УДК 519.865

# ЕВРОПЕЙСКИЙ ОПЦИОН КУПЛИ ЛУКБЭК С ПЛАВАЮЩИМ СТРАЙКОМ

У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, Е.Г. Пахомова

Томский государственный университет
E-mail: egi@sibmail.com; daniluc_elena@sibmail.com
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

*Исследуется экзотический опцион купли Европейского типа на диффузионном (B,S)-финансовом рынке, основанный на экстремальном значении цены рискового актива, по которому осуществляются выплаты дивидендов. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, портфели (хеджирующие стратегии) и соответствующие им капиталы. Рассматриваются свойства решения.*

***Ключевые слова:***
*Финансовый рынок, опцион, платежная функция, капитал, портфель, хеджирование.*
***Key words:***
*Financial market, option, payoff function, capital, portfolio, hedging.*

В [1] была обозначена область финансовой экономики, являющаяся объектом исследования авторов настоящей статьи. На основе анализа ряда научных публикаций в [1] обоснована актуальность изучения механизмов опционных контрактов и заявлена необходимость построения математической структуры для нахождения характеристик опциона. В данной работе, как и в [1], на основе диффузионной модели $(B,S)$ – финансового рынка с выплатой дивидендов по рисковым активам рассматривается экзотический опцион, основанный на экстремальном значении цены рискового актива. Однако в качестве спотовой цены рассматривается конечное значение рискового актива $S_T$, а в качестве страйковой цены – $S_T^{\min}$ (floating strike lookback call option [2]), что представляет собой еще один подкласс опционов с возможностью траекторного описания.

### 1. Постановка задачи

В [1] детально были описаны основные категории, с помощью которых формулируется задача. В предлагаемом пункте целесообразно ввести эти категории в формате перечисления без подробных обоснований.

На стохастическом базисе $(\Omega,F,\mathbf{F}=(F_t)_{t\geq 0},P)$ текущие цены рисковых $S_t$ и безрисковых $B_t$ активов в течение интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ dB_t = rB_t dt, \qquad (1.1)$$

где $W_t$ – стандартный винеровский процесс, $S_0>0$, $\mu\in R=(-\infty,+\infty)$, $\sigma>0$, $B_0>0$, $r>0$, решения которых имеют вид

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\},$$

$$B_t = B_0 \exp\{rt\}. \qquad (1.2)$$

Инвестор в текущий момент времени обладает капиталом $X_t$, определяемым портфелем ценных бумаг $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$, причем производятся выплаты дивидендов по акциям в соответствии с процессом $D_t$ со скоростью $\delta\gamma_t S_t$.

В [1] было показано, что

$$Law(S(\mu,r,\delta)\,|\,\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(S(r,\delta)\,|\,\boldsymbol{P}),$$

т. е. относительно меры $P^{\mu-\gamma+\delta}$ вероятностные свойства процесса $S(\mu,r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu,r,\delta) = S_t(\mu,r,\delta)((r-\delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}),$$

совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r,\delta) = S_t(r,\delta)((r-\delta)dt + \sigma dW_t), \qquad (1.3)$$

относительно меры $P$.

*Задача:* сформировать хеджирующие стратегии (портфели) $\pi_t^C=(\beta_t^C,\gamma_t^C)$, а также соответствующие им капиталы $X_t^C$ таким образом, чтобы выполнить платежные обязательства $X_T=f_T(S_T)$ относительно платежных функций

$$f_T = f_T(S) = S_T - \min_{0\leq t\leq T} S_t, \qquad (1.4)$$

а также найти стоимость опциона $C_T=X_0$.

*Используемые обозначения:* $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами $a$ и $b$; $I[A]$ – индикаторная функция события $A$; интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R=(-\infty,+\infty)$;

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy,\quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

*Замечание.* Дополнительные условия, вносимые в платежные обязательства экзотических опционов, могут быть как в пользу покупателя, так и в пользу продавца опциона, что в первом случае должно приводить к увеличению, а во втором – к уменьшению цены опциона относительно стандартного опциона купли с платежной функцией $f_T(S_T)=(S_T-K)^+$. Так как $\min\limits_{0\leq t\leq T} S_t \leq S_T$, то опцион с платежной функцией $f_T(S)$ вида (1.4) в пользу покупателя опциона, поскольку он может быть предъявлен всегда, а стандартный – только при выполнении условия $S_T>K$.

## 2. Основные результаты

Согласно (1.1)–(1.3)

$$S_t(r,\delta)=S_0\exp\{\sigma\xi_t\},\ \ \xi_t=W_t+(h/a)t,$$
$$h=r-\delta-(\sigma^2/2). \tag{2.1}$$

**Лемма 1.** Пусть $M_t=\max\limits_{0\le\tau\le t}\sigma\xi_\tau=\max\limits_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau+h\tau)$ для $t\le T$. Тогда для $x\ge 0$ и $h\in R$ функция распределения $P\{m_t\le x\}$ и плотность вероятности $p^M(t,x)=\partial P\{m_t\le x\}/\partial x$ имеют вид

$$P\{M_t\le x\}=\Phi\left(\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right)-$$
$$-\exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(-\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right), \tag{2.2}$$

$$p^M(t,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\}-$$
$$-\frac{2h}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(-\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\exp\left\{-\frac{(x+ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\}. \tag{2.3}$$

Вывод формулы (2.2) проводится аналогично выводу формулы (5.9) в [3] и поэтому не приводится. Формула (2.3) – результат дифференцирования (2.2) по $x$.

**Лемма 2.** Пусть $m_t=\min\limits_{0\le\tau\le t}\sigma\xi_\tau=\min\limits_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau+h\tau)$ для $t\le T$. Тогда для $x\ge 0$ и $h\in R$ функция распределения $P\{m_t\le x\}$ и плотность вероятности $p^m(t,x)=\partial P\{m_t\le x\}/\partial x$ имеют вид

$$P\{m_t\le x\}=\Phi\left(\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right)+$$
$$+\exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right), \tag{2.4}$$

$$p^m(t,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\}+$$
$$+\frac{2h}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\exp\left\{-\frac{(x+ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\}. \tag{2.5}$$

**Доказательство:** для $x\ge 0$ последовательно имеем

$$P\{m_t\le -x\}=P\{\min_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau+h\tau)\le -x\}=$$
$$=1-P\{\max_{0\le\tau\le t}(-\sigma W_\tau-h\tau)\le x\}. \tag{2.6}$$

С учетом симметрии траекторий процесса $W_t$ относительно знака использование (2.2) в (2.6) дает, что

$$P\{m_t\le -x\}=1-\Phi\left(\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right)+$$
$$+\exp\left\{-\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(-\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right). \tag{2.7}$$

С учетом свойства $\Psi(z)+\Psi(-z)=1$ из (2.7) следует

$$P\{m_t\le -x\}=\Phi\left(-\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right)+$$
$$+\exp\left\{-\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(-\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right). \tag{2.8}$$

Так как $P\{m_t\le x\}$ для $x\le 0$ совпадает с $P\{m_t\le -x\}$ для $x\ge 0$, то, меняя в (2.8) $x$ на «$-x$», приходим к (2.4). Формула (2.5) следует в результате дифференцирования (2.4) по $x$. Лемма доказана.

Пусть

$$d_1(t)=\left(\frac{r-\delta}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t},$$
$$d_2(t)=\left(\frac{r-\delta}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t},\ \ \alpha=\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}, \tag{2.9}$$

а $d_1$, $d_2$ определяются формулами (2.9) при $t=0$.

**Теорема 1.** Цена опциона, капитал и портфель в случае платежной функции $f_T(S)$ определяются формулами:

$$C_T=S_0\left\{\begin{matrix}[e^{-\delta T}\Phi(d_1)-e^{-\delta T}\Phi(d_2)]+\\ +\alpha^{-1}[e^{-\delta T}\Phi(d_2)-e^{-\delta T}\Phi(-d_1)]\end{matrix}\right\}, \tag{2.10}$$

$$X_t=S_t\left\{\begin{matrix}[e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(t))-e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_2(t))]\\ +\alpha^{-1}\begin{bmatrix}e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_2(t))-\\ -e^{-\delta(T-t)}\Phi(-d_1(t))\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}, \tag{2.11}$$

$$\gamma_t=[e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(t))-e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_2(t))]+$$
$$+\alpha^{-1}[e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t))-e^{-r(T-t)}\Phi(-d_1(t))], \tag{2.12}$$

$$\beta_t=0. \tag{2.13}$$

**Доказательство:** Поскольку платежная функция $f_T(S)$ является естественной [3, 4], то $C_T=\exp\{-rT\}E\{f_T(S(r,\delta))\}$. Из (1.4) следует

$$C_T=e^{-rT}E\{f_T(S(r,\delta))\}=$$
$$=e^{-rT}E\{S_T(r,\delta)-\min_{0\le t\le T}S_t(r,\delta)\}. \tag{2.14}$$

Согласно (1.1)–(1.3)

$$S_T(r,\delta)=S_0\exp\{(r-\delta-(\sigma^2/2))T+\sigma W_T\}.$$

Тогда из (2.14) с учетом (2.1) и леммы 2 получаем, что

$$C_T = S_0 e^{-rT}\left[\begin{array}{l} e^{-\delta T} E\left\{\exp\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l} r-\delta- \\ -(\sigma^2/2)\end{array}\right)T+ \\ +\sigma W_T\end{array}\right\}\right\}- \\ -E\{\exp\{m_T\}\}\end{array}\right]. \quad (2.15)$$

Так как $E\{\exp\{\sigma W_T\}\}=\sigma^2/2$ [1–3], то из (2.15) с учетом (2.5) следует, что

$$C_T = S_0\left[e^{-\delta T} - e^{-rT}\int_{-\infty}^{0}\exp\{x\}p^m(T,x)dx\right]. \quad (2.16)$$

Использование (2.5) в (2.16) дает, что

$$C_T = S_0[e^{-\delta T} - e^{-rT}(J_1+J_2+J_3)], \quad (2.17)$$

$$J_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0}\exp\{x\}\exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx, \quad (2.18)$$

$$J_2 = \frac{2h}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\}\Phi\left(\frac{(x+hT)}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx = $$
$$= \frac{2h}{\sigma^2}J_2', \quad (2.19)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\}\exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx. \quad (2.20)$$

В (2.18) согласно Утверждению для $X\to N\{hT;\sigma^2 T\}$ имеем, что $c=1$, $b=0$. Тогда применение формулы (1.6) из [1] к (2.18) дает, что

$$J_1 = E\{\exp\{X\}I[X\le 0]\} =$$
$$= \exp\{hT+(\sigma^2 T/2)\}\Phi(-(hT+\sigma^2 T)/\sigma\sqrt{T}). \quad (2.21)$$

Использование (2.1), (2.5) в (2.21) приводит к тому, что $J_1=\exp\{(r-\delta)T\}\Phi(d_1)$. В (2.20) согласно Утверждению $X\to N\{-hT;\sigma^2 T\}$ имеем, что $c=1+[2h/\sigma^2]$, $b=0$. Тогда применение (1.6) из [1] к (2.20) дает, что

$$J_3 = E\left\{\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)X\right\}I[X\le 0]\right\} =$$
$$= \exp\left\{-hT\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)^2\sigma^2 T\right\}\times$$
$$\times\Phi\left(\left(hT-\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)\sigma^2 T\right)\Big/\sigma\sqrt{T}\right). \quad (2.22)$$

Использование (2.1), (2.5) в (2.22) приводит к тому, что

$$J_1 = J_3 = \exp\{(r-\delta)T\}\Phi(-d_1). \quad (2.23)$$

Интегрирование по частям в (2.19) с учетом (2.20) дает, что

$$J_2' = [\sigma^2/(\sigma^2+2h)][\Phi((h/\sigma)\sqrt{T}) - J_3]. \quad (2.24)$$

Подстановка (2.24) в (2.19) с использованием (2.1), (2.5) приводит к

$$J_2 = (1-\alpha^{-1})[\Phi(d_2) - \exp\{(r-\delta)T\}\Phi(-d_1)]. \quad (2.25)$$

Подстановка (2.23), (2.25) в (2.17) с учетом свойства $\Phi(z)+(-z)=1$ приводит к (2.10). Формулы (2.11)–(2.13) следуют из (2.10). Теорема доказана.

### Выводы

Согласно Теореме 1 в случае опционов с платежной функцией $f_T(S)$ капитал формируется только на основе рискового актива ($\psi_t\neq 0$, $\beta_t=0$), а безрисковый актив присутствует лишь виртуально в виде зависимости цены опциона от процентной ставки $r$, и в этом смысле подобный тип опционов является вырожденным. Это свойство объясняется отсутствием такого внешнего фактора, как договорная цена исполнения опциона $K$, и стоимость опциона определяется только эволюцией цены опциона $S_t$ на всем временном интервале $t\in[0,T]$ жизни опциона.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Андреева У.В., Данилюк Е.Ю., Рожкова С.В., Пахомова Е.Г. Применение вероятностных методов к исследованию экзотических опционов купли европейского типа на основе экстремальных значений цены рискового актива // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 6. – С. 6–12.
2. Buchen P., Konstandatos O. A new method of pricing lookback options // Mathematical Finance. – 2005. – V. 15. – № 2. – P. 245–259.
3. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 80–129.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998. – 544 с.


*Поступила 05.02.2012 г.*