния  $v$  в состояние  $k$  равна  $d_{vk}$  ( $k \neq v$ ). Величины  $d_{vv}$  будем полагать равными нулю. Эти вероятности запишем в виде матрицы  $D = \{d_{vk}\}_{v,k=1,\overline{K}}$ .

Пусть условная интенсивность рассматриваемого потока событий в каждом из состояний управляющей цепи равна  $N\lambda_k$ ,  $k=1,\overline{K}$ . Введем обозначение для матрицы условных интенсивностей:

$$N\Lambda = \text{diag}\{N\lambda_1, \dots, N\lambda_K\}.$$

В связи с тем, что в эту матрицу, а также матрицу инфинитезимальных характеристик  $NQ$ , входит большой по величине параметр  $N$ , данный вид потока будем называть высокоинтенсивным марковским потоком событий или НИМАР-потоком (от High Intensive Markovian Arrival Process).

Обозначим через  $m(t)$  число событий, наступивших в рассматриваемом потоке за интервал времени длительности  $t$ , а через  $k(t)$  – состояние управ-

ляющей цепи Маркова в момент времени  $t$ . Рассмотрим двумерный случайный процесс  $\{m(t), k(t)\}$ . Введем обозначение:

$$P(m, k, t) = P\{m(t) = m, k(t) = k\}.$$

Применяя формулу полной вероятности, для этого распределения можно записать следующее:

$$\begin{aligned} P(m, k, t + \Delta t) &= \\ &= P(m, k, t) \cdot (1 - N\lambda_k \Delta t) \cdot (1 + Nq_{kk} \Delta t) + \\ &+ P(m-1, k, t) N\lambda_k \Delta t + \sum_{v \neq k} P(m, v, t) Nq_{vk} (1 - d_{vk}) \Delta t + \\ &+ \sum_{v \neq k} P(m-1, v, t) Nq_{vk} d_{vk} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} P(m, k, t + \Delta t) - P(m, k, t) &= \\ &= [-P(m, k, t) + P(m-1, k, t)] N\lambda_k \Delta t + \\ &+ \sum_{v=1}^K P(m, v, t) Nq_{vk} (1 - d_{vk}) \Delta t + \\ &+ \sum_{v=1}^K P(m-1, v, t) Nq_{vk} d_{vk} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда при  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем уравнение Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(m, k, t)}{\partial t} &= [-P(m, k, t) + P(m-1, k, t)] N\lambda_k + \\ &+ \sum_{v=1}^K [P(m, v, t)(1 - d_{vk}) + P(m-1, v, t)d_{vk}] Nq_{vk}. \end{aligned}$$

Домножим это уравнение справа и слева на величину  $e^{jum}$ , где  $j = \sqrt{-1}$ , а  $u$  – некоторая переменная, и просуммируем по  $m = 0, \infty$ . Тогда, введя обозначение

$$H(u, k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, k, t),$$

для этой функции получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial H(u, k, t)}{\partial t} &= H(u, k, t) \lambda_k (e^{ju} - 1) + \\ &+ \sum_{v=1}^K H(u, k, t) [d_{vk} (e^{-ju} - 1) + 1] q_{vk}. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим вектор-строку

$$\mathbf{H}(u, t) = \{H(u, 1, t), \dots, H(u, K, t)\},$$

тогда в матричном виде (2) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u, t) \mathbf{A} (e^{ju} - 1) + \\ &+ \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{A} (e^{-ju} - 1) + \mathbf{Q}] = \\ &= \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{Q} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}) (e^{ju} - 1)], \end{aligned} \quad (3)$$

где матрица  $\mathbf{A} = \{q_{vk} d_{vk}\}_{v,k=1,\bar{K}}$ .

Обозначим  $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}$ , тогда (3) переписывается в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{ju} - 1)].$$

В этом уравнении выполним замену

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) e^{juN\lambda t},$$

где

$$\lambda = \mathbf{RBE}, \quad (4)$$

а  $\mathbf{R}$  – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний управляющей потоком цепи Маркова, для него справедливо:

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{RE} = 1. \end{cases} \quad (5)$$

В результате получаем уравнение относительно функции  $\mathbf{H}_2(u, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} e^{juN\lambda t} + ju\lambda \mathbf{H}_2(u, t) e^{juN\lambda t} &= \\ = \mathbf{H}_2(u, t) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{ju} - 1)] e^{juN\lambda t} \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}_2(u, t) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{ju} - 1) - ju\lambda \mathbf{I}], \quad (6)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица порядка  $K$ .

Это уравнение решим при  $N \rightarrow \infty$  методом асимптотического анализа [6], обозначив  $\varepsilon^2 = \frac{1}{N}$  и выполнив замены  $u = \varepsilon w$  и  $\mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)$ . Уравнение (6) переписывается в виде:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}(w, t, \varepsilon) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{j\varepsilon w} - 1) - j\varepsilon w \lambda \mathbf{I}]. \quad (7)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема.** *Предельное при  $\varepsilon \rightarrow 0$  значение  $\mathbf{F}(w, t)$  решения  $\mathbf{F}(w, t, \varepsilon)$  уравнения (7) имеет вид*

$$\mathbf{F}(w, t) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

где

$$\kappa = 2\mathbf{f}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{E}, \quad (8)$$

а вектор-строка  $\mathbf{f}$  определяется уравнением

$$\mathbf{R}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \mathbf{fQ} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

**Доказательство** выполним в три этапа.

*Этап 1.* Положим в (7)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим:

$$\mathbf{F}(w, t) \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

А так как имеет место свойство (5) вектора  $\mathbf{R}$ , векторную функцию  $\mathbf{F}$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}(w, t) = \mathbf{R} \Phi(w, t), \quad (10)$$

где  $\Phi(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Решение уравнения (7) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}(w, t, \varepsilon) = \Phi(w, t) [\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (11)$$

где  $\mathbf{f}$  – некоторый вектор (вектор-строка),  $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$  – вектор-строка из бесконечно малых величин порядка  $\varepsilon^2$ . Подставляя это выражение в (7) и используя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , получим:

$$\varepsilon^2 [\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}] \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} =$$

$$= \Phi(w, t) [\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}] [\mathbf{Q} + j\varepsilon w \mathbf{B} - j\varepsilon w \lambda \mathbf{I}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Отсюда, приведя подобные, сократив обе части на  $j\varepsilon w$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем уравнение относительно неизвестного вектора  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \mathbf{fQ} = \mathbf{0}.$$

*Этап 3.* Просуммируем компоненты левой и правой частей уравнения (7). Для этого умножим справа обе части этого уравнения на единичный вектор  $\mathbf{E}$  длины  $K$ :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}(w, t, \varepsilon) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{j\varepsilon w} - 1) - j\varepsilon w \lambda \mathbf{I}] \mathbf{E}.$$

Используя в этом уравнении разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$$

и учитывая (1), получаем:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}(w, t, \varepsilon) \left[ j\varepsilon w (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{B} \right] \mathbf{E} + O(\varepsilon^3).$$

Подставим сюда (11):

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} \mathbf{RE} = \Phi(w, t) \times$$

$$\times \left[ j\varepsilon w \mathbf{R}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{RB} + \right. \\ \left. + (j\varepsilon w)^2 \mathbf{f}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) \right] \mathbf{E} + \mathbf{O}(\varepsilon^3).$$

С учетом (4) и (5), приводя подобные и сокращая на  $\varepsilon^2$ , получаем:

$$\frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, t) [\lambda + 2\mathbf{f}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{E}] + O(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) \Phi(w, t),$$

где величина  $\kappa$  определяется выражением (8). Решение этого уравнения с учетом начального условия  $\Phi(w, 0) = 1$ , которое получается из условия

$$P(m, k, 0) = \begin{cases} R_k & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m > 0, \end{cases}$$

( $k=\overline{1, K}$ ) имеет вид

$$\Phi(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}.$$

Отсюда в силу (10) имеем:

$$\mathbf{F}(w, t) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Решением неоднородной системы уравнений (9), вообще говоря, является семейство векторов вида

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{f}$  – частное решение неоднородной системы, а  $\mathbf{C}\mathbf{R}$  – общее решение однородной системы  $\mathbf{f}\mathbf{Q}=\mathbf{0}$  в силу первого равенства (5) (здесь  $\mathbf{C}$  – произвольная константа). Однако нетрудно убедиться, что при подстановке любого из решений (12) выражение (8) для величины  $\kappa$  дает одно и то же значение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4-е, испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
2. Neuts M.F. A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
3. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование МАР-потока методом асимптотического анализа N-го порядка // Вестник ТГУ. Серия «Информатика. Кибернетика. Математика». – 2006. – № 293. – С. 110–115.
4. Назаров А.А., Горбатенко А.Е. Асимптотический анализ системы ММР/М/1/ИПВ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 187–190.

Вернемся к функции  $\mathbf{H}(u, t)$ . Получаем, что при достаточно больших значениях  $N$

$$\mathbf{H}(u, t) \approx \mathbf{R} \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa)t \right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция  $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t)\mathbf{E}$

процесса  $m(t)$  – числа событий, наступивших в высокоинтенсивном МАР-потоке, в указанных условиях имеет вид характеристической функции гауссовского распределения, то есть распределение вероятностей числа событий в НИМАР-потоке, наступивших за время  $t$ , можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t$ . Это подтверждается также исследованиями, выполненными средствами имитационного моделирования.

Аналогичные результаты получены и для других типов высокоинтенсивных потоков (например, рекуррентного [7]).

5. Назаров А.А., Семенова И.А. Асимптотический анализ систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и полумарковским входящим потоком // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 5. – С. 12–17.
6. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
7. Moiseev A., Nazarov A. Investigation of High Intensive General Flow // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI'2012): Proc. of the IV International Conference. – Baku, Azerbaijan, September 12–14, 2012. – P. 161–163.

Поступила 14.12.2012 г.