МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ПРОЧНОСТИ И МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ СО РАН

И.Ю. Смолин, В.В. Каракулов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Прикладная механика»

Томск
2012

УДК 531.3(075.8)+534(075.8)
ББК 22.21/23
С51

Смолин И.Ю., Каракулов В.В.
С51 Аналитическая динамика и теория колебаний : учебное пособие. – Томск : Томский государственный университет, 2012. – 172 с.

ISBN 978-5-9462-1390-5

В учебном пособии изложены основы аналитической динамики и теории колебаний линейных и нелинейных механических систем с конечным числом степеней свободы. Рассмотрены основные понятия и уравнения, а также некоторые методы расчета элементов машиностроительных конструкций.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки высшего профессионального образования «Прикладная механика» и «Техническая физика». Соответствует содержанию дисциплины «Аналитическая динамика и теория колебаний» из перечня дисциплин для разработки примерных программ, учебников и учебных пособий базовой (общепрофессиональной) части профессионального цикла основной образовательной программы бакалавриата по направлению подготовки «Прикладная механика» ФГОС третьего поколения.

УДК 531.3(075.8)+534(075.8)
ББК 22.21/23

Рецензенты:
зав. кафедрой механики, графики и управления качеством Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники д-р техн. наук, профессор Б.А. Люкшин,
профессор кафедры материаловедения в машиностроении Национального исследовательского Томского политехнического университета д-р техн. наук, профессор С.В. Панин

© Смолин И.Ю., Каракулов В.В., 2012
ISBN 978-5-9462-1390-5 © Томский государственный университет, 2012
© ИФМП СО РАН, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 6

Раздел I. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ 8
Глава 1. Предмет и задачи аналитической динамики, ее связь с другими областями механики 8
Глава 2. Основные положения аналитической механики, классификация механических систем 13
2.1. Основные понятия. Законы и вариационные принципы механики 13
2.2. Типы механических систем и связей 15
2.3. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи 18
2.4. Степени свободы. Независимые и обобщенные координаты 19
2.5. Обобщенные силы и потенциальная энергия 23
2.6. Кинетическая энергия 25
Глава 3. Вариационный принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа для голономных систем 27
3.1. Вариационный принцип Гамильтона 27
3.2. Функция Лагранжа. Действие по Гамильтону 29
3.3. Уравнения Лагранжа второго рода – уравнение движения в обобщенных координатах 30
3.4. Теорема об изменении полной энергии 33
3.5. Консервативные системы. Гироскопические и диссипативные силы. Диссипативная функция Рэлея 35
Глава 4 Канонические переменные и канонические уравнения для голономных систем 40
4.1. Переменные, функция и уравнения Гамильтона 40
4.2. Вторая форма принципа Гамильтона 43
4.3. Фазовое пространство и фазовая жидкость 44
4.4. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Интегральные инварианты 48
4.5. Теорема сохранения энергии как следствие канонических уравнений 49
4.6. Преобразования координат как метод решения задач механики. Канонические преобразования 51
4.7. Интегрируемость гамильтоновых систем 53

Раздел II. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ 57
Глава 5. Предмет теории колебаний 57
Глава 6. Колебания систем с одной степенью свободы 63
6.1. Консервативные колебательные системы 63
6.1.1. Уравнения движения. Интеграл энергии 64

6.1.2. Фазовый портрет 66
6.2. Составление механической модели (расчетной схемы) 73
6.2.1. Ограничение числа степеней свободы 73
6.2.2. Силы, действующие при колебаниях. Общий вид уравнения движения 77
6.3. Свободные колебания линейной консервативной системы 81
6.4. Вынужденные колебания линейной системы без трения 83
6.4.1. Импульсивная нагрузка 84
6.4.2. Произвольная нагрузка 85
6.4.3. Внезапная нагрузка 87
6.4.4. Линейно возрастающая нагрузка 88
6.4.5. Выражение частного решения через реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку 89
6.4.6. Гармоническое возбуждение 92
6.4.7. Негармоническое периодическое возбуждение 94
6.5. Затухание свободных колебаний 98
6.5.1. Линейное вязкое трение 98
6.5.2. Сухое (кулоново) трение 102
6.5.3. Сила трения, пропорциональная смещению (позиционное трение) 105
6.5.4. Энергетическая оценка сил сопротивления 108
6.5.5. Потери на внутреннее трение в материалах и конструкциях 109
6.6. Вынужденные колебания систем при линейном вязком трении 112
6.6.1. Возмущающая сила, изменяющаяся по произвольному закону 112
6.6.2. Гармоническое возбуждение. Метод комплексных амплитуд 114
6.7. Вынужденные колебания систем с трением, отличным от линейного вязкого 118
6.7.1. Гармоническое возбуждение. Приближенное решение методом гармонического баланса 118
Глава 7. Линейные колебания систем с конечным числом степеней свободы 122
7.1. Свободные (собственные) колебания 123
7.1.1. Линеаризация уравнения движения для малых колебаний 123
7.1.2. Главные (нормальные) координаты 125
7.1.3. Решение системы уравнений движения. Частоты и формы собственных колебаний 126
7.1.4. Ортогональность форм собственных колебаний 129
7.1.5. Связь форм собственных колебаний и главных координат 129
7.2. Вынужденные колебания системы без трения 131
7.2.1. Метод главных координат 131
7.2.2. Гармоническая сила. Резонанс 131
7.2.3. Динамическая податливость. Антирезонанс 132
7.2.4. Динамический гаситель колебаний 134
7.2.5. Кинематическое возбуждение колебаний 136

7.3. Влияние трения на колебания систем с конечным числом степеней свободы 137
7.3.1. Внешнее и внутреннее вязкое трение. Диссипативная функция Рэлея 137
7.3.2. Пропорциональное демпфирование 138
7.3.3. Метод комплексных амплитуд 140
Глава 8. Параметрические колебания 144
8.1. Уравнение движения параметрических колебаний 144
8.2. Параметрические колебания около положения равновесия 145
8.3. Параметрические колебания около стационарного режима движения 147
8.4. Параметрическое возбуждение по кусочно-постоянному периодическому закону 149
Глава 9. Основы теории нелинейных колебательных систем 155
9.1. Свойства нелинейных колебаний 155
9.1.1. Свободные колебания 155
9.1.2. Вынужденные колебания нелинейной системы с кубической упругой характеристикой при гармоническом возбуждении и вязком трении 158
9.2. Автоколебания 161
9.3. Аналитические методы теории нелинейных колебаний 162
9.3.1. Качественный метод анализа фазового портрета 162
9.3.2. Асимптотические и прямые методы 166

Контрольные вопросы 168

Литература 171

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, которые авторы на протяжении ряда лет читают студентам физико-технического факультета Томского государственного университета, обучающимся по направлению подготовки «Прикладная механика». Предлагаемый курс составлен в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта третьего поколения и состоит из двух разделов, что и отражено в его названии. Важно отметить, что теоретическое рассмотрение колебаний систем с конечным числом степеней свободы во втором разделе во многом базируется на результатах, полученных при изучении лагранжевого подхода (см. первый раздел).

Первая глава является вводной и содержит краткий исторический обзор развития классической механики вообще и ее части – аналитической динамики. Дано определение предмета, показана связь аналитической динамики с другими областями механики и учебными курсами направления подготовки «Прикладная механика».

Во второй главе рассмотрены основные понятия аналитической механики: механической системы, законов и вариационных принципов, механических связей и степеней свободы независимых и обобщенных координат, потенциальной и кинетической энергии.

На основе введенного вариационного принципа Гамильтона в третьей главе представлены основные понятия и уравнения лагранжевого подхода к изложению механики голономных систем. Рассмотрены закон сохранения энергии и вытекающая из него классификация действующих сил.

В четвертой главе даны основные понятия и уравнения гамильтоновой механики: переменные, функция и уравнения Гамильтона, понятия фазового пространства и фазовой жидкости, интегральных инвариантов, канонических преобразований. Рассмотрен вопрос об интегрируемости гамильтоновых систем.

Второй раздел начинается с введения в предмет теории колебаний, что составляет содержание пятой главы.

В шестой главе заложены основы теории колебаний. Рассмотрены основные понятия и типы колебаний на примере колебательных систем с одной степенью свободы. На базе полученных в первом разделе знаний, на примере консервативной системы даны понятия фазового портрета, основных типов сил и общий вид уравнения движения. Далее подробно

рассмотрены уравнения движения и их решения для различных видов линейных колебаний: свободных, вынужденных, затухающих, вынужденных с трением.

В седьмой главе рассматриваются примеры линейных колебаний для систем с конечным числом степеней свободы. С использованием результатов лагранжевой механики, полученных в первом разделе пособия, указан путь решения и анализа линейных уравнений колебания со многими степенями свободы. Вначале рассмотрены свободные (собственные) колебания, введены понятия главных (нормальных) координат, частот и форм собственных колебаний. Далее представлены вынужденные колебания системы без трения, рассматриваются явления резонанса и антирезонанса, а также их технические приложения. Заканчивается изложение главы рассмотрением влияние трения на колебания систем с конечным числом степеней свободы. Рассмотрен метод комплексных амплитуд.

Восьмая глава посвящена изучению важных с точки зрения технических приложений колебаний в параметрических системах. Изучено явление параметрического резонанса.

В девятой главе даются основы теории нелинейных колебаний. Рассматриваются наиболее важные свойства нелинейных колебаний и на примере простейших нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы – особенности свободных и вынужденных колебаний. Отдельно представлены автоколебания и соответствующие им механические системы. Даны основные методы решения и анализа уравнений нелинейных колебаний.

Завершает учебное пособие список контрольных вопросов по главам, а также перечень рекомендуемой литературы для более глубокого самостоятельного изучения не освещенных в учебном пособии вопросов.

Раздел I
ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Глава 1
Предмет и задачи аналитической динамики, ее связь с другими областями механики

Начнем с того, что разберем смысл понятия «аналитическая динамика». Из курса теоретической механики известно, что динамика – это составная часть механики, изучающая движение механических систем под действием приложенных сил. Одним из видов движения являются колебания. Поскольку в аналитической механике в основном рассматриваются динамические задачи, то в узком смысле слова оба термина *аналитическая механика* и *аналитическая динамика* означают одно и то же. Для изложения этих предметов характерным является то, что в основу кладутся общие принципы (дифференциальные или интегральные вариационные принципы), а затем из этих принципов аналитическим путем получаются основные дифференциальные уравнения движения. Прилагательное «аналитическая» означает, что применяется аппарат математического анализа, т.е. дифференциального, интегрального, а также вариационного исчислений.

Основное содержание аналитической динамики составляют изложение общих принципов механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, исследование этих уравнений и методов их интегрирования.

Какое *место* занимает аналитическая механика среди других наук? Аналитическую механику можно рассматривать как часть или как продолжение теоретической механики. В этом аспекте для аналитической динамики характерно рассмотрение не одной материальной точки, а *систем материальных точек*, а также использование *обобщенных координат*. Очень важной составляющей аналитической механики является понятие *вариационных принципов*. Поэтому элементы аналитической динамики можно найти также в книгах, в названии которых есть слова «теоретическая механика» и «вариационные принципы механики». Содержание читаемых курсов аналитической динамики различается в зависимости от того, студентам какой специальности они читаются: математикам, физикам или инженерам-прикладникам.

В свою очередь, и теоретическая механика является частью более общей науки – *классической механики*. А классическая механика на «карте механики» (рис. 1.1) граничит с разделами специальной теории относительности (когда рассматриваются скорости движения тел, сравнимые со скоростью света) и квантовой теории (когда размеры объектов сравнимы с размерами атомов) – ее «соседями» являются релятивистская механика и квантовая механика. В чем тут дело? Почему приходится разделять механику на части?



Рис. 1.1. «Карта механики»

Рабочий инструмент механики – это *модель*, созданная для описания определенного класса явлений. В динамике изучаются *движение объектов* окружающего нас мира, изменение их взаимного расположения в пространстве и времени. Это такие явления реального мира как движения планет, колебания маятника. Модели классической механики включают в качестве составляющих различные математические модели: евклидово пространство, множества, многообразия, дифференциальные уравнения и многое другое. Другая часть модели – формулировка механических законов взаимодействия введенных объектов. В результате возникает динамическая модель механической системы, позволяющая рассчитывать ее движение.

Встает законный вопрос: какое отношение имеет созданная модель к окружающему нас миру? Этот вопрос решается на основе эксперимента: если поведение реального объекта совпадает с достаточной степенью точности с поведением, предсказанным механической моделью, то мы можем констатировать удовлетворительное качество модели. Это значит, что мы правильно определили характерные свойства интересующих нас

объектов и законы их поведения. Однако следует отдавать себе отчет и в том, что созданная модель всегда является приближенной. Более того, невозможно доказать, что данная модель единственно возможная и не существует иного приближенного описания изучаемого объекта на основе другой модели. Это подтверждает вся история механики. Как же поступать в этом случае? Предпочтение следует отдавать наиболее простым моделям, которые приводят к необходимому результату кратчайшим путем.

Следует иметь в виду, что всякая модель имеет ограниченную область применения. Если говорить в целом о классической механике, то любые ее модели не смогут описать с нужной степенью точности движение материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света, и движение объектов микромира (элементарных частиц). Это задачи релятивистской механики и квантовой механики. Однако классическая механика не утратила своего значения. Она является базой современного технического прогресса в машиностроении, авиации, транспорте, космонавтике.

Отметим *основные вехи развития механики*. Механика – наука древняя. Длительный период ее развития характеризовался накоплением экспериментальных фактов, их обобщением, формулировкой простых законов статики. Механика точки как наука была основана Галилео Галилеем (1564–1642) в начале семнадцатого столетия. Здесь также можно отметить имена таких великих ученых, как Иоганн Кеплер (1571–1630) и Рене Декарт (1596–1650). В последующее развитие механики большой вклад внес Христиан Гюйгенс (1629–1695), а также и другие ученые. Однако переломным моментом следует считать 1687 г., когда вышел в свет знаменитый трактат Исаака Ньютона (1643–1727) «Математические начала натуральной философии». В нем были установлены и сформулированы основные законы классической механики. Его современником был великий немецкий ученый-универсал Готфрид Лейбниц (1646–1716), внесший огромный вклад в развитие дифференциального и интегрального исчислений, а также в становление механики. Он изобрел счетную машину, ввел знакомые нам математические знаки для дифференциала и интеграла, умножения и деления.

На фундаменте, заложенном Ньютоном, быстро начало строиться здание механики. В XVIII в. оформляется ряд научных центров в Англии, Франции, Италии, Германии и России. В 1743 г. Жан Даламбер (1717–1783) распространил законы Ньютона на задачи механики твердого тела, сформулировал правила составления уравнений движения, сведя задачи динамики к задаче статики. Следует также назвать следующие имена: Леонард Эйлер (1707–1783), Пьер Лаплас (1749–1827), Якоб Бернулли (1654–1705), Иоганн Бернулли (1667–1748), Даниил Бернулли (1700–

1782). Иоганн Бернулли дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений, разработал теорию удара, учение о живой силе, вместе с братом Якобом положил начало вариационному исчислению. Именем Даниила Бернулли названо одно из уравнений в гидродинамике. Выдающимся событием в ранней истории аналитической механики стал выход в свет работы Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813) «Аналитическая механика» в 1788 г., т.е. через сто лет после «Начал» Ньютона.

Развитие механики со времен Лагранжа связано с именами многих прославленных математиков и механиков. Осуществляется переход к гамильтоновой механике, углубляются и развиваются методы небесной механики. Среди тех, кому принадлежат наиболее фундаментальные открытия в этой области, в первую очередь следует назвать Уильяма Гамильтона (1805–1865), Карла Якóби (1804–1851), Карла Гаусса (1777–1855), Густава Кирхгофа (1824–1887). Двадцатый век начался с создания Анри Пуанкаре (1854–1912) и Альбертом Эйнштейном (1879–1955) теории относительности, а затем квантовой механики Альбертом Эйнштейном, Максом Планком (1858–1947), Эрвином Шредингером (1887–1961), Полем Дираком (1902–1984). Следует отметить, что в создании теории относительности и квантовой механики огромная роль принадлежит методам и подходам, заложенным при развитии аналитической механики.

Вместе с такими фундаментальными исследованиями произошло стремительное развитие новых областей техники, связанных с железнодорожным и автомобильным транспортом, воздухоплаванием, космическими полетами (авиастроение, кораблестроение, ракетостроение, автомобилестроение, робототехника и т.п.). Все эти направления потребовали создания новых механических теорий, описывающих поведение сложных механических систем в различных условиях. Во второй половине двадцатого века механики получили новое мощное средство исследования — быстродействующие электронно-вычислительные машины (компьютеры), что привело к бурному развитию специальных методов исследования, связанных с численным моделированием механических процессов, основанных на численном эксперименте.

Сейчас с точки зрения математических методов и понятий принято выделять три раздела (или метода изложения) классической механики: *ньютонову*, *лагранжеву* и *гамильтонову*. Им соответствуют разные системы лежащих в их основе аксиом и разные математические аппараты. Со времени Ньютона механика развивалась по двум основным направлениям. Одна ветвь, которую автор книги «Вариационные принципы механики» Корнелиус Ланцош называет «векторной механикой», исходит

непосредственно из законов движения Ньютона. Основная задача в этом подходе заключается в выявлении всех сил, действующих на каждую частицу в каждый момент времени, после чего движение однозначно определяется. Анализ и синтез сил и моментов составляет, таким образом, основу векторной, или *ньютоновой*, механики.

В отличие от Ньютона, который предлагал действие силы измерять ее импульсом – векторной величиной, Лейбниц ратовал за другую величину – vis viva, или «живую силу», считая именно ее правильным мерилом динамического действия силы – мерой количества движения. Импульс (количество движения) он называл «мертвой силой». Эта «живая сила» Лейбница совпадает с точностью до несущественного множителя 2 с величиной, которую сегодня мы называем кинетической энергией. В то же время он заменил «силу» Ньютона «работой силы». Эта «работа силы» была впоследствии заменена еще более фундаментальной величиной – потенциальной энергией. Таким образом, Лейбниц является основателем второй ветви механики, в которой изучение движения исходит из двух основных скалярных величин – кинетической энергии и потенциальной энергии. Это является характерной чертой *лагранжева* и *гамильтонова* подходов в аналитической механике.

Путь от ньютоновой механики к лагранжевой и затем к гамильтоновой – это путь усложнения математических методов, обобщения рассматриваемых систем и повышение уровня абстракции. Ньютонову механику можно рассматривать как составную часть лагранжевой механики, а лагранжеву – как часть гамильтоновой.

Следует также отметить органическую связь развития механики и математики. Почти все перечисленные выше ученые считаются и механиками, и математиками. Многие современные математические теории возникли из проблем механики. Решение различных механических задач требовало развитие новых математических методов, и наоборот: строгий математический аксиоматически-абстрактный вид изложения теорий способствовал дальнейшему развитию механики и пониманию физического смысла применяемых математических формулировок и методов.

Глава 2
Основные положения аналитической механики, классификация механических систем

2.1. Основные понятия. Законы и вариационные принципы механики

Объектом изучения механики является *механическая система* – это система материальных точек. Однако понятие системы материальных точек в аналитической механике достаточно широкое. Так, например, Солнечная система – это механическая система, в которой материальные точки – Солнце и планеты, и абсолютно твердое тело – это тоже система, но бесконечного количества материальных точек. Движение такого тела, однако, можно описать конечным набором параметров. Механической системой также являются различные механизмы типа маятников, кривошипов, валов, шестеренок и т.д.

Основная задача механики заключается в нахождении закона движения механической системы, т.е. в определении координат точек механической системы как функций времени $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$, или $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Жирными латинскими буквами будем обозначать векторы. В данном случае представлен радиус-вектор точки *i*.

Для того чтобы определить эти функции, нужно записать для них некие выражения (уравнения). Математическая *формулировка* задачи обычно заканчивается тем, что уравнения движения удается записать как дифференциальные уравнения для координат. Проинтегрировав эти уравнения, можно получить закон движения. Таким образом, основная задача разбивается на две: записать уравнения движения и проинтегрировать эти уравнения. Вторая задача, связанная с решением уравнений, относится скорее к математике. А для решения первой задачи нужны некоторые исходные положения. История науки сложилась так, что многие ученые пытались как-то сформулировать их, используя для этого те знания, которые получены человечеством на основе обобщения многочисленных опытных данных. Остановимся подробнее на этих исходных положениях.

В основе любой точной науки лежит система аксиом – исходных положений, принимаемых без доказательства за истинные. Они носят разное название, но общим для них является то, что их нельзя доказать чисто теоретически. Их справедливость доказывается опытом, практикой.

В зависимости от того, какие аксиомы положены в основу механики, можно получить разные изложения содержания этой науки. В механике их называют *основными законами или принципами*. Законы устанавливают связь между некоторыми величинами, а в принципах излагаются основы теории или науки.

Важно понимать, что различные принципы и законы обладают той или иной степенью общности, поэтому построенная на них механика будет справедлива только в тех пределах, в которых имеют силу принятые принципы или законы.

В основе ньютоновой механики лежат *законы Ньютона*, которые принимаются без доказательства как подтверждаемые экспериментально на многих примерах. В рамках ньютонова формализма в механике главным является правильное определение всех сил, действующих на механическую систему. Если это сделано, то, используя открытые Ньютоном законы, можно записать дифференциальные уравнения движения. Это обычный подход, знакомый нам еще со средней школы.

В основе *лагрнжева формализма* аналитической динамики лежат *вариационные принципы*. Они также принимаются без доказательства, хотя можно показать их эквивалентность законам Ньютона и даже вывести из них. Например, уравнение Эйлера вариационной задачи задает уравнение движения для заданной механической системы. Существует довольно много формулировок вариационных принципов.

Принято делить основные законы (принципы), с одной стороны, на *дифференциальные* и *интегральные*, а с другой – на *вариационные принципы* и (*невариационные*) *законы*.

Основные законы механики, устанавливающие какое-либо общее *свойство движения* для каждого *момента времени*, называются *дифференциальными*, а те законы, которые справедливы только для конечного *промежутка времени*, называются *интегральными*. Так, законы Ньютона и принцип Даламбера являются дифференциальными, а закон сохранения энергии может служить примером интегрального закона. *Вариационными* называются те принципы, которые устанавливают какое-либо свойство истинного движения, отличающее его от всех других воображаемых движений, удовлетворяющих некоторым условиям, характерным для данного принципа. В формулировке невариационных принципов (*законов*) не производится никакого сравнения с допустимыми движениями, они просто утверждают истинность некоего положения.

Выбор того или иного подхода можно рассматривать как вопрос философский, хотя он имеет и прагматический оттенок, поскольку в конкретных ситуациях позволяет иногда быстрее и легче решить проблему.

В любом подходе для правильной постановки задачи нужно четко определить свойства объекта, который мы изучаем. Иначе можно получить неверные уравнения, и даже если их правильно решить, результат получится неверный. Для этого нужно точно определить *свойства механической системы*, с которой мы имеем дело. Различие в свойствах механических систем может существенно влиять на аналитическое исследование их движения. Поэтому эти свойства лежат в основе *классификации механических систем*.

Всякая механическая система с точки зрения аналитической механики рассматривается как система материальных точек, связанных *различного рода связями* – ограничениями, наложенными на форму движения. Поэтому, первым определяющим свойством механической системы является *тип наложенных связей*. Исходя из того, какой тип связи наложен на механическую систему, получаются разные формы уравнений аналитической динамики. Этим объясняется важность четкого определения типов связей, наложенных на точки системы.

Второе важное свойство механической системы — это *количество степеней свободы*.

Перейдем к определению разновидностей связей и механических систем.

2.2. Типы механических систем и связей

Мы будем рассматривать движение системы N материальных точек относительно некоторой инерциальной системы координат (в частности, прямоугольной декартовой). Положение каждой точки задается радиус вектором $\mathbf{r}_n$ (или, что то же самое, набором трех пространственных координат, например, декартовых x_n, y_n, z_n).

Если положения, скорости и ускорения точек никоим образом не ограничены, то такая система называется *свободной*. Но такое встречается редко. Чаще всего приходится иметь дело с такими системами, в которых присутствуют ограничения на положение или скорости ее точек (очень редко ускорений). Такие ограничения часто вызываются другими телами.

Пример. Движение шарика по поверхности. Такие системы называются *несвободными*, а сами ограничения в математической записи называются *связями*.

Связи, задаваемые неравенствами, называются *односторонними* или *неудерживающими*. Например, шарик падает на плоскость $-z \geq 0$. В этом случае движение можно разбить на два вида: свободное и связанное, когда связь имеет вид уравнения. Поэтому в дальнейшем ограничим-

ся *двусторонними*, или *удерживающими*, связями, которые задаются уравнениями. Аналитически некоторая общего вида удерживающая связь задается уравнением

$$f(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = 0, \tag{2.1}$$

в которое входят время t, радиусы-векторы $\mathbf{r}_i$ и скорости $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ всех точек системы. Вообще говоря, могут входить и ускорения. Здесь принято, что точкой сверху обозначается производная по времени. Таким обозначением пользовались еще во времена Ньютона.

В частности, функция f может не содержать некоторых из рассмотренных выше переменных в явном виде, т.е. частная производная по этой переменной равна нулю. Именно это обстоятельство лежит в основе классификации связей, а также механических систем.

Если функция f не зависит явно от времени, то связь называется *стационарной*, а механическая система называется *склерономной* (гр. *склерос* – твердый). Если же время явно входит в выражение функции, то связь называется *нестационарной*, а система – *реономной* (гр. *реос* – течение, поток). Эту терминологию ввел Больцман.

Если в уравнение входят и координаты и скорости, то связь называется *кинематической* или *дифференциальной*, поскольку она является, по сути дела, дифференциальным уравнением относительно радиус-векторов или координат точек. В аналитической механике обычно ограничиваются рассмотрением линейных функций относительно скоростей, т.е. линейных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}_i \dot{\mathbf{r}}_i + D = 0\,. \tag{2.2}$$

Если в уравнение не входят скорости, то связь называется *геометрической* или *конечной*. Каждая конечная связь $f(t, \mathbf{r}_i) = 0$ влечет за собой дифференциальную, уравнения которой получаются ее почленным дифференцированием по времени.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,. \tag{2.3}$$

По построению такой связи мы знаем, что ее можно проинтегрировать и получить другую конечную связь, аналогичную исходной, но содержащую еще константу интегрирования.

$$f(t, \mathbf{r}_i) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \rightarrow f(t, \mathbf{r}_i) - c = 0\,.$$

Поэтому связь (2.3) называется *дифференциальной интегрируемой* связью, а связь (2.2) – *дифференциальной неинтегрируемой*.

Теперь выделим очень важный класс систем. Если на точки системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной* (гр. *голос* – целый, в смысле интегрируемый, = лат. *integer* – целый; и *номос* – закон, гр. или называть лат.). Такое определение ввел Г. Герц. Другое определение состоит в том, что систему называют *голономной*, если на нее наложены *голономные связи*, т.е. конечные или дифференциальные интегрируемые. Если присутствует дифференциальная неинтегрируемая связь, то система называется *неголономной* и сами дифференциальные неинтегрируемые связи иногда называют *неголономными*. Все эти сведения сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Особенность функции	Название связи	Название системы
Не зависит явно от времени	Стационарная	Склерономная
Зависит явно от времени	Нестационарная	Реономная
Зависит явно от скорости	Кинематическая (дифференциальная неинтегрируемая)	Неголономная
Не зависит явно от скорости	Геометрическая (конечная или дифференциальная интегрируемая)	Голономная

Примеры. Движение материальной точки по движущейся (или деформируемой) поверхности, задаваемой уравнением $f(x, y, z, t) = 0$: связь – конечная нестационарная, система – голономная реономная. В случае движения системы частиц, расстояние между которыми постоянно $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \ell^2$, связи – конечные стационарные, система – голономная склерономная. Если частиц бесконечно много, то это абсолютно твердое тело, однако его движение эквивалентно движению двух таких точек. Если рассмотреть только две точки, движущиеся в плоскости, то это эквивалентно движению абсолютно жесткого стержня длиной ℓ.

Пример неголономной связи – движение конька. Это движение двух материальных точек, соединенных жестким стержнем, которые могут двигаться только так, чтобы скорость середины стержня была направлена вдоль стержня. То есть присутствует дифференциальная неинтегрируемая связь

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}.$$

Последняя важная для классификации механических систем разновидность связей соотносится с понятием *виртуальных перемещений*, знакомых с курса теоретической механики. Оно позволяет ввести понятие *идеальных* связей.

2.3. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи

Совокупность бесконечно малых перемещений $d\mathbf{r}_i$, которые частица с номером i может совершить за время dt, двигаясь и удовлетворяя условиям связи, называют *возможными перемещениями*. Перемещение, которое частица совершает в действительности за время dt, находится среди возможных перемещений.

Рассмотрим две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени t и одного и того же положения системы. Запишем выражение для разности между этими перемещениями $\delta\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_i'$. Эти перемещения называются *виртуальными перемещениями*. Физический смысл виртуальных перемещений: это те перемещения, которые были бы возможны на поверхности (если она представляет собой связь), если в данный момент времени эту поверхность мгновенно остановить. Поэтому говорят, что виртуальные перемещения совпадают с возможными перемещениями при «замороженных» связях. Отсюда же и другое название, используемое в вариационном исчислении, – *изохронная или синхронная вариация перемещений*. При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными. Для реономных систем они существенно отличаются от возможных перемещений. Соответствующие скорости $\delta\mathbf{v}_i$ называются *виртуальными скоростями*.

Можно записать уравнения, которым удовлетворяют виртуальные перемещения. Для этого умножим уравнения дифференциальных интегрируемых и неинтегрируемых связей (2.2) и (2.3) на dt, вычтем по два таких уравнения для двух возможных перемещений $d\mathbf{r}_{ii}$ и $d\mathbf{r}_i'$. Используя определение виртуальных перемещений, получим следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \delta\dot{\mathbf{r}}_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}_i \delta\dot{\mathbf{r}}_i = 0 .$$

Используем традиционный ньютонов подход и рассмотрим, как влияют связи с точки зрения действующих на механическую систему сил. Наличие связей приводит к появлению дополнительных сил, которые называются *силами реакции*. Равнодействующая реакций всех связей на

i-ю точку обозначается $\mathbf{R}_i$. В отличие от активных сил, которые нам известны, реакции являются неизвестными величинами.

Выделим важный класс связей. Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т.е. если

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \delta\mathbf{r}_i = 0 \,. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) – математическое условие идеальности связей. Физический смысл состоит в том, что мы пренебрегаем силами трения. Мы считаем, что налагаемые ограничения являются «идеальными» в общепринятом смысле – идеально жесткое соединение, идеальный шарнир, идеально гладкая поверхность.

Для случая идеальных связей удается построить красивый и стройный математический аппарат решения задач механики.

Многие практически важные механизмы на определенном временном промежутке могут рассматриваться как механические системы с идеальными связями: движение материальной точки по гладкой поверхности, как неподвижной, так и подвижной, движение абсолютно твердого тела, соприкосновение твердых тел с идеально гладкими поверхностями или контакт с идеальным сцеплением. Исключение составляют системы, в которых пренебрегать силами трения нельзя, это *системы с неидеальными связями*. Хотя и в этом случае можно предложить такой подход: считать связи идеальными, а силы трения рассматривать как неизвестные активные силы, для которых необходимые дополнительные соотношения получаются из экспериментов.

2.4. Степени свободы. Независимые и обобщенные координаты

Наша цель – сопоставить количество имеющихся уравнений количеству неизвестных, которые нужно определить.

Итак, вернемся к нашей механической системе. Мы имеем N материальных точек. Их положение в трехмерном пространстве описывается $3N$ координатами $x_i, y_i, z_i,\ i = 1, 2, \ldots, N,$ которые подчиняются $3N$ уравнениям движения (пока будем исходить из законов Ньютона):

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, N \,, \tag{2.5}$$

где m_i – масса i-й точки, $\mathbf{w}_i$ – ее ускорение, а $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{R}_i$ – соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на точку с номером i.

На эту систему наложено K геометрических (голономных) связей

$$f_k(t, \mathbf{r}_i) = 0\,,\ k = 1, 2, \ldots, K\,, K < N\,, i = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.6)$$

и M кинематических (неголономных) связей, линейных по скоростям,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}_{mi}\dot{\mathbf{r}}_i + D_m = 0\,,\ m = 1, 2, \ldots, M\,,\ M < N\,,\ i = 1, 2, \ldots, N\,. \qquad (2.6')$$

Итого имеем систему $3N+K+M$ уравнений, при этом $K + M < N$ – иначе не будет никакого движения. А количество неизвестных равно $6N$, так как для каждой точки надо определить 3 координаты и 3 составляющих сил реакции. $3N+K+M<6N$ и система является неопределенной. Но у нас есть еще одно уравнение – условие идеальности связей (2.4). Уравнение всего одно, однако это уравнение не совсем обыкновенное, в него входят вариации координат – виртуальные перемещения. Необычность состоит в том, что виртуальные перемещения могут быть выбраны произвольно, но не все, а только за вычетом количества наложенных связей, т.е. $3N – K – M$. И если мы выразим зависимые виртуальные перемещения через независимые и приравняем нулю коэффициенты при этих независимых приращениях, то получим нужное нам число недостающих соотношений.

Если связи идеальные, то, используя условие идеальности (2.4), можно, используя систему уравнений (2.5), получить равенство

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{w}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0\,, \qquad (2.7)$$

которое называется *общим уравнением динамики*, и выражает *вариационный принцип Даламбера – Лагранжа*. Именно его Лагранж принял в качестве основного принципа механики. Поскольку вместо виртуальных перемещений можно выбрать произвольные из совокупности таких перемещений, то формула (2.7) по сути представляет собой систему уравнений.

Лагранж развил математический аппарат решения такой системы уравнений, который сейчас называется методом неопределенных множителей Лагранжа. Он изучается в курсе математического анализа. Мы не будем его повторять.

Так вот, если воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа, то благодаря вариационному условию идеальных связей (2.4) и уравнениям, которым должны удовлетворять виртуальные перемещения исходя из уравнений связей, вместо сил связи к основной группе неизвестных – координатам – добавится еще одна группа неизвестных –

неопределенные множители Лагранжа λ_k и μ_m по одному на каждое уравнение связей. А уравнения движения сведутся к *уравнениям Лагранжа первого рода*:

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial r_i} + \sum_{m=1}^{M} \mu_k \mathbf{c}_{mi} \ , \ i = 1, 2, \ldots, N \ .$$

В этом случае количество неизвестных тоже будет равно $3N+K+M$, т.е. количеству уравнений, и система становится определенной. Однако это слабое утешение, поскольку в целом метод решения такой системы уравнений получается очень громоздким, так как количество уравнений довольно большое даже для небольшого количества точек и растет с увеличением количества связей.

Интуитивно понятно, что при наличии ограничений движение будет проще, чем произвольное неограниченное (например, движение по плоскости проще, чем произвольное движение в пространстве, если ограничивающих плоскостей две, то движение еще проще – по прямой). Математически это означает, что не все координаты будут независимы. Количество *независимых координат* будет меньше количества реальных координат, но этого количества достаточно для описания положения системы. Раз меньше количество необходимых координат, то хотелось бы уменьшить и количество уравнений. Поэтому желательно с самого начала иметь уравнения, описывающие систему в терминах независимых координат. Впервые этот подход был предложен Лагранжем в 1788 г. в его выдающемся труде «Аналитическая механика». Посмотрим, как можно перейти к описанию движения механических систем в независимых координатах.

Разность между числом декартовых координат точек механической системы и числом уравнений связи называется *числом степеней свободы* системы $n = 3N - K - M$. Число степеней свободы принято обозначать малой латинской буквой n, а большой N — общее количество точек в системе.

Примеры. Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы. Если на эту точку наложена геометрическая связь, предписывающая ей двигаться в плоскости, то она имеет две степени свободы.

Рассмотрим голономную систему, т.е. у нас есть уравнения связей, зависящие от координат. Введем $n = 3N - K$ новых независимых координат q_j с помощью неких соотношений

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)\,,\ i = 1, 2, \ldots, N\,,\ j = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad (2.8)$$

которые согласованы с уравнениями голономных связей, т.е. если подставить выражения (2.8) в эти уравнения, мы получаем тождество.

Пример. Если на плоскости происходит движение точки по окружности радиуса r, то можно ввести новую координату φ с помощью соотношений

$$x = r\sin\varphi\,,\ y = r\cos\varphi\,.$$

Формула (2.8) показывает, что для голономных систем можно дать другое определение: *числом степеней свободы называется количество независимых координат, определяющих положение системы*.

Замечание. В случае присутствия M неголономных связей тоже можно ввести $I = 3N - K$ новых координат, но только они не все будут независимыми, а лишь $3N - K - M$. Но выразить их явно не удается из-за того, что остальные связи неинтегрируемые.

Формулы (2.8), по сути, задают правила преобразований координат. Координаты реального физического пространства преобразуются в фиктивные координаты n-мерного пространства, называемого *конфигурационным пространством.* Каждая точка этого пространства описывает определенную конфигурацию, т.е. положение механической системы. Это понятие новых фиктивных координат для механической системы является обобщением понятий сферических координат для одной материальной точки. Поэтому их называют *обобщенными координатами*. Некоторые обобщенные координаты при этом могут быть безразмерными (например, угол в цилиндрической или сферической системе координат).

Основное изложение методов аналитической механики ведется в обобщенных координатах. Полное число частиц, образующих механическую систему, а также их декартовы координаты, несущественны при аналитическом методе исследования. Важны лишь обобщенные координаты и некоторые определенные функции от них. Движению *механической системы* в реальном пространстве соответствует движение всего лишь *одной точки* в конфигурационном пространстве.

Пример обобщенных координат. Положение жесткого звена, вращающегося в плоскости вокруг неподвижной точки, вполне определяется заданием величины угла поворота. Двойной маятник описывается двумя угловыми координатами. Конфигурационные пространства соответственно будут одномерным и двумерным.

2.5. Обобщенные силы и потенциальная энергия

Следующая наша цель – перейти от сил к другим характеристикам – работе и энергии. Кроме того, нам нужно получить для них выражения через обобщенные координаты и скорости. Начнем с правой части уравнения движения Ньютона, где присутствуют силы.

Аналитическая механика стремится к формулировке в *инвариантных* величинах и формах (например, дифференциальных). Инвариантный – значит не зависимый от системы координат. Сила как вектор инвариантна. Но мы обычно имеем дело в уравнениях с компонентами силы, значения которых зависят от системы координат. Поэтому понятие силы в лагранжевой механике не играет такой роли, как в механике Ньютона. Основное значение имеет работа этих сил, ведь ее значение не зависит от системы координат, поскольку она – величина скалярная. Хотя совсем исключить силы из рассмотрения не удается. Справедливости ради отметим, что Герц предложил изложение «бессиловой механики».

Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях. Выразим виртуальные перемещения через обобщенные координаты, используя формулу (2.8):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \quad (2.9)$$

Величины

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\delta A_i}{\delta q_i} \quad (2.10)$$

называются *обобщенными силами*, хотя правильнее было бы их называть компонентами вектора обобщенной силы, действующей на точку в конфигурационном пространстве. Последнее выражение в (2.10) используется для нахождения величины обобщенной силы на практике, вычисляя предварительно приращение работы δA_i, при котором только одна координата q_i получает некоторое виртуальное приращение.

Можно предложить несколько принципов классификации сил. По природе происхождения силы появляются либо за счет внешнего поля, либо в результате взаимодействия частиц. С точки зрения аналитического подхода предлагается другое деление. Это деление зависит от того, является ли элементарная работа сил δA полным дифференциалом или нет. Если такой дифференциал существует, то силы называют *потенциаль-*

ными. Вводят понятие *потенциальной энергии* или *потенциала* $\Pi(q_1, \ldots, q_n, t)$, так, что $\delta\Pi = -\delta A$ и

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \qquad (2.11)$$

Замечание. Некоторые авторы потенциальной энергией называют функцию $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$, только если она не зависит явно от времени.

Силы, имеющие потенциал, замечательны с двух точек зрения. Во-первых, они удовлетворяют закону сохранения энергии; по этой причине они называются «*консервативными силами*». Во-вторых, несмотря на то что обобщенная сила имеет *n* компонент, все эти компоненты могут быть вычислены из одной скалярной функции П. Для применения в механике вариационных методов важно только последнее свойство, а то, что при этом сохраняется энергия системы, несущественно.

Главное свойство потенциальных сил – их работа зависит только от начального и конечного положения точки их приложения и не зависит от вида траектории.

Примеры потенциальных сил – электромагнитные и гравитационные силы.

Существует еще один интересный вид сил, определяемых *одной скалярной функцией*, которая, однако, кроме координат и времени, зависит еще и от скоростей $U = U(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$. Ее называют *силовой функцией*, а взятую с противоположным знаком – *обобщенным потенциалом* $-U = V = V(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$. Соответствующая им обобщенная сила задается выражением

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Примером такой силы является электромагнитная сила Лоренца, действующая на заряженную движущуюся частицу при наличии электрического и магнитного полей. Она порождается именно такой силовой функцией.

Механические системы, в которых силы имеют обычный или обобщенный потенциал, называют *натуральными системами*. Это еще одно добавление к классификации систем.

Следующие, примечательные с точки зрения дальнейшего рассмотрения силы мы введем, анализируя уравнения Лагранжа второго рода.

2.6. Кинетическая энергия

Левая часть уравнения Ньютона характеризует инертные свойства массы в форме «массы, умноженной на ускорение» или «скорости изменения импульса». С точки зрения аналитической механики, в действительности фундаментальной величиной, характеризующей инерцию массы, является не импульс, а кинетическая энергия.

Кинетическая энергия – это скалярная величина, определенная как $mv^2/2$ для одной частицы и как

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \tag{2.12}$$

для системы частиц. Выразим скорости частиц через обобщенные координаты и скорости, воспользовавшись для этого выражением (2.8):

$$\mathbf{v}_i^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 . \tag{2.13}$$

Таким образом, если раскрыть скобки, для кинетической энергии следует выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i + a_0 = T_2 + T_1 + T_0 . \tag{2.14}$$

Коэффициенты a_{ik}, a_i, a_0 являются функциями обобщенных координат и времени, определяемыми следующим выражениями:

$$a_{ik}(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} , \tag{2.15}$$

$$a_i(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} , \tag{2.16}$$

$$a_0(q_1, \ldots, q_n, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} \right)^2 . \tag{2.17}$$

А функции T_2, T_1, T_0 являются так называемыми однородными функциями обобщенных скоростей второй, первой и нулевой степени соответственно. В случае *склерономной* системы время не входит явно в уравне-

ния связей, а значит, и в зависимость между $\mathbf{r}_j$ и q_i. Поэтому коэффициенты a_i, a_0 равны нулю и получается, что кинетическая энергия склерономной системы является однородной функцией второй степени, не зависит от времени явно и равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \ . \qquad (2.18)$$

Для *реономной* системы кинетическая энергия определяется полным выражением (2.14).

Можно попытаться еще более упростить выражение (2.18), если выбором преобразования обобщенных координат попытаться привести матрицу коэффициентов к диагональному виду. Как известно из курса аналитической алгебры, это всегда можно сделать для симметрической матрицы коэффициентов. Наше выражение (2.18) как раз обладает этим свойством по определению (2.15), т.е. является квадратичной формой. (*Квадратичная форма* – это однородная функция 2-й степени с симметричной матрицей коэффициентов.)

Глава 3
Вариационный принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа для голономных систем

3.1. Вариационный принцип Гамильтона

Перейдем к изучению вариационных принципов механики. Теоретическое значение вариационных принципов очень велико. Оно не ограничивается только механикой как теоретической, так и сплошных сред. Вариационные принципы находят широкое применение в разработке новых идей в физике, а также новых методов в математике. Они дают альтернативный путь для составления уравнений движения, а в ряде случаев и граничных условий. Именно поэтому их можно положить в основу изложения механики. Мы рассмотрим только один вариационный принцип, который носит имя Гамильтона или Гамильтона – Остроградского.

В основе любого вариационного принципа лежит вариационная задача. Вариационная задача – это задача нахождения функций, доставляющих экстремальное значение некоему интегралу от искомых функций. Первая часть этой задачи – определение стационарности интеграла, т.е. когда равна нулю первая его вариация. Знак второй вариации показывает, является ли найденный экстремум минимумом или максимумом или не является экстремумом вовсе.

Рассмотрим два момента времени. В каждый из них положение всех точек нашей механической системы полностью определяется набором независимых обобщенных координат, т.е. некоторой точкой конфигурационного пространства. Итак, считаем, что нам заданы два момента времени и все значения обобщенных координат в эти моменты времени. Через определенные таким образом две точки в пространстве конфигураций можно провести множество различных кривых (траекторий), однако истинная траектория одна. Так какая же из множества траекторий истинная? Ответ на этот вопрос и дает вариационный принцип Гамильтона.

Итак, *вариационный принцип Гамильтона* основывается на сравнении движений по возможным траекториям за определенный промежуток времени, при одинаковых фиксированных положениях всех траекторий в начальный и конечный момент времени. В нем постулируется, что при действительном движении достигается стационарное значение некоего интеграла по времени.

Математическое выражение принципа Гамильтона можно получить из общего уравнения механики (2.7). Для этого раскроем скобки:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i - m_i \mathbf{w}_i \delta \mathbf{r}_i \right) = 0 ,$$

и воспользуемся формулами для элементарной работы сил (2.9)

$$\delta A - \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \mathbf{w}_i \delta \mathbf{r}_i \right) = 0 .$$

Далее учтем, что для ускорения справедливо выражение (используем свойство изохронности вариаций, значит, можно менять местами операции варьирования и производной по времени):

$$\mathbf{w}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right) - \mathbf{v}_i \frac{d}{dt}\left(\delta \mathbf{r}_i \right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right) - \mathbf{v}_i \delta \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right) - \frac{1}{2} \delta \mathbf{v}_i^2 ,$$

а, следовательно, в нашем выражении появляется вариация кинетической энергии

$$m \mathbf{w}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m \mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right) - \delta T_i ,$$

где $\sum_{i=1}^{N} \delta T_i = \delta T$.

Окончательно общее уравнение механики преобразуется к виду

$$\delta A + \delta T - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(m \mathbf{v}_i \delta \mathbf{r}_i \right) = 0 .$$

Теперь надо проинтегрировать полученное выражение по времени в заданном промежутке от t_1 до t_2 и воспользоваться условием, что в крайних точках вариации перемещений равны нулю, поскольку состояния системы в них известны. В итоге получим следующее выражение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta A + \delta T \right) dt = 0 . \qquad (3.1)$$

Выражение (3.1) является наиболее общей формулировкой принципа Гамильтона – Остроградского. Гамильтон установил его впервые для склерономных систем (т.е. систем с геометрическими связями). Остроградский позднее показал, что этот принцип может быть обоснован и для систем при наложенных нестационарных связях (т.е. для реономных си-

стем). Но в обоих случаях рассматривались голономные системы. Что касается применимости принципа Гамильтона к неголономным системам, то следует запомнить, что не существует строгого полного доказательства его применимости. Напротив, есть примеры его непригодности для некоторых случаев неголономных связей. Поэтому для таких систем его не следует применять (или следует применять осторожно). Для голономных же систем он применим и может быть представлен в других боле удобных формулировках, особенно когда силы, действующие на систему, являются потенциальными.

3.2. Функция Лагранжа. Действие по Гамильтону

Напомним, что мы ограничились рассмотрением голономных систем. Выделим также отдельно работу активных сил, имеющих потенциал. В этом случае можно ввести в рассмотрение так называемую *функцию Лагранжа* (или *лагранжиан*, его еще называют *кинетическим потенциалом*):

$$L = T - \Pi , \tag{3.2}$$

которая выражает превышение кинетической энергии системы над потенциальной. Вводится также понятие *действие по Гамильтону*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt . \tag{3.3}$$

Это функционал, поскольку лагранжиан, являясь разностью кинетической и потенциальной энергий, зависит от функций времени — обобщенных координат и обобщенных скоростей $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Размерность действия равна произведению размерности энергии на размерность времени (Дж·с) и равна размерности постоянной Планка — кванту действия. Таким образом, понятие действия используется не только в классической, но и в квантовой механике.

Получаем, что в том случае, когда на голономную систему действуют только силы, имеющие потенциал, уравнение принципа Гамильтона запишется кратко:

$$\delta S = 0 , \tag{3.4}$$

и означает, что в *истинном движении действие по Гамильтону принимает стационарное значение*.

Примечание. Мы говорим про стационарное значение, а не про минимум, поскольку равенство нулю первой вариации еще не означает, что достигается экстремальное значение. Для того чтобы выяснить, является ли значение экстремальным, нужно исследовать поведение второй вариации. Но для решения большинства задач это не обязательно, достаточно знать, что равна нулю первая вариация. Однако чаще всего достигается именно минимальное значение, и тогда применяют термин *принцип минимального действия*.

В качестве приложения рассмотрим одну любопытную теорему, которую можно доказать, используя принцип Гамильтона.

Теорема Нетер. В 1918 г. немецкий математик Эмми Нетер (1882–1935) установила теорему, которая играет фундаментальную роль в современной теоретической физике. Эта теорема определяет связь преобразований симметрии (т.е. преобразований координат и времени, оставляющих инвариантным действие) с законами сохранения соответствующих динамических величин.

Для классической механики действие инвариантно относительно следующего 10-параметрического преобразования координат от x_i, t к x'_i, t':

$$x_j = S_{ij}x'_i + u_j t + d_j \ , \ t = t' + t_0 \ .$$

Вместо одного первого выражения можно рассмотреть 9 отдельных однопараметрических преобразований, следующих из этого общего выражения. Здесь кососимметрическая матрица S_{ij} имеет только 3 ненулевых элемента (псевдовектор) и задает поворот в трехмерном пространстве, вектор $\boldsymbol{u}$ задает движение с постоянной скоростью, а вектор $\boldsymbol{d}$ определяет смещение (по три компоненты, соответствующие трем осям декартовой системы координат для каждого вектора). Второе выражение задает смещение по времени. Этим 10 параметрам соответствуют (в обратном порядке) законы сохранения энергии и векторных величин: импульса, скорости центра масс системы, момента импульса.

3.3. Уравнения Лагранжа второго рода – уравнение движения в обобщенных координатах

Ранее мы ввели в рассмотрение обобщенные независимые координаты, показали, как через них выражаются обе части уравнения движения Ньютона: силам в ньютоновой механике мы поставили в соответствие обобщенные силы, а если они потенциальные, то потенциальную энергию в лагранжевой механике; импульсам соответствует кинетическая энергия. Осталось получить выражение самого уравнения движения в

обобщенных координатах. Воспользуемся для этого принципом Гамильтона. Вспомним вариационное исчисление и запишем дифференциальные уравнения Эйлера – Лагранжа соответствующей вариационной задачи (3.3)–(3.4), учитывая что функцией каких аргументов является лагранжиан $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.5}$$

Получили систему n уравнений, где n – количество степеней свободы механической системы. Это и есть уравнения движения в обобщенных координатах – *уравнения Лагранжа второго рода*. В таком виде оно справедливо только для случая голономных систем и когда действуют только потенциальные силы.

Можно показать, что в случае действия также и непотенциальных сил имеем выражение более общего вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.6}$$

Посмотрим внимательно на уравнения (3.5) и (3.6). Первое слагаемое в левой части представляет собой обобщенный импульс (производная от кинетической энергии по скоростям), а второе слагаемое является не чем иным, как обобщенной силой. То есть структура этих уравнений подобна структуре уравнения движения Ньютона, но записана она через обобщенные координаты.

Уравнение Лагранжа второго рода имеет очень большое значение особенно для консервативных систем, т.е. голономных систем с потенциальными силами. Во-первых, это уравнение движения в обобщенных координатах (такую формулировку можно рассматривать как определение уравнения Лагранжа второго рода). Во-вторых, его вид не зависит от системы координат (инвариантная форма записи). Вид функции L или T может измениться, в этом случае изменится также и вид уравнений движения относительно самих обобщенных скоростей и координат, но главное – останется той же форма записи уравнений движения через функции L или T. Инвариантность уравнений движения Лагранжа является одним из наиболее важных их свойств. Она позволяет использовать различные координаты, наилучшим образом соответствующие особенностям задачи.

Поскольку не существует общего метода решения уравнений Лагранжа, то лучшее, что можно сделать, это выбрать такую систему координат,

в которой эти уравнения были бы, хотя бы частично, интегрируемы. Сам вид уравнений показывает, как это можно сделать.

Проведем небольшой анализ уравнения Лагранжа. Если мы выберем такие обобщенные координаты, что функция Лагранжа не будет зависеть явно от переменной q_k, то мы автоматически понижаем порядок уравнения (хотя бы одного) и получаем так называемый *первый интеграл* уравнений движения (т.е. функцию, которая остается постоянной на траектории системы):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const \ .$$

Ввиду большой значимости таких координат для них ввели специальное название – *циклические координаты*. Само название «циклическая координата» связано с тем, что во многих задачах механики угол φ, характеризующий движение по замкнутым траекториям (циклам), не входит явно в выражение для L и потому является циклической координатой. Циклические координаты иногда называют *игнорируемыми* или *скрытыми* координатами. Это название объясняется тем, что при интегрировании соответствующей системы уравнений мы как бы забываем о существовании циклических координат.

Замечание. Как и принцип Гамильтона, уравнение Лагранжа справедливо только в случае голономных систем. Как же следует поступать, если система неголономная? Можно указать два выхода. Первый связан с использованием общей теории Лагранжа для решения вариационной задачи при наличии дополнительных условий – метода неопределенных множителей Лагранжа. В этом случае подынтегральное выражение (функция Лагранжа) заданной вариационной задачи преобразуется путем прибавления к ней кинематических связей, каждое из которых умножается предварительно на множитель-функцию $\lambda_i(t)$. Полученная новая задача рассматривается как свободная вариационная задача. Второй путь – использовать другие уравнения, например, уравнения Гиббса – Аппеля. Первоначально их получил в 1879 г. великий американский ученый Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) – один из основоположников термодинамики и статистической механики (статистической физики). Двадцать лет спустя они были подробно исследованы французским математиком и механиком Полем Аппе́лем (1855–1930). В уравнениях Гиббса – Аппеля используются так называемые псевдокоординаты, или квазикоординаты. Они вводятся с помощью функций, аналогичных (2.8), которые связывают не координаты, а приращения координат или их скорости. Например, для плоского движе-

ния эти выражения могут иметь вид $dq = x\,dy - y\,dx$ и соответственно $\dot{q} = x\,\dot{y} - y\,\dot{x}$. Подробно этот вопрос мы рассматривать не будем.

3.4. Теорема об изменении полной энергии

Анализируя уравнение Лагранжа второго рода, можно несколько расширить классификацию сил. А именно: среди непотенциальных сил выделить гироскопические и диссипативные силы, а также ввести понятие диссипативной функции Рэлея.

Для этого рассмотрим уравнение Лагранжа в общем виде (3.6). Отдельно запишем выражение для потенциальных сил через потенциальную энергию, а через Q_i будет обозначать только непотенциальные силы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Введем в рассмотрение *полную энергию E*, равную сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) + \Pi(q_1, \ldots, q_n, t),$$

и вычислим полную производную по времени dE/dt от этой величины. Для этого вначале найдем производную по времени от кинетической энергии как сложной функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Далее используем тождество (взяв производную по частям):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i,$$

и подставим последний член в этом выражении вместо первого слагаемого в предыдущей формуле, получим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Применим к первому слагаемому формулу (2.14) для разложения кинетической энергии на однородные функции второй, первой и нулевой степени, а также формулу Эйлера для однородных функций. Выражение под знаком суммы во втором слагаемом совпадает с левой частью уравнений Лагранжа с обратным знаком. Заменим его правой частью уравнений Лагранжа.

Сделаем небольшое отступление, чтобы напомнить некоторые понятия из теории функций многих переменных. Функция n переменных называется однородной степени m, если для любого действительного положительного числа λ имеет место формула

$$f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^m f(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

Обычно эти функции имеют вид

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\cdots i_m} x_{i_1} x_{i_2}\cdots x_{i_m}\,.$$

Формула Эйлера для однородной функции m-й степени $f(x_1,\ldots,x_n)$ записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = mf\,.$$

Справедливость этой формулы можно проверить непосредственным дифференцированием.

А значит, для составляющих кинетической энергии T_2 и T_1 находим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_i}\dot q_i = 2T_2\,,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}\dot q_i = T_1\,.$$

Воспользовавшись этими заменами, получим выражение

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2T_2 + T_1\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - Q_i\right)\dot q_i + \frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

Далее воспользуемся тождеством $2T = 2T_2 + 2T_1 + 2T_0$, значит

$$2T_2 + T_1 = 2T - (T_1 + 2T_0)\,,$$

$$\frac{dT}{dt} = 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}\left(T_1 + 2T_0\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - Q_i\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

В итоге для производной от кинетической энергии имеем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(T_1 + 2T_0\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Поскольку потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, значит, для ее производной имеем простое выражение

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Окончательно получим для полной энергии

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(T_1 + 2T_0\right) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \qquad (3.7)$$

Эта формула и выражает *теорему об изменении полной энергии при движении произвольной голономной системы*. Рассмотрим теперь частные случаи.

3.5. Консервативные системы. Гироскопические и диссипативные силы. Диссипативная функция Рэлея

Рассмотрим различные следствия из теоремы об изменении полной энергии. Это поможет нам выделить системы, в которых энергия сохраняется, а также два важных типа непотенциальных сил.

Сперва рассмотрим *консервативную* систему, т.е. систему в которой сохраняется энергия. Исходя из рассмотренной выше теоремы, такая система должна обладать следующими свойствами:

1) все силы потенциальные;

2) система склерономная (тогда второй и третий слагаемые в правой части равны нулю, поскольку как мы ранее показали для кинетической энергии $T_1 = T_0 = 0$ и $\partial T / \partial t = 0$);

3) потенциальная энергия П не зависит явно от времени.

Тогда для консервативной системы действительно получаем

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

т.е. при любом движении системы

$$E = const = h\,. \qquad (3.8)$$

Значит, полная энергия консервативной системы не изменяется при движении системы.

Равенство (3.8), включающее произвольную постоянную h, определяет первый интеграл уравнения движения. Исходя из физического смысла, его называют *интегралом энергии*.

Теперь рассмотрим более общий тип неконсервативных систем, обладающих некоторыми особыми свойствами:

1. Связи также стационарные (а, следовательно, система – склерономная).
2. Потенциальная энергия по-прежнему не зависит от времени.
3. Но все же действуют непотенциальные силы.

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i\,.$$

Для такой системы производная от полной энергии по времени равна *мощности непотенциальных сил*. Рассмотрим два частных случая непотенциальных сил.

1-й случай. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = 0\,.$$

Если мощность непотенциальных сил равна нулю, то такие силы называются *гироскопическими*. Таким образом, для склерономной системы при гироскопических силах также имеет место интеграл энергии.

Примером гироскопических сил являются кориолисовы силы инерции и силы, возникающие в подшипниках быстровращающихся частей техники (валы двигателей, роторы турбин и т.п.) при ее развороте. Быстровращающееся симметричное твердое тело, ось которого может менять свое направление в пространстве, называют гироскопом (гр. *гиреуо* – кружусь и *скопео* – смотрю). Этим и обусловлено название таких сил. Наша планета является примером гироскопа, подобные устройства находят широкое применение в технике.

В общем случае обобщенные силы зависят от обобщенных скоростей $Q_i\left(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right)$. Рассмотрим важный частный случай, когда эта зависимость линейна и однородна:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k \ \ (i = 1, \ldots, n). \tag{3.9}$$

Если матрица коэффициентов γ_{ik} является кососимметрической, т.е.

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \ \text{ и } \ \gamma_{ii} = 0,$$

то обобщенные силы (3.9) являются гироскопическими.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}\dot{q}_i\dot{q}_i + \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

Такие гироскопические силы можно рассматривать также как следствие действия обобщенного потенциала вида

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k\dot{q}_k \text{ , где } \Gamma_k = \Gamma_k(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

тогда

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k \ .$$

Таким образом гироскопические силы являются вторым примером сил, имеющих обобщенный потенциал. Первый тип — это сила Лоренца, о которой было сказано в подразделе 2.5.

2-й случай. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i \le 0 .$$

Если мощность непотенциальных сил отрицательна или равна нулю, то такие силы называются *диссипативными.* В случае действия диссипативных сил при движении механической системы полная энергия убывает во время движения. Тогда саму *систему* также называют *диссипативной*. Этот термин означает, что происходит рассеивание (от лат. *dissipatio*) энергии.

Рассмотрим важный частный случай, когда сила представляет линейную и однородную зависимость от обобщенных скоростей:

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.10}$$

Для того чтобы такая сила была диссипативной, необходимо выполнение двух условий: 1) чтобы матрица коэффициентов b_{ik} являлась симметрической, т.е.

$$b_{ik} = b_{ki}$$

и 2) положительна была составленная из них квадратичная форма вида:

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \geq 0.$$

Тогда, действительно, мощность сил равна

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = -\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \leq 0$$

и силы Q_i являются диссипативными.

В этом случае квадратичная форма, сходная по форме с кинетической энергией,

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

называется *диссипативной функцией Рэлея* в честь английского ученого Джона Уильяма Стрэтта – лорда Рэлея (1842–1919). Легко видеть, что обобщенные силы (3.10) получаются из диссипативной функции Рэлея с помощью формул

$$Q_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.12}$$

То есть диссипативная функция Рэлея не является обобщенным потенциалом. Коэффициенты b_{ik} имеют смысл коэффициентов трения (вязкости или демпфирования). Если система склерономна и потенциальная энергия не зависит явно от времени, то имеем

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = -2R.$$

Последняя формула указывает на физический смысл функции Рэлея: *удвоенная функция Рэлея равна скорости убывания полной энергии*.

Если функция Рэлея (3.11) является положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей (т.е. всегда строго больше нуля), то говорят о полной диссипации энергии. В этом случае систему называют *определенно-диссипативной*. У такой системы полная энергия строго убывает.

Пример. Диссипативными являются приложенные к точкам системы силы сопротивления среды, пропорциональные первым степеням скоростей точек. Это так называемые *силы вязкого трения*. Такие силы, например, возникают в гидравлических амортизаторах, работающих при ламинарном режиме течения жидкости.

Замечание. Заканчивая изложение лагранжева формализма, следует заметить, что мы не рассмотрели вопрос о структуре (определенного вида геометрии) конфигурационного пространства, определяемого *метрикой* – формулой для расстояния между двумя близкими точками. Не рассматривая этот вопрос подробно, отметим, что конфигурационное оказывается евклидовым только для свободной системы, а в общем случае при наличии связей в системе оно будет криволинейным *римановым пространством*. Это обусловлено связью длины малого элемента с выражением для кинетической энергии $ds^2 \approx 2Tdt^2$. Только в малых областях риманового пространства имеет место евклидова геометрия. Простейшими примерами римановых пространств являются евклидово пространство и пространства постоянной кривизны, в которых имеет место геометрия Лобачевского (отрицательная кривизна) и геометрия Римана (положительная кривизна). Примеры двумерных пространств: на плоскости – евклидово, на внешней поверхности сферы – риманово. С геометрической точки зрения задача механики о нахождении закона движения в лагранжевом подходе заменяется геометрической задачей о нахождении *геодезической линии* (т.е. кратчайшей линии) в n-мерном криволинейном пространстве конфигураций. В этом суть лагранжева формализма, т.е. использования в нем вариационного принципа.

Глава 4
Канонические переменные и канонические уравнения для голономных систем

4.1. Переменные, функция и уравнения Гамильтона

Мы рассмотрели вкратце Лагранжев формализм, позволяющий записать уравнение движения в независимых обобщенных координатах. Для него также характерно описание системы с помощью одной только скалярной функции – лагранжиана (кинетического потенциала), в случае консервативной динамической системы. Этим мы воспользуемся при анализе линейных колебаний механических систем с несколькими степенями свободы. Теперь переходим к Гамильтонову формализму. Его мы рассмотрим еще более кратко. Особенностью гамильтонова формализма является то, что он позволяет не только записать уравнение движения, но и указать пути нахождения его решения. Рассмотрение поведения систем ведется в *фазовом пространстве*, и такой подход оказывается важным и плодотворным для анализа *нелинейных систем*, причем не только механических, но и динамических систем в более широком смысле.

Лагранж показал, как выписываются дифференциальные уравнения движения системы, если известна функция, носящая его имя, – функция Лагранжа $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$. Переменные t, q_i, $\dot{q}_i$ ($i = 1, ..., n$), через которые выражается функция Лагранжа, называют *переменными Лагранжа* (не путать с переменными Лагранжа в механике сплошных сред). Набор значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т.е. положение системы и скорости ее точек. Задание функции Лагранжа и начального состояния однозначно определяет движение консервативной механической системы. В таком случае часто говорят о *лагранжевой системе*.

Другой подход предложил ирландский ученый Уильям Га́мильтон (1805–1865) в 1834 г. В качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, он предложил взять величины t, q_i, p_i, где p_i – *обобщенные импульсы*, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.1}$$

Можно проверить, что это действительно импульсы на примере одной свободной материальной точки

$$p = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv,$$

а также в частном случае стационарных связей, когда кинетическая энергия является квадратичной формой от обобщенных скоростей.

Частные производные по обобщенным скоростям от функции Лагранжа и от кинетической энергии равны, поскольку потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей (мы не рассматриваем случай существования обобщенного потенциала).

Переменные t, q_i, p_i (i=1, ..., n) называют *переменными Гамильтона* или *каноническим переменными*.

Можно показать, что переменные Гамильтона могут быть однозначно выражены через переменные Лагранжа и наоборот. Таким образом, состояние системы можно характеризовать как системой значений переменных Лагранжа, так и системой значений переменных Гамильтона.

Посмотрим, как изменятся уравнения Лагранжа при использовании обобщенных импульсов.

$$\frac{d}{dt}\left(p_i\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.1'}$$

Теперь вместо n уравнений Лагранжа (обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка) мы получили $2n$ уравнений первого порядка: n уравнений (4.1) и n уравнений (4.1'). Однако уравнения (4.1) – это чисто формальное переобозначение.

Гамильтон пошел дальше. Он предложил полностью перейти от обобщенных скоростей к обобщенным импульсам и ввел в рассмотрение функцию $H(t, q_i, p_i)$, определяемую равенством

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(t, q_i, p_i) - L(t, q_i, p_i). \tag{4.2}$$

Более того, он показал, что с помощью этой функции уравнения движения могут быть записаны в виде следующей системы $2n$ *обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.3}$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* или *уравнениями Гамильтона*. Функция $H(t, q_i, p_i)$, определяемая равенством (4.2), называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*. Система, не обязательно механическая, описываемая уравнениями Гамильтона, называ-

ется *гамильтоновой системой*. Координаты p_i и q_i называются *канонически сопряженными*.

Первое уравнений (4.3) является, по сути, определением обобщенных скоростей, подобным уравнению (4.1) для обобщенных импульсов. Само уравнение движения заключается во втором из уравнений (4.3). Действительно, в случае движения свободной частицы в потенциальном поле сил оно превращается в обычное уравнение Ньютона.

Исходя из этого можно предположить, как будет выглядеть уравнения Гамильтона для неконсервативных систем, когда действуют непотенциальные силы:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i(t, q_i, p_i) .$$

Замечательным фактом введения новых переменных p_i является то, что их можно действительно рассматривать как новые независимые переменные. Уравнения Гамильтона полностью эквивалентны первоначальным лагранжевым уравнениям, являясь лишь их новой математической формулировкой. Однако новые уравнения обладают огромным преимуществом по сравнению с первоначальными:

1) производные по времени в них появляются лишь в левых частях уравнений, потому что функция Гамильтона не содержит производных q_i или p_i по времени t;

2) они являются уравнениями не второго, а первого порядка.

Важным также является то, что правые части новых уравнений сразу получаются из одной-единственной функции H путем дифференцирования. Функция H определяет собой всю систему уравнений.

Замечание 1. Справедливости ради стоит отметить, что эти уравнения впервые появились в поздней статье Лагранжа, а затем на их значение указал Коши. Но именно Гамильтон положил их в основу своих выдающихся исследований в механике. Название уравнений Гамильтона, канонических уравнений и канонических переменных ввел немецкий математик Карл Якóби (1804–1851), который развил идеи Гамильтона.

Замечание 2. В математике переход от функции $L(\dot{q}_i)$, зависящей от координат $\dot{q}_i$ к сопряженной функции $H(p_i)$, зависящей от координат p_i, и определяемой выражением (4.2), называют *преобразованием Лежандра* функции $L(\dot{q}_i)$. Его еще называют *дуальным преобразованием*, или говорят, что оно обладает свойством *инволютивности*. Это означает, что, применив обратное преобразование Лежандра к функции $H(p_i)$, мы полу-

чим функцию Лагранжа. В этом преобразовании переменные t и q_i являются пассивными.

В термодинамике преобразованием Лежандра пользуются для введения разных термодинамических потенциалов. Например, если задана внутренняя энергия как функция деформации и энтропии $U(\varepsilon, S)$, то для построения энтальпии как функции напряжения и энтропии используется преобразование Лежандра

$$\Phi(\sigma, S) = \sigma\varepsilon + U$$

и тогда

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \ \sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}.$$

4.2. Вторая форма принципа Гамильтона

Посмотрим, как запишется в случае использования переменных Гамильтона вариационный принцип Гамильтона. Начнем с того, что определим действие по Гамильтону. Это легко сделать, выразив функцию Лагранжа из (4.2) через функцию Гамильтона обратным преобразованием Лежандра и воспользовавшись определением обобщенных скоростей

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H, \ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Посмотрим, как варьирование p_i влияет на вариацию функции Лагранжа и, как следствие, на вариацию интеграла действия. Получаем

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{dp_i} \right) \delta p_i = 0$$

благодаря тому, что коэффициенты при δp_i равны нулю в силу введения обобщенных скоростей для обратного преобразования Лежандра. То есть произвольное варьирование импульсов не влияет на вариацию L. Следовательно, оно также не влияет и на интеграл от δL по времени. Это является подтверждением того, что обобщенные импульсы можно рассматривать как независимые переменные и приводит к следующему важному результату – мы можем утверждать, что *интеграл действия принимает стационарное значение даже и при произвольных вариациях p_i, когда p_i рассматриваются как вторая система независимых переменных*.

Итак, действие по Гамильтону запишется в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right) \right] dt \,. \qquad (4.4)$$

Если поставить вариационную задачу, потребовав стационарности действия при вариации независимых переменных p_i и q_i, то уравнения Эйлера этой вариационной задачи дадут нам 2 набора по n уравнений, т.е. как раз канонические уравнения Гамильтона:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0 \,.$$

Таким образом, у нас есть теперь новый вариационный принцип, эквивалентный первоначальному, но имеющий перед ним некоторое преимущество вследствие более простой структуры получающихся дифференциальных уравнений.

Вследствие дуализма преобразования Лежандра каждой гамильтоновой задаче можно поставить в соответствие лагранжеву задачу и наоборот.

4.3. Фазовое пространство и фазовая жидкость

Переменными в гамильтоновом формализме являются q_i и p_i. Следовательно, новая задача имеет $2n$ координат. Если мы желаем изобразить эту новую ситуацию геометрически, то нам придется использовать пространство $2n$ измерений. Положение механической системы теперь определяется наряду с прежними позиционными координатами лагранжевой механики q_i, также и импульсами p_i. Дж. Гиббс назвал это $q - p$ пространство, в котором одна точка C определяет обобщенное положение механической системы, *фазовым пространством* (гр. *фазис* – появление, момент, отдельная стадия процесса). В лагранжевой механике мы говорили о конфигурационном пространстве, в которое включались только переменные q_i. В гамильтоновой механике мы говорим о фазовом пространстве, использующем q_i и p_i как совокупность $2n$ переменных.

В пространстве конфигураций имело смысл введение определенного вида геометрии, причем эта геометрия оказывается римановой. В фазовом пространстве ситуация иная: оно не имеет определенной метрики, и

мы для удобства будем считать, что q_i и p_i являются прямоугольными координатами $2n$-мерного евклидова пространства.

При теоретических исследованиях задач движения использование фазового пространства ведет к ряду существенных преимуществ. Одно из наиболее важных преимуществ станет наглядным, если рассмотреть множество траекторий *C*-точки сначала в лагранжевом пространстве конфигураций, а затем в гамильтоновом фазовом пространстве. Если речь идет об одной траектории, то движущаяся *C*-точка в обоих случаях описывает некоторую кривую. Однако выделение одной конкретной траектории из множества всех возможных траекторий часто сильно затрудняет теоретические исследования. На многие вопросы механики нельзя дать удовлетворительный ответ, выделяя одно частное решение уравнений движения, соответствующее какому-то конкретному выбору начальных условий. Необходимо получить и проанализировать общее решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям.

Попытавшись изобразить все множество траекторий в лагранжевом пространстве конфигураций, мы получим безнадежно запутанное переплетение линий. Движение может начинаться из любой точки конфигурационного пространства в произвольном направлении и с произвольной начальной скоростью. Невозможно получить какое-либо упорядоченное представление всех этих линий. Обратимся теперь к фазовому пространству уравнений Гамильтона – уравнений не второго, а первого порядка. При заданном положении *C*-точки эти уравнения определяют также значение ее скорости. Движение может начаться в любой точке фазового пространства, но задание одной точки однозначно определяет всю траекторию.

Для примера рассмотрим двухмерное фазовое пространство. Если начальная точка соответствует нулевому значению координаты q, то дальнейшее ее движение влево или вправо зависит от того, в какой полуплоскости фазового пространства она находится. Если $p > 0$, то траектория пойдет вправо (скорость положительна и координата станет увеличиваться). Если $p < 0$, то траектория пойдет влево. Выражаясь аналитическим языком, можно сказать, что для полного решения канонических уравнений нужно знать q_i и p_i как функции времени t и $2n$ констант интегрирования, эти константы можно интерпретировать как значения тех же $2n$ координат фазового пространства в момент времени $t = 0$.

Это полное решение канонических уравнений можно изобразить в упорядоченном виде, без каких бы то ни было пересечений, если $2n$ координат q_i и p_i рассматривать как различные измерения фазового пространства. Геометрическая картина получается более полной, если доба-

вить еще одно измерение, вводя время t в качестве $(2n + 1)$-й координаты. Эли Жозеф Картан (1869–1951) назвал это $(2n + 1)$-мерное пространство *пространством состояний*. В пространстве состояний задача о движении системы полностью геометризуется и полное решение канонических уравнений изображается в виде бесконечного множества кривых, заполняющих $(2n + 1)$-мерное пространство. Эти кривые нигде не пересекаются. Действительно, пересечение двух кривых означало бы, что в одной и той же точке пространства состояний возможны две касательные, что исключается, так как канонические уравнения в каждой точке этого пространства определяют единственную касательную.

Примечание. Если быть более точным, то очень небольшое количество фазовых траекторий все же могут пересекаться в некоторых точках фазового пространства, которые называются *особыми точками*, а сами траектории в этом случае разделяют разные режимы поведения динамической системы и называются *сепаратриссами*.

Следует отметить, что можно выделить два класса движений по виду фазовых траекторий в фазовом пространстве: *финитное*, когда фазовая траектория замкнута, и *инфинитное* движение, когда фазовая траектория незамкнута. Незамкнутая кривая не обязательно приходит из бесконечности и уходит в нее. Это может быть спираль, сходящаяся в точку. Финитным траекториям соответствует колебательное, повторяющееся движение.

Полученная геометрическая и аналитическая картина находится в полной аналогии с движением жидкости (так называемая *гидродинамическая аналогия*). Представим себе трехмерное движение обычной жидкости, с которой оперирует гидродинамика, например течение воды в реке или в трубопроводе. Это движение можно описать двумя способами: с помощью частиц и с помощью поля. Первому соответствует описание по Лагранжу (материальное), а второму — по Эйлеру (пространственное). Рассмотрим описание в декартовой системе координат.

При первом способе рассматривается отдельная частица жидкости и прослеживается изменение ее положения со временем t, начиная с некоторого начального положения x_0, y_0, z_0.

$$\begin{aligned} x &= f(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= g(x_0, y_0, z_0, t), \quad \text{(закон движения)} \\ z &= h(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для того чтобы перейти ко второму описанию, рассмотрим поле скоростей, существующее в некоторый момент времени t и заданное дифференциальными уравнениями, полученными из (4.5):

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial t}\,,\ \dot{y} = \frac{\partial g}{\partial t}\,,\ \dot{z} = \frac{\partial h}{\partial t}\,. \tag{4.6}$$

Разрешим уравнения (4.5) относительно x_0, y_0, z_0, выразив их в виде функций x, y, z, t. Подставив затем полученные выражения в (4.6), получим $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ как функции x, y, z, t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= v(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= w(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

(аналог уравнений Гамильтона)

Это и есть второе описание движения жидкости с помощью поля, которое определяет вектор скорости в любой точке пространства в любой момент времени. Из заданного описания с помощью частиц можно получить описание с помощью поля путем дифференцирований и исключения переменных. С другой стороны, для получения описания по Лагранжу из описания по Эйлеру нужно проинтегрировать уравнения (4.7). Оба способа описания эквивалентны.

Эта гидродинамическая картина полностью переносится на фазовое пространство. Вводится понятие *фазовой жидкости*, поведение этой $2n$-мерной воображаемой жидкости подобно поведению обычной жидкости. Единственная разница заключается в том, что вместо трех координат x, y, z имеются $2n$ координат $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. И в этих координатах описывается движение фазовой жидкости полем скоростей с помощью канонических уравнений Гамильтона, которым соответствуют уравнения (4.7) описания обычной жидкости по Эйлеру. Описание с помощью частиц получается в результате интегрирования канонических уравнений.

Канонические уравнения получают новый смысл, если их интерпретировать гидродинамически, имея в виду движение фазовой жидкости. Они определяют скорость частиц жидкости в определенной точке фазового пространства в определенный момент времени. Говорят, что система канонических уравнений движения определяет *оператор* T, переводящий систему из одного состояния в другое в разные моменты времени. Этот оператор называется *фазовым потоком*. Говорят, что фазовый поток переводит, например, контур C в C_T: $C_T = T\,C$. Движение происходит по фазовым траекториям. Фазовые траектории можно сопоставить с линиями тока в гидродинамике.

Резюме. Координатное пространство канонических уравнений имеет $2n$ измерений, а именно n позиционных координат q_i и n импульсов p_i, и все они являются независимыми переменными вариационной задачи.

Геометрически движение механической системы можно представить в виде движения $2n$-мерной жидкости, называемой *фазовой жидкостью*. Каждая отдельная линия тока движущейся жидкости определяет собой движение механической системы при соответствующих начальных условиях; движение жидкости в целом определяет *общее* решение при разных произвольных начальных условиях.

4.4. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Интегральные инварианты

Оказывается, что особые типы движения жидкости, представляющие интерес в обычной гидродинамике, интересны также и при движении фазовой жидкости.

Так, описываемое уравнениями Гамильтона движение фазовой жидкости подобно движению реальной несжимаемой жидкости. А это означает, что вытекающее из уравнения сохранения массы (уравнения неразрывности) следствие о неизменности объема должно выполняться и для фазовой жидкости. Говорят, что для гамильтоновых систем *фазовый объем сохраняется*. Форма этого объема может меняться, но объем сохраняется. Это составляет суть теоремы Лиувилля (ее сформулировал французский математик Жозеф Лиувилль, 1809–1882), которую можно сформулировать еще по другому: *поток фазовой жидкости через замкнутую поверхность равен нулю*.

В чем заключается значение теоремы Лиувилля? Оно предписывает особые свойства фазовым траекториям гамильтоновых систем. Например, фазовая траектория не может иметь вид закручивающейся спирали, так как в этом случае неизбежно уменьшение фазового объема.

Вводимый таким образом новый инвариант – *фазовый объем* – является *интегральным* инвариантом. Интегральные инварианты представляют собой некоторые величины, вычисленные не в точке, а в некоторой области фазового пространства, сохраняющиеся при движении фазовой жидкости. А. Пуанкаре ввел *n интегральных инвариантов* для гамильтоновой системы с таким же количеством степеней свободы. Различают относительные и абсолютные интегральные инварианты. В силу большой размерности пространства можно выбирать разные замкнутые области для интегрирования. Поэтому интегральных инвариантов и набирается так много. Первый относительный интегральный инвариант записывается как интеграл по контуру. По теореме Стокса ему можно сопоставить абсолютный интегральный инвариант как интеграл по двумерной поверхности, опирающейся на контур.

Последний *n*-й абсолютный инвариант есть фазовый объем некоторой 2*n*-мерной области σ фазового пространства $\bar{J}(n) = \int_{\sigma} dp_1 dq_1 \ldots dp_n dq_n = \Gamma$, а первый относительный инвариант $J(1) = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$ называется *циркуляцией*, он соответствует понятию циркуляции в гидродинамике $\oint_C \mathbf{v} ds$. Сохранение циркуляции вдоль любой замкнутой кривой при движении идеальной жидкости выражает теорему Гельмгольца о сохранении вихря. Аналогичное утверждение переносится и на движение фазовой жидкости. Для консервативных систем циркуляция также тесно связана с таким важным понятием, как действие.

Таблица 4.1

Номер	Интегральные инварианты	
	относительные	абсолютные
1-й	$J(1) = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$ – циркуляция	$\bar{J}(1) = \int_S \sum_{i=1}^{n} dp_i dq_i$
…	…	…
n-й		$\bar{J}(n) = \int_{\sigma} dp_1 dq_1 \ldots dp_n dq_n = \Gamma$ – фазовый объем

4.5. Теорема сохранения энергии как следствие канонических уравнений

Мы уже говорили о том, что особым свойствам гамильтоновых систем можно сопоставить особые типы движения жидкости. Одним из таких особых типов является стационарное движение жидкости. В нем поле скоростей не зависит от времени *t*. Хотя жидкость движется и частицы все время изменяют свое положение, *скорость в определенной точке пространства постоянна*. Это означает, что в описании с помощью поля правые части уравнений (4.7) явно не зависят от времени *t*.

Такая же ситуация возникает в потоке фазовой жидкости в случае *консервативных* (склерономных и потенциальных) систем. В этом случае функция Лагранжа, а следовательно, и функция Гамильтона не зависят от

t. Поэтому правые части канонических уравнений не зависят от времени, откуда сразу следует первое фундаментальное утверждение, что *фазовая жидкость в случае консервативных систем находится в состоянии стационарного движения*.

Второй фундаментальной теоремой, которая может быть получена для таких систем, является *теорема о сохранении энергии*. Дифференцирование функции Гамильтона в случае, когда она явно не зависит от времени, дает

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \qquad (4.8)$$

Сопоставляя эту формулу и канонические уравнения сразу видно, что

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$H = const = E.$$

Эта теорема придает функции Гамильтона определенный физический смысл. Для этого воспользуемся обратным преобразованием Лежандра, определением обобщенных импульсов через лагранжиан, вспомним, что $L = T - \Pi$ и для консервативной системы $T = T_2$ – кинетическая энергия есть квадратичная функция скоростей, а П от скоростей не зависит, и, наконец используем формулу Эйлера для однородных функций второй степени. Тогда имеем

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (T - \Pi) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + \Pi = 2T - T + \Pi = T + \Pi.$$

То есть, функция Гамильтона консервативной системы равна ее полной энергии. Это верно только для случая консервативных систем. В общем случае неконсервативных систем такого ясного физического смысла для гамильтониана нет.

Теорема о сохранении энергии имеет интересную *геометрическую* интерпретацию в связи с движением фазовой жидкости. Уравнение

$$H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = E$$

определяет некоторую гиперповерхность в $2n$-мерном пространстве, называемую *изоэнергетической*. Если константа E может принимать произвольные значения, то мы получаем бесконечное семейство поверхностей, заполняющих все фазовое пространство. Теорема о сохранении энергии утверждает, что *частица жидкости, начавшая свое движение на*

некоторой изоэнергетической поверхности, остается на этой поверхности в течение всего движения, независимо от его продолжительности.

Резюме. Если функция Гамильтона H не зависит от времени t, то механическая система консервативна. Такие системы характеризуются двумя особыми свойствами фазовой жидкости: 1) движение фазовой жидкости является стационарным; 2) каждая частица жидкости остается все время на изоэнергетической поверхности $H = E$.

4.6. Преобразования координат как метод решения задач механики. Канонические преобразования

Как мы уже видели при изучении лагранжева формализма механики, правильный выбор координат может существенно облегчить задачу решения дифференциальных уравнений движения. Если среди наших координат имелась циклическая, то мы сразу находили первый интеграл уравнений Лагранжа. Аналогичная ситуация имеется и в формализме Гамильтона. Если какая-либо координата q_s является циклической (не входит явно в функцию Гамильтона), то имеем

$$\frac{\partial H}{\partial q_S} = 0 \Rightarrow p_S = const \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_S} = const \Rightarrow \dot{q}_S = const \Rightarrow q_S = a_S t + b_S .$$

То есть эта циклическая координата оказывается линейной функцией времени. Если все координаты циклические, то задача решается полностью.

Подобная ситуация была и при лагранжевом подходе, но, во-первых, большее количество независимых переменных в гамильтоновом подходе определяет больший выбор подобных преобразований координат, чем в лагранжевом подходе. А во-вторых, именно в гамильтоновом подходе удалось развить общую теорию преобразований координат как способа решения уравнений движения.

Можно сказать так: непосредственному интегрированию дифференциальных уравнений Гамильтона можно поставить в соответствие задачу нахождения таких преобразований координат, которые приводили бы к тому, что

1) система опять описывалась бы уравнениями Гамильтона с новым гамильтонианом;

2) все координаты стали бы циклическими или, чтобы новая функция Гамильтона тождественно равнялась нулю.

Определение. Преобразование координат называется *каноническим преобразованием*, если при этом сохраняется дифференциальная форма

$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$, соответствующая кинетической энергии в гамильтоновом формализме.

При канонических преобразованиях сохраняются канонический вид уравнений Гамильтона, значение гамильтониана, скобки Пуассона (мы их введем позже), а также все интегральные инварианты. Общая теория этих преобразований принадлежит немецкому математику Карлу Якоби.

Для практического применения очень важно, чтобы при таких преобразованиях можно было взаимно однозначно выразить старые координаты через новые и наоборот.

Не всякое преобразование координат удается записать в явном виде

$$Q_i = Q_i\left(q_i, p_i, t\right),\ P_i = P_i\left(q_i, p_i, t\right).$$

В общем (неявном) виде преобразование координат задается некоторой функцией $S(t, q_i, Q_i, p_i, P_i)$. Ее называют *производящей функцией*.

Необходимо стремится к тому, чтобы в новых переменных функция Гамильтона зависела только, например, от новых обобщенных переменных Q_i, а не зависела от обобщенных импульсов P_i. Тогда нам необходимо искать производящую функцию от таких координат $S(t, q_i, Q_i)$. Чтобы сохранить систему гамильтоновой она должна удовлетворять определенному условию, а именно быть решением *уравнения Гамильтона – Якоби*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,\, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0\,.$$

Таким образом задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений заменяется интегрированием одного уравнения в частных производных.

Импульсы при этом определяются через производящую функцию и задаются выражениями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},\ P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}.$$

После дифференцирования выразим все q_i через новые переменные $q_i\left(Q_i, P_i\right)$ и получим функцию Гамильтона в новых координатах $H\left(Q_i, P_i\right) \equiv H\left(Q_i\right)$.

При практическом применении оказывается, что нет необходимости находить все новые координаты Q_i, P_i. После нахождения производящей функции (получение полного интеграла уравнения в частных производных) мы непосредственно получаем решение для старых координат, а новые координаты играют лишь роль параметров.

Резюме. Наиболее эффективным инструментом для исследования и решения канонических уравнений являются преобразования координат фазового пространства. Вместо того чтобы пытаться непосредственно интегрировать уравнения, ищется некоторая новая система координат, которая больше подходит для решения задачи, чем первоначальная система. Для этого процесса в нашем распоряжении имеется широкий класс канонических преобразований.

Канонические преобразования характеризуются одной-единственной функцией – производящей функцией. Поэтому задача нахождения некоторого канонического преобразования, которое бы упрощало функцию Гамильтона и делало бы уравнения непосредственно интегрируемыми, эквивалентна задаче о нахождении только одной функции. Эта функция определяется одним уравнением в частных производных – уравнением Гамильтона – Якоби. Задача решения системы канонических уравнений заменяется задачей решения этого уравнения.

4.7. Интегрируемость гамильтоновых систем

Прежде чем пытаться найти решение, например, используя канонические преобразования, хотелось бы иметь ответ на вопрос: а существует ли такое решение, является ли наша система интегрируемой? Ведь вполне возможен вариант, что задача не имеет решения в принципе. Далеко не все системы дифференциальных уравнений оказываются интегрируемыми. В некоторых важных для практики случаях есть возможность получить такой ответ.

Известно, что для того чтобы система n дифференциальных уравнений первого порядка была интегрируема хотя бы в квадратурах (т.е. решение записывается в виде неопределенных интегралов от некоторых известных функций), необходимо существование n независимых первых интегралов. Оказывается, что в силу определенной симметрии для гамильтоновых систем ситуация является более благоприятной. Существует *теорема Лиувилля – Арнольда* (Владимир Игоревич Арнольд, 1937–2010, советский, российский математик, определил точные условия, при которых справедлива теорема Лиувилля и дал ее строгое доказательство), которая гласит, что для гамильтоновой системы $2n$ уравнений достаточно

n линейно независимых первых интегралов, но надо, чтобы они находились в инволюции. Если такие интегралы найдены, то систему называют *вполне интегрируемой системой*.

Для того чтобы объяснить, что означает фраза «интегралы находятся в инволюции» необходимо ввести понятие нового оператора – так называемых *скобок Пуассона*.

Для двух функций $A = A(q_i, p_i, t)$ и $B = B(q_i, p_i, t)$ вводится следующая операция:

$$(A, B) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right),$$

которая и называется *скобкой Пуассона* или *коммутатором*.

Замечание. Часто для обозначения скобок Пуассона принимают квадратные скобки, но это тогда, когда не вводят скобок Лагранжа. А для последних обычно используют как раз квадратные скобки.

Как видим, эта операция удивительно симметрична. Она обладает рядом свойств, которые следуют из ее определения.

1. Линейность (если λ_1 и λ_2 – константы):

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B) = \lambda_1 (A_1, B) + \lambda_2 (A_2, B).$$

2. Кососимметричность: $(A, B) = -(B, A)$.

3. Правила Лейбница:

$$(A_1 A_2, B) = A_1 (A_2, B) + A_2 (A_1, B), \quad (A(F_1, F_2, \ldots, F_n), B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial F_i} (F_i, B).$$

4. Тождество Якоби: $((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0$.

Очевидны и такие свойства, как $(A, A) = 0$, $(A, const) = 0$.

Важную роль играют *фундаментальные* скобки Пуассона:

$$(q_i, p_j) = \delta_{ij}, \quad (q_i, q_j) = 0, \quad (p_i, p_j) = 0.$$

С применением скобок Пуассона уравнения Гамильтона выглядят совсем как близнецы-братья:

$$\dot{q}_i = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = (p_i, H).$$

А теперь вернемся к тому, что значит «инволюция». Говорят, что две функции *находятся в инволюции*, если их коммутатор тождественно равен нулю, т.е. это условие выполняется для всех точек фазового пространства.

Следует отметить, что условия теоремы Лиувилля – Арнольда достаточно жесткие, и далеко не все гамильтоновы системы ей удовлетворяют, а значит, и интегрируются. Поэтому широко применяются для нелинейных систем приближенные методы и методы возмущений, когда система не сильно отличается от некой уже проанализированной интегрируемой системы.

Следует добавить, что теорема Лиувилля – Арнольда предписывает также определенный вид движения для имеющегося решения, а именно: фазовые траектории являются обмотками n-мерного инвариантного тора, а движение является *условно-периодическим* и характеризуется n частотами.

Более того, в условиях теоремы Лиувилля – Арнольда можно выбрать такие канонически сопряженные переменные I_i и ϑ_i, называемые переменными действие–угол, что гамильтониан является функцией только действий I_i и уравнения Гамильтона в переменных действие – угол имеют вид

$$\frac{d\vartheta_i}{dt} = \frac{\partial H(I_i)}{\partial I_i},\ \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H(I_i)}{\partial \vartheta_i} = 0\ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда решение выражается через эти переменные, причем имеет удивительно простой вид, а именно: действие является инвариантом и зависит только от функции Гамильтона, а угол является линейной функцией времени:

$$I_i = const,\ \vartheta_i = \omega_i t + const,\ \text{а частоты равны}\ \omega_i(I_i) \equiv \frac{\partial H}{\partial I_i}.$$

В данном случае переменные типа «угол» как раз и являются циклическими переменными. А слова «*условно-периодическое решение*» обозначает, что движение представляет собой колебания системы с конечным количеством степеней свободы. Для каждой степени свободы существует своя частота.

Переменные действия определяются по формулам

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i,\ \ j = 1, \ldots, n,$$

и представляют собой первые интегральные инварианты Пуанкаре по так называемым неприводимым контурам. На n-мерном торе можно выбрать ровно n контуров C_j, которые не могут быть ни стянуты в точку, ни переведены непрерывным образом друг в друга. Эти базисные контуры тора называют *неприводимыми контурами*.

Переменные I_j действительно являются действиями, совпадающими по размерности с действием по Гамильтону, которое мы ввели при изучении вариационного принципа Гамильтона.

Можно показать, что функция

$$S(q_i, I_i) = \int_{q_{i0}}^{q_i} \sum_{i=1}^{n} p_i(q_i, I_i) dq_i$$

является производящей функцией, реализующей каноническое преобразование $(p_i, q_i) \to (I_i, \vartheta_i)$.

Характерные черты анализа фазового пространства можно продемонстрировать на примере математического маятника – простейшей нелинейной системы с одной степенью свободы. Гамильтониан нелинейного маятника с единичной массой имеет вид

$$H = 1/2\, p^2 - \omega_0^2 \cos q .$$

Потенциальная энергия $V = -\omega_0^2 \cos q$. Ее минимумы (первый находится в начале координат) соответствуют особым точкам типа центр, в максимумах ($q = \pi + 2\pi k$) имеем особые точки типа седло.

Раздел II
ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Глава 5
Предмет теории колебаний

Колебания – это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Можно дать и другое определение: колебания – это повторяющиеся ограниченные движения или процессы относительно некоего среднего состояния, которое в частном случае может быть состоянием равновесия. Такие определения объединяют весьма широкий круг явлений, встречающихся в природе и находящих многочисленные применения в технике: звук, свет, радио, колебания цен и т.д. Близким к колебательным движениям являются явления распространения волн в средах, т.е. изменения состояния (возмущений) таких сред. Поэтому иногда выделяют единую теорию колебаний и волн, поскольку у них общие уравнения и математические методы. Используются в качестве синонимов также термины *вибрации* и *осцилляции*, имеющие латинское происхождение от слов, означающих колебание, качание, дрожание.

В *теории колебаний* проводится рассмотрение специфического типа движений, присущего определенному классу динамических систем. Подобные динамические системы, в которых могут существовать колебательные процессы, принято называть *колебательными системами*.

Предметом теории колебаний является рассмотрение общих закономерностей колебательных процессов в различных динамических системах.

В этой связи представляется необходимым упомянуть ряд имен ученых, внесших наиболее фундаментальный вклад в учение о колебаниях.

Джон Уильям Стрэтт – лорд Рэлей (John William Strutt – Reyleigh) (1842–1919) – один из основоположников теории колебаний. В своем труде «Теория звука» он впервые изложил расчеты ряда колебательных процессов с последовательным учетом нелинейных свойств колебательных систем. В современной теории колебаний используются также математические методы, развитые Жюлем Анри Пуанкаре (1854–1912) в его работах по небесной механике; нашли применение и исследования Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918) по устойчивости движений и методы расчета колебательных движений, развитые Алексеем Николаевичем Крыловым (1863–1945). Очень большое значение для формирования теории колебаний имели основополагающие работы Ван дер Поля

(1889–1959) по колебаниям в некоторых нелинейных системах и общие исследования колебательных процессов в нелинейных системах, проведенные Александром Александровичем Андроновым (1901–1952), развившим учение о самоподдерживающихся колебательных процессах, названных им автоколебаниями. Этот термин в настоящее время является общепринятым.

Однако следует иметь в виду, что для физиков и специалистов технических направлений теория колебаний – это не совокупность методов анализа и расчета, а изучение закономерностей протекания колебательных процессов в реальных системах с использованием в каждом случае наиболее адекватных методов рассмотрения. При этом чрезвычайное многообразие колебательных систем и их свойств требует при изучении протекающих в них колебательных процессов нахождения общих черт у различных колебательных систем и объединения их по наиболее характерным признакам в определенные классы и типы.

Последовательная классификация различных колебательных систем возможна лишь при условии замены конкретных реальных систем с их неизбежным многообразием свойств моделями, в которых отражаются только основные существенные черты изучаемых процессов.

Выбор модели, передающей наиболее важные, основные и определяющие свойства изучаемой реальной системы и вместе с тем достаточно простой для применения известных методов анализа и расчета – первый и очень важный этап всякой теории и в том числе теории колебаний. От его правильности решающим образом зависит реальность и достоверность результатов последующего исследования, а также оправданность выбора метода дальнейшего анализа. Если модель груба, то избыточно точный расчет лишен смысла, так же как и использование очень сложной детальной модели при ее дальнейшем упрощенном анализе. Весьма важно правильно выбрать соответствие между степенью идеализации при переходе к модели, точностью аналитической аппроксимации реальных физических зависимостей и точностью применяемых математических методов.

Заменяя реальные динамические системы их соответственно выбранными моделями, мы можем провести последовательную классификацию систем и протекающих в них колебательных процессов по различным признакам. *Кинематические признаки* – основа классификации колебательных движений. Основа классификации колебательных систем – их *динамические свойства*.

Кинематическими признаками колебательного движения являются его периодичность, форма и амплитуда. Для строго периодических процессов выполняется соотношение

$$F(t) - F(t+T) = 0\ ,$$

справедливое для любого момента времени t, где T – *период* данного колебательного движения; $1/T = \nu$ – *частота* (число периодов в единицу времени). Широко используется так называемая угловая, или круговая, частота $\omega = 2\pi\nu$. Частота меряется в герцах, 1 Гц соответствует одному колебанию в секунду.

В зависимости от природы изучаемых колебательных движений встречаются периоды, имеющие самые различные значения. Так, например, периоды приливных процессов – величины порядка 10^5 с, периоды колебаний маятников в часах – порядка 1 с, периоды колебаний, изучаемых в акустике (слышимый звук), – от 10^{-1} до 10^{-4} с; ультразвук – 10^{-4}–10^{-9} с, гиперзвук – 10^{-9}–10^{-13} с, в радиотехнике имеют дело с колебаниями с периодами от 10^4 до 10^{-12} с. Колебания молекул, связанные с инфракрасным излучением, имеют периоды порядка 10^{-12}–10^{-14} с. Оптический диапазон соответствует периодам колебаний 10^{-14}–10^{-15} с, связанных с атомными процессами (ультрафиолетовое излучение) 10^{-15}–10^{-17} с, а периоды колебаний, соответствующих рентгеновскому излучению, составляют 10^{-17}–10^{-19} с (табл. 5.1). Из приведенных примеров видно, насколько различаются величины периодов колебательных процессов, изучаемых в астрономии, физике, технике, с которыми приходится сталкиваться исследователям. Однако у всех этих процессов, имеющих самую различную природу, есть ряд общих свойств и особенностей, которыми занимается теория колебаний.

Таблица 5.1

Процесс	Период, с	Частота, Гц
Приливы	10^5	10^{-5}
Колебания маятников в часах	1	1
Акустика (слышимый звук)	10^{-1}–10^{-4}	10^{1}–10^{4}
Ультразвук	10^{-4}–10^{-9}	10^{4}–10^{9}
Гиперзвук	10^{-9}–10^{-13}	10^{9}–10^{13}
Радиотехника	10^{4}–10^{-12}	10^{-4}–10^{12}
Колебания молекул (инфракрасное излучение)	10^{-12}–10^{-14}	10^{12}–10^{14}
Оптический диапазон (видимый свет)	10^{-14}–10^{-15}	10^{14}–10^{15}
Атомные процессы (ультрафиолетовое излучение)	10^{-15}–10^{-17}	10^{15}–10^{17}
Рентгеновское излучение	10^{-17}–10^{-19}	10^{17}–10^{19}

Следует отметить, что строгой периодичности реальных процессов в природе нет и строгая периодичность – это тоже идеализация. В реальных колебательных системах всегда существуют возмущающие силы, случайные смещения (например, флуктуационные) и нестабильность па-

раметров, исключающие возможность идеальной периодичности. Поэтому более последовательным было бы изучение колебательных процессов, в которых условие периодичности выполняется приближенно, т.е. положить в основу рассмотрения *почти периодические колебания*, для которых

$$\left|F(t)-F(t+T)\right| << \varepsilon ,$$

где ε – любая наперед заданная малая величина и $T(\varepsilon)$ – почти период. Примером такого процесса может служить процесс затухающих колебаний

$$F(t)=A\cdot e^{-\delta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

при достаточно малом δ. Здесь $T=2\pi/\omega$ – почти период.

Процесс, представляющий собой сумму двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами, также служит примером почти периодического движения

$$F(t)=a_1\cos(\omega_1 t)+a_2\cos(\omega_2 t) .$$

Если, кроме того, можно указать такие m и n, что $\left|mT_1-nT_2\right| << \varepsilon$, то T_1 и T_2 также являются почти периодами этого процесса при достаточно малом значении ε.

Однако теория почти периодических процессов сложна и во многих случаях мало разработана. Поэтому в основу рассмотрения большинства колебательных задач можно положить допущение о периодичности наряду с существованием заведомо непериодических колебательных процессов.

Помимо периодичности, колебательные движения характеризуются формой и амплитудой, и эти кинематические признаки позволяют определенным образом классифицировать разнообразные процессы колебаний. Например, прямоугольные и пилообразные колебания, затухающие и нарастающие амплитудно- и частотно-модулированные.

Особое значение имеет простейший вид колебательного процесса – гармоническое колебание

$$F(t)=a\cos(2\pi\nu t+\varphi_0)=a\cos(\omega t+\varphi_0) ,$$

здесь a – амплитуда колебания, $\omega t+\varphi_0$ – мгновенная фаза, φ_0 – начальная фаза колебания. Гармонические колебания представляют особый интерес не только в силу простоты их аналитического представления, но в первую очередь потому, что эта форма движений наиболее обычна для колебательных процессов в системах с постоянными параметрами и чрезвычайно часто встречается в реальных процессах, изучаемых в физике и в технических дисциплинах.

Отдельно можно выделить случайные колебания.

В теории колебаний, как уже упоминалось, главной задачей является изучение колебательных процессов в определенных динамических системах – в колебательных системах. Поэтому необходима классификация колебательных систем по их динамическим свойствам. Подобная классификация, естественно, будет полностью последовательной лишь для соответствующих моделей с ограниченным числом свойств. Классификацию колебательных систем можно провести по ряду признаков: во-первых, по *числу степеней свободы*; во-вторых, по *энергетическим признакам*, разделяя системы на активные (с внутренним источником энергии) и пассивные; в-третьих, по *свойствам параметров системы*, выделяя системы с параметрами, не зависящими от ее состояния (линейные системы), и с параметрами, зависящими от состояния системы (нелинейные системы) или от времени (параметрические); в-четвертых, по *условиям действия внешних сил*, разделяя системы на автономные (свободные) и неавтономные (вынужденные и диссипативные). Эта классификация не является полной и единственно возможной. Немного другой вариант классификации предложен в табл. 5.2.

Очевидно, что простейшими колебательными системами являются системы с одной степенью свободы, с которых и начинается рассмотрение колебательных процессов в идеализированных динамических системах. Далее рассматриваются автономные и неавтономные системы с двумя и большим числом степеней свободы, а также колебательные и некоторые волновые процессы в системах с распределенными параметрами.

Следует иметь в виду, что системы с одной степенью свободы представляют собой объект, наиболее доступный для исследования возможных колебательных движений при самых разных их нелинейных свойствах. Нелинейные же системы с двумя и большим числом степеней свободы и распределенные системы поддаются последовательному анализу лишь в отдельных частных случаях. Их рассмотрение даже в линейном приближении значительно более сложно, громоздко и не допускает ряда качественных и наглядных приемов, которые возможны для систем с одной степенью свободы.

Колебательные процессы в системах с постоянными параметрами (в линейных системах) изучены уже сравнительно давно, и математическая их теория развита с большой полнотой. Однако изучение общих закономерностей колебаний в системах с параметрами, зависящими от состояния системы (в нелинейных системах), началось значительно позднее, и долгое время рассматривались лишь отдельные частные задачи без обобщения полученных результатов на широкие классы динамических колебательных систем и протекающие в них процессы.

Таблица 5.2

Классификация			
колебательных движений (процессов)		колебательных систем	
В основе лежат			
кинематические признаки движений		динамические свойства систем	
1) периодичность	– строго периодические; – почти периодические	1) число степеней свободы	–1, 2, и т.д., конечное число; – распределенные системы
2) форма (амплитуда)	– гармонические; – пилообразные; – затухающие; – нарастающие; – установившиеся; – амплитудно-модулированные; – частотно-модулированные	2) свойства параметров	– линейные (не зависят от состояния); – нелинейные (зависят от состояния); – параметрические (зависят от времени)
3) стохастичность	– случайные; – детерминированные	3) тип действующих сил: а) внешние силы	– автономные (свободные); – неавтономные (вынужденные)
		б) внутренний источник энергии (внутренние силы)	– активные или автоколебательные; – пассивные
		в) силы трения	– консервативные; – диссипативные
		г) случайные возмущения	– детерминированные; – стохастические

Часто названия определенного типа колебательных систем переносят на название колебательных движений, хотя особых кинематических признаков у них нет. Например, говорят о свободных, вынужденных, параметрических колебаниях.

Глава 6
Колебания систем с одной степенью свободы

Закономерности, устанавливаемые в этой главе, для систем с одной степенью свободы, имеют большое значение, так как задачу о колебаниях системы с произвольным числом степеней свободы часто удается свести к ряду задач о колебаниях систем с одной степенью свободы. Дифференцирование по времени мы будем обозначать по Ньютону – точками над соответствующей переменной. Лагранж для обозначения производных использовал штрих, а Лейбниц – букву d для обозначения малых приращений и дробь для их деления.

6.1. Консервативные колебательные системы

При рассмотрении колебательных систем имеет смысл уделить особое внимание системам с малым затуханием, в которых величина энергии, рассеиваемой за период (или почти период) колебаний, мала по сравнению с общим запасом энергии. В подобных системах наиболее ярко проявляются их колебательные свойства. В большом числе практических применений мы встречаемся с высокодобротными колебательными системами. Это маятник или баланс в часовых механизмах, колебательные элементы в частотомерах и спектр-анализаторах и др. Многие колебательные свойства подобных систем весьма мало зависят от величины и характера затухания. Поэтому, ограничиваясь интервалами времени, не слишком большими по сравнению с периодом колебаний, мы можем пренебречь затуханием и рассматривать изучаемую систему как консервативную. Очевидно, что при этом имеет место существенная идеализация, и применение выводов, полученных при рассмотрении подобной идеальной системы, к реальной системе должно проводиться с учетом тех особенностей, которые вносятся затуханием, всегда наблюдаемым в реальных физических устройствах.

Консервативные колебательные системы – это идеализированные системы, в которых запас энергии в процессе совершения колебаний остается постоянным. Несмотря на отсутствие в природе консервативных колебательных систем, их изучение позволяет получить много данных, помогающих исследованию систем, отличных от консервативных, особенно систем, близких к ним.

6.1.1. Уравнения движения. Интеграл энергии

Рассмотрим вывод уравнения движения на примере идеального кругового математического маятника (рис. 6.1), представляющего собой груз – материальную точку массой m, подвешенный на нерастяжимой нити пренебрежительно малой массы с длиной подвеса l, находящегося в поле тяготения с ускорением g и совершаемого движения в плоскости.

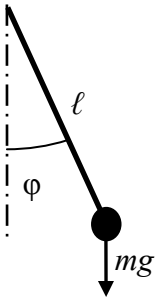


Рис. 6.1. Математический маятник

Дифференциальное уравнение движения для угловой координаты q = φ может быть получено из уравнения Лагранжа II рода. Для этого запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий, а затем и функции Лагранжа:

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2},\ \Pi = -mgl\cos\varphi,\ L = T - \Pi = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\,.$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,,\ \text{или}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0\,.$$

В нашем случае получаем

$$ml^2\ddot{\varphi} + \left(-mgl\left(-\sin\varphi\right)\right) = 0$$

и окончательно

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0\,, \qquad (6.1)$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Примем гамильтоново описание. Введем обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2\dot{\varphi}\,.$$

Гамильтониан для консервативной системы равен

$$H = T + \Pi = \frac{p_1^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi .$$

Тогда уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl\sin\varphi ,$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p_1}{ml^2} ,$$

или в другом виде (после несложного преобразования координат $p = p_1 / (ml^2)$):

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2\cos\varphi ,$$

$$\dot{p} = -\omega_0^2\sin\varphi ,$$

$$\dot{q} = p.$$

В случае малого изменения угла φ в уравнении (6.1) $\sin\varphi$ можно заменить на φ и получить уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (6.2)$$

Оба уравнения (6.1) и (6.2) описывают процессы колебаний в консервативных системах, но уравнение (6.2) линейно относительно координаты q и, следовательно, описывает движение в линейной колебательной системе. Напротив, уравнение (6.1) нелинейно относительно координаты (возвращающая сила пропорциональна $\sin\varphi$) и поэтому колебательная система, описываемая этим уравнением, нелинейна.

В общем случае рассмотрения систем с одной степенью свободы мы должны для описания движений в консервативных системах рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка

$$\ddot{q} = \Phi(q, \dot{q}). \qquad (6.3)$$

Для механических систем в уравнениях типа (6.3) можно считать, что вторая производная q представляет приведенную силу инерции, а правая часть – возникающую в системе силу, связанную только с положением рассматриваемой массы (например, упругую силу), и обе они отнесены к единице массы. Однако подобное уравнение будет описывать движение в консервативной системе не при любом виде функции $\Phi(q, \dot{q})$. Начнем с

изучения случая, когда уравнение, описывающее движение в исследуемой системе, не содержит $\dot{q}$, т.е. возвращающая сила не зависит от скорости. Тогда общим видом подобного дифференциального уравнения второго порядка будет уравнение

$$\ddot{q} = f(q), \text{ где } f(q) = Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}. \tag{6.4}$$

Это уравнение является обобщением полученного нами уравнения (6.1) для кругового математического маятника. Считая, что функция $f(q)$ является голоморфной (или аналитической, т.е. разлагается в степенной ряд), интегрируемой и, в общем случае, нелинейной функцией координаты q, используем новую переменную $p = \dot{q}$, которая позволяет исключить из уравнений движений время в явном виде, хотя по-прежнему $q = q(t)$ и $p = p(t)$ являются функциями времени. Тогда можно записать

$$\frac{dp}{dq} = \frac{f(q)}{p}. \tag{6.5}$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим первый интеграл – интеграл энергии

$$\frac{p^2}{2} - \int f(q)dq = T + \Pi = E. \tag{6.6}$$

Это уравнение является естественной записью условия консервативности системы, выражающегося в постоянстве общего запаса энергии.

Для более общего случая, когда возвращающая сила зависит от скорости, уравнение (6.3) может быть записано в виде

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\Phi(q, p)}{p}. \tag{6.7}$$

В этом случае оно будет описывать консервативную систему при условии существования однозначного интеграла этого уравнения (интеграла энергии или гамильтониана) следующего вида

$$F(q, p) = const.$$

Такой случай имеет место, когда действуют гироскопические силы.

6.1.2. Фазовый портрет

При гамильтоновом подходе можно использовать известный метод рассмотрения поведения исследуемой системы с помощью фазовой плоскости – плоскости переменных q и p. Каждому состоянию системы соот-

ветствует пара значений q и p, т.е. точка на фазовой плоскости. Подобную точку, координаты которой однозначно определяют мгновенное состояние системы, называют *описывающей* или *изображающей* точкой. Очевидно, что при движении, совершаемом системой, будут происходить изменения величин q и p, а следовательно, описывающая точка будет перемещаться по некой кривой, которую принято называть *фазовой траекторией движения.*

Для исследуемой колебательной системы переменные q и p связаны системой двух дифференциальных уравнений первого порядка (уравнениями Гамильтона):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p\,, \\ \dot{p} &= f(q) \end{aligned} \tag{6.8}$$

или одним уравнением (6.5), интеграл которого дает уравнение фазовых траекторий. В общем случае интегральные кривые, описываемые интегралом уравнения (6.5), не однозначно соответствуют фазовым траекториям, однако мы в дальнейшем, интересуясь в первую очередь формой этих кривых, будем считать, что уравнение (6.5) дает семейство фазовых траекторий, однозначное определение которых требует некоторого дополнительного рассмотрения с учетом начальных условий и свойств изучаемой величины. Из общих свойств дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку фазовой плоскости должна проходить одна и только одна фазовая траектория, за исключением тех точек, в которых $f(q)$ и p одновременно обращаются в нуль. В этих *особых точках* направление и число фазовых траекторий становятся неопределенными и свойства системы при таких значениях координат нуждаются в специальном изучении.

Заметим, что, получая уравнение фазовых траекторий, мы исключили время в явном виде. Форма фазовой траектории дает только некоторое указание о временном ходе изучаемого процесса и без дополнительных исследований не позволяет количественно получить основную переменную q как функцию t.

Рассмотрим условия, при которых в системе возникают состояния равновесия. В равновесном состоянии скорость движения обращается в нуль и в системе должны отсутствовать силы, вызывающие движение, т.е.

$$p = \dot{q} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{p} = \ddot{q} = 0\,.$$

Отсюда следует, что в точках, соответствующих положениям равновесия

$$\left(q = q_i, p = 0\right) \qquad f(q_i) = 0\,, \tag{6.9}$$

и потенциальная функция $\Pi(q_i)$ имеет экстремум, так как

$$\dot{p} = f(q) = -\frac{d\Pi(q)}{dq}\,,$$

а при $q = q_i$

$$f(q_i) = -\left.\frac{d\Pi(q)}{dq}\right|_{q=q_i} = 0\,. \tag{6.10}$$

Особые точки, в которых выполняется условие (6.10), называются *особыми точками первого порядка*. Если

$$\left.\frac{d^n\Pi(q)}{dq^n}\right|_{q=q_i} = 0\,,\ \left.\frac{d^{n+1}\Pi(q)}{dq^{n+1}}\right|_{q=q_i} \neq 0\,,$$

где $n = 1, 2, ...$, то мы имеем дело с *особыми точками порядка n*.

Таким образом, мы видим, что положения равновесия системы соответствуют особым точкам на фазовой плоскости

$$p_i = 0, \quad f(q_i) = 0.$$

В окрестности точки равновесия $q = q_i$ потенциальную функцию можно разложить в ряд по степеням $\xi = q - q_i$:

$$\Pi(q) = \Pi(q_i) + \left.\frac{d\Pi(q)}{dq}\right|_{q=q_i} \xi + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\Pi(q)}{dq^2}\right|_{q=q_i} \xi^2 + \cdots \tag{6.11}$$

Обозначим $\Pi(q_i) = \Pi_i$, $\qquad a = \left.\dfrac{d^2\Pi(q)}{dq^2}\right|_{q=q_i}$.

Для малых вариаций q и p вблизи положения равновесия можно написать уравнение сохранения энергии (6.6) в виде

$$\frac{p^2}{2} + \Pi_i + \frac{a\xi^2}{2} \approx E \tag{6.12}$$

или

$$p^2 + a\xi^2 = 2\left(E - \Pi_i\right) \tag{6.13}$$

Если $\Pi(q)$ при $q = q_i$ имеет минимум, то

$$\left.\frac{d\Pi(q)}{dq}\right|_{q=q_i} = 0\,,\quad \left.\frac{d^2\Pi(q)}{dq^2}\right|_{q=q_i} > 0\,. \tag{6.14}$$

Таким образом, если положение равновесия соответствует минимуму потенциальной функции (а, следовательно, и потенциальной энергии), то $a > 0$ и с точностью до высших степеней ξ мы получили в качестве уравнений фазовых траекторий вблизи положения равновесия уравнения эллипсов. Эти эллипсы различаются между собой величиной полуосей, определяемой значением $E - \Pi_i$. Выбирая различные значения E, мы получаем различные эллипсы, которые по мере приближения E к Π_i уменьшаются, стягиваясь в точку $(q_i,0)$ при $E = \Pi_i$.

Наличие на фазовой плоскости замкнутых фазовых траекторий (например, эллипсов в окрестностях рассмотренной особой точки) указывает на существование периодических движений. Из нашего анализа следует, что в окрестностях особой точки, отвечающей минимуму потенциальной энергии, происходят периодические движения с эллиптическими фазовыми траекториями, соответствующими гармоническим колебаниям. Реальное движение тем ближе к гармоническому, чем меньше превышение запаса энергии системы над запасом энергии в точке равновесия, т. е. чем меньше величина $E - \Pi_i$.

В системах, в которых потенциальная функция представляет собой квадратичную функцию координаты q, $\dfrac{d^n\Pi(q)}{dq^n}$ всегда равно нулю при $n > 2$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$p^2 + aq^2 = const \tag{6.15}$$

для любых значений $E - \Pi_i$. Можно лишь указать, что этот случай относится к тривиальному случаю линейной системы, так как, если

$$\Pi(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2\,, \tag{6.16}$$

то

$$f(q) = -a_1 - 2a_2 q$$

и уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + 2a_2 q = -a_1\,.$$

Последнее уравнение представляет собой известное уравнение гармонического осциллятора. Преобразованием координат можно избавиться от слагаемого в правой части.

Таким образом, исследованное положение равновесия (минимум потенциальной функции) соответствует на фазовой плоскости особой точке, называемой *особой точкой типа центр*, и отвечает положению равновесия, относительно которого система может совершать колебания, близкие к гармоническим или точно гармонические. Для представления на фазовой плоскости таких движений характерно наличие семейства замкнутых фазовых траекторий, окружающих центр, причем они (за исключением специальных случаев зависимости потенциальной функции от координаты в окрестностях данной особой точки) всегда стремятся к эллипсам при уменьшении амплитуды колебаний.

Достаточный признак или критерий устойчивости для консервативных систем дается теоремой, доказанной в конце XVIII в. Лагранжем для некоторых частных случаев и обобщенной в середине XIX в. Дирихле на случай любых консервативных систем.

Теорема Лагранжа – Дирихле. *Если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, то равновесие устойчиво.*

Для рассматриваемого случая из уравнения (6.6), выражающего закон сохранения энергии, можно получить после ряда простых выкладок выражение для периода колебаний. Действительно, разрешим его относительно импульса

$$p = \pm\sqrt{2\left[E - \Pi(q)\right]}. \tag{6.17}$$

Так как из (6.8) $$p = \frac{dq}{dt},$$

то $$dt = \frac{dq}{\pm\sqrt{2\left[E - \Pi(q)\right]}}$$

и $$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E - \Pi(q)}}. \tag{6.18}$$

Рассматривая движение в положительном направлении оси времени и учитывая симметрию семейства фазовых траекторий относительно оси q, получим при заданной амплитуде колебаний выражение для периода колебаний вида

$$T = \sqrt{2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E - \Pi(q)}}. \tag{6.19}$$

Здесь q_1 и q_2 – отклонения системы в моменты прохождения p через нулевые значения. Соответственно, $q_2 - q_1$ представляет собой полный размах колебаний при заданном произвольном запасе энергии E.

В общем случае полученное выражение для T будет функцией q_1 и q_2, так что для нелинейной системы имеет место зависимость периода колебаний от общего запаса энергии или амплитуды совершаемых колебаний (неизохронность колебаний в нелинейных системах). Лишь для линейной системы, когда потенциальная функция представляет собой квадратичную функцию (6.16) координат колебаний вокруг положения равновесия, можно сделать замену переменных $v = \omega_0 q \big/ \sqrt{E} = q\sqrt{2a_2/E}$, избавиться от энергии и получить

$$T = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{a_2}} = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

т.е. период равен величине, не зависящей от амплитуды совершаемых колебаний. В этом случае колебания становятся изохронными, и период свободных колебаний в линейной системе не зависит от сообщенного ей начального запаса энергии.

Рассмотрим случай, когда положение равновесия системы, а следовательно, и особая точка на фазовой плоскости соответствуют максимуму потенциальной функции $\Pi(q)$. Тогда, проводя те же выкладки, мы получим аналогичное уравнение для малых вариаций p и q, но

$$\left.\frac{d^2\Pi(q)}{dq^2}\right|_{q=q_i} = a = -b < 0, \qquad (6.20)$$

и уравнение (6.13) примет вид

$$p^2 - b\xi^2 = 2\left(E - \Pi_i\right).$$

Это уравнение фазовых траекторий для окрестности исследуемой особой точки задает гиперболы с асимптотами

$$p = \pm\sqrt{b}\,\xi. \qquad (6.21)$$

Таким образом, особая точка на фазовой плоскости, соответствующая максимуму потенциальной функции, представляет собой такую особую точку, через которую проходят целых две фазовые траектории и в ее окрестности все остальные фазовые траектории имеют вид гипербол. Такую особую точку называют точкой типа *седло*. Подобные точки соответствуют *неустойчивому положению равновесия*, так как любое сколь

угодно малое отклонение системы от положения равновесия приводит к дальнейшему росту вариаций координат системы, т.е. к дальнейшему удалению от точки равновесия. На фазовой плоскости это соответствует выходу описывающей точки из особой точки и ее дальнейшему движению по одной из уходящих фазовых траекторий.

Проиллюстрируем приведенные рассуждения графическими изображениями двух описанных типичных случаев, сделав одно очевидное замечание. По определению величины $p = \dot{q}$ значения $p > 0$ соответствуют росту q, а $p < 0$ – убыванию q. Поэтому движения описывающей точки по фазовым траекториям всегда происходят в верхней полуплоскости фазовой плоскости в сторону возрастания q, а в нижней – в сторону убывания q.

Если изобразить графически функцию $\Pi(q)$ и построить фазовые траектории на основании уравнения

$$\frac{p^2}{2} + \Pi(q) = E,$$

то, задаваясь различными значениями E, мы получим два характерных случая (рис. 6.2, точки A и B). Значение $q = q_A$ соответствует минимуму потенциальной функции $\Pi(q)$, и точка $A(q_A,0)$ является особой точкой типа *центр*. Точка $B(q_B,0)$, соответствующая максимуму функции $\Pi(q)$, представляет собой особую точку типа *седло* и отвечает на фазовой плоскости неустойчивому положению равновесия.

Совокупность семейства фазовых траекторий и особых точек на фазовой плоскости принято называть *фазовым портретом* системы – он графически изображает ее динамические свойства. К этим двум основным элементам фазового портрета консервативной системы следует добавить еще фазовые траектории, пограничные между областями фазовой плоскости, соответствующими движениям различного характера. Эти линии (например, линия C на рис. 6.2) носят название *разделительных* линий или *сепаратрис*. Их расположение очень наглядно показывает области возможных движений разного типа и те значения фазовых координат q и $p = \dot{q}$, при которых одно движение переходит в другое. Например, на рис. 6.2 мы видим, как кривая C выделяет вокруг точки A область, внутри которой существуют колебательные движения вокруг устойчивого положения равновесия. Вне нее эти движения отсутствуют и характер движения системы, т.е. вид фазовых траекторий, может быть определен только при задании вида потенциальной функции $\Pi(q)$ для большей области изменений q.

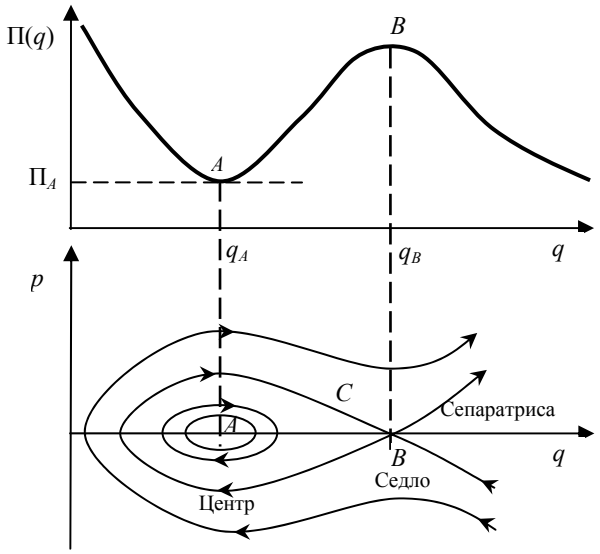


Рис. 6.2. Построение фазового портрета

Вообще, в большинстве случаев возможность хотя бы приближенного построения фазового портрета системы чрезвычайно облегчает рассмотрение общих свойств системы, и вид фазового портрета сразу показывает ряд наиболее характерных свойств изучаемой системы. Поэтому метод фазовой плоскости является исключительно полезным при качественном рассмотрении различных колебательных систем, особенно нелинейных.

6.2. Составление механической модели (расчетной схемы)

6.2.1. Ограничение числа степеней свободы

Все реальные деформируемые тела обладают бесконечным числом степеней свободы, соответствующих всевозможным их деформированным состояниям. Однако в зависимости от характера изучаемого явления и требуемой точности можно ограничить число учитываемых в расчете степеней свободы, выбирая в качестве расчетной схемы реальной конструкции систему, обладающую несколькими или даже одной степенью свободы. То есть реальную конструкцию мы заменяем расчетной схемой.

Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы может быть выполнено различными способами. Укажем три способа. *Первый способ* связан с тем, что часто в реальной конструкции можно выделить

массивные элементы, деформацией которых можно пренебречь, и упругие элементы, массу которых можно не учитывать. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных упругими связями. Так, например, система, представленная на рис. 6.3, *а*, может рассматриваться как система с одной степенью свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза, если нас не интересует поведение отдельных витков пружины, а груз может перемещаться только в вертикальном направлении.

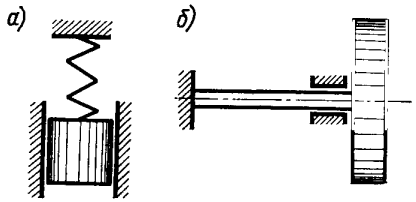


Рис. 6.3. Колебательные системы с одной степенью свободы

Другим примером систем с одной степенью свободы может служить диск, закрепленный на упругом валике (рис. 6.3, *б*). Если масса валика пренебрежимо мала по сравнению с массой диска, а диск может перемещаться только поворачиваясь в своей плоскости вокруг оси валика, то положение этой системы фиксируется единственной координатой – углом поворота диска.

На рис. 6.4 представлены системы с двумя степенями свободы. Положение грузов (рис. 6.4, *а*), масса которых значительно больше массы пружин, при движении в вертикальном направлении определяется двумя координатами: x_1 и x_2. Системы, изображенные на рис. 6.4, *б*, *в*, могут рассматриваться как системы с двумя степенями свободы, если собственные массы балки и рамы малы по сравнению с массой колеблющихся грузов, а размеры грузов невелики, так что массы их можно считать сосредоточенными.

В случае больших поперечных размеров груза (рис. 6.4, *г*) положение его определяется смещением центра массы x_1 и углом поворота груза x_2. Такая система имеет две степени свободы.

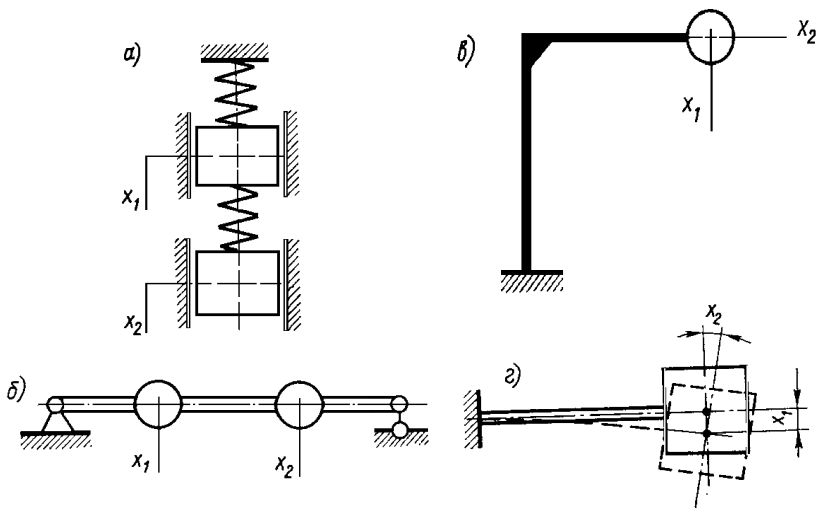


Рис. 6.4. Колебательные системы с двумя степенями свободы

Согласно *второму способу* распределенные по всему объему системы свойства *податливости* локализуются в конечном числе точек (или линий). При этом система представляется в виде совокупности упруго (или вязкоупруго) сочлененных жестких элементов. Например, упругая балка с непрерывно распределенной массой (рис. 6.5, *а*) может быть приближенно заменена цепочкой жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами. При выборе числа шарниров следует исходить из требуемого уровня точности (см. варианты замены на рис. 6.5, *б*, *в*).

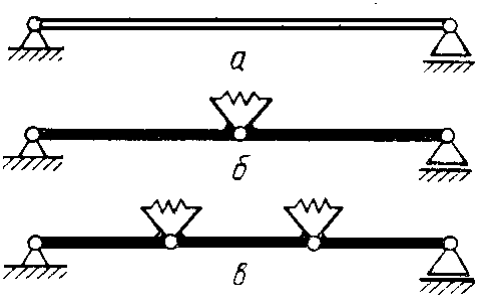


Рис. 6.5. Локализация податливостей в колебательной системе

Третий способ состоит в том, что на основе тех или иных соображений заранее задается форма движения системы.

Так, например, при изгибе балки ее положение в данный момент, как и положение любого деформируемого тела, определяется бесчисленным множеством координат. Однако уже в сопротивлении материалов число степеней свободы балки ограничивается благодаря использованию *гипотезы плоских сечений*. Согласно этой гипотезе положение всех точек балки определяется положением точек, лежащих на ее оси. Благодаря принятию гипотезы плоских сечений задача существенно упрощается (становится одномерной), но число степеней свободы остается бесконечным.

Пусть для определенности речь идет о колебаниях показанной на рис. 6.4, *а* системы с двумя степенями свободы. Согласно этому способу можно принять, что отношение между перемещениями $x_1(t)$, $x_2(t)$, неизменны во времени, а числовые значения такого отношения ($x_2/x_1 = \alpha$) заранее назначаются; разумеется, это вносит элемент *произвола* в решение. В результате движение системы полностью описывается одной функцией времени, например $x_1(t)$, через которую непосредственно выражаются перемещения всех точек системы; такая система имеет всего одну степень свободы.

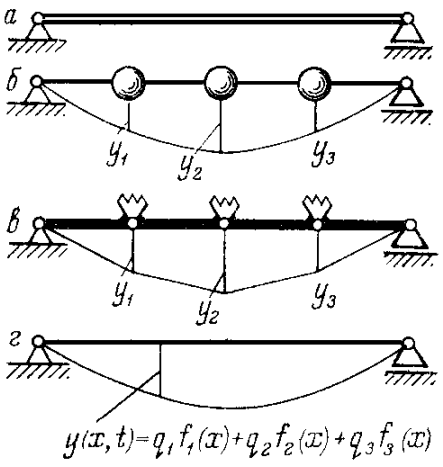


Рис. 6.6. Примеры приведения двухопорной балки к колебательной системе с тремя степенями свободы

Соответственно тому же способу для двухопорной балки (рис. 6.6, *а*) принимается, что в любой момент процесса колебаний форма изогнутой оси остается неизменной и меняется лишь ее масштаб. Если заранее задать форму в виде «подходящей» координатной функции $f(x)$, то прогибы оси балки будут описываться произведением

$$y(x,t) = q(t)f(x), \quad (6.22)$$

в котором $q(t)$ — функция времени, являющаяся единственной неизвестной задачи.

Для иллюстрации на рис. 6.6 показана изогнутая ось балки в избранные моменты процесса колебаний t_1,

t_2 и t_3; все кривые имеют одну и ту же форму и различаются лишь масштабом. Таким образом, при фиксированном выборе функции $f(x)$ выражение (6.22) определяет переход к системе с одной степенью свободы, причем $q(t)$ представляет собой обобщенную координату.

Эта идея приведения к системе с одной степенью свободы лежит в основе *метода Рэлея*, который мы будем изучать ниже.

Точность решения может быть повышена, если вместо (6.22) описать движение балки суммой произведений

$$y(x,t)=\sum_{j=1}^{s} q_j(t) f_j(x) \quad , \tag{6.23}$$

где $f_j(x)$ – задаваемые *координатные функции*, $q_j(t)$ – искомые функции времени, играющие роль обобщенных координат, s – сохраняемое в модели число степеней свободы системы.

Одна и та же система может быть приведена к системе с несколькими степенями свободы любым из трех способов. В качестве примера на рис. 6.6, *а–г* показаны три варианта приведения для двухопорной балки с распределенной массой (рис. 6.6, *а*).

6.2.2. Силы, действующие при колебаниях. Общий вид уравнения движения

В первой части курса говорилось, что обобщенные силы зависят от времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей $Q = Q(t, q, \dot{q})$.

Некоторые зависимости могут присутствовать, другие отсутствовать. Рассмотрим подробнее разновидности сил, ограничиваясь здесь системами с одной степенью свободы.

1. *Вынуждающие (возмущающие) силы* – внешние силы типа $Q(t)$, являющиеся заданными функциями времени; такие силы служат причиной *вынужденных колебаний* в неавтономных системах. Источники возникновения вынуждающих сил весьма разнообразны: периодически изменяющиеся силы давления газовой смеси в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, инерционные эффекты в вибровозбудителях, переменное притяжение электромагнитов и др. Весьма различны и законы их изменения во времени, хотя в практике наиболее часто встречаются периодические вынуждающие силы. Иногда вынуждающие силы не детерминированы, а представляют собой случайные функции времени (случайные процессы).

В некоторых случаях возбуждение колебаний задается *кинематически*, когда каким-либо точкам системы «предписано» некоторое определенное движение – оно также может быть детерминированным или случайным процессом. В частности, кинематическим является возбуждение колебаний автомобиля или железнодорожного вагона при движении по неровному пути. Любое кинематическое возбуждение может быть представлено в виде некоторого эквивалентного силового возбуждения, т.е. заменено действием соответствующих сил.

2. *Позиционные силы* – силы, зависящие от положения (конфигурации) системы, т.е. от обобщенных координат. Среди позиционных сил особое значение имеют *восстанавливающие силы*, т. е. силы, возникающие при отклонениях системы от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть систему в это положение. Именно восстанавливающие силы обусловливают собственные колебательные свойства механических систем – их способность совершать свободные колебания.

В механических системах с упругими элементами восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих элементов при колебаниях (*упругие силы*). В других случаях роль восстанавливающей силы может играть сила тяжести (маятник) или архимедова сила (корабль).

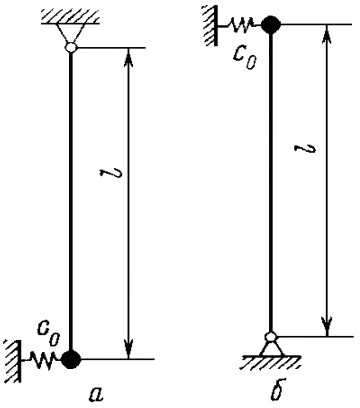


Рис. 6.7. Пример разного влияния дополнительной силы

Зависимости восстанавливающих сил от обобщенных координат, как правило, нелинейны; однако при исследовании малых колебаний – что во многих случаях достаточно – чаще всего допустима линеаризация таких зависимостей. Для системы с одной степенью свободы линейная восстанавливающая сила всегда может быть записана в виде

$$Q(q) = -cq, \qquad (6.24)$$

где q – обобщенная координата, c – обобщенный коэффициент жесткости. Например, если для маятника принять за обобщенную координату угол отклонения от вертикали, то обобщенная сила (момент силы тяжести) равна $-mgl\sin q \approx -mgl\,q$, т.е. $c = mgl$.

Иногда обобщенная восстанавливающая сила возникает вследствие одновременного влияния двух различных причин. Таков, например,

упруго закрепленный маятник (рис. 6.7, *а*), для которого $c = c_0 l^2 + mgl$, где c_0 – коэффициент жесткости пружины, т.е. статическая сила, способная вызвать удлинение пружины на единицу длины. Эти влияния могут быть противоположными по направлению; так, для опрокинутого маятника (рис. 6.7, *б*) $c = c_0 l^2 - mgl$. Если пружина имеет малую жесткость, такую что $c_0 l^2 < mgl$, то обобщенный коэффициент жесткости оказывается отрицательным, т.е. суммарная позиционная сила не является восстанавливающей.

3. *Силы трения* зависят от обобщенных скоростей (по крайней мере, от их знака) и направлены противоположно движению. Силы трения возникают в сочленениях звеньев и опорах механической системы, а также в материале ее звеньев. К этой категории также относятся силы сопротивления среды (жидкости, газа), в которой происходят колебания; такие и им подобные силы ниже условно также называются силами трения.

Особенно значительно трение в *демпферах*, которые специально вводятся в механические системы для гашения колебаний. Чаще всего силы трения препятствуют развитию колебаний, например, служат причиной затухания свободных колебаний; механические системы, в которых действуют такие силы, называются *диссипативными*. В некоторых случаях силы трения оказывают противоположное действие и возбуждают колебания (например, в *автоколебательных системах*).

Зависимость обобщенной силы трения от обобщенной скорости наиболее часто представляют в одной из следующих форм (для диссипативных систем с одной степенью свободы):

– сила вязкого (линейного) трения

$$Q(\dot{q}) = -b\dot{q}\ ; \tag{6.25}$$

– сила сухого (кулонова) трения

$$Q(\dot{q}) = -b\,\mathrm{sign}\,\dot{q}; \tag{6.26}$$

– сила нелинейно-вязкого трения, обычно аппроксимируемая зависимостью

$$Q(\dot{q}) = -b\,|\dot{q}|^{\mathrm{n}}\,\mathrm{sign}\,\dot{q} \ \text{ или } \ Q(\dot{q}) = -b_1\dot{q} - b_3\dot{q}^3 - b_5\dot{q}^5 - \ldots . \tag{6.27}$$

В некоторых системах действуют силы *смешанного характера*. Таковы, например, силы $Q(q,t)$, зависящие от координат и времени, которые нельзя представить в виде суммы позиционной силы и вынуждающей силы; эти силы характерны для параметрических систем, о которых кратко было уже сказано выше. Смешанным характером обладают также силы $Q(q, \dot{q})$, зависящие от координат и скоростей и притом непредставимые в

виде суммы позиционной силы и силы трения; иногда такие силы придают механической системе автоколебательные свойства.

При составлении механической модели большое значение имеет разумное пренебрежение несущественными составляющими сил, а для учитываемых в анализе составляющих – правильная схематизация их свойств. Так, при определении собственных частот механических систем в большинстве случаев допустимо пренебречь действием сил трения; ими можно пренебречь и при исследовании вынужденных колебаний в достаточном удалении от резонанса. Аналогично этому если рассматриваются малые колебания, то часто можно не учитывать нелинейность восстанавливающих сил.

Впрочем, подобные упрощения нужно делать осторожно, имея в виду, что, казалось бы, малые влияния иногда могут явиться причиной важных следствий принципиального характера. Так, даже весьма малые силы трения необходимо учитывать при анализе затухания свободных колебаний, а также при определении резонансных или околорезонансных амплитуд вынужденных колебаний. Подобно этому нужно помнить, что даже малые параметрические силы могут вызвать весьма опасные колебания типа параметрического резонанса.

Необходимо иметь в виду, что возможность схематизировать реальную систему и представить ее в виде системы с одной, двумя и большим числом степеней свободы зависит не только от вида системы, но и от характера воздействующих на нее сил.

Так, например, если в системе, изображенной на рис. 6.3, *а*, оттянуть пружину в сторону, а затем отпустить, то возникнут ее боковые колебания, при которых нельзя пренебречь собственной массой пружины, как бы мала она ни была. При исследовании такого рода колебаний систему уже нельзя рассматривать как имеющую одну степень свободы.

Таким образом, выбор той или иной расчетной схемы может быть сделан только в результате изучения физической природы рассматриваемых явлений и в зависимости от требований, предъявляемых к точности расчета.

Для начала мы ограничимся рассмотрением систем только с одной степенью свободы. Эти системы наиболее просты, а закономерности, справедливые для них, справедливы и для более сложных систем. Как мы увидим далее, часто задача о колебаниях сложной системы с n степенями свободы может быть сведена к n задачам о колебаниях системы с одной степенью свободы.

Уравнение движения системы с одной степенью свободы включает в общем случае четыре члена – силу инерции, восстанавливающую (пози-

ционную) силу упругости, вынуждающую (возмущающую) силу и силу трения.

Рассмотрим, например, тело массой m (рис. 6.8), которое может перемещаться в заданном направлении (связь неидеальная, поэтому заменяем ее на идеальную и учитываем трение) и удерживается упругой связью (идеальная связь с потенциальной силой). Уравнение движения этого тела имеет вид

$$-m\ddot{x} - R(\dot{x}) - F(x) + P(t) = 0,$$

где $\ddot{x}$ – ускорение груза; R – сила трения; F – сила упругости, действующая на тело со стороны упругого элемента; $P(t)$ – возмущающая сила.

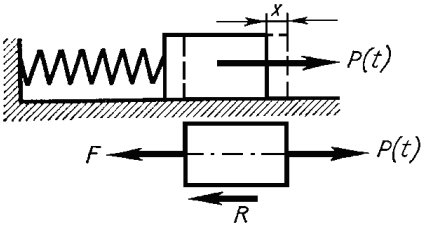


Рис. 6.8. Пример системы с одной степенью свободы

Представляет интерес рассмотрение свободных колебаний идеализированной системы при отсутствии сил трения и вынуждающей силы. В этом случае $P(t) = 0$, $R = 0$, система изолирована от окружающей среды и является консервативной. Для консервативных систем с одной степенью свободы в любой момент времени силы инерции уравновешиваются силами упругости.

6.3. Свободные колебания линейной консервативной системы

В большинстве упругих систем при достаточно *малых перемещениях* сила упругости линейно зависит от перемещения x. Если начало отсчета смещения x выбирать так, что при $x = 0$ $F = 0$, то для линейной системы $F = cx$, где c – коэффициент упругости системы.

Итак, дифференциальное уравнение движения при свободных колебаниях консервативной линейной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{6.28}$$

Вид уравнения не меняется при действии на систему постоянных сил (например, силы тяжести), если смещение тела отсчитывать от положения его статического равновесия.

Действительно, уравнение движения тела массой m, находящегося под действием силы тяжести и совершающего свободные колебания (рис. 6.3, *а*), имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - c(x + x_{ст}), \tag{6.29}$$

где $x_{ст} = \dfrac{mg}{c}$ – статическое удлинение пружины от силы тяжести груза. Следовательно, слагаемые mg и $cx_{ст}$ в уравнении (6.29) взаимно уничтожаются и уравнение (6.29) совпадает с (6.28).

Уравнение движения одномассовой консервативной линейной системы, совершающей свободные крутильные колебания, записывают аналогично:

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0,$$

где I – момент инерции движущегося тела; φ – угол поворота тела; c – крутильная жесткость упругой связи.

Как известно, решение уравнения (6.28) имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{6.30}$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – угловая собственная частота (круговая частота собственных колебаний); C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Обозначив смещение и скорость в начальный момент $t = 0$ соответственно через x_0 и $\dot{x}_0$, после подстановки в уравнение (6.30) найдем

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}. \tag{6.31}$$

Выражение (6.30) можно записать в виде

$$x = A\sin(\omega t + \varphi). \tag{6.32}$$

Таким образом, движение груза при свободных колебаниях консервативной одномассовой линейной системы описывается синусоидальным законом с амплитудой колебаний A, периодом T и начальной фазой φ (рис. 6.9), при этом

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \tag{6.33}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}. \tag{6.34}$$

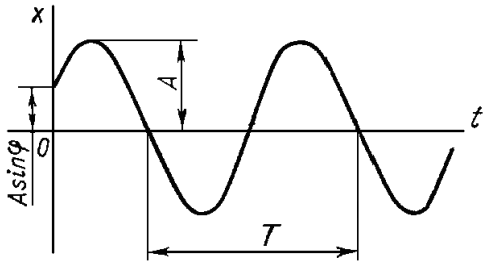


Рис. 6.9. График гармонических колебаний

Период колебаний T определяется из условия $\omega T = 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \tag{6.35}$$

и не зависит от амплитуды колебаний, начальных значений скорости и смещения.

Число колебаний в единицу времени (техническая частота)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{6.36}$$

6.4. Вынужденные колебания линейной системы без трения

В качестве модели системы с одной степенью свободы вновь рассмотрим тело массой m, удерживаемое упругой связью с жесткостью c (рис. 6.10). На тело действует переменная внешняя сила $P(t)$.

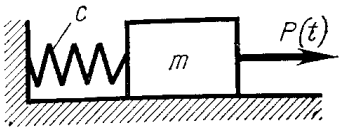


Рис. 6.10. Линейная система с вынуждающей силой

В этом случае уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x} + c\,x = P(t),$$

или, после деления на m,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{m}. \tag{6.37}$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (6.37) равно сумме какого-либо частного его решения x_* и общего решения однородного уравнения:

$$x = x_* + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \,. \tag{6.38}$$

6.4.1. Импульсивная нагрузка

Для вычисления частного решения при произвольной нагрузке рассмотрим сначала воздействие на заданную систему импульсивной нагрузки. Пусть на неподвижную и недеформированную систему в течение бесконечно малого времени $-\theta < t < 0$ действует бесконечно большая сила, так что импульс силы

$$\lim_{\theta \to 0} \int_{-\theta}^{0} P dt = J$$

имеет конечное значение. В соответствии с теоремой импульсов (законом сохранения количества движения) тело получает за время действия импульса скорость $v = J/m$. Смещение груза за время действия импульса при $\theta \to 0$ также стремится к нулю. Таким образом, по окончании действия импульса при t = 0 тело имеет нулевое смещение и скорость v.

Далее (при $t > 0$) система совершает свободные колебания в соответствии с формулой

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \,.$$

Начальные условия свободного движения определяются равенствами

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v = \frac{J}{m},$$

и, следовательно, закон движения определяется зависимостью

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{J}{m\omega} \sin \omega t = J \cdot Y(t) \tag{6.39}$$

Здесь введено специальное обозначение для закона движения системы под действием единичного импульса

$$Y(t) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \,. \tag{6.40}$$

Функцию $Y(t)$ называют *реакцией системы на единичный импульс*.

6.4.2. Произвольная нагрузка

Пусть к системе, изображенной на рис. 6.10, приложена сила $P(t)$, меняющаяся по произвольному закону. Найдем частное решение уравнения движения, предполагая, что в начальный момент $t=0$ система неподвижна и не деформирована.

Поскольку рассматриваемая система является линейной, для нее справедлив принцип суперпозиции. Это означает, что перемещение (в функции времени), вызываемое несколькими нагрузками, равно сумме перемещений, вызываемых каждой из нагрузок.

Поэтому произвольную нагрузку представим в виде суммы следующих один за другим бесконечно малых импульсов, действующих за бесконечно малый промежуток времени от τ до $\tau+d\tau$ (рис. 6.11):

$$dJ = P(\tau)d\tau\ .$$

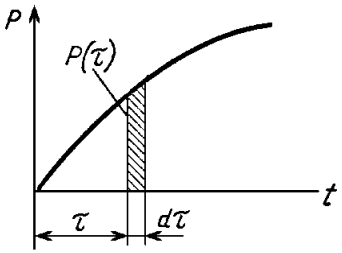


Рис. 6.11. Представление произвольной нагрузки

Каждый из таких импульсов вызывает в момент $t > \tau$ смещение

$$dx_* = P(\tau)d\tau\, Y(t-\tau)$$

где $Y(t)$ – реакция системы на единичный импульс.

Полное смещение в момент t равно сумме смещений, вызываемых всеми элементарными импульсами, приложенными при $\tau < t$. Иначе говоря,

$$x_* = \int_0^t P(\tau)\, Y(t-\tau)\, d\tau\ . \qquad (6.41)$$

Выражение (6.41) называют *интегралом Дюамеля*. Для рассматриваемой системы реакция на единичный импульс должна быть заменена ее значением в соответствии с уравнением (6.40) и тогда

$$x_* = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau\,. \qquad (6.42)$$

Следует отметить, что область применения формулы (6.41) значительно шире, чем формулы (6.42), справедливой лишь для рассмотренной простейшей одномассовой системы. При выводе формулы (6.41) использовался только принцип суперпозиции. Поэтому интеграл Дюамеля выражает частное решение для любой линейной системы через ее реакцию на единичный импульс.

Нетрудно проверить подстановкой, что выражение (6.42) в самом деле представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения (6.37). При дифференцировании выражения (6.42) следует учесть, что t является верхним пределом интеграла и, кроме того, входит в подынтегральное выражение в качестве параметра. Поэтому производная $\frac{dx_*}{dt}$ складывается из производной по верхнему пределу и производной по параметру:

$$x_* = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin(\omega t-\omega\tau)\,d\tau\,,$$

$$\frac{dx_*}{dt} = \frac{1}{m\omega}P(t)\sin(\omega t-\omega t) + \frac{1}{m}\int_0^t P(\tau)\cos(\omega t-\omega\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^t P(\tau)\cos(\omega t-\omega\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{d^2x_*}{dt^2} = \frac{1}{m}P(t)\cos(\omega t-\omega t) - \frac{\omega}{m}\int_0^t P(\tau)\sin(\omega t-\omega\tau)\,d\tau = \frac{P(t)}{m} - \omega^2 x_*\,.$$

Подстановка последнего выражения в уравнение (6.37) обращает его в тождество.

Так как при $t = 0$ $x_*(0) = 0$, $\dot{x}_*(0) = 0$ (т.е. частное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям), то постоянные C_1 и C_2 в выражении (6.38) связаны с начальными условиями движения теми же зависимостями, как и при свободных колебаниях. Поэтому при ненулевых начальных условиях перемещение в любой момент времени определяется выражением

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin\left[\omega(t-\tau)\right] d\tau .$$

В заключение отметим, что путем замены переменной интегрирования на $\tau = t - T$ интеграл Дюамеля (6.41) может быть представлен также в виде

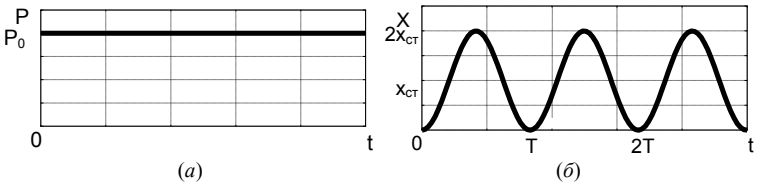
$$x_*(t) = -\int_t^0 P(t-T)\, Y(T)\, dT = \int_0^t P(t-\tau)\, Y(\tau)\, d\tau , \qquad (6.43)$$

или после подстановки выражения (6.40)

$$x_*(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(t-\tau) \sin \omega\tau \, d\tau . \qquad (6.44)$$

6.4.3. Внезапная нагрузка

Пусть в начальный момент времени к неподвижной и недеформированной системе прикладываются мгновенно возрастающая и в дальнейшем сохраняющая постоянное значение P_0 нагрузка (рис. 6.12, *а*).



(*а*) (*б*)

Рис. 6.12. Графики внезапной нагрузки (*а*) и соответствующего решения уравнения колебаний (*б*)

Здесь введена функция

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\tau)\, d\tau ,$$

которую называют *реакцией системы на внезапно приложенную единичную нагрузку*. Для нашей системы

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{\sin\omega\tau}{m\omega}\,d\tau = \frac{1-\cos\omega t}{m\omega^2}\ , \qquad (6.45)$$

и, следовательно, перемещение системы под действием внезапно приложенной нагрузки составляет

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega^2}\left(1-\cos\omega t\right). \qquad (6.46)$$

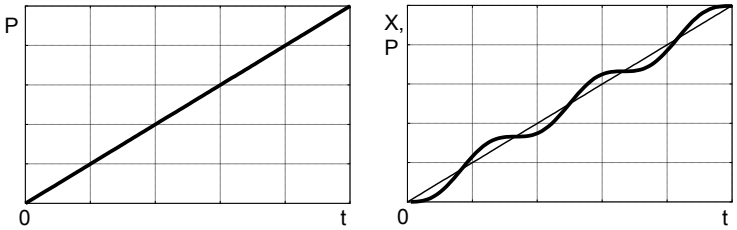
Так как $m\omega^2 = c$ (жесткость упругой связи), то

$$\frac{P_0}{m\omega} = x_{\text{ст}}$$

представляет собой статическую деформацию упругой связи, и из формулы (6.46) следует, что *максимальное динамическое перемещение при внезапном приложении нагрузки вдвое больше статического, а минимальное равно нулю*. График зависимости $x(t)$ приведен на рис. 6.12, *б*.

6.4.4. Линейно возрастающая нагрузка

Закон изменения нагрузки (рис. 6.13, *а*) задан формулой $P(t) = kt$.



(*а*) (*б*)

Рис. 6.13. Графики линейно-возрастающей нагрузки (*а*) и соответствующего решения уравнения колебаний (*б*)

Если эта нагрузка прикладывается к неподвижной и недеформированной системе, то перемещения определяются формулой

$$x(t) = \int_0^t k\left(t-\tau\right)Y(\tau)d\tau = k\cdot Y_2(t)\,.$$

Здесь введено обозначение

$$Y_2(t) = \int_0^t (t-\tau) Y(\tau) d\tau$$

для функции, которую называют *реакцией системы на линейно возрастающую нагрузку*.

Выполняя интегрирование по частям, нетрудно установить связь функции $Y_2(t)$ с функцией $Y_1(t)$:

$$Y_2(t) = \int_0^t (t-\tau) Y(\tau) d\tau = \left[(t-\tau) \int_0^{\tau} Y(\tau_1) d\tau_1 \right]_0^t + \int_0^t \int_0^{\tau} Y(\tau_1) d\tau_1 d\tau = \\ = \int_0^t Y_1(\tau) d\tau. \qquad (6.47)$$

Итак, реакции линейной системы на единичный импульс $Y(t)$, на внезапно приложенную $Y_1(t)$ и на линейно возрастающую нагрузку $Y_2(t)$ связаны зависимостями

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\tau) d\tau, \qquad Y_2(t) = \int_0^t Y_1(\tau) d\tau.$$

В частном случае системы, представленной на рис. 6.10,

$$Y_2(t) = \int_0^t \frac{1-\cos\omega\tau}{m\omega^2} d\tau = \frac{1}{m\omega^2}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t \right). \qquad (6.48)$$

Перемещения, вызываемые силой $P(t) = kt$, определяются при этом выражением

$$x(t) = kY_2(t) = \frac{k\,t}{m\omega^2}\left(1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t}\right) = \frac{P(t)}{c}\left(1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t}\right).$$

Здесь первое слагаемое соответствует статическому перемещению, пропорциональному приложенной в данный момент нагрузке, второе слагаемое отражает влияние колебаний. График изменения перемещений показан на рис. 6.13.

6.4.5. Выражение частного решения через реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку

Наряду с формулами (6.41) и (6.43) для интеграла Дюамеля, в которые входит реакция системы на единичный импульс, закон вынужденного

движения можно также выразить через функции $Y_1(t)$ или $Y_2(t)$. Произвольную нагрузку $P(t)$ можно представить не только как последовательность импульсов, но и как последовательность внезапно приложенных постоянных нагрузок. В момент времени $t = 0$ прикладывается начальная нагрузка $P(0)$, а в момент τ – бесконечно малая нагрузка

$$dP = \dot{P}(\tau)d\tau ,$$

где $\dot{P}(\tau)$ – скорость роста нагрузки. Используя реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку Y_1 и суммируя эффект всех ранее приложенных нагрузок, получаем в момент времени t

$$x(t) = P(0)Y_1(t) + \int_0^t \dot{P}(\tau)Y_1(t-\tau)d\tau . \qquad (6.49)$$

Формулу (6.49) можно получить путем интегрирования по частям выражений (6.41) или (6.43) с учетом того, что функции Y, Y_1 и Y_2 связаны между собой зависимостями (6.47).

Приведем простой пример использования функций Y_1 и Y_2 для расчета переходных процессов в линейной системе с одной степенью свободы.

Постоянная сила P_0 воздействует на систему в течение времени $0 < t < t_0$ (рис. 6.14, *а*).

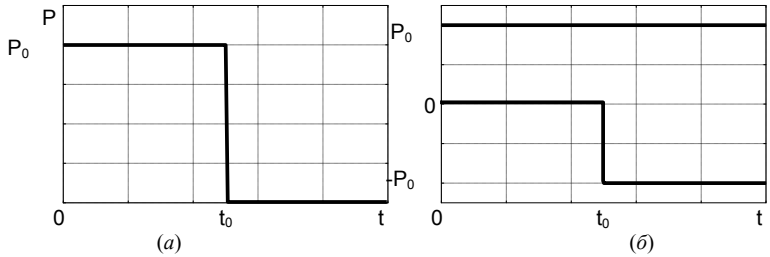


Рис. 6.14. Графики действующей нагрузки (*а*) и его представление для получения решения (*б*)

Закон изменения нагрузки представим как внезапное приложение силы P_0 при $t = 0$ и внезапное приложение отрицательной силы $-P_0$ при $t = t_0$ (рис. 6.14, *б*). Первая из этих нагрузок (при $t > 0$) вызовет перемещение

$$x_1 = P_0 Y_1(t) ,$$

а вторая (при $t > t_0$) $x_2 = -P_0 Y_1(t - t_0)$,

где $Y_1(t) = \frac{1}{c}\left(1 - \cos \omega t\right)$

есть реакция системы на единичную внезапно приложенную постоянную нагрузку.

Таким образом, полное перемещение, вызванное обеими нагрузками, составит:

– при $0 < t < t_0$

$$x = P_0 Y_1(t) = \frac{P_0}{c}\left(1 - \cos \omega t\right);$$

– при $t > t_0$

$$x = P_0 Y_1(t) - P_0 Y_1(t - t_0) = \frac{P_0}{c}\left(\cos \omega (t - t_0) - \cos \omega t\right) =$$

$$= \frac{2P_0}{c} \sin \frac{\omega t_0}{2} \sin \omega \left(t - \frac{t_0}{2}\right).$$

Из полученных формул видно, что если время приложения нагрузки t_0 превышает половину периода собственных колебаний ($t_0 > \pi/\omega$), то максимум перемещения

$$x_{\max} = \frac{2P_0}{c} = 2x_{cm}$$

достигается еще во время действия нагрузки. Если время действия нагрузки меньше полупериода собственных колебаний, то максимальное перемещение достигается уже после прекращения действия нагрузки. В этом случае

$$x_{\max} = \frac{2P_0}{c} \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2x_{cm} \sin \frac{\omega t_0}{2}$$

и будет меньше, чем в первом случае, поскольку синус всегда не больше единицы.

В приведенном примере можно было получить результат и не пользуясь методом наложения, однако при расчете нестационарных процессов в более сложных линейных системах этот метод обладает значительными преимуществами.

6.4.6. Гармоническое возбуждение

Поведение линейной системы без трения при гармонической возмущающей силе

$$P(t) = P_0 \cos \theta t \,,$$

где θ – угловая частота изменения нагрузки, описывается уравнением движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \cos \theta t \,. \tag{6.50}$$

Решение этого уравнения можно получить, вычислив интеграл Дюамеля при $P(\tau) = P_0 \cos \theta \tau$. Полученное в результате выражение представляет собой сумму колебаний с частотами ω и θ. Слагаемые, изменяющиеся с частотой собственных колебаний ω, зависят от начальных условий.

В реальных системах свободные колебания с частотой ω со временем затухают и через некоторое время устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные колебания с частотой возмущения θ. Решение уравнения (6.50), отвечающее таким стационарным колебаниям, представим в виде

$$x(t) = A \cos \theta t \,. \tag{6.51}$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.50), получаем

$$-\theta^2 A \cos \theta t + \omega^2 A \cos \theta t = \frac{P_0}{m} \cos \theta t \,,$$

откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{P_0}{m\left(\omega^2 - \theta^2\right)} = \frac{P_0}{m\omega^2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = A_0 \beta, \tag{6.52}$$

где $A_0 = \dfrac{P_0}{m\omega^2} = \dfrac{P_0}{c}$ – равновесная амплитуда, равная статической деформации упругой связи амплитудной силой P_0; $\beta = \dfrac{A}{A_0} = \left(1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)^{-1}$ – коэффициент усиления колебаний в связи с инерционностью системы (*коэффициент динамичности*).

Коэффициент динамичности β определяет рост амплитуды вынужденных колебаний и зависит от отношения частоты изменения возмущающей силы к частоте собственных колебаний системы. Эта зависимость графически представлена на рис. 6.15. Отрицательные значения β означают, что колебания системы происходят в противофазе с возмущающей силой, поэтому практическое значение имеют абсолютные значения этого коэффициента.

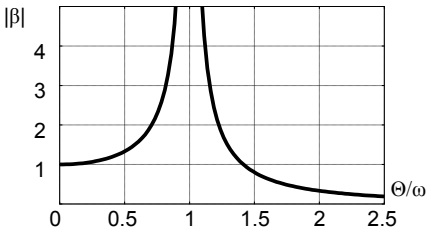


Рис. 6.15. Зависимость коэффициента динамичности от частоты возмущающей силы

При частоте возмущения, равной частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности – имеет место *явление резонанса*. Это объясняется тем, что если колебания происходят с собственной частотой, то силы упругости уравновешиваются силами инерции при любом значении амплитуды колебаний. Внешняя возмущающая сила оказывается неуравновешенной.

Таким образом, в случае резонанса сделанное допущение о возможности рассматривать стационарные колебания является необоснованным и, чтобы изучить процесс развития колебаний, нужно рассмотреть решение уравнения движения в форме интеграла Дюамеля.

Так как при резонансе $\theta = \omega$ и $P(t) = P_0 \cos \omega t$, получим при нулевых начальных условиях

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \cos \omega\tau \cdot \sin\left[\omega(t-\tau)\right] d\tau =$$

$$= \frac{P_0}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t \cos^2 \omega\tau \, d\tau - \cos \omega t \int_0^t \cos \omega\tau \cdot \sin \omega\tau \, d\tau \right] = \frac{P_0}{2m\omega} t \cdot \sin \omega t .$$

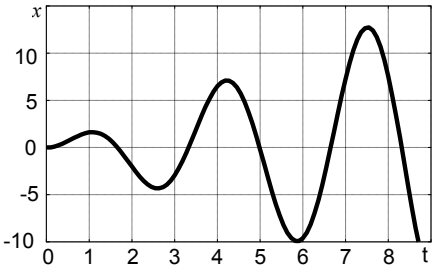


Рис. 6.16. График колебаний при гармоническом возбуждении

Как видно из полученной формулы, колебания при резонансе не являются гармоническими, а размахи их растут пропорционально времени. График движения показан на рис. 6.16. Конечно, безграничное нарастание колебаний возможно лишь в рассматриваемой идеализированной линейной системе при отсутствии потерь. В реальных системах наличие потерь и проявление нелинейности при достаточно больших размахах колебаний приводит к ограничению амплитуд. Но и в реальных механических системах коэффициенты динамичности при резонансе оказываются настолько большими, что работа при режимах, близких к резонансному, как правило, недопустима.

6.4.7. Негармоническое периодическое возбуждение

Пусть внешняя сила, действующая на одномассовую систему, изменяется по некоторому произвольному, но периодическому закону (рис. 6.17) с периодом *T*.

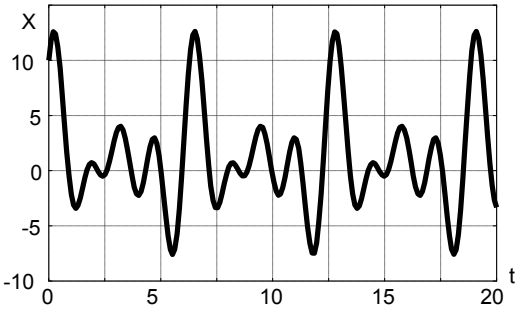


Рис. 6.17. Вид негармонического периодического возбуждения

В этом случае вынужденные установившиеся колебания могут быть рассчитаны двумя способами.

1. Наиболее простой метод расчета состоит в том, что периодическая внешняя нагрузка представляется в виде ряда Фурье

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos\theta t + a_2 \cos 2\theta t + \ldots b_1 \sin\theta t + b_2 \sin 2\theta t + \ldots, \quad (6.53)$$

где θ – частота, соответствующая периоду T возмущающей силы,

$$\theta = \frac{2\pi}{T}.$$

Коэффициенты разложения определяются по известным формулам из теории рядов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt\ ,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\cos k\theta t dt\ ,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\sin k\theta t dt\ .$$

Смещение груза от действия силы $P(t)$, представленной в виде ряда (6.53), на основе принципа независимости действия сил равно сумме смещений, вызванных каждым из членов ряда и определяемых по формулам (6.51) и (6.52):

$$x = \frac{a_0}{c} + \frac{a_1}{c(1-\theta^2/\omega^2)}\cos\theta t + \frac{a_2}{c(1-4\theta^2/\omega^2)}\cos 2\theta t + \ldots + \\ + \frac{b_1}{c(1-\theta^2/\omega^2)}\sin\theta t + \frac{b_2}{c(1-4\theta^2/\omega^2)}\sin 2\theta t + \ldots. \quad (6.54)$$

Амплитуда колебаний стремится к бесконечности при обращении в нуль знаменателя любого члена ряда, т.е. при $\theta = \omega$, $\theta = \omega/2$, $\theta = \omega/3$ и т.д.

Таким образом, при негармоническом периодическом возбуждений резонанс возникает, когда частота любой k-й гармоники совпадает с собственной частотой колебаний системы:

$$k\theta = \omega\ ,\ (k = 1,2,3,\ldots).$$

Не обязательно, конечно, осуществляются все резонансы. В разложении силы $P(t)$ в ряд Фурье некоторые коэффициенты могут оказаться равными нулю, соответствующих гармоник не будет и в выражении для x.

Решение задачи о колебаниях под действием произвольной периодической нагрузки с помощью рядов Фурье целесообразно для выявления условий резонанса.

2. В случае, если нас интересует закон стационарного движения, целесообразен другой путь решения. Предположим, что нагрузка, действующая на систему, меняется по некоторому периодическому закону (рис. 6.17). Выбрав произвольно начало отсчета времени, рассмотрим движение в течение одного периода T возмущающей силы. Общее решение уравнения движения складывается из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т.е. его можно записать в форме

$$x = x_0 \cos \omega t + \dot{x}_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega (t - \tau) d\tau \, .$$

Смещение x_0 и скорость $\dot{x}_0$ в начале отсчета времени ($t = 0$) и в конце периода ($t = T$) определяются из условий периодичности движения:

$$x(T) = x(0) = x_0 \, , \; \dot{x}(T) = \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \, .$$

Подставляя в эти условия выражение для x, получаем:

$$\begin{aligned} x_0 (1 - \cos \omega T) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega T &= B_1, \\ x_0 \omega \sin \omega T + \dot{x}_0 (1 - \cos \omega T) &= B_2, \end{aligned} \tag{6.55}$$

где

$$B_1 = \frac{1}{m\omega} \int_0^T P(\tau) \sin \omega (T - \tau) d\tau,$$

$$B_2 = \frac{1}{m} \int_0^T P(\tau) \cos \omega (T - \tau) d\tau.$$

Решая систему уравнений (6.55), определяем x_0 и $\dot{x}_0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \left[B_1 + \frac{B_2}{\omega} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right], \\ \dot{x}_0 &= \frac{1}{2} \left[B_2 - B_1 \omega \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Подстановка значений x_0 и $\dot{x}_0$ в общее выражение для x позволяет определить в замкнутой форме закон движения за период $0 < t < T$.

Как видно из формул (6.56), x_0 и $\dot{x}_0$ обращаются в бесконечность при $\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)=0$, т.е. если $\omega T = 2\pi k$ или $\omega = \frac{2\pi}{T}k = \theta k$.

Таким образом, этот путь решения приводит к тому же условию резонанса, что и разложение возмущающей силы в ряд Фурье.

В качестве примера рассмотрим поведение упругой одномассовой системы при действии периодических импульсов. Установив начало отсчета времени сразу после очередного импульса, так что следующий импульс величиной J воздействует в самом конце рассматриваемого периода при $t = T - \varepsilon$ $(\varepsilon \to 0)$, найдем

$$B_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m\omega}\int_{T-\varepsilon}^{T} P(\tau)\sin\omega(T-\tau)d\tau = 0,$$

$$B_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m}\int_{T-\varepsilon}^{T} P(\tau)\cos\omega(T-\tau)d\tau = \frac{J}{m}.$$

По формулам (6.56) находим смещение и скорость при $t = 0$:

$$x_0 = \frac{J}{2m\omega}\operatorname{ctg}\frac{\omega T}{2},\ \dot{x}_0 = \frac{J}{2m}.$$

Поскольку на протяжении всего периода $0 < t < T - \varepsilon$ возмущающая сила отсутствует, уравнение движения имеет вид (отсутствует слагаемое, соответствующее частному решению неоднородного уравнения)

$$x = \frac{J}{2m\omega}\left[\operatorname{ctg}\frac{\omega T}{2}\cos\omega t + \sin\omega t\right],\ (0 < t < T - \varepsilon).$$

Движение в другие периоды времени определяется условиями периодичности. Характер движения при $T < \frac{\pi}{\omega}$ показан на рис. 6.18.

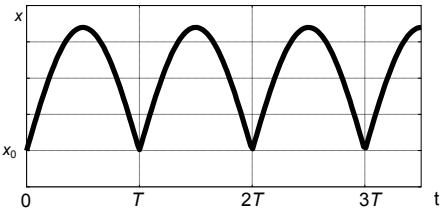


Рис. 6.18. Характер движения под действием периодических импульсов

Можно отметить, что на фазовом портрете колебания с возрастающей амплитудой будут изображаться в виде разворачивающейся спирали. Если это соответствует режиму установления от свободных колебаний к стационарным вынужденным, то эта спираль выйдет на новый эллипс. В случае резонанса спираль уходит на бесконечность.

6.5. Затухание свободных колебаний

Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом трения. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + R = 0 .$$

Зависимость силы трения R от скорости движения или смещения определяется физической природой трения. Наиболее простым случаем является так называемое вязкое трение.

6.5.1. Линейное вязкое трение

Рассмотрим случай линейного вязкого трения, когда сила трения пропорциональна скорости движения: $R = \alpha\dot{x}$. Такая сила сопротивления возникает, например, в гидравлических амортизаторах, работающих при ламинарном режиме течения жидкости, успокоителях колебаний, основанных на действии токов Фуко, и в других технических устройствах. В этом случае уравнение движения можно привести к виду

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0 , \qquad (6.57)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2m} , \ \omega^2 = \frac{c}{m} .$$

График зависимости суммарной силы от координаты имеет вид, представленный на рис. 6.19.

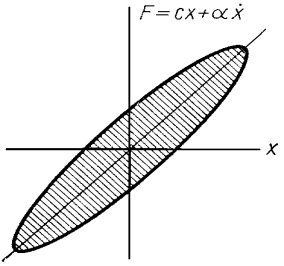


Рис. 6.19. Зависимость суммарной
(упругой и вязкой) силы от координаты

По правилу решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем решение в виде $x = \exp(s \cdot t)$, составляем характеристическое уравнение

$$s^2 + 2\varepsilon s + \omega^2 = 0 \cdot$$

При очень большом трении, когда $\varepsilon^2 > \omega^2$, все корни вещественные и решение соответствует постепенному уменьшению координаты без колебаний. При $\varepsilon^2 < \omega^2$

$$s = -\varepsilon \pm i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} \cdot$$

Обозначим

$$\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \omega_1 \cdot \tag{6.58}$$

Тогда решение уравнения (6.57) будет определяться формулой

$$x = e^{-\varepsilon t}\left(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t\right), \tag{6.59}$$

или

$$x = Ae^{-\varepsilon t} \cos\left(\omega_1 t + \varphi\right).$$

Следовательно, при наличии вязкого трения движение груза описывается *непериодическим* законом, представленным графически на рис. 6.20.

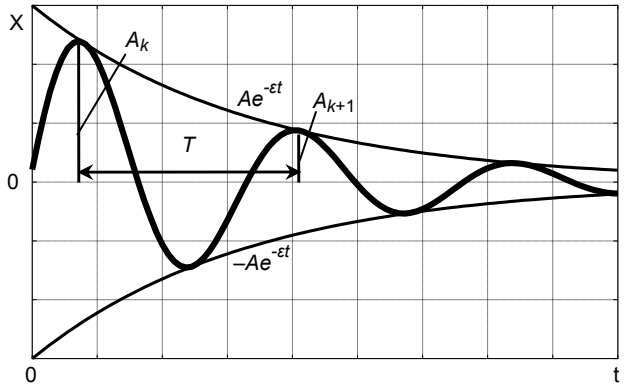


Рис. 6.20. Периодические затухающие колебания

Однако часто это движение называют *периодическими затухающими колебаниями*, несмотря на неточность такого названия. Под *периодом* T_1 этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}}.$$

Величину ω_1 называют, соответственно, *угловой частотой затухающих колебаний*. Отношение двух последовательных максимальных отклонений A_k, A_{k+1} составляет

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\varepsilon T_1} > 1.$$

Таким образом, последовательные максимальные отклонения системы от равновесного положения представляют собой члены геометрической прогрессии со знаменателем, равным $e^{-\varepsilon T_1}$. Чаще рассматривают не отношение двух последовательных отклонений, а логарифм этого отношения, который называют *логарифмическим декрементом* колебания:

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \varepsilon T_1.$$

В металлоконструкциях, где нет специально введенных элементов трения, логарифмический декремент составляет обычно от нескольких сотых до десятых долей единицы.

Если колебания затухают медленно и отношение двух последовательных отклонений близко к единице, то, введя среднее значение амплитуды $\Delta A = A_k - A_{k+1}$ и ее изменение за период $A = \frac{A_k + A_{k+1}}{2}$, получим

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \ln \frac{A + \frac{\Delta A}{2}}{A - \frac{\Delta A}{2}} \approx \frac{\Delta A}{A} \approx 0{,}001..0{,}01.$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен отношению изменения амплитуды колебаний за период T_1 к амплитуде A.

Теперь посмотрим, насколько отличается частота затухающих колебаний от частоты свободных собственных колебаний.

Так как логарифмический декремент колебания

$$\delta = \varepsilon T_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_1} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}},$$

то, возведя обе части в квадрат, получим

$$\varepsilon^2 = \omega^2 \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2\right]^{-1}.$$

Подставив это значение ε^2 в формулу (6.58), установим связь между ω_1, ω и δ:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}} \approx \omega. \tag{6.60}$$

Из формулы (6.60) видно, что даже при значительном затухании частота затухающих колебаний мало отличается от частоты собственных колебаний соответствующей консервативной системы. Так, например, при сравнительно большом затухании, когда каждый следующий размах вдвое меньше предыдущего $A_k = 2A_{k+1}$, частота ω_1 лишь на 0,6% меньше, чем ω. *Таким образом, можно считать, что трение не влияет на частоту колебаний и* $\omega \approx \omega_1$.

Определим постоянные интегрирования в уравнении затухающих колебаний (6.59). Обозначив смещение и скорость в начальный момент времени $t = 0$ соответственно через x_0 и $\dot{x}_0$, найдем

$$x_0 = C_1; \qquad \dot{x}_0 = -C_1\varepsilon + C_2\omega_1.$$

Итак,

$$C_1 = x_0; \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1},$$

и выражение для смещения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x = e^{-\varepsilon t}\left(x_0 \cos\omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right).$$

Заметим, что если движение вызвано импульсом силы J, приложенным к неподвижной системе при $t = 0$, то возникает начальная скорость

$$\dot{x}_0 = \frac{J}{m}$$

и смещения изменяются по закону

$$x = \frac{J}{m\omega_1} e^{-\varepsilon \cdot t} \sin(\omega_1 t).$$

Полагая в этой формуле $J = 1$, находим реакцию на единичную импульсную нагрузку системы с трением, пропорциональным скорости:

$$Y(t) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\varepsilon \cdot t} \sin(\omega_1 t).$$

Отметим, что на фазовом портрете затухающие колебания изображаются в виде сворачивающейся спирали. Подробнее обсудим этот вопрос на примере сухого трения.

6.5.2. Сухое (кулоново) трение

Рассмотрим движение упруго закрепленного груза массой m по шероховатой поверхности (рис. 6.21).

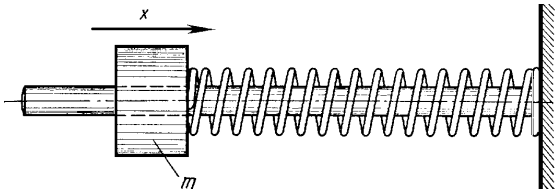


Рис. 6.21. Пример колебательной системы с сухим трением

Сила трения, действующая на груз, постоянна по величине и направлена против движения. Уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx \pm R_0 = 0 \qquad (6.61)$$

где знак «плюс» соответствует этапу движения, на котором скорость положительна, а знак «минус» – этапу движения, на котором скорость отрицательна. Зависимость от x полной действующей на груз силы $F = cx \pm R_0$ показана на рис. 6.22.

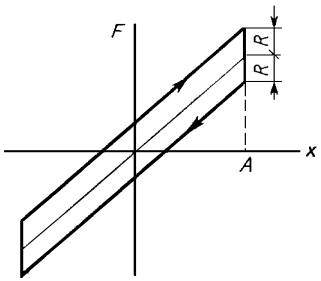


Рис. 6.22. Зависимость суммарной силы от координаты в случае сухого трения

Запишем уравнение (6.61) в форме

$$m\ddot{x} + cx + R_0 \operatorname{sgn} \dot{x} = 0 . \qquad (6.62)$$

Функция $\operatorname{sgn} x$ есть единичная функция, имеющая знак аргумента. При $x > 0$ $\operatorname{sgn} x = 1$, при $x < 0$ $\operatorname{sgn} x = -1$, при $x = 0$ $\operatorname{sgn} x = 0$.

Уравнение (6.62) содержит нелинейное слагаемое. Тем не менее мы легко найдем решение этого уравнения, рассмотрев последовательные интервалы движения, на каждом из которых знак скорости постоянен. Этот метод решения нелинейных задач, когда есть кусочно-линейная зависимость и на каждом участке движения точно решается соответствующее линейное дифференциальное уравнение, называется *способом (методом) поэтапного интегрирования или припасовывания*.

Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A и отпустим его без начальной скорости. В этом случае

$$x_0 = A , \ \dot{x}_0 = 0 . \qquad (6.63)$$

Под действием натяжения пружины на первом этапе груз двигается влево $\dot{x} < 0$ и уравнение движения будет

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0 ,$$

или, с учетом обозначений

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \ \text{и} \ a = \frac{R_0}{c} ,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a . \qquad (6.64)$$

Коэффициент a представляет собой максимально возможное отклонение груза, уравновешенное силой трения, т.е. когда сила трения равна упругой силе. При отклонении груза на величину, меньшую или равную a, движение не начнется, так как силы упругости пружины недостаточно для преодоления силы трения (полоса $-a < x < a$ называется *зоной застоя*). Поэтому уравнение (6.64) имеет место при $x > a$. Общее решение уравнения (6.64) имеет вид

$$x = a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t .$$

Определяя постоянные из начальных условий (6.63), получаем

$$x = a + (A - a)\cos \omega t . \qquad (6.65)$$

Закон движения (6.65) справедлив, пока $\dot{x} < 0$. Так как

$$\dot{x} = -\omega(A - a)\sin \omega t ,$$

то скорость движения будет отрицательной до момента времени t_1, определяемого из условия

$$\omega t_1 = \pi .$$

В этот момент груз остановится. Смещение его

$$x = a + (A - a)\cos\pi = -(A - 2a).$$

Под влиянием трения отклонение груза уменьшилось по абсолютной величине на $2a$.

После остановки груз начнет двигаться вправо. Повторяя приведенные выше расчеты, можно показать, что движение слева направо также продолжается в течение времени π/ω. Максимальное отклонение вправо равно $A - 4a$. Процесс движения продолжается до тех пор, пока груз не остановится в зоне застоя. Зависимость смещения от времени на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещенную по оси x на величину $+a$ или $-a$, с амплитудой, уменьшающейся по закону арифметической прогрессии. Время между двумя соседними максимумами отклонения, которое условно можно назвать периодом движения, $T = 2\pi/\omega$, и оно совпадает с периодом собственных колебаний как и частота. *Наличие сухого трения не меняет частоту и период колебаний.*

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением представлен на рис. 6.23.

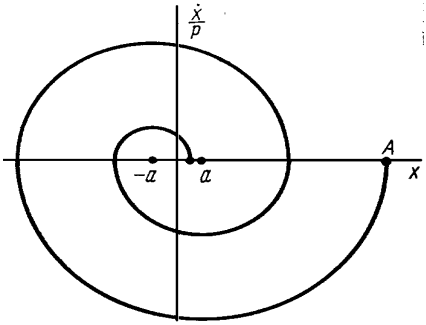


Рис. 6.23. Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением

В координатах x, $\dot{x}/\omega$ гармонический закон движения изображается дугами окружности. Если в уравнение (6.64) ввести новую переменную $(x - a)$, то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости изображается полуокружностью радиусом $(A - a)$ *с* центром в точке $(x = a)$. На втором этапе движения, когда $x > 0$, уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 a$$

может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением ($x + a$). На фазовой плоскости на втором этапе движения получаем полуокружность с центром в точке ($x = -a$). И так до тех пор, пока кривая при $x = 0$ не попадет в зону застоя $-a < x < a$.

Особая точка, которая является асимптотической точкой всех фазовых траекторий, имеющих вид спиралей, вложенных друг в друга, называется *фокусом*. Если спирали сходятся, то это – *устойчивый фокус*. Такие фазовые портреты характерны для диссипативных систем. Для вынужденных колебаний спирали могут расходиться, тогда мы имеем *неустойчивый фокус*.

6.5.3. Сила трения, пропорциональная смещению (позиционное трение)

Рассмотрим систему, состоящую из груза массой m, закрепленного на рессоре, листы которой собраны без предварительного натяга (рис. 6.24).

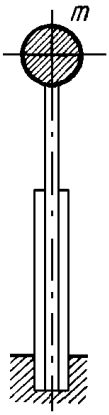


Рис. 6.24. Пример колебательной системы с позиционным трением

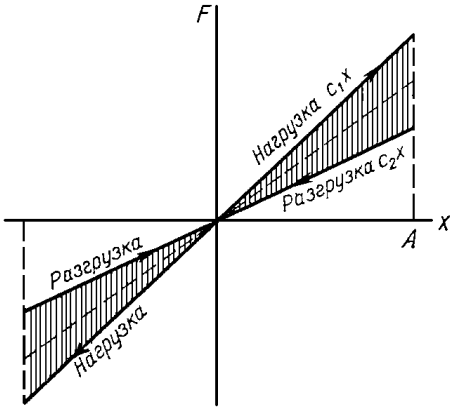


Рис. 6.25. Зависимость суммарной силы от координаты в случае позиционного трения

Сила трения листов рессоры друг о друга пропорциональна контактному давлению, которое в свою очередь пропорционально смещению. Зависимость между реакцией рессоры, действующей на груз, и смещением груза для рассматриваемой системы представлена на рис. 6.25.

Обозначим c_1 – жесткость системы при увеличении смещения x по модулю; c_2 – жесткость при уменьшении абсолютного значения смещения; $c_0 = 0{,}5(c_1 + c_2)$ – жесткость упругого элемента системы при отсутствии трения. На каждой четверти периода характеристика системы прямолинейна, поэтому движение массы описывается синусоидой. При переходе через равновесное положение меняется частота собственных колебаний от $\omega_2 = \sqrt{c_2/m}$ до $\omega_1 = \sqrt{c_1/m}$.

Далее проведем такой же анализ, как и для сухого трения. Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A; скорость движения его в этот момент $\dot{x}_0 = 0$. Если груз отпустить, то он начнет двигаться влево под действием силы упругости, уменьшенной на величину сил трения. Частота собственных колебаний груза будет ω_2, а время движения до равновесного положения $\frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2\omega_2}$.

При переходе груза в равновесное положение скорость его станет $\omega_2 A$. Дальнейшее движение влево определяется жесткостью c_1. Крайнего левого положения груз достигает через время $\frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2\omega_1}$. Наибольшее смещение влево равно $A\frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Продолжая рассуждения, находим, что максимальное отклонение вправо в конце полного периода движения вычисляется по формуле $A\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ и, следовательно, логарифмический декремент $\delta = \ln\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \ln\frac{c_1}{c_2}$.

При малом затухании, когда разность жесткостей $c_1 - c_2$ существенно меньше средней жесткости c_0, получим

$$\delta = \ln\frac{c_1}{c_2} \ln\frac{c_0 + \frac{c_1 - c_2}{2}}{c_0 - \frac{c_1 - c_2}{2}} \approx \frac{c_1 - c_2}{2}.$$

Характер движения показан на рис. 6.26.

Как видно из полученных формул, при силе трения, пропорциональной смещению, декремент колебания постоянен и, следовательно, точно так же, как и при вязком трении, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2T_2}{4} + \frac{2T_1}{4} = \pi\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right).$$

Соответствующая этому периоду угловая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}}.$$

Заметим, что

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m}\left(1 + \frac{c_1 - c_2}{2c_0}\right)} = \omega_0\sqrt{1 + \frac{\delta}{2}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m}\left(1 - \frac{c_1 - c_2}{2c_0}\right)} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\delta}{2}},$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m}}$ – собственная частота консервативной системы.

Тогда

$$\omega = 2\omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{\delta}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}}.$$

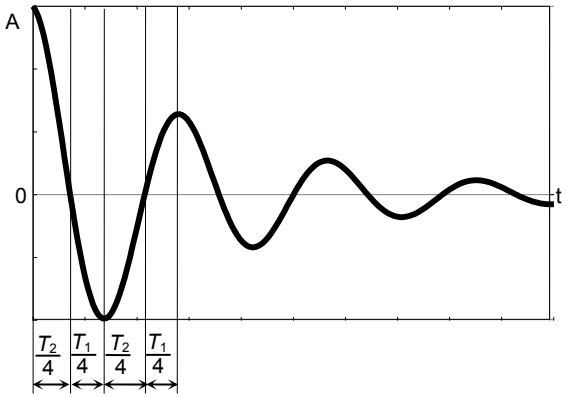


Рис. 6.26. График колебаний
для системы с позиционным трением

При небольших декрементах это выражение отличается от ω_0 на величину второго порядка малости. Поэтому, подобно вязкому и сухому трению, трение, пропорциональное смещению, практически не влияет на частоту колебаний.

6.5.4. Энергетическая оценка сил сопротивления

Рассмотрим один *k*-й период затухающих свободных колебаний системы. В начале периода отклонение максимально и равно A_k, в конце – также максимально и равно A_{k+1}. Поскольку в рассматриваемых положениях скорость равна нулю, вся энергия системы представляет собой энергию деформации упругой связи:

$$U_k = \frac{1}{2} c A_k^2 , \qquad U_{k+1} = \frac{1}{2} c A_{k+1}^2 .$$

Таким образом, за период рассеивается энергия

$$W = \Delta U = \frac{1}{2} c (A_k^2 - A_{k+1}^2) . \tag{6.66}$$

Если затухание не очень велико, то движение в течение одного периода мало отличается от гармонического колебания со средней амплитудой $A = \frac{1}{2}(A_k + A_{k+1})$, которому соответствует средняя энергия $U = \frac{1}{2} c A^2$.

Преобразуя формулу (6.66), находим

$$W = \Delta U = \frac{1}{2} c (A_k - A_{k+1})(A_k + A_{k+1}) = cA\Delta A = 2U \frac{\Delta A}{A} , \tag{6.67}$$

где $\Delta A = A_k - A_{k+1}$ – уменьшение амплитуды колебаний за один период.

Уменьшение энергии ΔU, с другой стороны, может быть с высокой точностью подсчитано как работа сил сопротивления за один период стационарного колебания с амплитудой *A*. Графически эта работа изображается площадью заштрихованной гистерезисной петли в зависимости суммарной силы от координаты. Аналитически она вычисляется как соответствующий этой площади интеграл. Так, силой вязкого трения при колебании по гармоническому закону $x = A\cos\theta t$ за период колебания совершается работа

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R\dot{x}dt = \alpha \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \dot{x}^2 dt = \alpha A^2 \theta^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \sin^2 \theta t \, dt = \pi \alpha A^2 \theta .$$

Отношение энергии, рассеиваемой за один период гармонического колебания, к максимальной упругой энергии называется *коэффициентом поглощения* или *относительным гистерезисом* и обозначается

$$\Psi(A,\theta)=\frac{\Delta U}{U}=\frac{2\Delta A}{A}=2\delta.$$

В зависимости от природы сил трения величина Ψ может тем или иным способом зависеть от амплитуды и частоты колебаний. Например, для рассмотренного движения с частотой θ получим

$$\Psi(A,\omega)=\frac{2\pi\alpha A^2\theta}{cA^2}=\frac{2\pi\alpha\theta}{c}=\frac{4\pi\varepsilon\theta}{\omega^2}. \qquad (6.68)$$

Если мы рассматриваем затухание свободных колебаний, то Ψ должно подсчитываться при частоте ω, равной частоте собственных колебаний ω_0. С введением значения Ψ формула (6.67) приобретает вид

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{1}{2}\Psi_{\theta=\omega}. \qquad (6.69)$$

Левая часть равенства (6.69) приблизительно равна логарифмическому декременту колебания, поэтому имеется простая связь между δ и коэффициентом поглощения

$$\delta\approx\frac{1}{2}\Psi_{\theta=\omega}.$$

Если коэффициент поглощения Ψ не зависит от амплитуды, то логарифмический декремент колебания постоянен, а значит, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. В этом случае уравнение огибающей $A(t)$ имеет вид экспоненциальной функции как для вязкого трения.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: главной характеристикой трения при колебаниях является коэффициент поглощения, форма же петли гистерезиса второстепенна.

6.5.5. Потери на внутреннее трение в материалах и конструкциях

Для пластичных материалов даже при напряжениях ниже предела текучести в некоторых малых областях материала происходят небольшие пластические деформации. Поэтому зависимости между напряжением и деформацией при его нагрузке и разгрузке несколько отличаются друг от друга. При заметных пластических деформациях известен так называемый эффект Баушингера, когда при циклическом нагружении в σ–ε диа-

грамме образуется петля гистерезиса. Аналогично и при упругой циклической деформации в координатах σ–ε (или τ–γ при деформации сдвига) точка, изображающая напряженное и деформированное состояние, описывает замкнутую кривую – петлю гистерезиса. Таким образом, картина похожа на колебания в системе с трением. Поэтому говорят о внутреннем трении в материалах.

Для металлов при напряжениях, меньших предела пропорциональности, ширина петли гистерезиса столь мала, что непосредственное ее наблюдение большей частью невозможно. Однако энергетическая оценка внутреннего трения – относительный гистерезис – может быть определена из опытов по затуханию свободных колебаний или другими динамическими методами.

Многочисленные исследования внутреннего трения свидетельствуют о том, что в металлах коэффициент поглощения Ψ не зависит от частоты колебаний, но зависит от амплитуды изменения напряжений.

Зависимости Ψ(σ), полученные при однородном напряженном состоянии (т.е. при постоянных по всему объему детали напряжениях), могут быть пересчитаны и для деталей, напряженное состояние которых неоднородно. Для этого определяют поглощение энергии W за цикл деформации во всем объеме V детали:

$$\Delta U = W = \int_V \Psi(\sigma)\frac{\sigma^2}{2E}dV ,$$

где σ – величина напряжения в данной точке детали.

Коэффициент поглощения для детали в целом определяется как отношение W к максимальной упругой энергии:

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}dV .$$

Приведенные выше формулы записаны для одноосного напряженного состояния. Не представляет труда написать аналогичные формулы для чистого сдвига, а также обобщить их на случай сложного напряженного состояния.

Следует отметить, что для металлических конструкций расчеты внутреннего трения в материале имеют небольшое значение, так как это трение мало и обычно во много раз перекрывается потерями на трение в сочленениях деталей – так называемым конструкционным гистерезисом.

Даже в специальных установках для изучения внутреннего трения трудно исключить конструкционный гистерезис так, чтобы он не влиял

на результаты опытов. В этом одна из причин больших расхождений в величинах $\Psi(\sigma)$, полученных для одинаковых материалов различными экспериментаторами.

Значительно большее значение, чем для металлов, внутреннее трение имеет для высокомолекулярных материалов – разного рода пластмасс и резины. Для этих материалов Ψ мало зависит от амплитуды напряжений, но существенно зависит от температуры и в некоторых диапазонах – от частоты колебаний.

Величина Ψ для полимеров много больше, чем для металлов. Так, например, для наполненных резин она имеет порядок 0,1...1,0, что приблизительно в 100 раз превышает значения Ψ, характерные для сталей. Приведем ориентировочные значения коэффициентов поглощения различных материалов при амплитуде деформации сдвига $\gamma = 0{,}001$ (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Сталь различных марок	0,01...0,02
Чугун серый	0,23
Медь	0,33
Латунь	0,01
Никель	0,03
Пробка	0,04
Дерево	0,07...0,14
Бетон	0,26
Железобетон	0,25

Многие решенные теоретически задачи конструкционного демпфирования относятся к сильно схематизированным системам. Результаты решения этих задач позволяют выяснить принципиальные особенности явления (зависимость Ψ от амплитуды и других факторов). Однако рассчитать теоретически потери на гистерезис в реальных конструкциях, как правило, не удается. В этих случаях пользуются статистическими данными о коэффициенте поглощения.

Приведем ориентировочные данные о коэффициенте поглощения в строительных конструкциях из различных материалов (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Стальные конструкции	0,16...0,18
Деревянные конструкции	0,30...0,35
Железобетонные конструкции	0,5
Кирпичная кладка	0,25

Эти цифры включают как потери на внутреннее трение в материале, так и потери на конструкционный гистерезис. Сравнение этих цифр с приведенными выше данными для потерь на внутреннее трение показывает, что для стальных конструкций основную роль играет конструкционный гистерезис, тогда как для деревянных и железобетонных конструкций роль внутреннего трения в материале и потерь в соединениях примерно одинакова.

6.6. Вынужденные колебания систем при линейном вязком трении

6.6.1. Возмущающая сила, изменяющаяся по произвольному закону

Зная реакцию системы на единичный импульс

$$Y(t) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\varepsilon \cdot t} \sin(\omega_1 t),$$

можно, используя метод наложения (суперпозиции), написать выражение для перемещений первоначально неподвижной системы при воздействии на нее произвольной силы $P(t)$:

$$x_* = \int_0^t P(\tau) Y(t-\tau) d\tau .$$

Эта формула отличается от формулы для системы без трения только видом функции $Y(t)$. Подставив значение этой функции из формулы, получим

$$x_* = \frac{e^{-\varepsilon \cdot t}}{m\omega_1} \int_0^t P(\tau) e^{\varepsilon\tau} \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau . \qquad (6.70)$$

Формула (6.70) соответствует нулевым начальным условиям. Если надо учесть условия, отличные от нулевых, то к выражению (6.70) следует добавить свободные затухающие колебания в соответствии с формулой

$$x = e^{-\varepsilon t}\left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

В качестве примера рассмотрим воздействие на систему с вязким трением и нулевыми начальными условиями внезапной нагрузки

$$P(t)=\begin{cases}0, & (t<0)\\ P_0, & (t\ge 0)\end{cases}.$$

В этом случае

$$x=\frac{P_0}{m\omega_1}e^{-\varepsilon t}\int_0^t e^{\varepsilon\tau}\sin\omega_1(t-\tau)d\tau\,.$$

Интеграл удобно вычислить, перейдя к показательной форме записи тригонометрической функции:

$$x=\frac{P_0}{m\omega_1}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{1}{2i}\left[e^{i\omega_1(t-\tau)}-e^{-i\omega_1(t-\tau)}\right]d\tau=$$

$$=\frac{P_0}{2m\omega_1 i}\left[\frac{1}{\varepsilon-i\omega_1}e^{-(\varepsilon-i\omega_1)(t-\tau)}-\frac{1}{\varepsilon+i\omega_\tau}e^{-(\varepsilon+i\omega_1)(t-\tau)}\right]_0^t=$$

$$=\frac{P_0}{m\omega_1(\varepsilon^2+\omega_1^2)}\left[\omega_1-e^{-\varepsilon t}\left(\omega_1\cos\omega_1 t+\varepsilon\sin\omega_1 t\right)\right].$$

Учитывая, что $m(\varepsilon^2+\omega_1^2)=m\omega^2=c$, а $P_0/c=x_{cm}$ представляет собой статическую деформацию системы силой P_0, получаем

$$\frac{x}{x_{\text{ст}}}=1-e^{-\varepsilon\cdot t}\left[\cos\omega_1 t+\frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right].$$

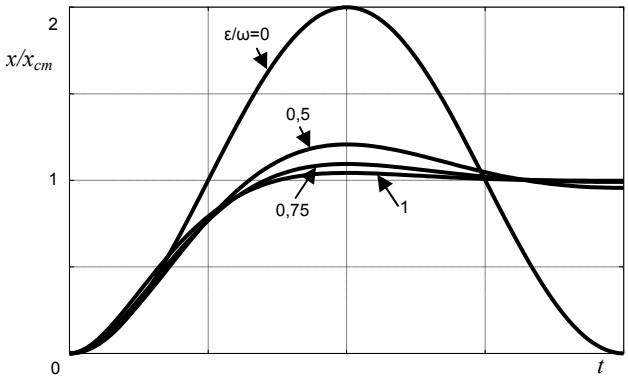


Рис. 6.27. Зависимости смещения от времени при разных значениях силы трения

На рис. 6.27 показано изменение x/x_{cm} при различных значениях затухания в системе, характеризуемого величиной коэффициента ε/ω.

Рассмотренная задача имеет большое значение в теории регистрирующих приборов с инерционными элементами (шлейфовые осциллографы, индикаторы и т.п.). Пользуясь графиком на рис. 6.27, можно установить, что необходимое для таких приборов демпфирование соответствует $\varepsilon/\omega = 0{,}75$. При меньших значениях демпфирования максимальное показание прибора значительно превышает значение измеряемой величины (при скачкообразном ее изменении); большее демпфирование приводит к замедленному установлению показаний прибора.

6.6.2. Гармоническое возбуждение. Метод комплексных амплитуд

Пусть возмущающая сила $P(t)$ меняется по закону $P(t) = P_0 \cos\theta t$.

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m}\cos\theta t\,. \qquad (6.71)$$

Как и в случае консервативной системы, найдем частное решение уравнения (6.71), описывающее стационарное периодическое движение с периодом возмущающей силы. Движение, зависящее от начальных условий, со временем затухает и не представляет практического интереса. Для отыскания частного решения используем *метод комплексных амплитуд*: введем в рассмотрение комплексную величину x_*, действительная часть которой совпадает с выражением для смещения

$$\mathrm{Re}\, x_* = x.$$

Зависимость возмущающей силы от времени также представим в комплексной форме

$$P_*(t) = P_0 e^{i\theta t}\,,$$

так что

$$P(t) = \mathrm{Re}\, P_*(t) = P_0 \cos\theta t\,.$$

Действительная часть решения уравнения

$$\ddot{x}_* + 2\varepsilon\dot{x}_* + \omega^2 x_* = \frac{P_0 e^{i\theta\cdot t}}{m} \qquad (6.72)$$

совпадает с решением уравнения (6.71), так как коэффициенты уравнения являются действительными величинами. Искомое решение запишем в виде

$$x_* = A_* e^{i\theta t} . \tag{6.73}$$

Подставив это выражение в формулу (6.72), получим

$$m\left(-\theta^2 + 2\varepsilon i\theta + \omega^2\right)A_* = P_0 ,$$

откуда определяется комплексная амплитуда

$$A_* = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2 + i2\varepsilon\theta)} ,$$

или, в показательной форме,

$$A_* = Ae^{-i\varphi} , \tag{6.74}$$

где

$$A = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}} , \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon\theta}{\omega^2 - \theta^2} . \tag{6.75}$$

Подставляя значение A_* в формулу (6.73), находим

$$x_* = Ae^{i(\theta t - \varphi)} = A\left[\cos(\theta t - \varphi) + i\sin(\theta t - \varphi)\right].$$

Таким образом, действительное перемещение

$$x = \operatorname{Re} x_* = A\cos(\theta t - \varphi) . \tag{6.76}$$

Следовательно, величины A и φ в формуле (6.74) представляют собой соответственно амплитуду колебаний и запаздывание по фазе перемещения по отношению к возмущающей силе. Комплексная амплитуда A_* одновременно характеризует как действительную амплитуду, так и фазу колебаний. Поэтому при исследовании колебаний методом комплексных амплитуд обычно не переходят к тригонометрической записи (см. (6.76)), ограничиваясь равноправной с ней показательной формой (6.74).

Проанализируем формулу (6.75) для амплитуды вынужденных колебаний. Отношение A к так называемой равновесной амплитуде

$$A_0 = \frac{P_0}{m\omega^2} = \frac{P_0}{c} ,$$

называемое, как и в случае вынужденных колебаний без трения, *коэффициентом динамичности (или коэффициентом усиления колебаний)* β, равно

$$\beta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\dfrac{\varepsilon^2}{\omega^2}\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}} . \tag{6.77}$$

Заметим, что равновесная амплитуда A_0 представляет собой статическую деформацию упругой связи под действием максимальной силы P_0.

Непосредственное определение коэффициента $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2m}$, характеризующего силы вязкого трения, затруднительно. Поэтому в формулу (6.77) целесообразно вместо ε ввести коэффициент поглощения Ψ, используя зависимость (6.68). Тогда

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{\Psi^2}{4\pi^2}}}. \qquad (6.78)$$

Преимуществом формулы (6.78) является то, что коэффициент динамичности ставится в зависимость от энергетической характеристики трения Ψ, что позволяет использовать эту формулу не только для линейного вязкого трения, но и для других законов трения.

Можно также ввести в формулу для коэффициента динамичности логарифмический декремент δ. Воспользовавшись приближенной зависимостью

$$\delta \approx \frac{1}{2}\Psi(\theta = \omega),$$

получим

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta}{\pi}\right)^2}}.$$

Из анализа приведенных выше зависимостей следует, что при приближении частоты возмущения θ к частоте собственных колебаний ω коэффициент динамичности возрастает (рис. 6.28). Максимум амплитуды колебаний достигается приблизительно при $\theta/\omega = 1$, при этом

$$\beta_{max} = \frac{2\pi}{\Psi(\theta = \omega)} = \frac{\omega}{2\varepsilon} \approx \frac{\pi}{\delta}.$$

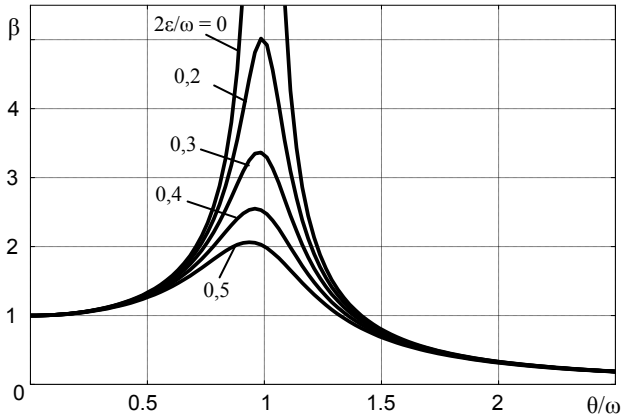


Рис. 6.28. Зависимость коэффициента динамичности от частоты возмущающей силы при разных значениях силы трения

По аналогии с электрическими системами эта величина называется иногда *добротностью механической системы*. Чем меньше логарифмический декремент δ, тем больше добротность системы и тем больше амплитуда вынужденных колебаний в области резонанса. Вместе с тем при режимах, далеких от резонанса, затухание мало влияет на величину коэффициента динамичности. Это дает возможность расчет таких режимов вести без учета демпфирования.

Проследим за изменением угла сдвига фазы φ в зависимости от частоты колебаний и величины логарифмического декремента затухания (рис. 6.29).

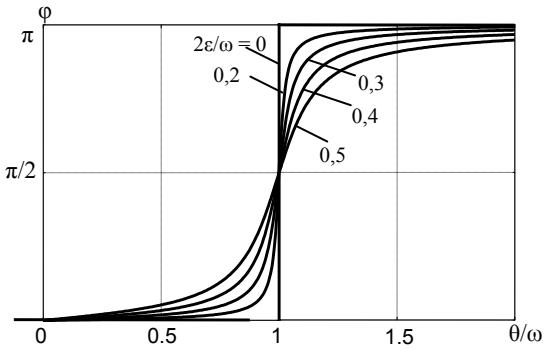


Рис. 6.29. Зависимость угла сдвига фазы φ от частоты колебаний и величины логарифмического декремента затухания

В системах с небольшим трением угол сдвига существен только в области резонанса. При переходе через резонанс φ изменяется от 0 до π тем быстрее, чем меньше трение. В положении резонанса независимо от величины затухания сдвиг фазы всегда равен π/2 и энергия, доставляемая системе возмущающей силой, максимальна.

6.7. Вынужденные колебания систем с трением, отличным от линейного вязкого

6.7.1. Гармоническое возбуждение. Приближенное решение методом гармонического баланса

При трении, не линейно пропорциональном скорости, уравнения движения являются нелинейными и их решение становится затруднительным. При гармоническом возбуждении эффективным является приближенный способ расчета. Уравнение движения при произвольной зависимости силы трения от смещения и скорости может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + R(x,\dot{x}) + cx = P_0 \cos(\theta t + \varphi). \qquad (6.79)$$

Приближенное решение этого уравнения представим в виде гармонического колебания, отстающего по фазе от возмущающей силы на угол φ,

$$x = A\cos\theta t. \qquad (6.80)$$

В данном случае фазовый угол φ включен в выражение возмущающей силы, а не перемещения. Это позволяет несколько упростить выкладки и не влияет на результат, так как существенна лишь разница между фазами силы и перемещения.

Скорость движения определяется формулой

$$\dot{x} = -A\theta\sin\theta t.$$

Очевидно, что сила трения $R(A\cos\theta t, -A\theta\sin\theta t)$ в этом случае также является периодической функцией периода $T = \dfrac{2\pi}{\theta}$, причем она обращается в нуль при $\cos\omega\theta t = \pm 1$, когда скорость движения также обращается в нуль. Поэтому функцию R можно разложить в ряд Фурье, содержащий только функции sin:

$$R(x,\dot{x}) = R_1(A,\theta)\sin\theta t + R_2(A,\theta)\sin 2\theta t + \ldots, \qquad (6.81)$$

где

$$R_1(A,\theta)=\frac{\theta}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R(A\cos\theta t,-A\theta\sin\theta t)\sin\theta t dt\,,$$
$$R_2(A,\theta)=\frac{\theta}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R(A\cos\theta t,-A\theta\sin\theta t)\sin 2\theta t dt\,. \qquad (6.82)$$

Подставляя выражения (6.80) и (6.81) в левую часть дифференциального уравнения (6.79), получаем

$$\left(c-m\theta^2\right)A\cos\theta t+R_1\sin\theta t+R_2\sin 2\theta t+\ldots=P_0\left(\cos\theta t\cos\varphi-\sin\theta t\sin\varphi\right).$$

Легко видеть, что ни при каком выборе постоянных A и φ левая часть, содержащая гармоники с частотами 2θ, 3θ и последующие, не может в точности совпадать с правой частью уравнения (6.79), не содержащей таких гармоник. Это и понятно, так как выражение (6.80) не является точным решением уравнения (6.79). Поэтому мы вынуждены ограничиться требованием, чтобы совпадали только слагаемые, изменяющиеся с основной частотой θ в левой и правой частях уравнения (6.79). Этот метод приближенного решения задачи называется *методом гармонического баланса.*

Таким образом, приходим к двум уравнениям:

$$\left(c-m\theta^2\right)A=P_0\cos\varphi\,, \qquad R_1(A,\theta)=-P_0\sin\varphi\,. \qquad (6.83)$$

Уравнения (6.83) позволяют, зная зависимость $R_1(A,\theta)$, определить амплитуду стационарных колебаний A и фазовый угол φ. Как видно из уравнений (6.83), в приближенном решении существенна лишь одна основная гармоника R_1 силы трения.

Рассмотрим физический смысл этой гармоники. В формуле (6.82) учтем зависимость $\dot{x}=-A\theta\sin\theta t$, тогда

$$R_1(A,\theta)=-\frac{1}{\pi A}\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R(A\cos\theta t,-A\theta\sin\theta t)\dot{x}\,dt\,.$$

Интеграл в этом выражении представляет собой работу W силы сопротивления за цикл (площадь петли гистерезиса). Вводя вновь коэффициент поглощения $\Psi = W/U$, получаем

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R\left(A\cos\theta t, -A\theta\sin\theta t\right)\dot{x}dt = \Psi U = \frac{\Psi c A^2}{2}$$

и окончательно

$$R_1\left(A,\theta\right) = -\frac{cA\Psi}{2\pi}.$$

Подставив значение R_1 в формулы (6.83), приведем их к такому виду:

$$A\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right) = A_0\cos\varphi,\ \frac{A\Psi}{2\pi} = A_0\sin\varphi. \qquad (6.84)$$

Здесь дополнительно обозначено: $\frac{P_0}{c} = A_0$ – равновесная амплитуда и $\frac{c}{m} = \omega^2$.

Из уравнений (6.84) находим амплитуду колебаний:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\Psi^2}{4\pi^2}}}, \qquad (6.85)$$

и тангенс фазового угла:

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\frac{\Psi}{2\pi}}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (6.86)$$

Эти формулы, являющиеся приближенными при любом законе трения, совпадают с точными формулами (6.83) для вязкого трения.

Таким образом, с расчетной точки зрения произвольный закон трения может быть приближенно заменен эквивалентным вязким трением с таким же коэффициентом поглощения.

Следует отметить важное отличие формулы (6.85) от соответствующей формулы для вязкого трения. Тогда как при вязком трении формула определяет амплитуду колебаний в явном виде, при невязком трении коэффициент поглощения Ψ также зависит от амплитуды и последняя определяется формулой (6.85) неявно.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания при сухом трении. В этом случае коэффициент поглощения обратно пропорционален амплитуде и

$$\Psi = \frac{4RA}{\frac{1}{2}cA^2} = \frac{8a}{A},$$

где $a = \frac{R_0}{c}$ – полуширина зоны застоя.

Подставив указанное значение Ψ в формулу (6.85), найдем

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{4a}{\pi A}\right)^2}}.$$

Отсюда

$$A = \frac{\sqrt{A_0^2 - \left(\frac{4a}{\pi}\right)^2}}{\left|1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right|}.$$

Полученная формула позволяет сделать следующие выводы:

1. Колебания возникают, только если амплитуда возмущающей силы P_0 достаточно велика по сравнению с силой трения.

2. Если $P_0 > \frac{4}{\pi}R_0$, то наличие сухого трения не ограничивает амплитуду при резонансе и $A \to \infty$ при $\theta \to \omega$.

Формула (6.86) для фазового сдвига после подстановки значения Ψ и амплитуды A принимает вид

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi P_0}{4R_0}\right)^2 - 1}} \mathrm{sgn}\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right),$$

откуда видно, что абсолютная величина фазового угла не зависит от частоты, но при переходе через резонансную частоту знак tgφ меняется. Таким образом, при $\theta < \omega$ перемещение отстает по фазе от возмущающей силы на угол φ, а при $\theta > \omega$ – на угол $\pi - \varphi$.

Глава 7
Линейные колебания систем с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим пример вывода уравнений движения для системы с двумя степенями свободы. В общем случае они получаются нелинейными.

Пример. По жесткой направляющей AB под действием силы $P(t)$, направленной параллельно AB, движется груз массой m (рис. 7.1). Левый конец направляющей закреплен шарнирно, правый оперт на пружину жесткостью c. Момент инерции массы направляющей относительно точки A равен I. Составить уравнение движения системы. Весовыми нагрузками пренебречь, угол φ предполагается малым.

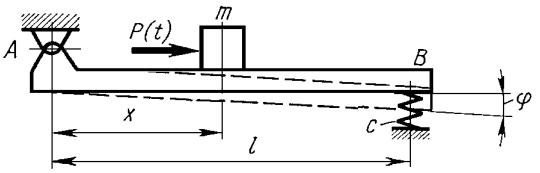


Рис. 7.1. Пример колебательной системы с двумя степенями свободы

Решение. Положение системы в процессе движения определяется двумя координатами – углом наклона направляющей φ и расстоянием x центра тяжести груза относительно точки A. Составим выражение для кинетической энергии

$$T = m\frac{\dot{x}^2 + (x\dot{\varphi})^2}{2} + I\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия равна энергии деформации пружины

$$\Pi = c\frac{(\varphi\ell)^2}{2}.$$

Элементарная работа силы $P(t)$

$$\delta A = P(t)\delta x = Q_x\delta x.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; \qquad Q_x = P(t);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I + mx^2\right)\dot{\varphi}\,; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\,; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c\ell^2\varphi\,; \quad Q_\varphi = 0\,.$$

Уравнения Лагранжа получают такой вид:

$$m\ddot{x} - mx\dot{\varphi}^2 = P(t)\,,$$
$$\left(I + mx^2\right)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + c\ell^2\varphi = 0\,.$$

7.1. Свободные (собственные) колебания

7.1.1. Линеаризация уравнения движения для малых колебаний

Если в начальный момент времени положение склерономной системы выбрано достаточно близким к положению устойчивого равновесия и начальные скорости по абсолютной величине достаточно малы, то на протяжении всего движения малыми будут по абсолютной величине как сами отклонения от положения равновесия, так и обобщенные скорости. Это обстоятельство позволяет сохранить в дифференциальных уравнениях движения только линейные члены относительно отклонений и скоростей, а члены более высокого порядка малости отбросить. Тогда дифференциальные уравнения движения становятся линейными, т.е. задача линеаризуется. Рассмотрим линеаризацию уравнений движения для случая консервативной системы в общем виде.

Кинетическая энергия консервативной системы с n степенями свободы выражается через обобщенные скорости следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left(q_1, q_2, \ldots q_n\right)\dot{q}_i\dot{q}_k\,.$$

Разложим коэффициенты a_{ik} в ряды по степеням координат и ограничимся первыми членами этого разложения (нулевой степени):

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\,. \qquad (7.1)$$

Заметим, что, исходя из формул для коэффициентов, a_{ik} они являются симметричными относительно индексов и поэтому кинетическая энергия представляет собой так называемую квадратичную форму. Более того, по физическому смыслу кинетическая энергия не может быть отрицательной, поэтому мы имеем положительно определенную квадратичную

форму. Выбором специального преобразования координат такая форма может быть приведена к так называемому каноническому виду

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{\tilde{q}}_i^2 .$$

Разложим также и потенциальную энергию в ряд по степеням координат:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_i q_k + \cdots .$$

В положении равновесия $\Pi_0 = 0$ и, кроме того, обобщенные силы $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$ равны нулю. Следовательно, два первых члена ряда исчезают. Введя обозначения

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 \quad (\text{причем } c_{ik} = c_{ki}),$$

мы и потенциальную энергию представим в виде

$$\Pi \approx \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k . \qquad (7.2)$$

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле, если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет минимум, то такое равновесие устойчиво. Таким образом, если мы рассмотрим колебания вблизи точки устойчивого равновесия системы, то полученное выражение для потенциальной энергии есть также положительно определенная квадратичная форма. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства, которые называются *критерием Сильвестра* (Джеймс Джозеф Сильвестр 1814–1897 – английский и американский математик):

$$c_{11} > 0 , \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 , \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0 , \ \ldots . \qquad (7.3)$$

Применительно к системам с несколькими степенями свободы эти неравенства имеют тот же смысл, как и условие $c = \partial^2 f / \partial x^2 > 0$ для системы с одной степенью свободы. При выполнении неравенств (7.3) система, выведенная из положения равновесия, совершает свободные колебания.

Подставив выражения (7.1) и (7.2) в уравнения Лагранжа второго рода, получим следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.4}$$

7.1.2. Главные (нормальные) координаты

Конечно, фактическое составление системы уравнений не обязательно вести по схеме Лагранжа. Во многих задачах о колебаниях удобно пользоваться более непосредственными способами – прямым и обратным.

Прямой способ: из системы выделяются сосредоточенные массы (или твердые тела), и каждая из них рассматривается как свободная материальная точка (или тело), находящаяся под действием позиционных (восстанавливающих) сил, которые выражаются через выбранные обобщенные координаты; после этого записываются соответствующие дифференциальные уравнения движения для материальных точек (или тел).

Обратный способ противоположен прямому: после отделения сосредоточенных масс (или твердых тел) рассматривается оставшаяся безынерционная система жестких и упругих связей, т.е. «безмассовый скелет» системы, который находится под действием кинетических реакций отделенных частей системы, причем кинетические реакции (силы инерции) выражаются через обобщенные ускорения. Затем формулируются статические соотношения для перемещений безмассового (безынерционного) скелета системы.

Сопоставляя варианты записи по прямому и обратному способам, можно сделать следующее общее заключение относительно структуры дифференциальных уравнений: при составлении системы уравнений по прямому способу $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и уравнения имеют вид

$$a_{ii}\ddot{q}_i + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}q_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

а при составлении по обратному способу $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и уравнения имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ii}q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Более того, и это принципиально важно, что специальным выбором обобщенных координат можно придать каноническую форму как кинетической, так и потенциальной энергии вместе и одновременно. Такие координаты x_i (i = 1, 2, ..., n) называются *нормальными или главными*. При этом

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{x}_i^2 \ , \ \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 \ ,$$

и уравнения Лагранжа приобретают наиболее простой вид

$$a_i \ddot{x}_i + c_i x_i = 0 \ \text{ или } \ \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0 \text{, где } \omega_i^2 = c_i / a_i \ \ (i = 1, \ldots, n). \quad (7.5)$$

Каждое из них интегрируется независимо от других. Короче говоря, при использовании главных координат система как бы представляет собой совокупность независимых парциальных (частичных) систем с одной степенью свободы. Анализ колебаний в главных координатах называют *методом главных координат*.

Чаще всего заранее трудно указать, какие кинематические параметры (или их комбинации) являются главными координатами. Формально можно воспользоваться методами линейной алгебры. Тогда для нахождения главных координат и перехода к ним требуются обширные выкладки, объем которых не уступает объему выкладок при решении задачи в произвольно принятых (не главных) обобщенных координатах. Поэтому введение главных координат практически не облегчает решение задачи о свободных колебаниях, но весьма полезно для углубленного понимания их закономерностей и для теоретического анализа.

7.1.3. Решение системы уравнений движения. Частоты и формы собственных колебаний

Будем искать частное решение уравнений движения (7.4) в виде $q_k = u_k \sin(\omega t + \varphi)$, т.е. в виде гармонических колебаний с одной и той же частотой ω и с одной и той же начальной фазой φ для всех координат. Подставляя это выражение в дифференциальные уравнения движения (7.4), получаем после сокращения на $\sin(\omega t + \varphi)$ следующую систему алгебраических уравнений, линейных относительно амплитуд u_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(c_{ik} - \omega^2 a_{ik}\right) u_k = 0 \ \ (i = 1, \ldots, n). \quad (7.6)$$

Так как все амплитуды u_k искомого колебания не должны обращаться в нуль, то определитель этой системы однородных уравнений

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\omega^2 a_{11} & c_{12}-\omega^2 a_{12} \cdots & c_{1n}-\omega^2 a_{1n} \\ c_{21}-\omega^2 a_{21} & c_{22}-\omega^2 a_{22} \cdots & c_{2n}-\omega^2 a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}-\omega^2 a_{n1} & c_{n2}-\omega^2 a_{n2} & c_{nn}-\omega^2 a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

должен быть равен нулю. После раскрытия определителя мы получим в левой части многочлен n-й степени относительно $\lambda = \omega^2$: $P_n(\lambda) = 0$. Это уравнение называется *уравнением частот*, *вековым уравнением* или *характеристическим уравнением*.

Число корней уравнения частот равно n; эти корни принято располагать в порядке возрастания. Можно показать, что из симметричности и положительной определенности матриц коэффициентов кинетической и потенциальной энергий следует, что вековое уравнение имеет только вещественные и положительные корни. То есть мы не имеем мнимых или комплексных частот $\omega_i = \sqrt{\lambda}$. Отрицательные частоты можно не рассматривать, так как соответствующие им частные решения типа A' $\sin(-\omega t)$ попросту сливаются с частными решениями A $\sin(\omega t)$.

Таким образом, для частот ω определяется n значений:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots < \omega_n ,$$

образующих *спектр собственных частот системы* (*частот собственных колебаний*).

Каждому из этих значений частот соответствует набор решений уравнений (7.6) для амплитуд. Совокупность амплитуд, соответствующих определенной собственной частоте, называется *формой собственных колебаний* (или *собственной формой*). Очевидно, что собственная форма определяется с точностью до произвольного множителя, одинакового для всех амплитуд при заданной частоте. Это следует из уравнения (7.6). Собственную форму можно представить в виде графика, в котором по оси абсцисс отложены номера степеней свободы, а по оси ординат – значения амплитуд. В случае таких простых систем, как, например, совокупность материальных точек, расположенных на некоторой линии, этот график соответствует реальной форме системы в некоторый момент времени при колебаниях с заданной собственной частотой.

Теперь рассмотрим получение общего решения. Каждому корню ω_i соответствует частное решение типа синусоидального гармонического

колебания, следовательно, общее решение представлено как сумма таких решений:

$$q_k = \sum_{i=1}^{n} u_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{7.7}$$

где амплитудам теперь приписаны два индекса: первый по-прежнему обозначает номер координаты, а второй – номер собственной частоты. Колебания, из которых складывается произвольное колебание системы (выражения под знаком суммы), называются *главными колебаниями системы*.

Таким образом, при произвольных начальных условиях изменение каждой из обобщенных координат следует полигармоническому закону, причем число гармонических составляющих равно числу степеней свободы системы. Отметим, что если собственные частоты несоизмеримы (как это нередко бывает в реальных задачах), то процесс, описываемый таким решением, строго говоря, непериодический.

При близости хотя бы двух собственных частот общий закон движения оказывается весьма своеобразным. Например, для системы с двумя степенями свободы можно показать, что движение носит синусоидальный характер со средней частотой $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ и также периодически, но медленно меняющейся амплитудой. Период изменения амплитуды составляет $T = \dfrac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, и тем больше, чем ближе частоты друг к другу. Такие колебания называются *биениями*. График этого движения показан на рис. 7.2.

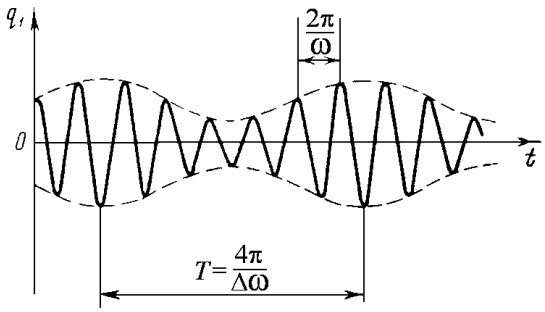


Рис. 7.2. График биений

А если частоты полностью совпадают? Если же уравнение частот имеет кратные корни, то можно утверждать, что решений вида $u_{ki}\sin(\omega_i t+\varphi_i)$ будет, во всяком случае, m, где m – число различных корней векового уравнения. Лагранж считал, что в случае кратных частот общее решение системы (7.4) уже не представляется в форме (7.7) и что в правой части (7.7) появляются так называемые вековые члены вида

$$(u_{ki}+\dot{u}_{ki}t+\ddot{u}_{ki}t^2+\ldots)\sin(\omega_i t+\varphi_i).$$

Однако Лагранж ошибся. Как доказал позже Вейерштрасс, каждому корню p-й кратности соответствует ровно p линейно независимых решений системы линейных уравнений (7.6), т.е. для каждого корня p-й кратности можно найти p линейно независимых амплитудных векторов. Таким образом, и в случае кратных частот существует n линейно независимых амплитудных векторов и составленная с их помощью формула (7.7) дает общее решение.

7.1.4. Ортогональность форм собственных колебаний

Собственные формы колебаний обладают свойством ортогональности. Две формы колебаний, соответствующие разным собственными частотами ω_k и ω_l, связаны соотношениями ортогональности, которые могут быть записаны в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{ik}u_{jl}=0, \quad \text{где } k\neq l,\ k,l=1,\ldots n$$

или

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}u_{ik}u_{jl}=0, \quad \text{где } k\neq l,\ k,l=1,\ldots n.$$

Это свойство ортогональности является следствием того, что 1) матрицы a_{ij} и c_{ij} симметричны; 2) формы собственных колебаний u_{ik} удовлетворяют соответствующей системе алгебраических уравнений для амплитуд; 3) частоты ω_k и ω_l не равны.

7.1.5. Связь форм собственных колебаний и главных координат

Обозначим произвольные обобщенные или реальные физические координаты через q_i, а соответствующие им формы колебаний – через u_{ik} (u_{ik} – амплитуда перемещения q_i при k-й частоте собственных колебаний).

Движение системы независимо от причин, его вызвавших, описывается формулами

$$q_i = q_i(t) \qquad (i = 1,2, \ldots, n).$$

Это же движение можно описать в главных координатах $x_k(t)$. Связь произвольных координат с главными координатами можно получить, рассмотрев решение для произвольных координат (7.7), которое мы перепишем для новых обозначений:

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (i = 1,2, \ldots, n),$$

и решение уравнений движения в главных координатах (7.5), которое легко записать

$$x_k = C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (k = 1,2, \ldots, n).$$

Выразим $\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ в формулах для главных координат и подставим его в выражение для произвольных координат. Если учесть, что форма колебаний определяется с точностью до произвольного множителя при одной и той же частоте, то получим, что произвольные координаты выражаются через главные координаты $x_k(t)$ и формы колебаний, соответствующие произвольным координатам, следующим преобразованием координат:

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) u_{ik} \ . \tag{7.8}$$

Можно обратить соотношение (7.8), выразив главные координаты x_k через физические или другие обобщенные q_i. Используем для этого соотношения ортогональности. Умножим каждое из уравнений (7.8) на

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jl}$$

при неком фиксированном l и просуммируем по i, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jl} q_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jl} u_{ik} = x_l \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jl} u_{il} \ .$$

Поскольку в соответствии с соотношением ортогональности все суммы в правой части полученного равенства, кроме суммы, имеющей множителем x_l, равны нулю. Заменим для удобства изложения индекс l на k:

$$x_k = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jk} q_i}{M_k}$$

$$M_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jk} u_{ik} \ .$$

Величину M_k можно назвать *обобщенной массой* системы при k-й форме собственных колебаний.

7.2. Вынужденные колебания системы без трения

7.2.1. Метод главных координат

При произвольных возмущающих силах существенное упрощение расчета достигается путем введения главных координат, поскольку при этом каждая из главных координат определяется независимым дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \frac{Q_k}{M_k} \ , \tag{7.9}$$

где $Q_k = \sum_{i=1}^{n} P_i u_{ik}$ – обобщенная сила, соответствующая координате x_k. Выражение для обобщенной силы получается из общей формулы для обобщенных сил $Q_k = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$ и формулы для преобразования от произвольных координат к главным (7.8).

7.2.2. Гармоническая сила. Резонанс

Рассмотрим случай, когда на систему с n степенями свободы действует одна гармоническая сила, приложенная в направлении перемещения q_i:

$$P(t) = P_0 \cos \theta t \ .$$

Используем метод главных координат. Обобщенная сила, соответствующая k-й главной координате, составит

$$Q_k = P_0 u_{ik} \cos \theta t \ .$$

По аналогии с уравнением для одной степени свободы получим соответствующее стационарное решение уравнения (7.9):

$$x_k(t) = \frac{P_0 u_{ik}}{M_k\left(\omega_k^2 - \theta^2\right)}\cos\theta t .$$

Физическое перемещение в точке приложения возмущающей силы будет равно

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_{ik} = P_0 \cos\theta t \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{ik}^2}{M_k\left(\omega_k^2 - \theta^2\right)}.$$

Таким образом, резонанс возникает при совпадении частоты возмущения с любой из собственных частот системы.

7.2.3. Динамическая податливость. Антирезонанс

Для упругой (позиционной или возвращающей) силы $P = cx$ податливость – это величина обратно пропорциональная жесткости $\delta = 1/c$, т.е. она выражается как отношение перемещения к силе $\delta = x/P$. В случае динамической возмущающей силы отношение перемещения к действующей силе $P_0\cos\theta t$ называется *динамической податливостью системы*:

$$D_{ii}(\theta) = \frac{q_i(t)}{P_0 \cos\theta t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{ik}^2}{M_k\left(\omega_k^2 - \theta^2\right)}. \qquad (7.10)$$

Рассмотрим характер зависимости динамической податливости D_{ii} от частоты возбуждения θ. Как видно из формулы (7.10), функция $D_{ii}(\theta)$ имеет конечное число разрывов при $\theta = \omega_k$, т.е. при частотах собственных колебаний системы. При этом если $\theta < \omega_k$, $D_{ii} \to +\infty$; а если $\theta > \omega_k$, $D_{ii} \to -\infty$. Следовательно, зависимость $D_{ii}(\theta)$ показана на рис. 7.3, где она приведена для системы с тремя степенями свободы.

Как видно из графика, имеются частоты Ω_1, Ω_2, при которых $D_{ii}(\theta) = 0$ и, следовательно, если в некоторой точке системы приложить возмущающую силу с такой частотой, то эта точка будет неподвижна. Конечно, все другие точки системы при этом колеблются с частотой $\theta = \Omega$. Указанное явление называется *антирезонансом*, а частоты Ω – *антирезонансными*. Для системы с n степенями свободы число антирезонансных частот равно $n - 1$.

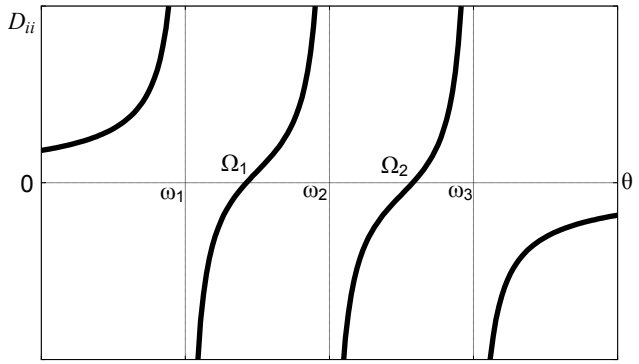


Рис. 7.3. Зависимость динамической податливости
от частоты возмущающей силы

Поясним физический смысл антирезонанса. Поскольку при антирезонансе точка приложения силы неподвижна (рис. 7.4, *а*), то можно ее закрепить (рис. 7.4, *б*).

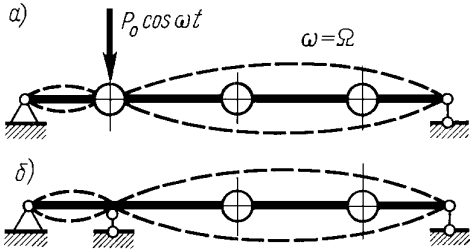


Рис. 7.4. К выяснению физического смысла антирезонанса

Таким образом, мы обнаруживаем, что антирезонансные колебания – это свободные колебания системы с дополнительным закреплением (в направлении q_i). При этом возмущающая сила $P_0 \cos\theta t$ оказывается равной реакции дополнительного закрепления. Следовательно, и антирезонансные частоты Ω можно определять как частоты собственных колебаний системы с дополнительной связью.

Перемещения других точек системы определяются равенствами

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_{jk} = P_0 \cos\theta t \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{ik} u_{jk}}{M_k \left(\omega_k^2 - \theta^2\right)}.$$

Отношение этих перемещений к возмущающей силе

$$D_{ij}(\theta) = \frac{q_j}{P_0 \cos\theta t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{ik} u_{jk}}{M_k \left(\omega_k^2 - \theta^2\right)}$$

также называют *коэффициентом динамической податливости*, но при этом D_{ii} – главный, а D_{ij} – побочный коэффициент.

7.2.4. Динамический гаситель колебаний

Явление антирезонанса используется для гашения колебаний в так называемом *динамическом гасителе*.

Пусть имеется простейшая система с одной степенью свободы, совершающая вынужденные гармонические колебания с частотой θ. На рис. 7.5 эта система представлена в виде диска с моментом инерции I на упругом валу с жесткостью на кручение c.

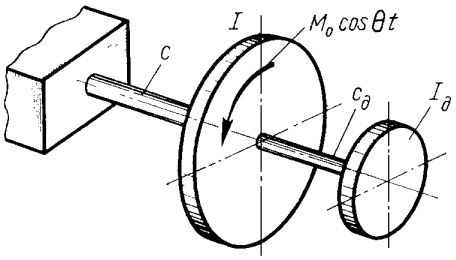


Рис. 7.5. Пример динамического гасителя колебаний

Если дополнительно присоединить к системе гаситель, состоящий из другого диска с моментом инерции I_∂, и дополнительного вала жесткостью c_∂, причем подобрать такие характеристики, чтобы его собственная частота при закрепленном диске I равнялась θ:

$$\omega_\partial = \sqrt{\frac{c_\partial}{I_\partial}} = \theta\,,$$

то частота θ станет для двухмассовой системы антирезонансной и движение основного диска прекратится.

Амплитуда A_∂ колебаний диска гасителя может быть найдена из условия, что крутящий момент на валу гасителя уравновешивает возмущающий момент M_0:

$$A_\partial = \frac{M_0}{c_\partial}.$$

Проследим поведение системы с динамическим гасителем при изменении частоты возбуждения θ. Если гаситель отключить, то амплитуда A основной системы будет определяться формулой

$$A = A_0 \frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega_0^2}},$$

где

$$A_0 = \frac{M_0}{c},\ \omega_0^2 = \frac{c}{I}.$$

Уравнения движения системы при включенном гасителе

$$I\ddot{q}_1 + cq_1 + c_\partial(q_1 - q_2) = M_0 \cos\theta t,$$
$$I_\partial \ddot{q}_2 - c_\partial(q_1 - q_2) = 0. \qquad (7.11)$$

Задавая углы поворота основного диска и гасителя в форме

$$q_1 = A\cos\theta t, \qquad q_2 = A_\partial \cos\theta t,$$

подставляя эти значения в уравнения (7.11) и решая полученную систему уравнений, находим

$$A = A_0 \frac{1-\frac{\theta^2}{\omega_\partial^2}}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)}, \qquad A_\partial = A_0 \frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)}.$$

Здесь

$\omega_\partial = \sqrt{\frac{c_\partial}{I_\partial}}$ – частота настройки поглотителя:

ω_1, ω_2 – собственные частоты двухмассовой системы,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_0^2 + \omega_\partial^2\left(1+\frac{I_\partial}{I}\right) \pm \sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_\partial^2\left(1-\frac{I_\partial}{I}\right) + \omega_\partial^4\left(1-\frac{I_\partial}{I}\right)^2}\right].$$

На рис. 7.6 показаны кривые зависимости A/A_0 от θ/ω_∂, вычисленные при $\omega_\partial = \omega_0$, $I_\partial = 0{,}05I$. На тот же график штриховыми линиями нанесена резонансная кривая для системы без гасителя.

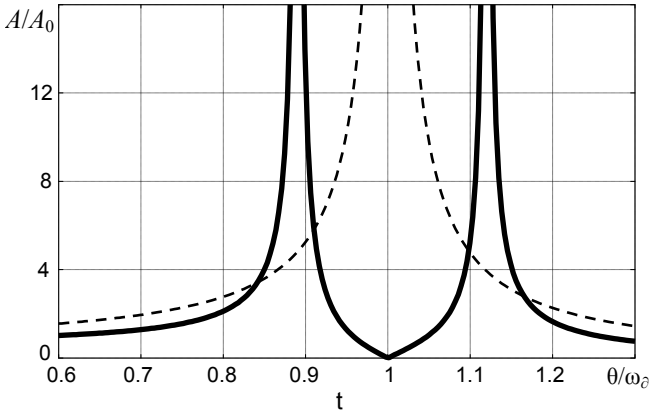


Рис. 7.6. Зависимость амплитуды колебаний от частоты возмущающей силы

Как и следовало ожидать, благодаря установке гасителя устраняются колебания основной системы при частоте $\theta = \omega_\partial$. Однако возникают резонансные колебания при $\theta = \omega_1$ и $\theta = \omega_2$.

Таким образом, динамический гаситель колебаний эффективен, только если частота возбуждения является строго постоянной. Устранить резонансные колебания с большими амплитудами при частотах ω_1 и ω_2 оказывается возможным, если ввести в конструкцию динамического гасителя трение.

В двигателях внутреннего сгорания используются также динамические гасители, частота настройки которых меняется автоматически с частотой возбуждения. Устройство этих гасителей основано на том, что собственная частота маятника в поле центробежных сил пропорциональна скорости вращения.

7.2.5. Кинематическое возбуждение колебаний

Возможны случаи, когда заданы не внешние силы, действующие на элементы колебательной системы, а характер их движения. Если колебания системы вызываются не заданными силами, а возникают благодаря приведению в движение по заданному закону одной или нескольких точек системы, то *возбуждение называется кинематическим*.

Задачу о кинематическом возбуждении можно свести к задаче о силовом возбуждении. Пусть задано перемещение какой-либо *j*-й точки системы

$$q_j = f(t).$$

При кинематическом возбуждении движение системы может быть разложено на два:

1) движение безмассовой системы (т.е. при ее движении не возникают силы инерции);

2) вынужденное колебание системы с дополнительным закреплением в точке *j*, вызванное силами инерции $-m_i\ddot{q}_i^{(1)}$ первого движения.

7.3. Влияние трения на колебания систем с конечным числом степеней свободы

7.3.1. Внешнее и внутреннее вязкое трение. Диссипативная функция Рэлея

Если движение системы мало, то, так же как и для систем с одной степенью свободы, различные по своей физической природе силы трения в большинстве случаев можно без большой погрешности заменять энергетически эквивалентными силами вязкого трения. Поэтому ограничимся рассмотрением вязкого трения.

Силы вязкого трения могут быть пропорциональными либо абсолютным скоростям движения масс (внешнее трение), либо скоростям их относительного перемещения (внутреннее трение). В первом случае на массу m_i действует сила трения $Q_i = -b_i\dot{q}_i$, а во втором эта сила является суммой влияния от всех других масс $Q_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(\dot{q}_k - \dot{q}_i)$.

В общем случае при наличии как внешнего, так и внутреннего трения силу вязкого трения, соответствующую координате q_i, можно представить с помощью введенной Рэлеем диссипативной функции с симметричной матрицей коэффициентов

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \ .$$

Действительно, тогда сила трения выражается формулой

$$Q_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \ . \qquad (7.12)$$

Запишем уравнения движения системы с учетом сил трения, определяемых выражением (7.12):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k\right) = P_i(t) \ \ (i=1,\ldots, n). \qquad (7.13)$$

В общем случае вязкого трения введение главных координат не приводит к независимым дифференциальным уравнениям относительно каждой из них. Лишь в случае так называемого пропорционального демпфирования главные координаты оказываются не связанными между собой и при наличии трения.

7.3.2. Пропорциональное демпфирование

Важным условием существования главных координат является одновременное приведение двух симметричных матриц масс и жесткостей к диагональному виду. В случае сил трения появляется еще одна матрица коэффициентов – диссипативных. Поэтому логично предположить, что эта матрица будет иметь в главных координатах диагональный вид, если она устроена особым образом, а именно эти коэффициенты пропорциональны коэффициентам других матриц.

При пропорциональном демпфировании в цепной системе коэффициенты внешнего трения пропорциональны соответствующим массам a_{ik}, а коэффициенты внутреннего трения пропорциональны соответствующим жесткостям c_{ik}. В этом случае матрица диссипативных коэффициентов может быть представлена в виде суммы двух матриц:

$$b_{ik} = n_0 a_{ik} + \lambda c_{ik}\,, \qquad (7.14)$$

где n_0 и λ – постоянные коэффициенты пропорциональности.

Если же условие (7.14) пропорционального демпфирования не выполняется, то все уравнения для q_k оказываются связанными и переход к главным координатам x_i не упрощает задачи.

Итак, при выполнении условия пропорционального демпфирования уравнения движения (7.13) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\left[\ddot{q}_k + n_0\dot{q}_k\right] + c_{ik}\left[q_k + \lambda\dot{q}_k\right]\right) = P_i(t)\,.$$

Представим физические перемещения в виде разложения по главным координатам:

$$q_k = \sum_{j=1}^{n} x_j u_{kj} \ .$$

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik} \sum_{j=1}^{n} u_{kj}\left[\ddot{x}_j + n_0 \dot{x}_j\right] + c_{ik} \sum_{j=1}^{n} u_{kj}\left[x_j + \lambda \dot{x}_j\right]\right) = P_i(t) \ .$$

Умножим это уравнение слева на $\sum_{i=1}^{n} u_{il}$ и учтем, что в соответствии с соотношениями ортогональности при $l \neq j$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{il} u_{kj} = 0 \ , \quad \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} u_{il} u_{kj} = 0 \ ,$$

а при $l = j$

$$M_j = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{kj} u_{ij} \ , \quad \omega_j^2 M_j = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} u_{kj} u_{ij} \ .$$

Таким образом, в уравнении сохраняются только те слагаемые, для которых $j = l$:

$$M_l\left[\ddot{x}_l + n_0 \dot{x}_l\right] + \omega_l^2 M_l\left[x_l + \lambda \dot{x}_l\right] = \sum_{i=1}^{n} u_{il} P_i(t) \ , \ l = 1, 2, \ldots, n$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} u_{il} P_i(t) = Q_l$ – обобщенная сила, соответствующая l-й собственной форме, приведем полученное уравнение к виду

$$\ddot{x}_l + n_l \dot{x}_l + \omega_l^2 x_l = \frac{Q_l}{M_l} \ , \quad l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$n_l = n_0 + \lambda \omega_l^2 \ . \tag{7.15}$$

Следовательно, при пропорциональном демпфировании каждая из главных координат определяется независимым уравнением (7.15). Это

уравнение имеет точно такой же вид, как и уравнение колебаний системы с одной степенью свободы при вязком трении.

Из формулы для коэффициента затухания n_l следует существенное различие между внешним и внутренним пропорциональным трением. При внешнем трении (присутствует только n_0) этот коэффициент для всех главных координат одинаков и, следовательно, колебания всех частот затухают одинаково, а при внутреннем вязком трении (присутствует член $\lambda\omega_k^2$) коэффициент затухания пропорционален квадрату собственной частоты и высокочастотные колебания затухают существенно быстрее, чем низкочастотные.

Следует, однако, отметить, что в большинстве случаев инженер не располагает надежной информацией о распределении сил трения в системе (внутреннее трение в материале, конструкционный гистерезис и пр.). На основе экспериментов удается оценить лишь интегральные эффекты сил трения (например, логарифмический декремент затухания или коэффициент поглощения). В этих условиях любая разумная гипотеза о распределении сил трения является одинаково приемлемой. Естественно поэтому для простоты предположить, что силы трения распределены таким образом, что главные координаты для консервативной системы являются главными и для системы с трением и что при вынужденных колебаниях они определяются уравнениями (7.15).

Изложенный простой способ учета трения сводит задачу о колебаниях системы с n степенями свободы к n задачам о колебаниях систем с одной степенью свободы при наличии трения. Однако этот метод не всегда приложим, если в систему специально введены элементы трения (демпферы колебаний). Большие силы трения, развивающиеся в таких демпферах при режимах, близких к резонансным, могут заметно исказить формы колебаний системы. В этих случаях целесообразно проводить точное решение задачи.

7.3.3. Метод комплексных амплитуд

Свободные колебания. Латинская буква i нам потребуется для обозначения мнимой единицы. Заменим ее на латинское l. Дифференциальные уравнения колебаний системы с вязким как внешним, так и внутренним трением имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{lk}\ddot{q}_k + b_{lk}\dot{q}_k + c_{lk}q_k\right) = 0 \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{7.16}$$

Представим решение системы уравнений (7.16) в комплексной форме

$$q_l = \overline{u}_l e^{i\overline{\omega}t}. \qquad (7.17)$$

Здесь буква $i = \sqrt{-1}$ означает мнимую единицу; $\overline{u}_l = u_l e^{i\varphi_l}$ – комплексные амплитуды; $\overline{\omega} = \omega + in$ – комплексная частота. Таким образом, принятая форма решения

$$q_l = u_l e^{i\varphi_l} e^{i(\omega+in)t} = u_l e^{-nt} e^{i(\omega t+\varphi_l)}$$

соответствует затухающим по экспоненциальному закону колебаниям. Подставив выражение (7.17) в уравнения (7.16), получим систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами относительно амплитуд:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-a_{lk}\overline{\omega}^2 + ib_{lk}\overline{\omega} + c_{lk}\right)\overline{u}_k = 0, \ (l = 1, \ldots, n). \qquad (7.18)$$

Приравняв нулю определитель системы (7.18), получим алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно $\overline{\omega}$:

$$P_{2n}(\overline{\omega}) = 0.$$

$2n$ корней этого уравнения определяют комплексные частоты, состоящие из n пар корней вида $\overline{\omega}_k^{\pm} = \pm\omega_k + in_k \ (k = 1, 2, ..., n)$.

Каждому корню соответствует свой набор комплексных амплитуд $\overline{u}_{lk} \ (k = 1, 2, ..., n)$. В общем случае соотношения между разными амплитудами из этого набора комплексны и, следовательно, при данной частоте $\overline{\omega}_k$ каждая масса колеблется со своей фазой φ_{lk}. Только при пропорциональном демпфировании отношения $\overline{u}_{lk}/\overline{u}_{jk}$ действительны, а форма колебания с частотой ω_k со временем не меняется. В этом случае она совпадает с формой колебаний консервативной системы.

Вынужденные гармонические колебания. Пусть на упругую систему действуют гармонические возмущающие силы частотой θ. Уравнения движения можно записать в форме уравнения (7.16):

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{lk}\ddot{q}_k + b_{lk}\dot{q}_k + c_{lk}q_k\right) = P_l(t) \ \ (l = 1, \ldots, n), \qquad (7.19)$$

где $P_l(t) = P_l \cos(\theta t + \varphi_l)$ – возмущающая сила, соответствующая перемещению q_l; P_l – амплитуда этой силы; φ_l – ее фаза. Введение фазовых

углов φ_l имеет смысл только в том случае, если имеется разница в фазах сил, приложенных к разным точкам.

Поскольку мы будем использовать метод комплексных амплитуд, запишем возмущающие силы в комплексной форме

$$\overline{P}_l(t) = \overline{P}_l e^{i\theta t}, \tag{7.20}$$

где $\overline{P}_l = P_l e^{i\varphi_l}$.

Перемещения q_l при стационарном режиме также будем искать в виде

$$\overline{q}_l = \overline{u}_l e^{i\theta t}, \tag{7.21}$$

где комплексная амплитуда $\overline{u}_l = u_l e^{i\psi_l}$ определяет как действительную амплитуду u_l, так и фазу колебаний ψ_l.

Подставляя значения $P_l(t)$, q_l в уравнение (7.19), придем к системе алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Эти уравнения получаются из исходных дифференциальных путем замены оператора дифференцирования множителем $i\theta$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-a_{lk}\theta^2 + ib_{lk}\theta + c_{lk}\right)\overline{u}_k = \overline{P}_l, \quad (l = 1, \ldots, n) \tag{7.22}$$

Решив эту систему, получим значения u_l (l=1, 2, ..., n), т.е. значения амплитуд и фаз колебаний всех грузов.

В данном случае такой прием вполне допустим. Решающим является то обстоятельство, что коэффициенты уравнения (7.19) действительные. Поэтому при всех операциях действительные части остаются действительными, а мнимые – мнимыми.

Таким образом, при замене q и P на $\overline{q}$ и $\overline{P}$ уравнение (7.19) полностью сохраняет свою силу отдельно для действительных, отдельно для мнимых частей $\overline{q}$ и $\overline{P}$. Таким образом, если расшифровать записи (7.20) и (7.21), то можно сказать, что нагрузкам

$$P_l(t) = P_l \cos(\theta t + \varphi_l)$$

соответствуют перемещения

$$q_l(t) = u_l \cos(\theta t + \psi_l),$$

а нагрузкам

$$P_l(t) = P_l \sin(\theta t + \varphi_l)$$

существуют перемещения

$$q_l(t) = u_l \sin(\theta t + \psi_l).$$

Отметим важный частный случай – действие на систему единичной гармонической силы. Представляя эту силу в форме

$$\overline{P}(t) = e^{i\theta t},$$

обнаружим, что любое комплексное перемещение

$$\overline{q}_l = \overline{u}_l e^{i\theta t}.$$

Таким образом, отношение комплексного перемещения к комплексной силе представляет собой комплексное число, зависящее от θ. Обозначим

$$\frac{\overline{q}_l}{\overline{P}(t)} = F_l(i\theta).$$

Очевидно, что модуль этого числа представляет собой отношение амплитуды перемещения к амплитуде силы, а аргумент составляет разницу фаз силы и перемещения.

Функция $F_l(i\theta)$ называется *(комплексной) частотной характеристикой системы* или комплексной передаточной функцией. Функция $F_l(i\theta)$ определяется решением системы уравнений (7.22) и представляет собой дробь, знаменатель которой равен определителю системы (7.22), а числитель – тому же определителю с заменой *l*-го столбца столбцом правых частей, где лишь одна возмущающая сила равна единице, а остальные – нулю.

Глава 8
Параметрические колебания

8.1. Уравнение движения параметрических колебаний

Хорошо знакомым примером параметрических колебаний является раскачивание на качелях. В этом случае удается увеличивать размахи колебаний только за счет периодического изменения момента инерции (положения центра тяжести системы от точки подвеса качелей). По смыслу названия параметрические колебания вызваны изменениями в параметрах системы. В уравнениях движения за них отвечают параметры c и a, которые теперь являются не константами, а функциями времени.

С другой стороны параметрические колебания обусловлены действием сил более сложной природы. Например, нестационарные позиционные силы, которые зависят от координат q_i, а также от времени t, в явном виде:

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и притом так, что их невозможно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат, а другое – только от времени.

Ограничимся рассмотрением линейных систем с одной степенью свободы, когда при малых отклонениях от положения равновесия обобщенная сила определяется выражением

$$Q = -c(t)\, q,$$

причем, в отличие от случаев действия стационарных восстанавливающих сил, параметр $c = c(t)$ является функцией времени.

Дифференциальное уравнение движения

$$a\ddot{q} + c(t)\, q = 0$$

мы будем далее писать в виде

$$\ddot{q} + \psi(t)\, q = 0\,, \tag{8.1}$$

где $\psi(t) = \dfrac{c(t)}{a}$ – переменный коэффициент.

Как мы увидим ниже, свойства движения, описываемого уравнением (8.1), существенно отличаются от свойств свободных колебаний, определяемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Важное значение имеют нередко встречающиеся в приложениях случаи периодического изменения параметра, когда

$$\psi(t+T)=\psi(t)\ .$$

Уравнение (8.1) в этом случае называют *уравнением Хилла*. Соответствующие этим случаям колебания называются *параметрически возбуждаемыми* или, короче, *параметрическими колебаниями*.

Отметим, что амплитуды параметрических колебаний – в зависимости от значений параметров системы – либо остаются ограниченными, либо возрастают во времени. Очевидную опасность представляют колебания с возрастающими амплитудами; это явление называют *параметрическим резонансом*. По некоторым признакам, о которых будет сказано ниже, параметрический резонанс существенно отличается от «обычного» резонанса и опаснее последнего.

8.2. Параметрические колебания около положения равновесия

Прежде чем обратиться к решению дифференциального уравнения (8.1) и исследованию возможности параметрического резонанса, рассмотрим некоторые простые механические системы, колебания которых являются параметрическими; в этих случаях их часто называют *параметрическими системами*.

В качестве первого примера рассмотрим симметричную абсолютно жесткую балку длиной $2l$ со средней шарнирно неподвижной опорой и двумя упругими опорами на концах. Коэффициенты жесткости упругих опор одинаковы и равны c (рис. 8.1). К балке приложена переменная горизонтальная сила $P(t)$, заданная в виде периодической функции времени.

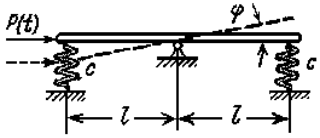


Рис. 8.1. Пример параметрической колебательной системы

В положении равновесия ось балки горизонтальна. При малых отклонениях балки от положения равновесия (см. штриховые линии на рис. 8.1) на нее действует момент сил упругости $c\varphi l^2$ и момент продольной силы $P(t)\varphi l$. Полный момент, представляющий собой обобщенную силу в данной задаче,

$$M = -(cl - \dot{P}(t))\varphi l ,$$

оказывается функцией координаты φ и времени *t*. Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$-(cl - P(t))\varphi l = I\ddot{\varphi} ,$$

(где *I* – момент инерции балки относительно оси вращения) или

$$\ddot{\varphi} + \frac{cl - P(t)}{I} l\varphi = 0 .$$

Оно относится к типу (8.1).

Другим примером может служить маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса (рис. 8.2). Пусть *l* – длина маятника, *m* – масса груза, *y* = *y*(*t*) – заданный периодический закон движения точки подвеса.

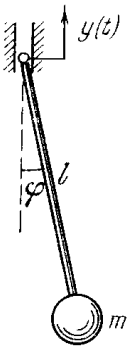


Рис. 8.2. Параметрическийе колебания в маятнике

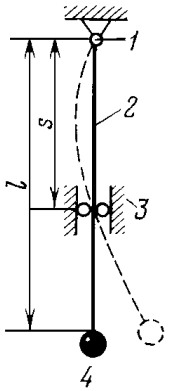


Рис. 8.3. Третий пример параметрической колебательной системы

Дифференциальное уравнение малых относительных колебаний маятника имеет вид

$$(-mg - m\ddot{y}(t))l\varphi = ml^2\ddot{\varphi}$$

($-m\ddot{y}(t)$ – переносная сила инерции) или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + \ddot{y}(t)}{l}\varphi = 0 ;$$

как видно, эта система также относится к типу параметрических.

В качестве третьего примера рассмотрим вертикальный безмассовый упругий стержень *2* длиной *l*, показанный на рис. 8.3. С концом стержня

связан сосредоточенный груз *4*. Верхней опорой служит неподвижный шарнир *1*, а нижней опорой служит втулка *3* с коротким подшипником. Если считать подшипник шарнирной опорой, то коэффициент изгибной жесткости балки определяется формулой теории сопротивления материалов

$$c = \frac{3EJ}{l(l-s)^2},$$

где s – расстояние между опорами.

Втулке задано периодическое движение около некоторого среднего положения, определяемого расстоянием S_0. Состоянию равновесия соответствует положение груза на вертикали и прямолинейная форма оси стержня.

При возмущении этого состояния груз отклоняется в сторону, ось балки изгибается, и последующее движение описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + \frac{3EJ}{ml\big(l-s(t)\big)^2} q = 0,$$

которое также относится к рассматриваемому здесь типу.

Исследование решений подобных дифференциальных уравнений позволит судить об устойчивости состояния равновесия, около которого происходят колебания. Если параметрически возбуждаемые колебания постепенно затухают (или, по крайней мере, не имеют тенденции к возрастанию, т.е. остаются ограниченными), то состояние равновесия следует признать устойчивым; если же колебания происходят с возрастающими амплитудами (параметрический резонанс), то состояние равновесия неустойчиво. Поэтому в подобных случаях самым важным является выяснение основной тенденции параметрических колебаний.

8.3. Параметрические колебания около стационарного режима движения

К необходимости исследовать свойства решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приводят также задачи об устойчивости стационарных режимов движения. Обычно дело сводится к следующему.

Допустим, что после решения некоторой задачи о движении механической системы найден режим движения, описываемый функцией $q = q(t)$. И этот режим движения является стационарным, т.е. его параметры (например, частота и амплитуда) не меняются со временем. Для

исследования устойчивости этого режима необходимо предположить, что он каким-либо образом нарушен, и возмущенное движение описывается функцией $q + \delta q$, близкой к функции $q(t)$; здесь $\delta q(t)$ – отклонение системы от исследуемого режима движения. Если функция δq с течением времени возрастает, то исследуемый режим $q = q(t)$ неустойчив; в случае постепенного затухания функции δq режим $q = q(t)$ устойчив. Как оказывается, для функции $\delta q(t)$ в ряде случаев можно получить дифференциальное уравнение типа (8.1). Характер решения этого уравнения позволяет сделать заключение об устойчивости режима движения $q = q(t)$.

Поясним сказанное примером из области вынужденных колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой. Пусть дифференциальное уравнение колебаний такой системы имеет вид

$$a\ddot{q} + F(q) = Q(t), \tag{8.2}$$

причем $F(q)$ и $Q(t)$ – заданные функции координаты и времени. Как мы увидим далее, решение этого уравнения может быть неоднозначным и возможно существование нескольких стационарных режимов с различными амплитудами

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Так как среди этих режимов физически осуществимы только устойчивые режимы, то полное решение задачи о вынужденных колебаниях должно содержать не только выяснение (точное или приближенное) возможных режимов, но и анализ их устойчивости.

Решение $q_1(t)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению (8.2):

$$a\ddot{q}_1 + F(q_1) = Q(t). \tag{8.3}$$

Но тому же дифференциальному уравнению (8.2) должна удовлетворять также функция $q_1 + \delta q_1$:

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F(q_1 + \delta q_1) = Q(t).$$

Рассматривая малые величины δq_1, мы можем принять

$$F(q_1 + \delta q_1) \approx F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по координате q_1, т.е.

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1 = Q(t). \tag{8.4}$$

Вычитая уравнение (8.3) из уравнения (8.4), получим уравнение для отклонения от стационарного режима

$$a\delta\ddot{q}_1 + F'(q_1)\delta q_1 = 0. \tag{8.5}$$

Однако так как q_1 представляет некоторую известную функцию времени (стационарный режим), то и $F'(q_1)$ также является функцией времени, т.е. дифференциальное уравнение (8.5) есть уравнение типа (8.1).

Пусть, например,

$$F(q) = \beta q^3, \qquad Q(t) = H \sin \theta t,$$

и необходимо исследовать устойчивость стационарного режима

$$q_1 = A_1 \sin \theta t.$$

В данном случае

$$F'(q) = 3\beta q^2 = 3\beta A_1^2 \sin^2 \theta t$$

и для вариации стационарного режима получим дифференциальное уравнение

$$a\delta\ddot{q} + \left(3\beta A_1^2 \sin^2 \theta t\right)\delta q = 0.$$

8.4. Параметрическое возбуждение по кусочно-постоянному периодическому закону

В ранний период строительства и эксплуатации транспортных электровозов последние снабжались спарниками, которые порождали периодически изменяющуюся жесткость ведущей системы, что приводило часто к интенсивным колебаниям. Этот вопрос был подробно исследован швейцарским профессором Мейснером, который для описания явления получил дифференциальное уравнение угла поворота кривошипа с периодическим коэффициентом, причем жесткость системы он аппроксимировал ступенчатой характеристикой. Поэтому оно называется *уравнением Мейснера*.

Рассмотрим случай, когда переменный коэффициент изменяется по кусочно-постоянному периодическому закону (закону прямоугольного синуса) (рис. 8.4) с периодом T:

$$\psi = \psi_0 \pm \Delta\psi,$$

причем ψ_0 – среднее значение коэффициента, входящего в дифференциальное уравнение движения $\Delta\psi$ – глубина пульсации этого коэффициента.

Тогда само дифференциальное уравнение движения $\ddot{q} + \psi(t)q = 0$ принимает вид

$$\ddot{q} + k_0^2(1 \pm \mu)q = 0, \tag{8.6}$$

где $k_0^2 = \psi_0$, $\mu = \dfrac{\Delta\psi}{\psi_0}$.

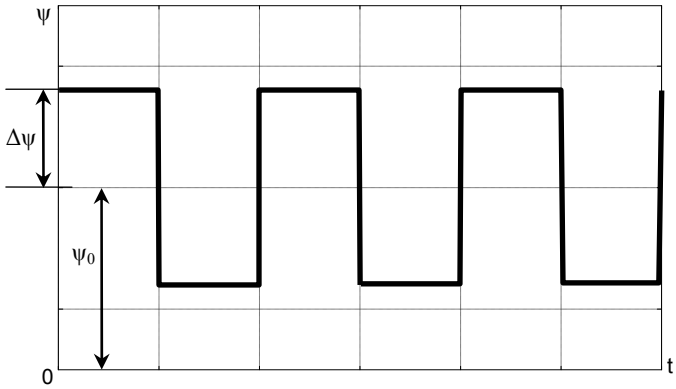


Рис. 8.4. Кусочно-постоянная зависимость
переменного коэффициента от времени

Ввиду того что в течение каждого полупериода $T/2$ дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, можно воспользоваться способом припасовывания.

Рассмотрим какой-либо период T изменения коэффициента ψ и совместим с началом этого периода начало отсчета времени. В первом полупериоде, когда $0 < t < T/2$, дифференциальное уравнение (8.6) имеет вид

$$\ddot{q} + k_0^2(1+\mu)q = 0\,, \tag{8.7}$$

а во втором полупериоде $T/2 < t < T$ соответственно будет

$$\ddot{q} + k_0^2(1-\mu)q = 0\,. \tag{8.8}$$

Дифференциальные уравнения (8.7) и (8.8) с постоянными коэффициентами имеют решения

$$q_1 = C_1 \sin k_1 t + D_1 \cos k_1 t\,, \qquad q_2 = C_2 \sin k_2 t + D_2 \cos k_2 t\,, \tag{8.9}$$

причем $k_1 = k_0\sqrt{1+\mu}$, $k_2 = k_0\sqrt{1-\mu}$.

В этих решениях содержатся четыре постоянные C_1, D_1, C_2, D_2, для определения которых необходимы четыре условия. Два условия относятся к моменту времени $t = T/2$, общему для обоих полупериодов; в указанный момент должны совпадать перемещения и скорости

$$q_1\left(\frac{T}{2}\right) = q_2\left(\frac{T}{2}\right), \qquad \dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_2\left(\frac{T}{2}\right).$$

Это дает следующие соотношения:

$$C_1 \sin\frac{k_1 T}{2} + D_1 \cos\frac{k_1 T}{2} = C_2 \sin\frac{k_2 T}{2} + D_2 \cos\frac{k_2 T}{2},$$

$$k_1\left(C_1 \cos\frac{k_1 T}{2} - D_1 \sin\frac{k_1 T}{2}\right) = k_2\left(C_2 \cos\frac{k_2 T}{2} - D_2 \sin\frac{k_2 T}{2}\right). \quad (8.10)$$

Запишем еще два соотношения:

$$q_2(T) = \lambda q_1(0), \qquad \dot{q}_2(T) = \lambda \dot{q}_1(0), \quad (8.11)$$

в которых λ – некоторое, пока неизвестное число. Соотношениями (8.11) утверждается, что по истечении рассматриваемого периода обобщенная координата и обобщенная скорость изменяются в λ раз. Соответственно этому движение в следующем периоде начнется при измененных в λ раз начальных условиях, т.е. будет повторять движение в рассматриваемом периоде, но в измененном в λ раз масштабе.

Если $|\lambda| > 1$, то колебания в каждом следующем периоде будут усиливаться, а если $|\lambda| < 1$, то они будут постепенно затухать. Таким образом, устойчивость или неустойчивость системы определяется значением модуля λ.

Подставив решения (8.9) в соотношения (8.11), получим

$$\lambda D_1 = C_2 \sin k_2 T + D_2 \cos k_2 T, \quad \lambda C_1 k_1 = C_2 k_2 \cos k_2 T - D_2 k_2 \sin k_2 T. \quad (8.12)$$

Система уравнений (8.10) и (8.12) однородна относительно постоянных C_1, D_1, C_2, D_2 и имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из ее коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{k_1 T}{2} & \cos\frac{k_1 T}{2} & -\sin\frac{k_2 T}{2} & -\cos\frac{k_2 T}{2} \\ k_1 \cos\frac{k_1 T}{2} & -k_1 \sin\frac{k_1 T}{2} & -k_2 \cos\frac{k_2 T}{2} & k_2 \sin\frac{k_2 T}{2} \\ 0 & \lambda & -\sin k_2 T & -\cos k_2 T \\ k_1 \lambda & 0 & -k_2 \cos k_2 T & k_2 \sin k_2 T \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получим следующее квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0, \quad (8.13)$$

в котором для краткости обозначено

$$A = \cos\frac{k_1 T}{2}\cos\frac{k_2 T}{2} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2}\sin\frac{k_1 T}{2}\sin\frac{k_2 T}{2} =$$
$$= \cos\left(\pi\alpha\sqrt{1+\mu}\right)\sin\left(\pi\alpha\sqrt{1-\mu}\right) - \qquad (8.14)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\sin\left(\pi\alpha\sqrt{1+\mu}\right)\cos\left(\pi\alpha\sqrt{1-\mu}\right) = A(\alpha,\mu),$$

причем $\alpha = \dfrac{k_0 T}{2\pi}$ – есть отношение среднего значения собственной частоты k_0 к частоте пульсации параметра $2\pi/T$. Корни уравнения (8.13) следующие:

$$\lambda_1 = A - \sqrt{A^2 - 1}, \qquad \lambda_2 = A + \sqrt{A^2 - 1}. \qquad (8.15)$$

Для того чтобы числа λ_1 и λ_2 были вещественными, как это предполагается по смыслу решаемой задачи, должно быть

$$|A| > 1, \qquad (8.16)$$

т.е. либо $A > 1$, либо $A < -1$. Но в обоих случаях модуль одного из корней (8.15) больше единицы: если $A > 1$, то $|\lambda_2| > 1$; если $A < -1$, то $|\lambda_1| > 1$.

Отсюда следует, что если выполнено неравенство (8.16), то колебания будут с каждым новым периодом увеличиваться. Неравенство (8.16) представляет собой не только условие вещественности множителя λ, но одновременно и условие возникновения параметрического резонанса.

Так как значение A зависит от двух постоянных системы α и μ, то их значения полностью определяют устойчивость системы.

На рис. 8.5 представлена построенная с помощью условия (8.16) диаграмма устойчивости, по осям которой отложены значения $4\alpha^2$ и $2\mu\alpha^2$. В незаштрихованных областях значения параметров таковы, что условие (8.16) выполняется, т.е. система неустойчива.

Заштрихованные области диаграммы соответствуют устойчивым состояниям системы. С помощью такой диаграммы можно сразу судить об устойчивости по данным значениям α и μ без всяких дополнительных вычислений.

Прежде всего обратим внимание на те зоны областей неустойчивости, которые расположены вблизи горизонтальной оси, т.е. соответствуют малым значениям параметра $\mu = \dfrac{\Delta\psi}{\psi_0}$. Как видно, в этих зонах $4\alpha^2 = n^2$, т.е.

$$\alpha \approx \frac{n}{2} \quad (n = 1,2,\ldots). \qquad (8.17)$$

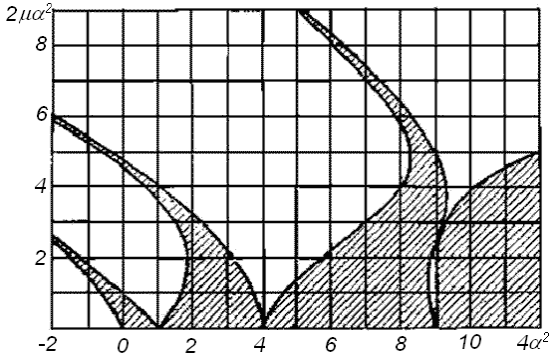


Рис. 8.5. Диаграмма устойчивости

То же можно найти из (8.14), положив $\mu = 0$. В самом деле,

$$A = \cos^2 \pi\alpha - \sin^2 \pi\alpha = \cos 2\pi\alpha ,$$

т.е. при произвольных значениях α имеем $|A| \le 1$. Равенство $|A| = 1$, соответствующее возникновению параметрического резонанса, возможно при условии, что аргумент $2\pi\alpha$ удовлетворяет равенству

$$2\pi\alpha = \pi n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

из которого также следует соотношение (8.17).

Таким образом, если выполняется условие (8.17), то параметрический резонанс возникает при сколь угодно малой глубине пульсации. При этом основное значение имеет случай $n = 1$, когда $\alpha = 1/2$, т.е. когда среднее значение собственной частоты вдвое меньше частоты параметрического возбуждения.

При значительной глубине пульсации и заметном отличии μ от нуля параметрический резонанс возникает в целых областях значений α, расположенных вблизи значений (8.17); чем больше заданное значение μ, тем шире эти области. По этой причине отстройка от параметрического резонанса труднее, чем от обычного резонанса; параметрический резонанс более опасен, чем обычный, еще и по той причине, что линейное демпфирование (которое выше вообще не учитывалось) лишь несколько суживает области неустойчивости, но неспособно ограничить возрастание амплитуд колебаний в этих областях.

Пример. Груз *1* массы *m* упруго подвешен на цилиндрической витой пружине *2* длиной *l;* коэффициент жесткости пружины равен *c.* Разрезная втулка *3* периодически обжимает верхнюю часть пружины так, что длительность каждого обжима *t* равна длительности интервала между двумя

последовательными обжимами. Длина деформируемой части пружины при обжиме мало отличается от длины l (рис. 8.6). Найти наименьшее значение t, при котором возникает параметрический резонанс.

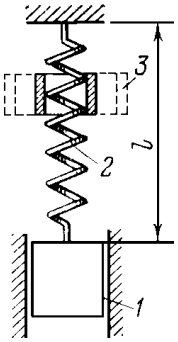


Рис. 8.6. Параметрическая колебательная система

Замечая, что период изменения жесткости $T = 2t$, и учитывая малость глубины пульсации (втулки, а т.е. μ в формулах), запишем условие параметрического резонанса (8.17):

$$\alpha = \frac{k_0 T}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots).$$

Подставляя сюда $k_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $T = 2t_*$, находим $t_* = \frac{\pi\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}$. Наименьшее значение t_* соответствует $\varepsilon = 1$: $t_* = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}$, т.е. вчетверо меньше периода собственных колебаний груза.

Глава 9
Основы теории нелинейных колебательных систем

Большинство задач теоретической и математической физики приводят к нелинейным уравнениям. Существенным оказывается деление динамических систем по количеству степеней свободы и по сохранению энергии на консервативные и неконсервативные. Консервативные системы с одной степенью свободы всегда интегрируемы (в специальных функциях, например элиптических). Системы с несколькими степенями свободы, как правило, неинтегрируемы. Исключение составляют системы, обладающие определенными симметриями, с каждой из которых, по теореме Нетер, связан первый интеграл (закон сохранения). В настоящее время нет общих методов, позволяющих найти первые интегралы и *нет общего метода интегрирования нелинейных систем.*

Однако необходимость решения различных нелинейных задач обусловлена требованиями развития техники и общества в целом. Во многих важных задачах можно выделить некие параметры, которые вполне допустимо полагать малыми, и использовать идеи теории возмущений или метода усреднений. Поэтому было разработано множество асимптотических и приближенных методов.

Здесь стоит также отметить, что использование компьютеров в значительной мере способствовало пониманию некоторых характерных особенностей поведения существенно нелинейных систем.

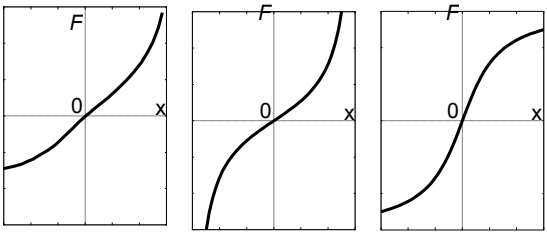
Рассмотрим отличительные свойства нелинейных систем на примере систем с одной степенью свободы.

9.1. Свойства нелинейных колебаний

9.1.1. Свободные колебания

Рассмотрим простейшую нелинейную систему с одной степенью свободы – груз m на нелинейной пружине. Примеры упругой характеристика пружины, т. е. зависимость усилия F от смещения x, графически представлены на рис. 9.1.

В зависимости от вида характеристики она называется несимметричной (рис. 9.1, *а*) или симметричной (рис. 9.1, *б*, *в*). Если жесткость (dF/dx) возрастает с увеличением x, как на рис. 9.1, *б*, характеристика называется *жесткой,* в противном случае (рис. 9.1, *в*) – *мягкой.*



(*а*) несимметричная (*б*) жесткая (*в*) мягкая

Рис. 9.1. Примеры нелинейных упругих характеристик

Уравнение свободных колебаний консервативной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + F(x) = 0 \,. \tag{9.1}$$

Первый интеграл этого уравнения легко может быть вычислен. Обозначив $\dot{x} = y$, приведем уравнение (9.1) к виду

$$my\frac{dy}{dx} + F(x) = 0 \,,$$

откуда

$$\frac{my^2}{2} + \int_0^x F(x)dx = C \,, \tag{9.2}$$

где C – постоянная.

Равенство (9.2) выражает *закон сохранения энергии*; первый член левой части представляет собой кинетическую энергию, второй – потенциальную. Уравнение (9.2) позволяет качественно изобразить *фазовый портрет движения*, т.е. семейство траекторий в координатах x, y (рис. 9.2).

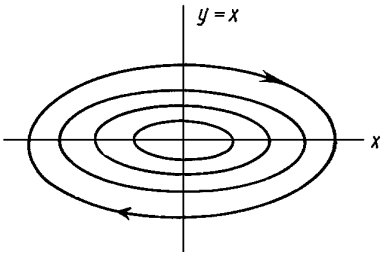


Рис. 9.2. Фазовый портрет колебательной системы

Так как уравнение (9.2) четное относительно y, траектории симметричны относительно оси x. В случае симметричной упругой характеристики $F(x)$ они симметричны также и относительно вертикальной оси y.

Для определения закона движения требуется выполнить второе интегрирование:

$$t = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \int \left[\frac{2}{m} \left(C - \int F(x)dx \right) \right]^{-\frac{1}{2}} |dx| . \qquad (9.3)$$

В отличие от привычного представления перемещения x как функции времени t, формула (9.3) дает обратную зависимость. В процессе колебания x то возрастает, то убывает, однако отношение $\frac{dx}{\dot{x}}$ всегда положительно, поэтому в формулу (9.3) входит абсолютное значение dx.

Используя формулу (9.3), можно определить период колебания как время, затрачиваемое на полный цикл движения, при котором изображающая точка обходит полностью фазовую траекторию. Учитывая симметрию фазовой траектории, находим

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\frac{2}{m} \left(C - \int F(x)dx \right) \right]^{\frac{-1}{2}} |dx| \qquad (9.4)$$

При этом постоянная C определяется формулой

$$C = \int_{x_{\min}}^{0} F(x)dx = \int_{0}^{x_{\max}} F(x)dx = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 .$$

Для системы с симметричной упругой характеристикой $x_{\text{тах}} = -x_{\min} = A$

$$T = 4 \int_{0}^{A} \left[\frac{2}{m} \int F(x)dx \right]^{\frac{-1}{2}} dx . \qquad (9.5)$$

Из формул (9.4) и (9.5) следует ПЕРВАЯ важная особенность нелинейных систем – *зависимость периода свободных колебаний (а следовательно и частоты) от амплитуды*.

Свободные колебания нелинейной системы являются периодическими, но не гармоническими; соответствующее перемещение может быть разложено в ряд Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t + A_2 \cos 2\omega_* t + B_2 \sin 2\omega_* t + \ldots . \quad (9.6)$$

Здесь $\omega_*(A)$ – основная частота колебания, зависящая от амплитуды.

Среди гармонических коэффициентов особое место занимает A_0; этот коэффициент характеризует смещение центра колебания от положения статического равновесия.

Если упругая характеристика системы является симметричной, то, как следует из симметрии фазовых траекторий относительно оси y, A_0, и все четные коэффициенты разложения равны нулю.

Однако в общем случае следует ВТОРОЕ свойство нелинейной системы: *ряд Фурье негармонического решения содержит бесконечное число гармоник основной частоты.*

Для представления закона движения в форме разложения в ряд Фурье (9.6) следует предварительно обратить зависимость (9.3) и найти $x(t)$. Вычисления оказываются обычно чрезвычайно затруднительными. Поэтому для приближенного определения периода T колебания (или основной его частоты), а также нескольких первых коэффициентов разложения большей частью используются приближенные методы.

Наконец, ТРЕТЬЕ важное свойство состоит в том, что *в нелинейных системах возможна реализация нескольких режимов колебаний* в одних и тех же условиях. Это свойство мы подробнее рассмотрим на примере вынужденных колебаний диссипативной нелинейной системы.

9.1.2. Вынужденные колебания нелинейной системы с кубической упругой характеристикой при гармоническом возбуждении и вязком трении

Уравнение движения имеет вид (уравнение Дуффинга):

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma x^3 = P_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (9.7)$$

Фазовый угол φ включен в выражение возмущающей силы для упрощения вычислений. Приближенное решение уравнения (9.7) будем искать в форме

$$x = A \sin \omega t \quad (9.8)$$

и используем *метод гармонического баланса*, т.е. сбалансируем коэффициенты при всех слагаемых, содержащих одинаковые гармонические функции. Подставим выражение (9.8) в левую часть уравнения (9.7), используем тождество

$$\sin^3 \omega t = \tfrac{3}{4} \sin \omega t - \tfrac{1}{4} \sin 3\omega t$$

и раскроем синус суммы в правой части уравнения (9.7):

$$\sin(\omega t+\varphi)=\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi\ .$$

Затем приравниваем нулю члены, содержащие $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ в отдельности:

$$\left(c-m\omega^2\right)A+\frac{3}{4}\gamma A^3=P_0\cos\varphi\ , \tag{9.9}$$

$$\alpha A\omega=P_0\sin\varphi\ .$$

При этом член $\frac{1}{4}\gamma A^3\sin 3\omega t$ остается несбалансированным. Учитывая, что

$$\frac{c}{m}+\frac{3}{4}\frac{\gamma}{m}A^2=\omega_*^2(A)$$

представляет собой квадрат частоты свободных колебаний (зависящий от амплитуды), и обозначая $\frac{\alpha}{m}=2\varepsilon$, получаем

$$\left(\omega_*^2(A)-\omega^2\right)A=\frac{P_0}{m}\cos\varphi\ , \tag{9.10}$$

$$2\varepsilon\omega A=\frac{P_0}{m}\sin\varphi\ .$$

Исключив отсюда фазовый сдвиг, найдем

$$\left(\left(\omega_*^2(A)-\omega^2\right)^2+4\varepsilon^2\omega^2\right)A^2=\left(\frac{P_0}{m}\right)^2\ . \tag{9.11}$$

Разделив уравнения (9.10) одно на другое почленно, получим значение фазы колебаний

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\varepsilon\omega}{\omega_*^2-\omega^2}\ .$$

Уравнение (9.11) дает зависимость между частотой возмущающей силы и амплитудой вынужденных колебаний. Решив это уравнение относительно ω^2, получим

$$\omega^2=\omega_*^2(A)-2\varepsilon^2\pm\sqrt{\left(\frac{P_0}{mA}\right)^2-4\varepsilon^2\omega_*^2(A)+4\varepsilon^4}\ . \tag{9.12}$$

При малом демпфировании $\varepsilon^2 << \omega_*^2$ и формула (9.12) может быть приведена к виду

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) \pm \sqrt{\left(\frac{P_0}{mA}\right)^2 - 4\varepsilon^2\omega_*^2(A)}\ . \qquad (9.13)$$

Построение зависимости $A(\omega)$, называемой амплитудно-частотной характеристикой, согласно формуле (9.13) показано на рис. 9.3.

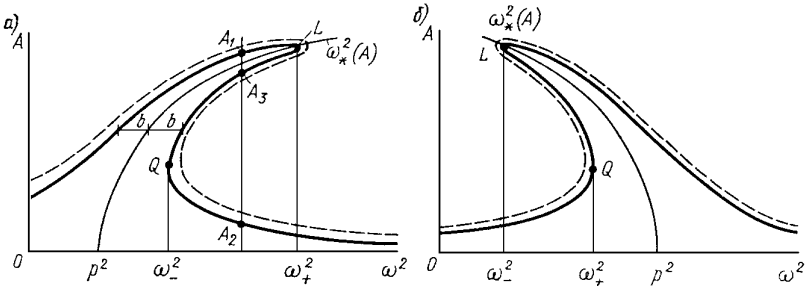


Рис. 9.3 Амплитудно-частотная характеристика для жесткой (*а*) и мягкой (*б*) систем

В координатах ω^2, A построена скелетная кривая, т.е. зависимость $\omega_*^2(A)$ для системы без трения и вынуждающей силы, а затем на каждом уровне амплитуды влево и вправо от нее по горизонтали отложены отрезки

$$b = \sqrt{\left(\frac{P_0}{mA}\right)^2 - 4\varepsilon^2\omega_*^2(A)}\ .$$

Третьей существенной особенностью нелинейных систем является возможность реализации нескольких различных периодических режимов при изменении частоты в определенных пределах, в том числе неустойчивые режимы. Так, как видно из рис. 9.3, *а*, при $\omega_- < \omega < \omega_+$ уравнение (9.13) дает три режима: с большими амплитудами A_1, с малыми амплитудами A_2 и с промежуточными амплитудами A_3. Правда, как мы увидим далее, устойчивыми являются только режимы A_1 и A_2, а режим A_3 неустойчив и не реализуется практически.

Реализация того или иного устойчивого режима зависит от начальных условий движения. Так, если медленно увеличивать частоту возмущаю-

щей силы, амплитуды будут изменяться по линии *KL* (рис. 9.4). В точке *L* произойдет срыв колебаний, и при дальнейшем увеличении частоты амплитуды будут изменяться по линии *MN*. При медленном уменьшении частоты амплитуды меняются по линии *NQRK*. Следует отметить, что, поскольку в интервале частот $\omega_- < \omega < \omega_+$ возможны два устойчивых периодических режима, система, колеблющаяся в одном из них, может перейти на другой при каких-либо дополнительных внешних воздействиях.

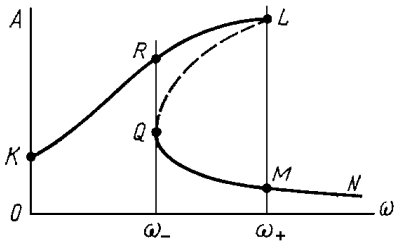


Рис. 9.4. Реализации разных устойчивых режимов колебаний

Исследуем зависимость амплитуды колебаний от амплитуды возмущения. Как видно из формулы (9.13), увеличение P_0 приводит к увеличению отрезков *b*, откладываемых влево и вправо от скелетной кривой. Таким образом, на рис. 9.3, *а*, а штриховая кривая соответствует большему значению возмущающей силы, чем сплошная. Обратим внимание на то, что в режимах A_1 и A_2 увеличение силы приводит к увеличению амплитуды колебаний $\frac{\partial A}{\partial P_0} > 0$, а в режиме A_3 – к уменьшению амплитуды $\frac{\partial A}{\partial P_0} < 0$. Можно показать строго, что условие $\frac{\partial A}{\partial P_0} < 0$ является признаком неустойчивости режима.

9.2. Автоколебания

Рассмотрим систему со следующими свойствами: 1) есть канал поступления энергии извне; 2) есть трение; 3) присутствует нелинейность, позволяющая контролировать отбор внешней энергии. Если, несмотря на наличие трения в системе устанавливаются и поддерживаются незатухающие колебания за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы, причем «амплитуда» этих колебаний определяется свойствами системы, а не начальными условиями (как в консервативных системах),

то такие колебания называют *автоколебаниями*, а системы, в которых возможны автоколебания, – *автоколебательными системами*. Примеры автоколебательных систем: часы, смычковые музыкальные инструменты, паровая машина, ламповый генератор, крыло самолета в потоке воздуха (колебания тел в потоке газа или жидкости – флаттер) и т.д.

Основные свойства автоколебаний: 1) независимость амплитуды от начальных условий; 2) существование источника энергии, компенсирующего потери за счет трения (заводной механизм в часах); 3) существенно нелинейный ограничитель амплитуды колебаний (трение). Причем автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии и таким образом за счет непрерывного источника энергии создает периодический процесс.

Общий класс автоколебательных систем с одной степенью свободы описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x} .$$

Здесь функция F является нелинейной и уравнение является квазилинейным. Примером может служить уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x} .$$

На фазовой плоскости для автоколебаний характерно наличие особых траекторий, которые называются *предельными циклами*, т.е. такой изолированной траекторией, к которой стремятся соседние.

9.3. Аналитические методы теории нелинейных колебаний

9.3.1. Качественный метод анализа фазового портрета

Качественный метод, составляющий основу качественной теории дифференциальных уравнений, позволяет исследовать общий характер решений нелинейных уравнений на основе *анализа фазового портрета* этих уравнений.

Основную роль в описании структуры фазового пространства динамической системы играет разделение фазовых траекторий на обыкновенные и особые. К последним принадлежат: *особые точки*, соответствующие состояниям равновесия системы или ее стационарным движениям (типа центр, седло, фокус,); изолированные замкнутые траектории, называемые *предельными циклами*, которые соответствуют периодическим движениям; *сепаратрисные кривые и поверхности*, которые являются

границами областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям.

Устойчивые состояния равновесия и периодические движения являются простейшими примерами установившихся движений.

Изолированную замкнутую траекторию, к которой стремятся все соседние и которая соответствует периодическому режиму, называют *предельным циклом*.

Их может быть три вида

1. *Устойчивый предельный цикл*, или *аттрактор*, – с обеих сторон на нее навиваются траектории при $t \to +\infty$ (в трехмерном пространстве – кривая, обвивающая тор).
2. *Неустойчивый предельный цикл*, или *репеллер*, – кривая, от которой при $t \to +\infty$ с обеих сторон удаляются траектории.
3. *Полуустойчивый предельный цикл* – траектории с одной стороны, навиваются, а с другой стороны удаляются.

Например, в стационарном режиме фазовый портрет автоколебаний представляет собой предельный цикл.

Таким образом, основное внимание в этом методе уделяется выявлению и анализу особых точек динамических систем, которые соответствуют состояниям равновесия и особых траекторий или сепаратрис, которые разделяют режимы с разным типом движения. От характера особых точек зависит поведение фазовых траекторий в их окрестности. Мы кратко уже рассмотрели особые точки первого порядка для одномерных систем типа центр, узел, фокус, седло и характер фазовых траекторий в их окрестности для случая одной степени свободы.

Рассмотрим теперь структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности периодического движения на примере трехмерного фазового пространства. Пусть $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$ – периодическое решение периода T системы дифференциальных уравнений. Линеаризуя эти уравнения в окрестности рассматриваемого периодического движения, придем к уравнениям в вариациях, в которых теперь частные производные

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0,$$

вычисленные при $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$, представляют собой периодические функции периода T. Пусть $\xi^i(t), \eta^i(t), \zeta^i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ – фундаментальная система решений дифференциальных уравнений с пе-

риодическими коэффициентами, удовлетворяющая начальным условиям $\xi^i(0)=\delta_{1i}$, $\eta^i(0)=\delta_{2i}$, $\zeta^i(0)=\delta_{3i}$, $\delta_{ij}=1$ при $i=j$, $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$, т.е. нормированная к единичной матрице при $t=0$.

Характеристическое уравнение для рассматриваемого периодического движения, имеет вид

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}\xi^1(T)-\lambda & \eta^1(T) & \zeta^1(T)\\ \xi^2(T) & \eta^2(T)-\lambda & \zeta^2(T)\\ \xi^3(T) & \eta^3(T) & \zeta^3(T)-\lambda\end{vmatrix}.$$

Один из корней этого уравнения всегда равен единице, поскольку рассматриваемое движение – периодическое. В зависимости от значений двух других корней возможны следующие основные случаи.

1. Корни действительные и имеют разные знаки. Это случай седлового периодического движения (рис. 9.5, *а*): через замкнутую траекторию γ, соответствующую изучаемому периодическому колебанию, проходят две интегральные поверхности S_2^+ и S_2^-, состоящие из фазовых кривых, асимптотически приближающихся к кривой γ при $t\to+\infty$ и соответственно при $t\to-\infty$.

2. Корни действительные и отрицательные (положительные). Этот случай соответствует устойчивому (неустойчивому) узловому периодическому движению и изображен на рис. 9.5, *б*, *в*.

3. Корни комплексные с отрицательными (положительными) действительными частями. В этом случае, как показано на рис. 9.5, *г*, *д*, фазовые кривые возмущенного движения образуют винтовые линии, осью которых является замкнутая траектория γ; исследуемое движение при этом является фокусным (устойчивым или неустойчивым). Очевидно, центральному периодическому движению соответствует пара чисто мнимых корней; при этом винтовые линии не приближаются и не удаляются от кривой *y*, а во все время возмущенного движения находятся от нее на расстоянии $\rho(\xi,\eta,\zeta)$, определенном начальными возмущениями (рис. 9.5, *е*). Такое движение является, как известно, орбитно устойчивым.

Локальное исследование состояний равновесия и периодических колебаний уравнения проясняет картину поведения траекторий в фазовом пространстве в их малой окрестности, однако не позволяет окончательно изучить колебательные процессы. Полное (глобальное) описание фазового портрета для произвольной динамической системы представляет собой очень сложную и до сих пор не решенную (качественным методом) проблему.

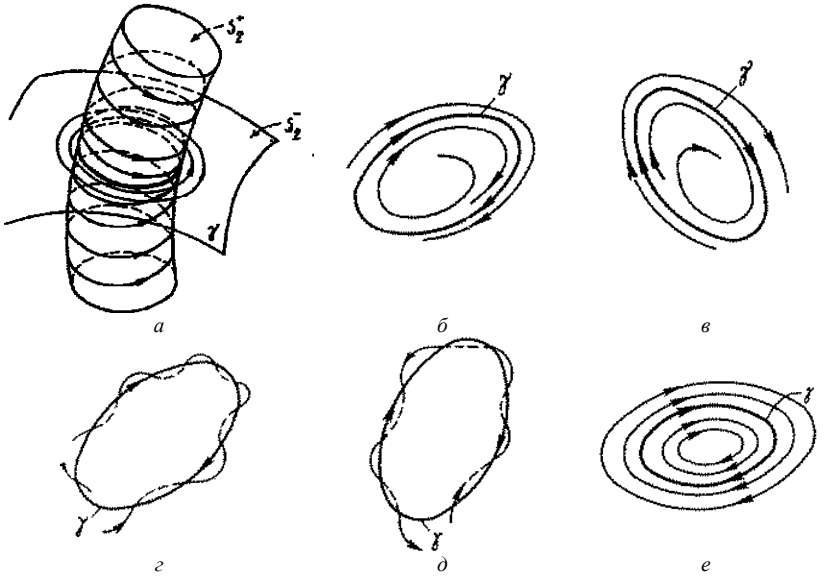


Рис. 9.5. Примеры фазовых портретов

Как правило, нелинейные функции содержат *параметры*, описывающие влияние внешних условий на систему. Часто случается так, что при малом изменении такого параметра качественно меняется поведение системы. Тогда говорят, что система имеет *точку бифуркации*. Качественно меняется и фазовый портрет системы, например, особая точка из устойчивого узла может превратиться в седло. Или устойчивый фокус превращается в неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом (бифуркация Хопфа). Существует классификация таких бифуркаций, хотя о полноте такой классификации трудно судить.

Развитие подобных теорий привело к появлению математического термина «катастрофа» и теории катастроф как раздела математики.

Дальнейшие исследования показывают, что в определенных случаях при увеличении параметра системы бифуркаций оказывается очень много, и это обстоятельство приводит к возникновению хаотической динамики – наблюдается переход к стохастичности в детерминированных системах. В этом случае аттракторы имеют топологическую структуру, которую характеризует нецелая размерность Хаусдорфа, т.е. аттрактор является фракталом и его называют *хаотическим* или *странным аттрактором*.

9.3.2. Асимптотические и прямые методы

Важный класс нелинейных систем представляют нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору, или системы с малой нелинейностью. Такие системы описываются уравнениями вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu F(x, \dot{x}),$$

где μ – малый безразмерный положительный параметр. Для решения таких уравнений разработан ряд *асимптотических (приближенных) методов*. Например, метод малого параметра, метод осреднения и т.д.

1. *Метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля)*. Метод Ван-дер-Поля дает возможность найти асимптотические решения как для периодических, так и для процессов установления периодических движений или состояний равновесия. Решения получаются тем более точные, чем меньше параметр μ. В методе Ван-дер-Поля вместо точных уравнений рассматриваются специальным образом введенные так называемые *укороченные уравнения*. Эти уравнения также нелинейны, но для них сравнительно просто найти предельные циклы на фазовой плоскости. Переход к этим уравнениям состоит в том, что решения ищутся в виде решения простого гармонического осциллятора, но константы интегрирования в этих решениях предполагаются *медленно меняющимися функциями*, которые называют *переменными Ван-дер-Поля*.

2. *Метод малого параметра (метод Пуанкаре).* Метод Пуанкаре позволяет найти периодические решения в виде рядов по степеням параметра μ. Можно получить решения с любой степенью точности, если только эти ряды не расходятся.

3. *Метод гармонического баланса* предполагает близость колебаний к гармоническим и по существу является видоизменением методов Ван-дер-Поля и Пуанкаре. Метод гармонического баланса был разработан Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым и в дальнейшем развит другими учеными. Этот метод является одним из широко распространенных приближенных приемов отыскания периодических режимов в нелинейных колебательных системах; он основан на том обстоятельстве, что, несмотря на наличие нелинейностей, установившиеся колебания в системе при определенных условиях оказываются близкими к гармоническим.

4. *Метод Крылова – Боголюбова* является обобщением метода гармонического баланса.

Методы приближенного решения дифференциальных уравнений, основанные на сведении этой задачи к решению систем алгебраических уравнений, называются прямыми методами. Полученные уравнения

удобнее решать численными методами. При применении этих методов приближенное решение $q(t)$ нелинейного уравнения

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t)$$

ищут в виде линейной комбинации некоторых заданных функций $\varphi_k(t)$, т.е. в виде ряда

$$q(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(t) \qquad (9.14)$$

с постоянными коэффициентами a_k. Для того чтобы при $m \to \infty$ приближенное решение (9.14) стремилось к точному, необходимо чтобы координатные функции $\varphi_k(t)$ были допустимыми в рассматриваемой задаче. Это означает, что функции $\varphi_k(t)$ должны удовлетворять определенным краевым условиям, условию линейной независимости функций на некотором интервале, а также обладать свойствами гладкости. Важным требованием к системе координатных функций является условие полноты, заключающееся в том, что решение $q(t)$, а также его производная могут быть сколь угодно точно аппроксимированы линейной комбинацией (9.14) координатных функций $\varphi_k(t)$ при достаточно большом m. Таким образом, при фиксированном m решение $q_m(t)$ представляет собой функцию от m переменных $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Контрольные вопросы

По первому разделу

К главе 1

1. В чем заключается основное содержание аналитической механики?
2. Назовите характерные особенности ньютоновой, лагранжевой и гамильтоновой механики.

К главе 2

3. Как классифицируются механические системы по типу наложенных связей?
4. Как классифицируются связи, накладываемые на механические системы?
5. Что такое возможные и виртуальные перемещения?
6. Сформулируйте условие идеальности связей.
7. Запишите общее уравнение динамики (вариационный принцип Даламбера – Лагранжа).
8. Сформулируйте определение степеней свободы механической системы. Приведите примеры.
9. Что такое независимые и обобщенные координаты?
10. Что называют конфигурационным пространством?
11. Запишите выражение для обобщенных сил.
12. Запишите выражение для кинетической энергии в обобщенных координатах.

К главе 3

13. Сформулируйте вариационный принцип Гамильтона.
14. Что такое функция Лагранжа?
15. Что называют действием по Гамильтону?
16. Запишите уравнение движения механической системы в обобщенных координатах – уравнение Лагранжа второго рода.
17. Запишите математическое выражение теоремы об изменении полной энергии механической системы.
18. Какие механические системы называют консервативными?
19. Что такое гироскопические и диссипативные силы, диссипативная функция Релея?

К главе 4

20. Какие переменные называют каноническими?
21. Запишите функцию и уравнения Гамильтона.
22. Как формулируется вторая форма принципа Гамильтона (выражение через переменные Гамильтона)?

23. Что такое фазовое пространство и фазовая жидкость?
24. Сформулируйте теорему сохранения энергии как следствие канонических уравнений.
25. Какое преобразование координат называют каноническим преобразованием?

По второму разделу

К главе 5

1. Что называется колебаниями?
2. Назовите основные характеристики колебательных движений.
3. Назовите отличительные характеристики колебательных систем.

К главе 6

4. Каковы особенности консервативных колебательных систем?
5. Как выглядит фазовый портрет консервативных колебательных систем с одной степенью свободы?
6. Назовите основные элементы фазового портрета.
7. Как называются особые точки фазового портрета для консервативной системы с одной степенью свободы, соответствующие устойчивому и неустойчивому положению равновесия?
8. Укажите два способа составления расчетных схем колебательных систем.
9. Напишите уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы без трения при гармоническом возбуждении и его решения.
10. Напишите уравнение колебания линейной системы с одной степенью свободы с вязким трением.
11. Что такое коэффициент поглощения, или относительный гистерезис?
12. Каковы особенности вынужденных колебаний систем при вязком трении?

К главе 7

13. Какие допущения лежат в основе линеаризации уравнений движения?
14. Что называют главными, или нормальными, координатами?
15. Запишите формулы для определения частот и форм собственных колебаний систем с конечным числом степеней свободы.
16. В чем состоит свойство ортогональности форм собственных колебаний?
17. Запишите связь форм собственных колебаний и главных координат.
18. Каковы особенности вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы без трения?
19. Что такое динамическая податливость?
20. Объясните физический смысл явления антирезонанса.
21. Что называют диссипативной функцией Рэлея?
22. В чем заключается суть метода комплексных амплитуд?

К главе 8

23. Назовите примеры параметрических колебательных систем.
24. Какие два типа задач приводят к уравнениям параметрических колебаний?
25. В чем заключается особенность параметрического резонанса?
26. Что представляет собой диаграмма устойчивости параметрической системы?

К главе 9

27. Каковы основные свойства нелинейных колебательных систем?
28. Укажите особенности резонанса в нелинейных колебательных системах.
29. Какими свойствами должна обладать колебательная система, чтобы в ней могли происходить автоколебания?
30. Укажите основные аналитические методы исследования нелинейных колебаний.

Литература

К первому разделу

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М. : Физматлит, 2001. 264 с.
2. *Уиттекер Э.Т.* Аналитическая динамика. М. : Едиториал УРСС, 2010. 504 с.
3. *Жуковский Н.Е.* Аналитическая механика. М. : Едиториал УРСС, 2004. 270 с.
4. *Высоковский Д.А., Хрджиянц И.Ф., Шумейко В.И.* Краткий курс аналитической механики. Ростов н/Д : Рост. гос. строит. ун-т, 2003. 136 с.
5. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М. : Мир, 1965. 408 с.
6. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М. : Наука, 1988. 368 с.
7. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М. : Наука, 1989. 472 с.
8. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М. : Наука, 1971. 636 с.
9. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М.; Л. : Гостехиздат, 1950. Т. 1, 2.
10. *Аппель П.* Теоретическая механика. Динамика системы. Аналитическая механика. М. : ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 267 с.
11. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики. СПб. : Лань, 1999. 68 с.
12. *Томилов Е.Д.* Теоретическая механика. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1970. Ч. 2. 317 с.
13. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. СПб. : Лань, 2003. 304 с.
14. *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. М. : Физматлит, 2002. 392 с.
15. *Коткин Г.Л., Сербо В.Г.* Сборник задач по классической механике. М. : Наука, 1977. 352 с.

Ко второму разделу

1. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 416 с.
2. *Яблонский А.А., Норейко С.С.* Курс теории колебаний : учеб. пособие. СПб. : БХВ-Петербург, 2007. 336 с.
3. *Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.* Теория колебаний. М : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 271 с.
4. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М. : Дрофа, 2004. 592 с.
5. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. СПб. : Лань, 2005. 440 с.
6. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. М. : Высшая школа, 2001. 396 с.
7. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
8. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 385 с.
9. *Светлицкий В.А.* Статистическая механика и теория надежности. М. : Изд-во МГТУ, 2002. 504 с.
10. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М. : Наука, 1965. 276 с.
11. *Киселев О.М.* Введение в теорию нелинейных колебаний. Уфа, 2000. 98 с.
12. *Гробов В.А.* Теория колебаний механических систем. Киев : Вища школа, 1982. 183 с.
13. *Зубов В.И.* Теория колебаний : учеб. пособие для механико-математических специальностей университетов. М. : Высш. шк., 1979. 399 с.
14. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М. : Наука, 1991. 256 с.
15. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М. : Физматгиз, 1959. 917 с.
16. *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. IV: Лекции по колебаниям. М. : Изд-во Академии наук СССР, 1955. 512 с.

Учебное издание

Игорь Юрьевич Смолин, Валерий Владимирович Каракулов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА
И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Редактор – Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки А.В. Бабенко

Подписано к печати 21.05.2012 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 9,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 303.

Отпечатано на оборудовании
редакционно-издательского отдела
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. Корп. 4. Оф. 011
Тел. 8+(382-2)–52-98-49

ISBN 978-5-9462-1390-5

