МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013 **№ 1(21)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе http://elibrary.ru, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале http://Math-Net.ru.

Адрес редакции:
634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru/mathematics
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 11.03.2013.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10,0. Уч.-изд. л. 11,20. Тираж 300 экз. Заказ № 12.

УДК 512.623.5

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

КОНСТРУКЦИЯ СЕМЕЙСТВА БЕСКОНЕЧНО УЗКИХ ПОЛЕЙ

В статье изложена новая конструкция семейства бесконечно узких полей.

Ключевые слова: *базис трансцендентности, двумерное упорядочивание, верхний конус, бесконечно узкое поле.*

Исследования по теории линейно упорядоченных полей начались с пионерских работ Артина и Шрайера [1]. Бесконечно узкие поля относятся к тому классу полей, которые одновременно допускают и линейное, и двумерное упорядочивание. В работе [5] показано, что поле $\mathbf{Q}(\pi)$ можно снабдить двумерным порядком, при котором оно является бесконечно узким полем. В настоящей статье описан новый способ построения семейств бесконечно узких полей. Эти семейства существенно шире семейств, описанных в [6].

1. Основная конструкция

Пусть P_0 – линейно упорядоченное поле. Обозначим через $\tilde{P}_0$ топологическое замыкание поля P_0. В топологическом замыкании линейно упорядоченного поля нет собственных фундаментальных сечений [4]. Как известно, линейный порядок с поля P_0 единственным образом продолжается на поле $\tilde{P}_0$ [4]. Пусть B есть базис трансцендентности [2] поля $\tilde{P}_0$ над полем P_0, т.е. максимальная алгебраически независимая система элементов $\tilde{P}_0$ над P_0. Поле $K = P_0(B)$ как подполе $\tilde{P}_0$ линейно упорядочено.

Зададим произвольное отображение d: $B \to K$. Таким образом, для каждого $x \in B$ задано значение $dx \in K$. Далее, каждому $x \in K$ сопоставим значение $dx \in K$ следующим образом. Если $x \in K$, то $x = f(a_1,..., a_n)$. Убедимся, что представление $x = f(a_1,..., a_n)$ единственно. В самом деле, пусть ещё $x = g\ (b_1,..., b_m)$, где $b_1,..., b_m \in B$ и $f \neq g$. Тогда

$$f(a_1,..., a_n) = g(b_1,..., b_m).$$

Значит,

$$f(a_1,..., a_n) - g(b_1,..., b_m) = 0.$$

Следовательно, элементы

$$(a_1,.., a_n, b_1,..., b_m) \text{ из } B$$

связаны нетривиальным алгебраическим соотношением, что противоречит определению базиса трансцендентности. Итак, доказано, что представление $x = g(b_1,..., b_m)$ единственно.

Теперь полагаем

$$dx = df(a_1,..., a_n),$$

где

$$df(a_1,...,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n .$$

Поскольку представление $x = g(b_1,..., b_m)$ единственно, то dx для каждого x также определено единственным образом. Заметим, что ранее [6] авторы в конструкции верхнего конуса бесконечно узкого поля полагали всюду $dx_i = 1$. Таким образом, описываемая здесь конструкция является существенным обобщением конструкции из [6].

2. Двумерный порядок в поле *K*

Зададим двумерный порядок в поле K. Известно, что двумерный порядок однозначно задаётся верхним конусом K^u [3]. Построим верхний конус следующим образом. Пусть $f(x_1,..., x_n)$ пробегает поле $P_0(x_1,..., x_n)$; кортеж $(a_1,..., a_n)$ пробегает множество кортежей элементов из B. Имеет место следующая

Теорема. Множество

$$K^u = \{f(a_1,..., a_n) \mid f(x_1,..., x_n) \in P_0(x_1,..., x_n), df(a_1,..., a_n) \geq 0\}$$

есть верхний конус некоторого двумерного порядка в поле K, при котором K является бесконечно узким полем.

Доказательство. Убедимся, что K^u есть верхний конус 2-порядка в поле K.

Проверим выполнение условий (a) – (d) критерия верхнего конуса [3]:

(a) $K^u + K^u = K^u$;

(b) $K^u \cup -K^u = K$;

(c) $(K^u \backslash \{0\})^{-1} = -K^u \backslash \{0\}$;

(d) если $x, z \in K^u$, $y \in \overset{o}{K^u}$; $zy^{-1}, yx^{-1} \in K^u$, то $zx^{-1} \in K^u$.

(a) Убедимся, что множество K^u замкнуто относительно сложения.

Пусть $f(a_1, ..., a_n)$, $g(a_1, ..., a_n) \in K^u$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n \geq 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial g}{\partial x_1} da_1 + ... + \frac{\partial g}{\partial x_n} da_n \geq 0,$$

где $f(a_1, ..., a_n)$, $g(a_1, ..., a_n) \in K$.

Но тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n + \frac{\partial g}{\partial x_1} da_1 + ... + \frac{\partial g}{\partial x_n} da_n \geq 0$$

или

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x_1} da_1 + ... + \frac{\partial (f+g)}{\partial x_n} da_n \geq 0$$

Значит, $(f + g) \in K^u$.

(b) Условие: $K^u \cup (-K^u) = K$ выполнено.

Действительно, пусть $f(a_1, ..., a_n) \in K$. Возможны два случая.

Либо

$$df(a_1,...,a_n) \geq 0,$$

и тогда

$$f(a_1, ..., a_n) \in K^u.$$

Либо

$$df(a_1,...,a_n) \leq 0,$$

и тогда

$$f(a_1, ..., a_n) \in -K^u.$$

Доказательство пунктов (c) и (d) формально аналогично доказательству, приведённому в [6].

Таким образом, в поле $K = P_0(B)$ эффективно задан нетривиальный двумерный порядок.

Покажем, что K – бесконечно узкое поле [5].

Пусть $x = f(a_1,..., a_n) \in \overset{o}{K^u}$. Так как $x \in \overset{o}{K^u}$, то, по определению верхнего конуса $\overset{o}{K^u}$, имеем $dx > 0$. Докажем, что

$$\forall n\ \forall r \in K_0\ (r < x \Rightarrow (x - r)^n \in \overset{o}{K^u}).$$

Заметим, что для того чтобы элемент $(x - r)^n$ принадлежал открытому верхнему конусу, необходимо и достаточно, чтобы

$$d((x - r)^n) > 0.$$

Пусть $r \in K_0,\ x \in K$, и $r < x$. Так как $(x - r) > 0$, то $(x - r)^{n-1} > 0$ в силу того, что $K = P_0(B)$ является линейно упорядоченным полем. Имеем

$$\forall n \in \mathbf{N}\ d((x - r)^n) = n(x - r)^{n-1}dx > 0.$$

Значит, $(x - r)^n \in \overset{o}{K^u}$, следовательно, $x = f(a_1, ..., a_n)$ – бесконечно близкий к базе K элемент, и поле K является бесконечно узким.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artin E.* Algebraische Konstruction Reeller Körper / E. Artin, O. Schreier // Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5. 1925. S. 85–99.
2. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. М.: Наука, 1965. 300 с.
3. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск: Томский госуниверситет, 2003. 127 с.
4. *Пестов Г.Г.* К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
5. *Пестов Г.Г.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50–53.
6. *Фомина Е.А.* Об одном классе двумерно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. №3(4). С. 32–34.

Статья поступила 22.11.2012 г.

Pestov G.G., *Fomina E.A.* A CONSTRUCTION OF A FAMILY OF INFINITELY NARROW FIELDS. A new construction of a family of infinitely narrow fields is presented.

Keywords: transcendence basis, 2-ordering, upper cone, infinitely narrow field.

PESTOV German Gavrilovich (Tomsk State University)
E-mail: gpestov@mail.ru

FOMINA Elena Anatolyevna (Tomsk State Pedagogic University)
E-mail: ef254@mail.ru