ISSN 1683-805X

ФИЗИЧЕСКАЯ МЕЗОМЕХАНИКА

- Мезомеханика структурно-неоднородных сред
- Мезомеханика разрушения
- Физическая мезомеханика материалов
- Приложения мезомеханики к проблемам геодинамики и геотектоники
- Мезомеханика функциональных материалов и материалов для электроники
- Неразрушающие методы контроля

Том 14 Номер 3 Май – июнь 2011

УДК 531.1, 539.3, 539.215, 531.01

Структура резонансов и локализация неупругих деформаций и повреждений в нагружаемых твердых телах и средах

П.В. Макаров

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, 634021, Россия

Представлен обзор основных понятий и некоторых результатов нелинейной динамики в связи с решением задачи о физических причинах и механизмах локализации деформационных процессов в нагружаемых твердых телах и средах и установления закономерностей нарастания масштабов локализации. Показано, что таким механизмом может быть структура устойчивых резонансов, которая формируется в нагружаемых твердых телах. Нагружаемое твердое тело рассматривается как система многих взаимодействующих атомов, возмущаемых внешним воздействием с непрерывным спектром частот. Ставится вопрос, какие частоты из этого непрерывного спектра будут отобраны возмущаемой нелинейной системой взаимодействующих атомов, т.е. окажутся наиболее устойчивыми. Анализ структуры резонансов выполнен в рамках подхода Гамильтона и теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Показано, что полученные нелинейной динамикой результаты полностью объясняют экспериментально установленную закономерность нарастания масштабов локализации, отвечающую универсальному принципу фрактальной делимости твердых тел и сред. Согласно этому принципу минимальным масштабом является параметр решетки нагружаемого тела, а каждый последующий масштаб есть сумма двух предыдущих. Согласно результатам теории Колмогорова–Арнольда–Мозера наиболее устойчивыми оказываются инвариантные торы с иррациональным угловым коэффициентом $\omega = (1, (\sqrt{5}-1)/2)$, что и дает для соответствующих длин волн (масштабов) экспериментально установленную закономерность $L_{n+1} = L_n/L_{n-1}$, где $L_n \sim 1/\omega_n$ и $L_{n+1}/L_n \approx (\sqrt{5}+1)/2$.

Ключевые слова: масштабы локализации, универсальный принцип фрактальной делимости, нелинейная динамика, устойчивость, самоподобие, структура резонансов

Resonances and inelastic strain and defect localization in loaded media

P.V. Makarov

Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, 634021, Russia

The paper provides a review of basic concepts of nonlinear dynamics and certain results relevant to physical mechanisms of strain localization and increase in localization scales in loaded media. It is shown that the mechanisms of the processes can be associated with stable resonances occurring in loaded solids. A loaded solid is considered as a system of many interacting atoms disturbed by external action with a continuous frequency spectrum. The question put in the work is what frequencies from this continuous spectrum are selected by the disturbed nonlinear system of interacting atoms, i.e., what frequencies are found to be most stable. The structure of resonances is analyzed using the Hamilton approach and Kolmogorov–Arnold–Moser theory. It is demonstrated that nonlinear dynamics gives results that fully explain the experimentally found regularity of increasing localization scales and fits it in the universal principle of fractal divisibility of solids and media. According to this principle, the minimum scale is the lattice parameter of a loaded solid and each next scale is the sum of two previous scales. The results obtained by the Kolmogorov–Arnold–Moser theory show that invariant tori with an irrational angular coefficient $\omega = (1, (\sqrt{5}-1)/2)$ are most stable, and this gives the experimental regularity $L_{n+1} = L_n/L_{n-1}$, where $L_n \sim 1/\omega_n$ and $L_{n+1}/L_n \approx \approx (\sqrt{5}+1)/2$ for the corresponding wavelengths (scales).

Keywords: localization scales, universal principle of fractal divisibility, nonlinear dynamics, stability, self-similarity, structure of resonances

1. Введение. Необходимые понятия и определения теории динамических систем

Новая научная парадигма — нелинейная динамика, включающая и синергетику, понимаемую как теорию самоорганизации, — заставила научную общественность существенно пересмотреть классические традиционные представления о поведении различных нелинейных динамических систем, как простейших, например маятника, так и более сложных — различных природных и физических систем. В настоящее время идеи нелинейной динамики успешно применяются для анализа биологических систем, общественных и социальных явлений, в экономике и в изучении исторических процессов и т.д. [1–3].

В физике и механике пластичности и разрушения важнейшее свойство локализации неупругой деформации и/или повреждений, наблюдаемое во всей иерархии масштабов изучается давно и тщательно. Получены фундаментальные результаты, объясняющие конкретные физические механизмы локализации деформации на разных масштабах. В частности, концепция сильно возбужденных состояний [4] В.Е. Панина с соавторами явилась одной из первых работ, объяснивших физические причины локальных структурных и структурно-фазовых превращений. Тем не менее, решение проблемы, по каким законам выстраиваются иерархии масштабов локализации и разрушения, не находит удовлетворительного объяснения в рамках традиционных представлений этих наук. Однако если рассматривать нагружаемое твердое тело как нелинейную динамическую систему, локализация процессов окажется естественным этапом ее эволюции. Более того, установленный ранее принцип универсальной фрактальной делимости твердых тел и сред [5–7], как будет показано ниже, находит строгое математическое обоснование в рамках теории нелинейных динамических систем. Объяснение с этих позиций как физических причин явления локализации, так и закономерностей наблюдаемой иерархии масштабов и составит основное содержание настоящей работы.

Динамика описывает длительное поведение или эволюцию различных систем во времени. Понятно, что реальные физические и природные системы — это системы нелинейные. Почему это так, можно прочитать в работах И. Пригожина [8–11] и других авторов, внесших заметный вклад в развитие теории динамических систем [12–16]. И. Пригожин по этому поводу высказался очень емко и красочно: «В линейном мире эволюция и жизнь были бы невозможны» [9].

Традиционно считается, что «хорошие» системы (в смысле интуитивной ясности и прозрачности их поведения) — это системы с устойчивым асимптотическим поведением, допускающим надежный прогноз их состояния в обозримом будущем. Наиболее предпочтителен случай систем, быстро приходящих в стационарное состояние через короткий период релаксации. Таковыми являются большинство наших устройств и приборов, прежде всего бытовых. В нелинейной динамике такой тип поведения демонстрируют сжимающие (растягивающие) отображения. К этому методу сжимающих отображений мы обратимся ниже.

Так как нас конкретно интересуют процессы локализации деформаций и разрушения, то мы приходим к необходимости рассматривать как нелинейную динамическую систему деформируемое твердое тело, деформационные процессы в котором развиваются непрерывно во времени. Но мы знаем, что в математике, природе, обществе существует множество систем, которые эволюционируют дискретными шагами. Заметим, что дискретные пошаговые процессы происходят и в наших умах, и в компьютерах. Анализ таких дискретных систем оказался очень плодотворным, прояснив многие общие черты дискретных и непрерывных моделей.

Поэтому примем, что мы будем в дальнейшем анализировать и такие динамические системы, которые эволюционируют дискретными шагами, когда одно и то же правило последовательно применяется к результату каждого предшествующего шага. Тем более что, согласно универсальному принципу фрактальной делимости, каждый последующий масштаб L_{n+1} есть сумма двух предыдущих [5, 6]:

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}. \tag{1}$$

Важно, что методология нелинейной динамики позволила решить множество задач на основе подобных итерационных процедур последовательной аппроксимации ответа [16]. Заметим, что такие итеративные процедуры можно применять как к функциям, так и к отображениям и к последовательностям, например (1). Неустойчивости и наличие динамического хаоса в динамических системах приводят к необходимости использовать в анализе как топологический, так и стохастический подходы. Известно, что регулярные и хаотические движения в гамильтоновых системах обладают известной степенью однородности (монотонности), что используется при их определении [14, 16]. С другой стороны, реальное хаотическое движение проявляет промежуточные свойства (между свойствами регулярного и хаотического движений) [14]. Этот факт заставляет выходить за пределы теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ-теории) [17, 18], которая фактически устанавливает связь между регулярным и хаотическим режимами в гамильтоновых системах. Эта теория гарантирует сохранение инвариантных торов (кривых) при малых возмущениях динамической системы [17, 18]. Мы увидим, что полученные там результаты сыграют ключевую роль в решении поставленной задачи. Последующее изложение будет дано в максимально упрощенном виде, без многих важных деталей и доказательств. Одними из лучших книг, в которых на высоком уровне строгости и в то же время доступно излагаются подходы и методы нелинейной динамики, являются монографии А.Б. Катока и Б. Хассельблата [16], Г.Г. Малинецкого и А.Б. Потапова [12, 19], а также книга Ю.А. Данилова [13], к которым мы будем постоянно обращаться.

Необходимо также условиться, что мы будем понимать под термином «динамическая система». К сожалению, общепринятого определения нет. Математический аппарат нелинейной динамики в основном разработан для сильно идеализированных систем, далеких от реальных объектов. Эти обстоятельства явились серьезным препятствием к применению методологии нелинейной динамики к анализу эволюции реальных физических и технических систем. Так что же такое динамическая система?

1. Первоначально под этим термином понималась система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x, t). \tag{2}$$

2. В узком смысле это автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \varphi(x). \tag{3}$$

3. В более общем смысле под динамической системой понимают любую математическую модель механической системы [11, 12]. В данном случае к динамической нелинейной системе можно отнести и системы уравнений в частных производных математической физики, включая уравнения механики деформируемого твердого тела, что крайне важно для обоснования идеи отнесения математических моделей деформируемого твердого тела, а также и самого физического объекта — твердого тела — к классу нелинейных динамических систем, эволюция которых будет проходить в том числе по уже открытым нелинейным динамическим законам.

4. В работе [12] вслед за [20] дается следующее также важное для настоящего изложения определение.

Динамической системой является обобщение понятия автономной системы дифференциальных уравнений (т.е. не только обыкновенных), включая два следующих основных компонента: фазовое пространство P (метрическое пространство или многообразие) и однопараметрическую непрерывную или дискретную группу (полугруппу) $\varphi^t(\bar{x})$ или $\varphi(\bar{x}, t)$ его преобразований. Здесь параметром группы (полугруппы) является время t. В случае полугруппы $t \geq 0$. Следовательно, $\varphi^{t_1}(\bar{x})$ есть вектор, представляющий решение исследуемого уравнения в момент времени t_1 с начальным условием $\bar{x}$.

5. Ю.А. Данилов [13] еще больше расширяет понятие динамической системы: под динамической системой следует понимать систему любой природы (физическую, химическую, биологическую, социальную, экономическую и т.д.), состояние которой изменяется дискретно или непрерывно во времени.

Этого определения, в котором сняты ненужные ограничения на понятие динамической системы, мы и будем придерживаться. Четвертое определение также позволяет анализировать математические модели очень широкого класса динамических систем (включая известные уравнения математической физики), используя наработанные нелинейной динамикой математические методы и подходы. Эти два последние наиболее общие определения мы и будем иметь в виду. Такое расширенное понимание динамической системы очень важно для изучения эволюции реальных природных и физических систем, описываемых в том числе системами уравнений в частных производных, что требует разработки специфических методов анализа получаемых численных решений. Подобные примеры такого анализа уже есть [1–7, 21–27], но их пока крайне мало.

2. Универсальный принцип фрактальной делимости твердых тел и сред и дискретные отображения нелинейной динамики

Впервые универсальный принцип фрактальной делимости твердых тел и сред был экспериментально установлен в [5] при изучении масштабов разрушения углей. Было показано [5, 6], что каждый последующий масштаб локализации неупругой деформации и/или разрушения есть сумма двух предыдущих, т.е. масштабы деструкции в нагружаемых твердых телах и средах нарастают по хорошо известному простейшему правилу (1). Это правило есть ни что иное как ряд Фибоначчи, для которого выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi, \tag{4}$$

где $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ есть число «золотого сечения», которое является положительным корнем уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{5}$$

Напомним, что в понятии золотого сечения Φ объединяются два важнейших математических принципа: аддитивности (целое a есть сумма двух неравных частей: $a = b + c$, $a > b > c$) и мультипликативности (целое a так относится к большему b, как большее к меньшему c: $a/b = b/c$, что и приводит к уравнению (5), если принять, что меньшее $c = 1$, тогда решение уравнения (5) даст (положительный корень): $a/b = b/c = \Phi$). Объединение принципов аддитивности и мультипликативности и приводит к идее самоподобия, показывая, что структурные единицы целого подчиняются одному и тому же закону роста (1). Таким образом, число золотого сечения Φ является особым числом, реализующим принципы самоподобия и фрактальности природных объектов [5, 6]. Как мы увидим, в нелинейной динамике последовательность (1) также играет особую роль, в частности, при исследовании устойчивости динамических систем [13, 16]. Соответствующий анализ приводит к самоподобной структуре фазового пространства, описываемой соотношениями (1), (4) и (5).

Укажем еще на одно свойство последовательности (1), подробно изученное в [16] и в КАМ-теории [13, 18] и важное как для физики, так и для анализа поведения динамических систем.

Рассмотрим рекуррентную последовательность вида: $a_{n+1} = f(a_n)$, для которой заданы исходная константа a_0 и вид функции f. В частном случае f есть отображение $g(x) := 1/x + 1$, т.е. $x_{n+1} = g(x_n)$, которое является сжимающим на отрезке [3/2, 2] [16]. Пусть каждое $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ и покажем, что он существует. Будем также полагать, что рост членов в этой последовательности экспоненциальный, тогда как известно в пределе $a_{n+1} = a_0 n_n$, где a_0 — коэффициент экспоненциального роста, который не зависит от n. С другой стороны, нам известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \Phi$ в последовательности Фибоначчи, т.е. каждое последующее значение $a_{n+1} \approx \Phi a_n$. Этим самым мы еще раз сравним непрерывный закон экспоненциального роста с законом роста в дискретной последовательности (1).

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{a_n/a_{n-1}} = \frac{1}{x_n} + 1,$$

так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

т.е. приходим в пределе к отображению

$$g(x) := \frac{1}{x} + 1, \tag{6}$$

которое как показано в [16] является сжимающим на отрезке [3/2, 2] (это следует и из (6)) и согласно принципу сжимающих отображений асимптотически сходится к единственной неподвижной точке x, лежащей на этом отрезке [3/2, 2]. Принцип сжимающих отображений гласит, что для сжимающего отображения f имеется единственная неподвижная точка, к которой каждая орбита отображения f сходится экспоненциально. На этот счет имеются соответствующие теоремы и леммы [16]. Этот класс отображений важен еще и потому, что приложения принципа сжимающих (растягивающих) отображений оказались чрезвычайно эффективными при анализе динамических систем, в том числе с более сложным поведением, чем консервативные гамильтоновы системы [16]. Таким образом, предел x действительно существует. Для нахождения этого предела надо решить уравнение $g(x) = x = 1 + 1/x = (x+1)/x$. Опять получаем уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ с единственным положительным корнем $x = (1+\sqrt{5})/2 = \Phi$. Это хорошо известный в математике фундаментальный результат, которому в физике пока не уделяют должного внимания: последовательность чисел Фибоначчи настолько близка к непрерывной экспоненциальной модели роста, насколько это вообще возможно для дискретной целочисленной модели [16].

Насколько важен для физики закон экспоненциального роста, хорошо известно. Однако в физике обычно используются непрерывные функции и отображения, в том числе с непрерывным экспоненциальным законом роста. Дискретные функции и отображения нашли существенно большее применение в квантовой механике и в нелинейной динамике. Но реальные тела и среды также рассматриваются в физике не только с континуальной точки зрения механики сплошных сред, а и как дискретные системы большого числа атомов. В этом случае на первый план выходят дискретные методы и дискретные отображения. Дискретная последовательность ряда Фибоначчи в этом случае оказывается полным аналогом закона непрерывного экспоненциального роста в континуальных моделях.

Различные дискретные отображения имеют большое значение в нелинейной динамике еще и потому, что, как оказывается, можно изучать системы с непрерывным временем, рассматривая их как системы с дискретным временем. В таких системах время дискретно, а физические и/или природные законы превращаются в правила, применяемые рекуррентно, по которым текущие данные определяются через предыдущие [12, 13, 16].

3. Резонансы в гамильтоновых системах. Периодические и квазипериодические движения

Чтобы выяснить реальный физический механизм нарастания масштабов деструкции, а также закон их нарастания в нагружаемых твердых телах, рассмотрим дискретную систему взаимодействующих атомов.

Для решения этой главной задачи сформулируем ряд следующих вопросов:

1. Почему в нагружаемых средах наблюдается локализация неупругих деформаций и повреждений?
2. Каков общий сценарий локализации деформационных процессов и каковы будут характерные масштабы локализации?
3. Где (и когда) наступит макроразрушение, где место будущей шейки, например, если это место специально не спровоцировано надрезом или другим макроконцентратором?
4. Каков минимальный масштаб этих локализаций и как далеко на макроуровне этот процесс локализации деформационных процессов может уйти?

Для решения поставленных задач изучим структуру резонансов в нагружаемой, т.е. возмущенной внешним воздействием, среде как динамической системе взаимодействующих атомов.

Всем хорошо известно, что резонанс в динамической системе наступает тогда, когда частота внешнего воздействия на систему совпадает или кратна ее собственной частоте. Конечно, проблема резонансов много глубже данного упрощенного понимания. Это и проблема перекрытия резонансов, и проблема частотной ширины резонанса, и многие другие задачи, изучаемые теорией колебаний и специальными разделами нелинейной динамики [14, 16, 28–30], на них мы останавливаться не будем.

Поставим задачу иначе. На динамическую систему взаимодействующих атомов наложено возмущающее воздействие с достаточно широким спектром частот, включая и резонансные частоты. Зададимся вопросом: какие частоты из этого в общем случае непрерывного спектра будут отобраны самой динамической нелинейной системой и какова будет сложившаяся в ней структура резонансов?

Такая постановка позволяет обратиться к методу возмущений, предложенному А. Пуанкаре при решении проблемы интегрируемости уравнений движения N частиц (тел) в гамильтоновом представлении. Из классической динамики известно, что движение такой системы полностью определено, если известен ее гамильтониан

$$H = H(q_i, p_i), \tag{7}$$

где q_i — обобщенные координаты частиц, а p_i — обобщенные импульсы, $i = 1, \ldots, N$. Динамика такой системы представляется в $6N$-мерном фазовом пространстве. Гамильтониан может зависеть от времени. В частном случае периодической зависимости от времени t с периодом T $(H(\overline{p}, \overline{q}, t) = H(\overline{p}, \overline{q}, t+T))$ система (7) определяется как система с $N + 1/2$ степенями свободы [14], так как время является дополнительной канонической переменной. Хаотические траектории возникают в таких динамических системах уже с $N = 3/2$ степенями свободы [14].

Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8}$$

Как показал А. Пуанкаре, проблема интегрируемости динамической системы (8) существенно связана с возможностью ее канонического преобразования: перехода к новым циклическим переменным — угловой переменной α_i и переменной действия J_i, в которых гамильтониан H принимает вид: $H = \omega J$ и зависит только от переменной действия J — нового импульса. Тогда система (8) преобразуется к виду:

$$H = \omega_i J_i, \quad \frac{\mathrm{d}J_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i. \tag{9}$$

В этом случае эволюция угловой переменной α оказывается линейной функцией времени $\alpha = \omega t + \alpha_0$, а переменная J является инвариантом движения [11, 13, 16]. Частоты $\omega_i = \mathrm{d}\alpha_i/\mathrm{d}t = -\partial H/\partial J_i$ есть реальные частоты динамической системы, которые в случае взаимодействий частиц в динамической системе могут приводить к резонансам. Напомним, что самое сложное поведение, которое может быть описано вполне интегрируемой системой (9), — это колебания с N независимыми частотами ω_i. Это классический результат теории колебаний. Нет взаимодействий и зависимостей между частотами — нет и резонансов. Возможно, и по этим причинам динамический хаос был открыт только в 1970 г. [12].

Классическими результатами нелинейной динамики является теорема Лиувилля о сохранении меры (объема) фазового пространства и связанные с ней условия интегрируемости системы динамических уравнений (9). Было показано, что гамильтонова система с одной степенью свободы интегрируема, что означало интегрируемость уравнений движения маятника и уравнений гармонического осциллятора [11–13]. При определенных условиях интегрируемы и системы с двумя степенями свободы. Для более общего случая было показано, что интегрируются любые системы с N степенями свободы, которые могут быть расщеплены на N систем с одной степенью свободы, т.е. сводимые к линейным уравнениям движения с малыми колебаниями вблизи положения равновесия. С такими уравнениями имеет дело раздел физики твердого тела в гармоническом приближении [11, 29, 30]. Для нас здесь важно, что во всех случаях интегрируемых систем исключены взаимодействия. В таких системах резонансы невозможны. Основополагающую роль в решении проблемы интегрируемости динамических уравнений и исследований устойчивости соответствующих решений сыграл А. Пуанкаре. Он показал, что в общем случае невозможно ввести циклические переменные для системы (8) и выполнить каноническое преобразование.

Проблему существования канонического преобразования системы (8) и сведения ее к циклическим переменным, в которых гамильтониан $H(p, q)$ преобразуется к виду $H(J)$, т.е. зависит только от переменных действия J, А. Пуанкаре сформулировал в терминах теории возмущений [11, 14]:

$$H = H_0(J) + \lambda H_1(J, \alpha). \tag{10}$$

Здесь гамильтониан $H_0(J)$ зависит только от переменных действия и соответствует системе свободных невзаимодействующих частиц. Этот гамильтониан возмущается потенциалом $H_1(J, \alpha)$ более общего вида с взаимодействиями, малый параметр λ как параметр взаимодействия отражает интенсивность связей. А. Пуанкаре показал, что в общем случае такая замена невозможна и динамическая система, начиная с проблемы трех тел, не может быть проинтегрирована. Им было показано, что появление расходимостей (о них речь пойдет ниже) не может быть устранено, что и делает невозможным введение циклических переменных. Расходимости возникают из-за взаимодействий и возникновения в системе взаимодействующих частиц резонансов. Другими словами, «резонансы ответственны за невозможность исключения взаимодействий» [11]. Действительно, если в решении динамической задачи появляется более чем одна частота, то эволюция такой динамической системы определяется уравнением линейной зависимости (или независимости) частот

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_k\omega_k = 0, \tag{11}$$

где n_i — целые числа. В случае если равенство (11) выполняется, то частоты ω_i линейно зависимы и в динамической системе возникают резонансы, а теория возмущений Пуанкаре приводит к малым знаменателям вида $1/(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$ (случай двух тел), если выражение $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0$ или близко к нулю. Эта проблема малых знаменателей [31] была хорошо известна астрономам и до А. Пуанкаре. Таким образом, А. Пуанкаре показал, что в общем случае для большинства реальных динамических систем взаимодействия неустранимы. В случае интегрируемости любой динамической системы невозможны были бы когерентность и самоорганизация. «В интегрируемом мире не нашлось бы места для жизни» [9]. По этим же причинам в таких системах были бы невозможны и процессы локализации, которые обусловлены взаимодействиями.

Многообразия (траектории) точек с координатами (p, q) представляют в фазовом пространстве эволюцию динамической системы и в случае одной степени свободы — это эллипс. Для интегрируемых систем с N степенями свободы в переменных «угол, действие», для которых существует N интегралов движения J_i, траектории в $2N$-мерном фазовом пространстве принадлежат к N-мерному множеству и имеют топологию N-мерного тора [13] как единственного многообразия, отвечающего требованию единственности решения динамической задачи, т.е. непересечения интегральных кривых — траекторий. Такие притягивающие инвариантные торы являются естественной моделью воспроизводимых квазипериодических явлений, наблюдаемых в природе [11–13], так как на любой замкнутой поверхности типа сферы траектории обязательно пересекутся.

При $N = 2$ уравнение (11) примет вид:

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0 \tag{12}$$

при линейной зависимости частот, где n_1 и n_2 — целые числа. В этом простом случае $\omega_2/\omega_1 = -n_1/n_2$ и в динамической системе возникает резонанс, а траектория на торе имеет вид обмотки, замкнутой на себя, т.е. движение периодическое (рис. 1).

Если (12) не выполняется, т.е. нет таких целых n_1 и n_2, чтобы удовлетворить (12), то частоты рационально независимы. Отношение частот ω_1 и ω_2 в этом случае иррационально и соответствующая траектория всюду плотным образом заполняет поверхность тора, бесконечное число раз наматываясь на тор. В этом случае движение называют квазипериодическим. Траектория образует всюду плотное множество, так как побывает в любой сколь угодно малой окрестности для любой точки на поверхности тора [13, 16]. Эти результаты очень важны для дальнейшего понимания эволюции динамических систем и решения обозначенных выше задач.

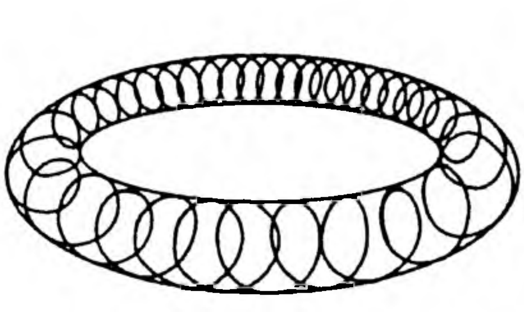

Рис. 1. Траектория интегрируемой гамильтоновой системы при рациональном отношении частот

Для этого нам, прежде всего, необходимо понять, как влияет малое возмущение интегрируемой системы (10), отвечающее за взаимодействия, на ее поведение. Так как анализ структуры резонансов в нелинейной динамической системе многих взаимодействующих атомов сводится фактически к динамической системе (10), изученной впервые А. Пуанкаре, воспользуемся результатами и выводами, уже полученными нелинейной динамикой и КАМ-теорией. Анализируя систему (10), А. Пуанкаре фактически проложил путь к новому качеству и новому пониманию свойств реальных динамических систем, показав, что взаимодействия нельзя исключить из динамической системы. Реальные динамические системы неинтегрируемые и неэргодичные. А какие они? Какова их эволюция и что происходит с траекториями при наличии взаимодействий? В ряду этих вопросов, прежде всего, необходимо было решить следующие задачи: 1) останется ли движение устойчивым при действии малого возмущения и 2) каким должно быть возмущение, чтобы система потеряла устойчивость? Ответы на эти вопросы дала КАМ-теория, которая началась с основополагающей работы А.Н. Колмогорова [17]. Эта теория изучает в том числе и влияние резонансов на траектории.

Очень важно для последующих выводов понимание сложной картины фазового пространства. Только в простейшем случае гармонического осциллятора частота постоянна и не зависит от переменной действия J. В более общем случае частоты ω_i связаны с переменными действия J_i, поэтому частоты ω_i будут разными для разных точек пространства, следовательно, в одних точках пространства резонансы будут, а в других нет [11, 18].

Качественно перечисленные выше вопросы сводятся к проблеме устойчивости разных типов движения — периодических и квазипериодических, частично уже обсужденных выше, т.е. устойчивостей траекторий или орбит, — к малым неинтегрируемым возмущениям. Оказалось, что периодические и квазипериодические движения ведут себя по-разному по отношению к малому неинтегрируемому возмущению. Характер движения на резонансных торах изменится кардинально. Резонансные торы будут разрушаться, возникнут стохастические траектории и это совершенно иной тип поведения. Движение становится неустойчивым по Ляпунову, сколь угодно близкие траектории начинают разбегаться. Термин стохастические траектории следует понимать в том смысле, что описание движения на языке траекторий теряет смысл, так как отследить конкретную траекторию становится практически невозможно и используется вероятностное описание (проблема малых знаменателей ведет к неустойчивости движений и расходимостям).

Квазипериодическое движение при малом параметре возмущения λ изменяется также незначительно, что означает сосуществование в динамической системе двух режимов — стохастического и регулярного. Это один из главных результатов КАМ-теории. А.Н. Колмогоров также дал описание режимов, которые могут существовать после наложения возмущения. Он строго доказал, что квазипериодическое движение продолжает существовать, если связь между частотами ω_i достаточно иррациональна [17, 18]:

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{m}{S}\right|>\frac{K(\varepsilon)}{S^{\nu}}, \tag{13}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K(\varepsilon)=0$, m и S — взаимно простые числа, ν — достаточно большое число (А.Н. Колмогоров положил $\nu\approx 2.5$), $K(\varepsilon)=0$ при отсутствии возмущения.

Мы пришли к неожиданному выводу, резонансы в динамической системе невозможны или, по крайней мере, маловероятны по двум следующим причинам: 1) будут разрушаться малыми возмущениями; 2) множество иррациональных чисел несоизмеримо больше, чем целых. Но резонансы обычно присутствуют и, как мы увидим, существенно определяют характер эволюции динамической системы. В чем же дело? И. Пригожин в [11] дает на это такой ответ. Хотя мощность множества иррациональных чисел равна C, а целые числа, ответственные за резонансы, составляют счетное множество, т.е. их несоизмеримо меньше, но все-таки достаточно много (множество периодических точек плотно [16]), и в любой сколь угодно малой окрестности фазового пространства существует множество точек, для которых условие резонанса выполняется. Возможно это и так, но не убедительно. Ведь резонансные торы все равно должны разрушиться (пока такой вывод). Мы ниже дадим этому явлению иную трактовку, которая вытекает из уже полученных КАМ-теорией результатов.

Другой важный вывод заключается в том, что малая поправка к невозмущенному движению также важна как и само движение в том смысле, что она, в конце концов, может привести к неустойчивости и даже смене сценария эволюции [11, 13]. Показано [14, 18], что, например, при числе витков траекторий равном S под действием малого возмущения появляется $2KS$ неподвижных точек: KS эллиптических центров, окруженных континуумом периодических траекторий, и KS гиперболических седел, в которые по одним направлениям траектории входят, а по другим выходят. Показано, что траектории, входящие в окрестность седловой точки, образуют устойчивое многообразие, а выходящие — неустойчивое [13, 14]. Подобные устойчивые и неустойчивые многообразия существуют также у циклов и торов [13, 14]. Причем эллиптические неподвижные точки соответствуют периодическим устойчивым орбитам. Гиперболическим неподвижным точкам отвечает крайне иррегулярный режим движения. Каждая из устойчивых или неустойчивых кривых, согласно теореме о единственности решения, не имеет самопересечений, но между собой они могут пересекаться, образуя гомоциклические точки и гомоциклические траектории, которые стремятся к одной неподвижной точке, циклу или тору, приводя к гомоциклическому хаосу [12, 13, 16]. Наиболее простой, достаточной полно изученной и известной динамической системой, в которой наблюдается хаотическое поведение, является уже упоминавшаяся выше динамическая система с $N+1/2$ степенями свободы. Метод отображений Пуанкаре [11, 14, 16] (срез фазового пространства) в этом случае позволяет отобразить траектории на двумерной фазовой плоскости (рис. 2).

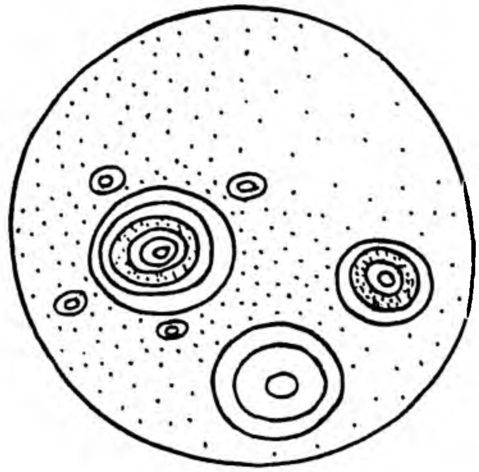

Рис. 2. Схема структуры фазового пространства, представленная через отображение Пуанкаре для системы общего типа с $N+1/2$ степенями свободы [14]

На этой схеме точки являются срезами траекторий в области хаотической динамики, замкнутые кривые являются отображениями квазипериодического движения в сечении Пуанкаре, локализованного в островках [14]. Существенно, что локализованные области хаотического поведения наблюдаются и внутри этих островков. Более того, структура фазового пространства внутри островков разных масштабов подобна общей картине всей области фазового пространства, что указывает на самоподобный характер динамики системы в целом.

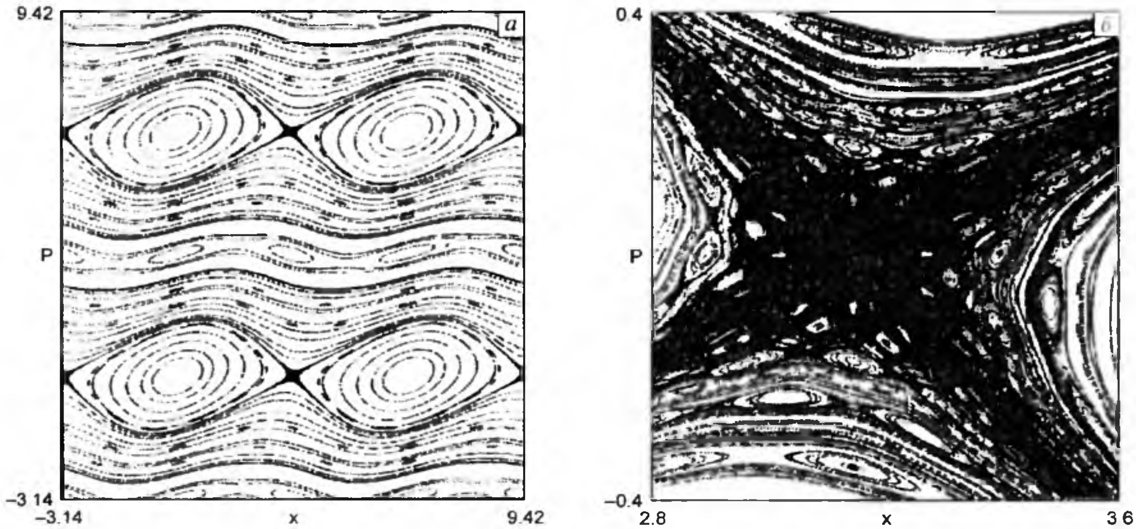

Рис. 3. Фазовый портрет стандартного отображения [14, 32, 33]: часть фазового пространства размером 2×2 периода (*а*); структура области в окрестности седловой точки (по данным работы [14]) (*б*)

Эта самоподобная картина также подчиняется общим универсальным правилам, формируя, как мы увидим далее, особую структуру резонансов в возмущенной нелинейной динамической системе.

На рис. 3 показан фазовый портрет так называемого стандартного отображения, изученного в том числе в [14]. Это отображение (Чирикова–Тейлора [32, 33]) является одной из наиболее простых моделей возникновения хаоса, но сохраняет типичные общие проблемы хаотической динамики.

В контексте поставленных задач настоящей работы этот пример важен по двум следующим причинам: 1) соответствующий гамильтониан динамической системы представляет собой невозмущенный гамильтониан вида: $H_0 = 1/2\,J^2$, возмущаемый периодической последовательностью δ импульсов; 2) полный гамильтониан с импульсными возмущениями соответствует движению частицы в периодическом волновом пакете с бесконечным числом гармоник одинаковой амплитуды. Последнее обстоятельство представляет интерес в связи со структурой резонансов, отобранных возмущаемой динамической системой из непрерывного спектра. Структура фазового портрета этого отображения (рис. 3) демонстрирует разнообразие типов траекторий, включая узкие зоны хаотических траекторий — стохастические слои, внутри которых наблюдаются островки с вложенными кривыми, еще меньшие островки и стохастические слои и т.д.

Таким образом, вследствие неустойчивости периодических орбит в окрестности гиперболических неподвижных точек траектории оказываются чувствительными к малым возмущениям и малым изменениям начальных условий, приводя к стохастическому поведению. Это, конечно, крайне упрощенная картина. Строгое и детальное описание структуры фазового пространства для различных важных случаев и соответствующий строгий анализ неустойчивостей можно найти в работах [14, 16]. Глобальная структура орбит очень сложна. Переплетение плотных и периодических орбит — неотъемлемая особенность структуры фазового пространства. Из этого факта следует неустойчивость любой орбиты по начальным условиям (см. [16], § 7.2, определение 7.2.11 и теорема 7.2.12). Этот результат мы запомним как важный для последующих выводов. Заметим также, что структура отображений Пуанкаре повторяется на всех масштабах самоподобным образом [9, 13, 14].

Другой важнейший вывод, следующий из анализа свойств динамики системы (10) и из условия (13), заключается в том, что в силу того что квазипериодические и стохастические движения, с одной стороны, составляют большую часть движений, которые в общем случае неустойчивы, а, с другой стороны, в силу малости правой части (13) неинтегрируемая система может вести себя почти как интегрируемая, мы вправе ожидать устойчивое движение вблизи периодических орбит. Вопрос: каких?

Также из КАМ-теории следует, что при увеличении параметра связи λ, т.е. при увеличении влияния неинтегрируемого возмущения, увеличиваются области, в которых наблюдается стохастическое поведение. Изучению этого вопроса посвящено множество работ в связи с его важностью, например, для решения задач небесной механики, а также для других приложений в физике. Понятно, что при некотором критическом значении λ во всей нелинейной системе возникает хаос [8, 14]. И хотя КАМ-теория не является теорией динамического хаоса, строго говоря, и не приводит к нему, она позволяет оценить при малых значениях λ особенности и фундаментальные свойства промежуточного режима, при котором существуют два типа траекторий — регулярные и стохастические [11, 13, 14]. Таким образом, мы ответили на все поставленные в этом разделе вопросы. Главные выводы таковы: 1) резонансы маловероятны, но возможны в силу плотности множества периодических орбит как характерного свойства гиперболической динамики; 2) нелинейные динамические системы с взаимодействиями между степенями свободы демонстрируют самоподобный характер их эволюции. Структура фазового пространства таких динамических систем фрактальна. Самоподобие просматривается для всех элементов динамических структур.

4. Структура устойчивых резонансов и локализация деформационных процессов в нагружаемых твердых телах

Анализу проблем устойчивости траекторий в нелинейных динамических системах различной структуры и при различных воздействиях посвящено множество специальных работ по нелинейной динамике [34–39]. Здесь мы рассмотрим проблему устойчивости на качественном уровне в связи с главной целью работы — установление причины и масштабов локализации деформационных процессов в нагружаемых твердых телах.

Из изложенного выше понятно, что ответ на поставленные вопросы существенно связан с тем, какова будет структура устойчивых возбуждений возмущенной внешними воздействиями нелинейной динамической системы — множества взаимодействующих атомов твердого тела. В фазовом пространстве эта проблема сводится к задаче об устойчивости и/или неустойчивости траекторий. Проблему об устойчивости мы сформулируем, следуя работе [12]. Устойчивым поведением динамической системы можно назвать воспроизводимость некоторого ее свойства при наличии шума. Под устойчивостью траекторий часто понимается их устойчивость по Ляпунову: малое воздействие приводит к малым изменениям результата [11, 12, 16]. Понятно, что при стохастическом режиме устойчивости по Ляпунову нет, близкие траектории расходятся, но этот процесс может наблюдаться и в локальных областях фазового пространства, не затрагивая систему в целом. Математически понятие устойчивости связано с понятием предельного множества, асимптотического поведения, свойствами притягивающего множества или аттрактора и т.д. Все эти вопросы подробно рассмотрены, например, в [16], они тесно связаны.

Качественный результат, который будет изложен ниже, обусловлен следующими характерными признаками понятия устойчивости [12, 19]:

1) воспроизводимость траекторий (устойчивость по Ляпунову);

2) воспроизводимость асимптотического поведения ансамблей траекторий;

3) воспроизводимость при наложении возмущений топологической структуры траекторий динамической системы.

Это последнее понятие наиболее важно в контексте поставленных задач и связано с понятием структурной устойчивости (или неустойчивости), о чем скажем несколько слов.

Понятие структурной устойчивости несколько отличается от других понятий устойчивости, которые связаны с поведением траекторий в фазовом пространстве, для которых сам вид отображений $f(x)$ фиксирован, а изучаются его свойства, включая устойчивость динамической системы к возмущениям. Структурная устойчивость определяется устойчивым или неустойчивым поведением динамической системы по отношению к возмущениям самого отображения $f(x)$. В этом случае

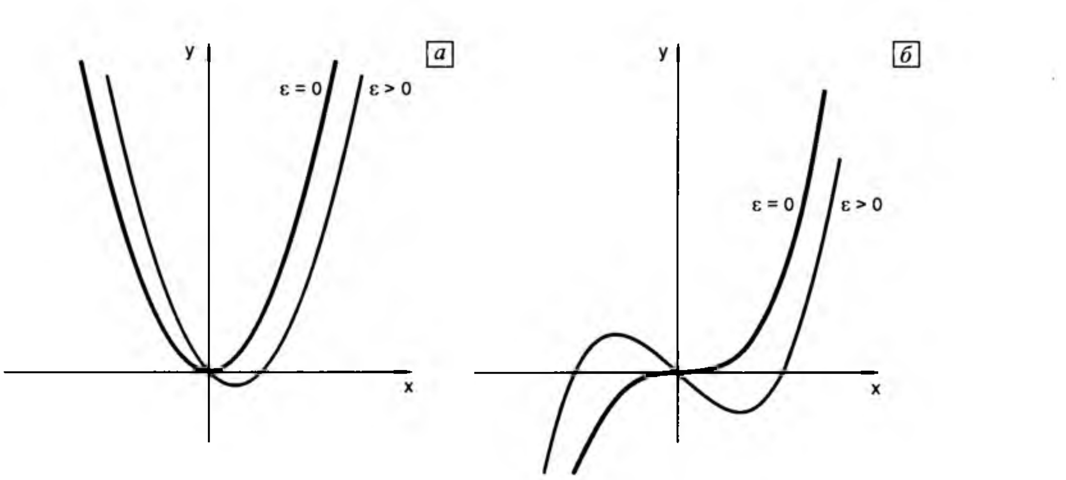

Рис. 4. Структурно устойчивая к ε-деформации (*а*) и структурно неустойчивая (*б*) функции в окрестности критической точки

рассматривается не само фазовое пространство F, а пространство динамических систем, определенных на F [12, 40]. Это означает, что при малом ε-возмущении структуры самой функции ее поведение в окрестности критической точки может кардинально измениться (например, 1) $y = x^2$ и 2) $y = x^3$, ε — малое возмущение $\Rightarrow$ 1) $y = x^2 - \varepsilon x$, 2) $y = x^3 - \varepsilon x$ (рис. 4)). В приведенных примерах функция $y = x^2$ структурно устойчива, т.к. характер ее поведения не изменился, а возмущенная функция $y = x^3$ структурно неустойчива, у нее появились экстремальные точки.

Так, в нагружаемых твердых телах и средах их микроструктура может сильно изменяться, что может привести к изменению и характера связей, т.е. возмущенные функции отклика могут кардинально измениться вблизи критических точек. Следовательно, такие среды могут демонстрировать как структурную устойчивость, так и неустойчивость. Большинство консервативных систем структурно неустойчиво. Учет даже малых диссипативных членов (например, трение при изучении маятника) качественно меняет динамику системы и ее фазовый портрет. Так, маятник с трением демонстрирует в основном хаотическое поведение. Подобные системы могут также демонстрировать асимптотическую устойчивость для определенных решений — аттракторов [11, 40].

Исследования этой очень сложной и многогранной проблемы устойчивости поведения нелинейных динамических систем с позиций КАМ-теории [13, 16, 41] показало, что торы, обмотка которых «недостаточно иррациональна» [13], а это означает нарушение неравенства (13), становятся неустойчивыми и разрушаются. Последним разрушается тор со следующим соотношением частот ω_i:

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (14)$$

Показано, что этот процесс самоподобный [11, 13, 14, 16] в силу самоподобного фрактального характера структуры фазового пространства в целом, о чем говорилось выше. Разрушение одних торов сопровождается рождением других, более мелких, с тем же отношением частот

$$\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Этим торам в сечении Пуанкаре соответствуют перемежающиеся как эллиптические, так и гиперболические неподвижные точки. Этот процесс порождает самоподобное распределение этих эллиптических и гиперболических неподвижных точек в сечении Пуанкаре. Очень подробно подобные процессы изучены в монографии [16], в том числе и в связи с различными дискретными отображениями вида $a_{n+1} = f(a_n)$, рассмотренными выше. Выявлены как общие фундаментальные свойства соответствующих динамических систем, так и частные черты поведения для разных отображений, в том числе в сравнении с непрерывными функциями. На основании изложенного можно сделать следующие выводы.

Рассмотрение двух моделей — непрерывной экспоненциальной и логистической как функций времени (непрерывного и дискретного) в зависимости от начальных условий — показало качественное сходство поведения соответствующих динамических систем. В случае непрерывных функций задается зависимость $x_0 e^{kt}$, где x_0 — параметр. В другом случае x_0 можно считать переменной, а t — параметр (некоторое фиксированное значение). В этом случае получается совокупность функций $\phi^t(x) = xe^{kt}$, где уже x — независимая переменная. Соответствующая динамика приводит к сходным траекториям [16]. То есть в этих случаях можно говорить об их структурной неустойчивости/устойчивости.

Глобальная структура орбит динамической системы является переплетением плотных и периодических орбит, что приводит к неустойчивости любой орбиты по начальным условиям [16], т.е. к разрушениям последовательностей инвариантных торов, о чем говорилось выше.

В [16] рассмотрено гиперболическое линейное отображение F_L такого тора, индуцированное линейным отображением L с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ([16], § 7.2). Это F_L инвариантное семейство орбит отвечает линейному фазовому потоку T^t_ω в сечении Пуанкаре с иррациональным угловым коэффициентом $\omega = (1, (\sqrt{5}-1)/2)$, т.е. последовательное отношение частот удовлетворяет условию (14). Этот поток минимален, соответствующие множества орбит всюду плотны. Говоря далее о неустойчивости (либо устойчивости), мы подразумеваем в том числе и структурную неустойчивость (либо устойчивость) [16]. В [16] показано, что соответствующий автоморфизм F_L является хаотическим. В этом случае справедлива теорема 7.2.12 из [16]: хаотические отображения являются неустойчивыми по начальным условиям, за исключением случая, когда все пространство состоит из единственной периодической орбиты.

Следовательно, должна существовать устойчивая периодическая, а значит, резонансная орбита, отвечающая наиболее устойчивой последовательности рационально независимых частот (14).

О существовании таких периодических орбит и говорит лемма Аносова о замыкании, смысл которой состоит в следующем: вблизи любой точки в гиперболическом множестве, орбита которой почти возвращается к этой точке, т.е. для любой сколь угодно малой окрестности этой точки орбита пройдет через эту окрестность неоднократно, имеется периодическая орбита, которая следует близко за «почти возвращающейся» частью. Эта лемма фактически говорит о плотности множества периодических точек [16].

Учитывая, что $(\sqrt{5}-1)/2 = \Phi^{-1}$, а само значение $\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ в последовательности Фибоначчи, приходим к выводу, что такими периодическими, а значит, устойчивыми резонансными орбитами являются периодические орбиты с отношением частот

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\Phi}. \qquad (15)$$

Учитывая, что ω_i — реальные частоты возбужденной среды и отобранные средой как наиболее устойчивые, можно получить соответствующую иерархию масштабов резонансов как

$$L_n = \frac{C}{\omega_n}, \qquad (16)$$

где C — скорость передачи информации в среде, т.е. в данном случае скорость звука. Таким образом, получаем простое выражение для масштабов возбужденной среды или масштабов, на которых наблюдаются резонансы:

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} = \Phi \qquad (17)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi\right).$$

Именно в этих областях резонансных возбуждений и будет наблюдаться локализация процессов в возмущаемых нелинейных динамических системах, в том числе и деформационных в случае нагружаемых твердых тел и сред. Соотношение (17) совпадает с экспериментально установленным универсальным принципом фрактальной делимости твердых тел и сред.

Таким образом, за процессы локализации в нелинейных динамических системах отвечает сформировавшаяся в них устойчивая структура резонансов путем отбора системой соответствующих частот из непрерывного в общем случае спектра внешних воздействий.

В различных научных областях и практических приложениях проблема возникновения иерархий различных структур в первоначальной однородной среде является одной из главнейших.

Мы рассмотрели пока простейший пример возникновения структур в нелинейной среде. Самоорганизация и формирование различных диссипативных структур только начинается с пространственно-временнóй локализации процессов в нелинейных динамических системах. Мы дали пока ответ на самый первый вопрос о возможном механизме локализации и иерархии масштабов развития локализованных процессов. Особую задачу представляет вопрос о существовании минимального размера системы или масштаба, ниже которого развитие пространственных режимов становится невозможным [11]. Теоретически минимальный масштаб в структурной организации фазового пространства может быть сколь угодно мал, хотя физические ограничения, безусловно, существуют. В рассмотренном случае возмущаемой системы взаимодействующих атомов таким естественным минимальным масштабом будет характерный размер межатомных расстояний — параметр решетки a_0. Именно такой минимальный размер давали и экспериментальные данные. Во всех случаях измерений масштабов деструкции применение универсального критерия фрактальной делимости к ряду измеренных масштабов давало минимальный масштаб, равный параметру решетки исследуемого материала [5, 6].

В этом же ряду стоит вопрос о конкретном месте разрушения, например месте образования шейки в нагружаемом образце размером L с параметром решетки a_0. Очевидно, что шейка образуется на расстоянии $a_0\Phi^n$ от правого или левого конца образца, при выполнении условия

$$a_0\Phi^n \le L < a_0\Phi^{n+1}. \qquad (18)$$

Понятно, что теоретически нельзя ответить на вопрос, где именно — справа или слева — образуется шейка. В каждом конкретном случае надо принимать во внимание исходную несимметрию нагружения при условии однородности образца.

Проблема прогноза времени наступления разрушения, т.е. катастрофы, — это, фактически, проблема прогноза эволюции динамической системы, включая прогноз различных мезокатастроф в формирующейся в системе иерархии масштабов [7]. Этой проблемы мы здесь касаться не будем.

5. Заключительные замечания

Нелинейная динамика как метанаука, изучающая законы эволюции различных природных, физических, социальных и т.д. динамических систем, включая и математические модели этих систем (и пока в большей степени именно математические модели), сложилась в целом как математическая дисциплина. Множество замечательных результатов, полученных нелинейной динамикой при работе с математическими объектами, при исследовании свойств решений различных уравнений еще не в полной мере осознаны естественно-научными дисциплинами, где постоянно происходят переоткрытия результатов, уже полученных математиками. В этом смысле, математике известно если не все, то очень многое. Одна из причин такого состояния дел кроется, конечно, не в технических сложностях математического аппарата нелинейной динамики, а в том, что нелинейная динамика работает в основном с сильно идеализированными моделями и базовыми уравнениями, зачастую весьма далекими от моделей реальных систем. Нетривиальной задачей является проблема применения полученных математиками знаний, подходов и методов нелинейной динамики к анализу эволюции реальных динамических систем различной природы. Не является исключением из сказанного выше и экспериментально установленный универсальный принцип фрактальной делимости твердых тел и сред. Как было показано, его теоретическое обоснование вытекает из ряда уже полученных нелинейной динамикой результатов.

Хотелось бы также обратить внимание на исключительную эффективность дискретного подхода, при котором физические и/или природные законы превращаются в правила, применяемые рекуррентно, когда текущие данные определяются через предыдущие и т.д. В этом контексте дискретная последовательность ряда Фибоначчи является аналогом закона непрерывного экспоненциального роста в континуальных моделях, оказываясь настолько близкой к экспоненциальной непрерывной модели, насколько это вообще возможно для дискретной целочисленной модели [16].

Множество природных объектов и реальных процессов являются фрактальными структурами, которые строятся самоподобным образом по простому правилу роста — наращивания или убыли масштабов. По такой же схеме наращивания масштабов, начиная с межатомных расстояний, развиваются многие процессы, в том числе и деформационные, пространственную локализацию которых и выражает универсальный принцип фрактальной делимости. В этом смысле деформационные процессы являются пространственно-временными фрактальными структурами, что отражено в самоподобной структуре фазового пространства их математической модели — динамической системы многих взаимодействующих атомов, на которую наложено внешнее возмущающее воздействие. Сечение Пуанкаре выявляет временно́й срез фрактального процесса — пространственную фрактальность. Временна́я фрактальность процессов проявляется в эволюции структуры всего фазового пространства, в частности, в самоподобном процессе распада одних инвариантных торов и рождении других более мелких. Из опыта мы знаем, что характерные времена процессов разрушения крайне малы на микроскопических масштабах и растут самоподобным образом с увеличением масштабов. Так, характерные времена между крупными землетрясениями составляют от нескольких десятков до сотен лет в зависимости от его мощности. И если пространственная фрактальность многих объектов достаточно хорошо изучена, то о временно́м самоподобии известно мало. Решение проблемы прогноза времени разрушения, несомненно, связано с выявлением самоподобия процесса разрушения во временно́й шкале, с установлением закономерностей наращивания характерных временны́х интервалов в соответствии с ростом масштабов разрушения и особенностями эволюции напряженно-деформированного состояния нагружаемого твердого тела как нелинейной системы.

Мы показали, что пространственное самоподобие — закон наращивания масштабов локализации деформационных процессов, включая и масштабы разрушения, — определяется структурой резонансов. При активном нагружении среды в ней постоянно воспроизводится и поддерживается фрактальная пространственная сетка устойчивых резонансных возбуждений, в окрестности которых и активизируются деформационные процессы, формируя диссипативные деформационные структуры. Скорее всего, подобные резонансные возбуждения, организованные в пространстве как фрактальные структуры, ответственны за локализацию различных других процессов: химических реакций, различных физических процессов и т.д., формируя в активированных таким образом средах огромное многообразие наблюдаемых структур.

В этом смысле мы можем говорить о созидательной роли резонансов, имея в виду их роль в активизации различных процессов и формировании пространственных фрактальных структур в первоначально бесструктурном континууме (например в монокристалле). Именно пространственные резонансные возбуждения являются одной из главных причин явления самоорганизации.

Автор выражает искреннюю признательность академику В.Е. Панину за внимание и многолетнюю поддержку работы, а также ценные дискуссии. Работа поддержана грантом РФФИ № 10-05-00509а, интеграционным проектом СО РАН № 114, базовым проектом 7.11.1.6 и проектом VII.64.1.

Литература

1. *Будущее* прикладной математики: Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: КомКнига, 2008. – 512 с.
2. *Проблемы* математической истории: Основания, информационные ресурсы, анализ данных / Отв. ред. Г.Г. Малинецкий, А.В. Коротаев. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 256 с.
3. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.
4. *Панин В.Е.* Новая область физики твердого тела // Изв. вузов. Физика. – 1987. – Т. 30. – № 1. – С. 3–8.
5. *Макаров П.В.* Эволюционная природа блочной организации геоматериалов и геосред. Универсальный критерий фрактальной делимости // Геология и геофизика. – 2007. – Т. 48. – № 7. – С. 724–746.
6. *Макаров П.В.* Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 19–35.
7. *Макаров П.В.* Самоорганизованная критичность деформационных процессов и перспективы прогноза разрушения // Физ. мезомех. – 2010. – Т. 13. – № 5. – С. 97–112.
8. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени / Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 240 с.
9. *Пригожин И.* От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 288 с.
10. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 280 с.

11. *Николис Г., Пригожин И.* Познанне сложного / Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: Еднторнал УРСС, 2003. – 344 с.
12. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной днламнкн. – М.: Эдиторнал УРСС, 2000. – 336 с.
13. *Данилов Ю.А.* Лекцни по нелннейной днламнке / Сннергетнка: от прошлого к будущему. – М.: КомКннга, 2006. – 208 с.
14. *Заславский Г.М.* Фнзнка хаоса в гамильтоновых системах. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследованнй, 2004. – С. 100–101.
15. *Арнольд В.И.* Теория катастроф / Сннергетика: от прошлого к будущему. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 128 с.
16. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в теорню днламическнх снстем с обзором последних достнжений. – М.: МЦНМО, 2005. – 308 с.
17. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно пернодическнх движенний при малом изменении функцни Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 98. – С. 527–530.
18. *Мозер Ю.* КАМ-теория н проблемы устойчнвости. – Ижевск: РХД, 2001. – 448 с.
19. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Нелннейная динамика и хаос. Основные понятия / Синергетнка: от прошлого к будущему. – М.: КомКннга, 2006. – 240 с.
20. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. – М.: Физматлнт, 1995. – 208 с.
21. *Макаров П.В.* Эволюцнонная прнрода деструкцнн твердых тел н сред // Физ. мезомех. – 2007. – Т. 10. – № 3. – С. 23–38.
22. *Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П., Кузнецов П.В., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П., Ворошилов Я.С.* Нелннейная механнка геоматерналов н геосред. – Новоснбирск: Академ. нзд-во «Гео», 2007. – 235 с.
23. *Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П.* Моделнрованне обрушення кровли над выработанным пространством // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 1. – С. 44–50.
24. *Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П.* Сценарин эволюцнн горного массива над выработкой // Физ. мезомех. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 75–82.
25. *Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Перышкин А.Ю.* Модель землетрясения как сверхбыстрый катастрофический этап эволюции нагружаемой геосреды // Фнз. мезомех. – 2010. – Т. 13. – Спец. вып. – С. 29–35.
26. *Макаров П.В.* Самоорганизованная критнчность и сейсмнческий процесс // Триггерные эффекты в геосистемах. Сборник материалов семинара-совещания. – М.: Изд-во ГЕОС, 2010. – С. 79–87.
27. *Макаров П.В., Евтушенко Е.П., Смолин И.Ю.* Численное нзучение особенностей эволюцнн геосреды на стадии подготовки катастрофического события // Триггерные эффекты в геосистемах. Сборник матерналов семинара-совещания. – М.: Изд-во ГЕОС, 2010. – С. 224–230.
28. *Ланда П.С.* Нелннейные колебания и волны. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 495 с.
29. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебанннй и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
30. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебанний. – М.: Фнзматгнз, 1981. – 95 с.
31. *Арнольд В.И.* Малые знаменателн и проблемы устойчнвости движення в классчческой и небесной механнке // Успехн математическнх наук. – 1963. – Т. 18. – № 6. – С. 91–192.
32. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. – 1979. – V. 52. – No. 5. – P. 263–379.
33. *Taylor J.B.* Culham Lab. Prog. Report CLM-PR-12, 1969.
34. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная н стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
35. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теорня бифуркаций // Итоги науки н техннки. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1985. – Т. 5. – С. 5–220.
36. *Арнольд В.* Математические методы классической механики. – М.: Еднторнал УРСС, 2000. – 479 с.
37. *Итоги* науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направлення. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 1. – 243 с.
38. *Итоги* науки и технмкн. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 2. – 312 с.
39. *Zaslavsky G.M.* Chaos in Dynamic Systems. – New York: Harwood Academic Publishers, 1985. – 370 p.
40. *Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и сннергетика / Синергетика. От прошлого к будущему. – М.: Эднторнал УРСС, 2004. – 304 с.
41. *Мозер Ю.* Лекцнн о гамнльтоновых системах. – М.: Мир, 1973. – 167 с.

Поступила в редакцию
10.05.2011 г.

Сведения об авторе

Макаров Павел Васильевич, д.ф.-м.н., зав. лаб. ИФПМ СО РАН, pvm@ispms.tsc.ru