

Обобщенная модель упругопластической среды с независимыми пластическими поворотами

И.Ю. Смолин, П.В. Макаров, Р.А. Бакеев

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, 634021, Россия

Предложена и обсуждается модель, основанная на трансформации модели среды Коссера для описания неупругого поведения сред со структурой на мезоуровне. Предполагается, что дополнительная степень свободы — независимые повороты элементов структуры — порождена внутренним движением на более низких масштабных уровнях, например зернограницными потоками дефектов, и возникает только в области пластического течения. В рассматриваемой модели моментные «модули» не являются материальными макроскопическими константами материала, а характеризуют процессы локального развития неупругих деформаций на мезоскопическом масштабном уровне. Анализируется вклад моментных напряжений в макроскопическую диаграмму нагружения и формирование остаточного напряженно-деформированного состояния при разгрузке в такой среде.

Generalized model of elastic-plastic medium with independent plastic rotation

I.Yu. Smolin, P.V. Makarov, and R.A. Bakeev

A model based on the Cosserat medium transformation for description of inelastic behavior of media with structure is proposed and discussed. It is suggested that the additional degree of freedom (independent rotation of structural elements) stems from internal motion at the low scales, e.g. grain-boundary defect flow, and occurs during plastic flow only. In the model under consideration the “moduli” for couple stresses and antisymmetric force stress turn to be not macroscopic material constants but characteristics of local development of inelastic deformation at the mesoscale. The contribution from couple stress to the macroscopic stress-strain curve is discussed along with residual stress formation during unloading in the medium.

1. Введение

Большинство естественных и искусственно создаваемых материалов имеют сложную внутреннюю структуру, которая существенно влияет на поведение изделий из таких материалов, особенно когда их размеры соизмеримы с размерами структурных элементов. В рамках так называемых нелокальных теорий учет структуры описывается одним параметром, имеющим размерность длины. Одной из первых таких теорий и часто используемых моделей является модель среды Коссера [1]. В основе этой модели лежит понятие полярной среды. В такой среде кинематика каждой частицы континуума описывается не только вектором ее перемещений, как в классической теории, но и дополнительно вектором ориентирования или поворота. Введение в рассмотрение независимых поворотов приводит к возникновению в среде изгибов-кручений и моментных напряжений.

Для разных материалов существуют различные физические причины для введения в рассмотрение независимых поворотов. Для металлов на стадии пластического течения такими причинами являются различные

виды внутреннего движения (наиболее яркий пример — потоки деформационных дефектов). Их влияние особенно важно учитывать на мезоскопическом масштабном уровне, где осреднение не приводит к компенсации всех внутренних моментов. Особую актуальность такие модели приобретают в рамках активно развиваемых в последние годы многомасштабных иерархических подходов.

Предлагается модель, представляющая собой объединение классической упругой и слабо нелокальной пластической моделей. Предполагается, что на упругой стадии деформирования тензоры деформации и силовых напряжений остаются симметричными и применима классическая модель упругого тела. На пластической стадии, особенно на более поздних ее этапах, существенным оказывается влияние эволюции дефектной структуры (образование деформационных субструктур). Именно для их учета предлагается ввести дополнительную степень свободы — независимый поворот и соответствующие силовые характеристики — моментные напряжения.

Другой причиной для применения моментных моделей для металлических материалов является ряд особенностей мезоскопического масштабного уровня. Например, когда работает одна базовая система скольжения в монокристалле, тензор силовых напряжений становится несимметричным. Как следствие, существенными могут оказаться нескомпенсированные внутренние моменты, которые необходимо ввести в рассмотрение. В результате, на мезоуровне на пластической стадии деформации реализуется специфическая схема деформирования «сдвиг + поворот».

2. Математическое описание

В случае плоского деформированного состояния кинематика среды Коссера описывается двумя компонентами вектора перемещений u_1, u_2 и одной компонентой независимого поворота ω_3 . Деформированное состояние определяется тензором деформации γ и тензором изгибов-кручений (кривизны) κ , которые выражаются через компоненты векторов перемещений и поворотов следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = u_{1,1}, \quad \gamma_{22} = u_{2,2}, \quad \gamma_{12} = u_{2,1} - \omega_3, \\ \gamma_{21} = u_{1,2} + \omega_3, \quad \kappa_{13} = \omega_{3,1}, \quad \kappa_{23} = \omega_{3,2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения балансов количества движения и моментов количества движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} = \rho \ddot{u}_1, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = \rho \ddot{u}_2, \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} + \mu_{13,1} + \mu_{23,2} = j \ddot{\omega}_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $j = \rho \ell^2$ — плотность инерции частицы при вращении; ℓ — радиус инерции элементарного объема среды; ρ — плотность.

Для описания упругопластической деформации определяющие соотношения следует записать в дифференциальной форме. Это позволяет распространить подход на случай конечных деформаций и воспользоваться линейными определяющими уравнениями для скоростей деформаций.

Полные тензоры скоростей деформации $\dot{\gamma}_{ij}^T$ и изгибов-кручений $\dot{\kappa}_{ij}^T$ представлены как суммы их упругих и пластических составляющих: $\dot{\gamma}_{ij}^T \equiv \dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}^e + \dot{\gamma}_{ij}^p$, $\dot{\kappa}_{ij}^T \equiv \dot{\kappa}_{ij} = \dot{\kappa}_{ij}^e + \dot{\kappa}_{ij}^p$. Тогда определяющие соотношения примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= \lambda(\dot{\gamma}_{kk}^T - \dot{\gamma}_{kk}^p) + 2\mu(\dot{\gamma}_{11}^T - \dot{\gamma}_{11}^p), \\ \dot{\sigma}_{22} &= \lambda(\dot{\gamma}_{kk}^T - \dot{\gamma}_{kk}^p) + 2\mu(\dot{\gamma}_{22}^T - \dot{\gamma}_{22}^p), \\ \dot{\sigma}_{12} &= (\mu + \alpha)(\dot{\gamma}_{12}^T - \dot{\gamma}_{12}^p) + (\mu - \alpha)(\dot{\gamma}_{21}^T - \dot{\gamma}_{21}^p), \\ \dot{\sigma}_{21} &= (\mu + \alpha)(\dot{\gamma}_{21}^T - \dot{\gamma}_{21}^p) + (\mu - \alpha)(\dot{\gamma}_{12}^T - \dot{\gamma}_{12}^p), \\ \dot{\mu}_{13} &= (\nu + \varepsilon)(\dot{\kappa}_{13}^T - \dot{\kappa}_{13}^p), \\ \dot{\mu}_{23} &= (\nu + \varepsilon)(\dot{\kappa}_{23}^T - \dot{\kappa}_{23}^p), \\ \dot{\mu}_{31} &= (\nu - \varepsilon)(\dot{\kappa}_{13}^T - \dot{\kappa}_{13}^p), \\ \dot{\mu}_{32} &= (\nu - \varepsilon)(\dot{\kappa}_{23}^T - \dot{\kappa}_{23}^p). \end{aligned} \quad (3)$$

Моментные напряжения μ_{31} и μ_{32} и компонента σ_{33} тензора силовых напряжений обеспечивают условие плоской деформации. Уравнение баланса энергии принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{E} = \sigma_{11}\dot{\varepsilon}_{11} + \sigma_{12}\dot{\varepsilon}_{12} + \sigma_{21}\dot{\varepsilon}_{21} + \\ + \sigma_{22}\dot{\varepsilon}_{22} + \mu_{13}\dot{\kappa}_{13} + \mu_{23}\dot{\kappa}_{23}. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате в случае плоской деформации мы оперируем только двумя новыми «модулями»: α и $\gamma = \nu + \varepsilon$. «Модуль» α для антисимметричных составляющих тензора силовых напряжений отражает отличие сдвиговых компонент тензора напряжений друг от друга и имеет ту же размерность, что и модуль сдвига. Модуль γ имеет размерность МПа \cdot м² и определяет вращательную жесткость среды. Исходя из размерности, можно записать следующее выражение $\gamma = \mu \ell^e$, т.е. вместо нового модуля γ рассматривать параметр ℓ^e , имеющий размерность длины.

Поскольку поворотные моды деформации связаны с формированием в нагружаемом материале деформационных субструктур на развитой стадии пластического течения, то в расчетах этот процесс моделировался следующим образом. При выполнении в каждой локальной точке критерия перехода среды в пластическое состояние расчет выполнялся по моментной модели, параметры которой представлялись как функции накопленной пластической деформации в данном локальном объеме такой, что при малых деформациях вклад поворотов и моментов в пластическое течение был незначительным и нарастал по мере роста неупругой деформации.

Компоненты полных тензоров $\dot{\gamma}_{ij}^T$ и $\dot{\kappa}_{ij}^T$ вычисляются по формулам (2), а их пластические составляющие определим из уравнений теории пластического течения, которые необходимо обобщить на случай моментной среды.

Для описания первого условия перехода в пластическое состояние воспользуемся классической теорией пластического течения с критерием Мизеса

$$f_\sigma(\sigma_{ij}) = 1.5(s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{21}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2)^{1/2} - Y.$$

Для определения скоростей пластических изгибов зададим свою функцию пластического течения

$$f_\mu(\mu_{ij}) = 1.5(\mu_{13}^2 + \mu_{23}^2 + \mu_{31}^2 + \mu_{32}^2)^{1/2} - Y\ell^p,$$

тогда для скоростей пластических изгибов можно записать

$$\dot{\kappa}_{13}^p = \dot{\lambda}_\kappa \frac{\partial f_\mu}{\partial \mu_{13}}, \quad \dot{\kappa}_{23}^p = \dot{\lambda}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \mu_{23}}. \quad (5)$$

Таким образом, в условие текучести для моментных напряжений входит предел текучести для силовых сдвиговых напряжений Y и параметр ℓ^p , имеющий размерность длины и отражающий предельный внутренний линейный масштаб.

3. Численная реализация

Для численного решения полученной системы уравнений был обобщен известный метод Уилкинса [2], хорошо зарекомендовавший себя при решении динамических упругих и упругопластических задач механики деформируемых сред. Получаемая разностная схема имеет второй порядок точности.

Необходимо отметить, что введение дополнительной степени свободы и дополнительного уравнения движения приводит к необходимости пересмотра условия устойчивости разностной схемы. Детальное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи, однако отметим, что для получения решений в расчетах было использовано более жесткое условие устойчивости: число Куранта было взято в 4 раза меньше, чем для классической упруго-пластической среды.

В проведенных расчетах параметры материала соответствовали алюминиевому сплаву 6061-T6: $\rho = 2.7 \text{ г/см}^3$, $\mu = 27.7 \text{ ГПа}$, $K = 72.8 \text{ ГПа}$, $Y = 300 \text{ МПа}$, для новых «модулей» и предела текучести для моментных напряжений были приняты следующие выражения:

$$\alpha = 2.77 f(\epsilon^{pl}) \text{ ГПа},$$

$$\gamma = 0.01 f(\epsilon^{pl}) \text{ ГПа} \cdot \text{м}^2,$$

$$\ell^{pl} = 0.001 f(\epsilon^{pl}) \text{ см},$$

т.е. они плавно менялись с ростом накопленной пластической деформации согласно функции

$$f(\epsilon^{pl}) = 1 - \exp[-(2.4 \epsilon^{pl} / \epsilon_*^{pl})^2],$$

где ϵ_*^{pl} — критическое значение интенсивности накопленной пластической деформации, при котором функция выходит на насыщение.

4. Анализ модели и результаты расчетов

В литературе часто обсуждается вопрос о введении внутреннего масштаба для регуляризации математической задачи описания локализации деформации в материалах с разупрочнением. Другой стороной этой проблемы является управление толщиной полос локализованного сдвига и расстоянием между полосами. Эти задачи относятся к макроуровню. Мы здесь рассмотрим две другие проблемы, относящиеся к мезоуровню. В первой исследуется осреднение напряжений и построение диаграммы нагружения. Во второй — вопрос о разгрузке и формировании остаточного напряженного состояния.

В опытах на активное растяжение измеряются две величины: осевая деформация и приложенная нагрузка. Эти величины представляют собой макроскопический отклик изменения энергии в образце при его нагружении. Внутри образца развиваются локальные процессы разной природы. Например, на мезоуровне это могут быть сдвиги и повороты отдельных блоков, вызывающие моментные напряжения. Для их определения необходимо ставить другие опыты, в которых, например, измеряются дополнительно поворот или изгиб образца

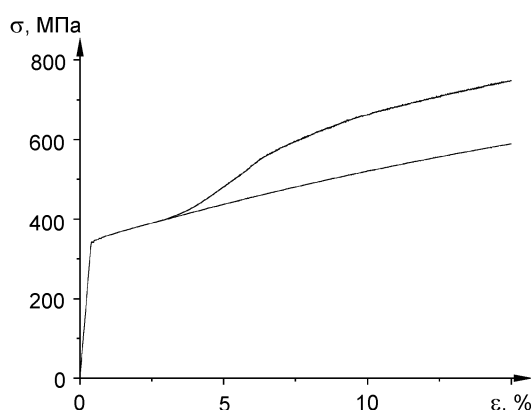


Рис. 1. Диаграммы нагружения для «однородного» материала. Верхний график построен с учетом вклада работы моментных напряжений. Нижний график — расчет по классической упругопластической модели с линейным упрочнением

[3]. Однако большинство материалов не проявляют моментных свойств на макроуровне. Это вовсе не означает, что моментные напряжения не проявляются на нижележащих масштабных уровнях и не вносят свой вклад в накопление энергии или ее диссипацию. Если поведение такой среды представить в рамках классического описания (симметричные силовые напряжения — симметричная деформация), то работа, совершаемая моментными напряжениями на изгибах-кручениях, будет отнесена на счет работы силовых напряжений. На σ - ϵ -диаграмме это отразится как дополнительное «упрочнение».

Скорость изменения плотности энергии деформации в каждой точке континуума на мезоуровне в рамках нашей модели определяется выражением (4). Считая, что на мезоуровне наряду с силовыми напряжениями развиваются и моментные, можно подсчитать работу, совершаемую этими напряжениями в мезообъеме. Представляя эту работу для макрочастицы, где все усредняется в рамках симметричного описания для напряжений и деформаций, получаем, что развитие на мезоуровне моментных напряжений приводит к росту усредненных макроскопических напряжений в частицах среды на мезоуровне.

На рис. 1 изображены две диаграммы. В верхней диаграмме учтен вклад в энергию деформации от работы моментных напряжений на изгибах-кручениях. Нижележащая диаграмма получена в расчетах для классической упругопластической среды с линейным упрочнением. Сравнение этих диаграмм показывает, что параболическая стадия упрочнения может быть отнесена к развитию в деформируемом материале изгибов-кручений и моментных напряжений. Чем больше величина поворотов, тем выше пойдет кривая σ - ϵ , т.е. тем ярче будет выражена параболическая стадия упрочнения. Такой же пересчет был осуществлен для нагружения мезообъема, содержащего несколько зерен с разными преде-

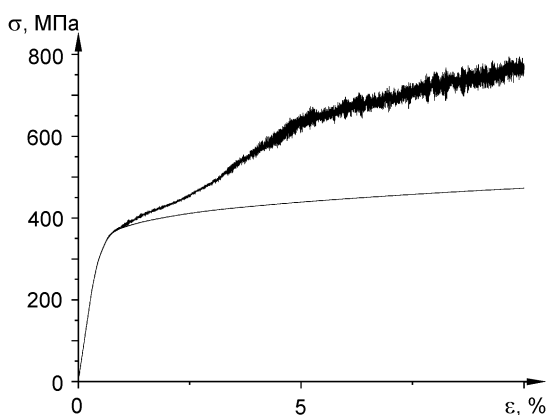


Рис. 2. Диаграммы нагружения для мезообъема рассчитанные с учетом вклада моментных напряжений (верхняя кривая) и по классической упругопластической модели с линейным упрочнением (нижняя кривая)

лами текучести и разными значениями моментных «модулей» (рис. 2). Поведение кривых оказывается более сложным ввиду усреднения по большому количеству неоднородностей.

Внимательного рассмотрения заслуживает и решение вопроса о разгрузке. Если принять постулат о том, что разгрузка упруга, то силовые и моментные напряжения будут вычисляться по упругим формулам уже несимметричной упругости со значениями моментных «модулей», достигнутых в каждой локальной области в зависимости от величины накопленной неупругой деформации. При упругой разгрузке приращения поворотов равны нулю и разгрузится только симметричная часть напряжений. Накопленные к этому времени повороты окажутся «замороженными», как и несимметричная часть силовых напряжений. Таким образом, в среде формируется остаточное напряженное состояние. Характер такого напряженного состояния можно оценить по распределению поворотов и пластических деформаций для мезообъема, представленных на рис. 3. Легко видеть иерархию локализованной деформации и поворотов, когда более мощные полосы локализованной деформации и повороты более крупных фрагментов разбиваются на более мелкие составные части.

5. Заключительные замечания

1. Если представлять реакцию твердого тела на нагружение через усредненную σ – ϵ -диаграмму, то следует иметь в виду, что на каждом масштабе будет свое напряженно-деформированное состояние. На макроуровне, для представительного мезообъема, присутствуют только симметричные силовые напряжения. Совсем иная картина наблюдается на мезоуровне, где отличны от нуля моментные напряжения, развиты изгибы-кручения и повороты фрагментов структуры. Представление напряжения для макрочастицы через усреднение силовых

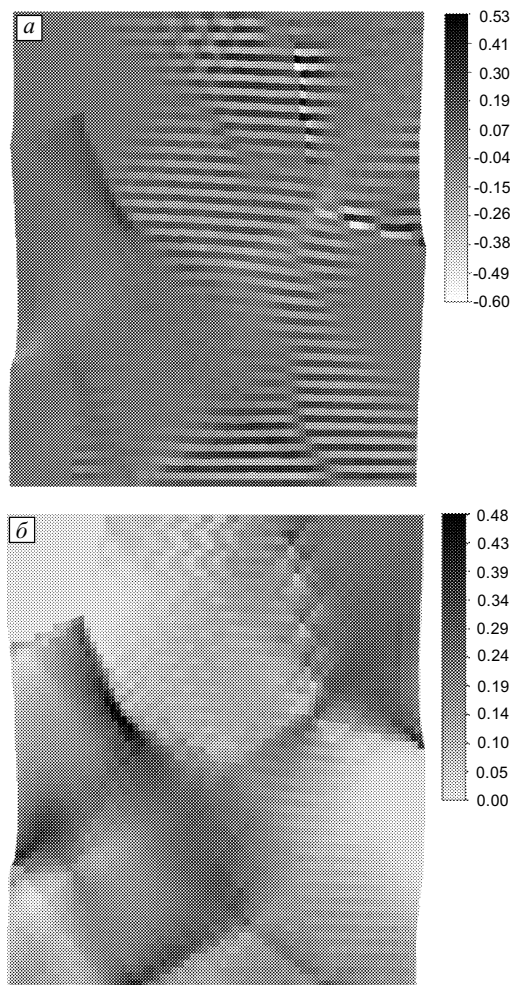


Рис. 3. Распределение поворотов (а) и накопленной пластической деформации (б) в мезообъеме поликристаллического образца

и моментных напряжений на мезоуровне показывает, что часть упрочнения среды на параболической стадии упрочнения можно отнести на счет моментных напряжений на мезоуровне. Их вклад в упрочнение будет тем больше, чем более развиты повороты мезофрагментов и моментные напряжения.

2. Поскольку в модели повороты включаются только на пластической стадии (более того, достаточно развитой), то после снятия нагрузки они оказываются «замороженными» в среде, формируя и остаточные напряжения.

Литература

1. Forest S. Cosserat media // Encyclopedia of Materials: Science and Technology. – Elsevier, 2001. – P. 1715–1718.
2. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
3. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with microstructure. – Ed. by H. Mühlhaus. – N.Y.: J. Wiley, 1995. – P. 1–22.