Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Кемеровский научный центр СО РАН
Институт вычислительных технологий СО РАН
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2011)

Материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием

25–26 ноября 2011 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2011

ИССЛЕДОВАНИЯ НЕМАРКОВСКОЙ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

И.Р. Гарайшина[1], А.А. Назаров[2]

[1]*Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске*

[2]*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MAP-поток заявок, управляемый эргодической цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний.

Значения цепи Маркова $k(t) = k$, определяющие условные интенсивности λ_k наступления событий в потоке, будем называть состояниями MMP-потока, матрицу инфинитезимальных характеристик q_{vk}, имеющих смысл интенсивностей вероятностей перехода потока из состояния v в состояние k обозначим $\mathbf{Q}$, а d_{vk} – вероятность того, что в момент перехода цепи Маркова из состояния v в состояние k наступает ещё одно событие.

Считаем, что продолжительности обслуживания заявки на первой и второй фазах являются независимыми случайными величинами τ_1 и τ_2, имеющими произвольные функции распределения, одинаковые для всех приборов одной фазы, которые обозначим $B_1(x)$ и $B_2(x)$, соответственно, для первого и второго этапа обслуживания. Завершив обслуживание на первой фазе, с вероятностью r заявка переходит на вторую фазу или с вероятностью $1 - r$ покидает систему.

Обозначим i_1 – число занятых приборов на первой фазе обслуживания, i_2 – на второй фазе. Изменение во времени состояний (i_1, i_2) образует некоторый двумерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$, для изучения которого предлагается модификация метода просеянного потока [1, 2] для случая двухфазной системы обслуживания.

Для выделения интересующих нас «просеянных» заявок поступим следующим образом. На оси времени t отметим моменты наступления событий входящего потока. Зафиксируем некоторый момент времени t_1 и, для определённости, будем считать, что $t_1 = 0$. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < t_1 = 0$, с вероятностью

$$S_1(t) = 1 - B_1(-t)$$

просеивается на первую дополнительную ось и в момент времени t_1 будет находиться в системе на первой фазе обслуживания, а с вероятностью

$$rS_2(t) = r\int_0^{-t}\left[1 - B_2\left(-(t+y)\right)\right]dB_1(y)$$

просеивается на вторую дополнительную ось и в момент времени t_1 будет находиться в системе на втором этапе обслуживания. Заявки, не попавшие

в просеянные потоки, завершат обслуживание и покинут систему до момента t_1.

Обозначим $n_1(t)$ – число событий первого просеянного потока, $n_2(t)$ – второго просеянного потока.

Если в начальный момент времени $t_0 < t_1$ система обслуживания была свободна, то для момента времени t_1 выполняется равенство

$$i_1(t_1) = n_1(t_1),\ i_2(t_1) = n_2(t_1), \tag{1}$$

то есть число $i_l(t)$ приборов, занятых в системе на l-ой фазе обслуживания, равно числу $n_l(t)$ событий l-го просеянного потока, наступивших до момента времени t_1.

Использование указанного подхода и метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания позволило получить асимптотические приближения характеристической функции процесса $\{i_1(t),\ i_2(t)\}$ (в стационарном режиме функционирования системы) первого и второго порядка соответственно:

$$Me^{ju_1i_1(t)+ju_2i_2(t)} = \exp\left\{ j\kappa_1 \int_{-\infty}^{0} \left(S_1(z)u_1 + rS_2(z)u_2 \right) dz \right\};$$

$$Me^{ju_1i_1(t)+ju_2i_2(t)} =$$

$$= \exp\left\{ u_1\kappa_1 b_1 + ju_2 r\kappa_1 b_2 + \frac{(ju_1)^2}{2}\left(\kappa_1 b_1 + 2\kappa_2\beta_1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(ju_2)^2}{2} r\left(\kappa_1 b_2 + 2\kappa_2 r\beta_2\right) + 2j^2 u_1 u_2 r\kappa_2\beta_{12} \right\},$$

здесь $\kappa_1 = \mathbf{RBE}$, где $\mathbf{R} = \{R(1), R(2), ...\}$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$;

$\mathbf{B}$ – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{vk}q_{vk}$ вне главной диагонали;

j – мнимая единица;

$\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец;

$\kappa_2 = \mathbf{f}_2\left(\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{E}$, где вектор $\mathbf{f}_2$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{f}_2\mathbf{Q} + \mathbf{R}\left(\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}\right) = 0$;

$\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица;

$$b_1 = \int_{-\infty}^{0} \left(1 - B_1(x)\right) dx,\ b_2 = \int_{-\infty}^{0} \left(1 - B_2(x)\right) dx;$$

$$\beta_1 = \int_{0}^{\infty} \left(1 - B_1(y)\right)^2 dy,\ \beta_2 = \int_{0}^{\infty} \left(1 - B_2(y)\right)^2 dy;$$

$$\beta_{12} = \int_{0}^{\infty} \left(1 - B_1(-y)\right)\left(1 - B_2(-y)\right) dy.$$

Из полученного вида характеристической функции следует, что случайные величины, характеризующие отклонение числа занятых

приборов от их средних значений подчинены нормальному закону с распределением вероятностей

$$\Pi(i_1,i_2)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(i_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(i_1-a_1)(i_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(i_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

где $a_1=\kappa_1 b_1$, $a_2=r\kappa_1 b_2$ – средние значения числа занятых приборов;

$\sigma_1=\sqrt{\kappa_1 b_1+2\kappa_2\beta_1}$, $\sigma_2=\sqrt{r\kappa_1 b_2+2r^2\kappa_2\beta_2}$ – средние квадратические отклонения,

$\rho=\dfrac{2r\kappa_2\beta_{12}}{\sqrt{\kappa_1 b_1+2\kappa_2\beta_1}\sqrt{r\kappa_1 b_2+2r^2\kappa_2\beta_2}}$ – коэффициент корреляции числа занятых приборов на первой и второй фазах.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» (проект № 11803) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-90712-моб_ст).

Литература

1. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

2. *Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А.* Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ

А.Р. Еремина

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь

1. Введение. Сети массового обслуживания являются адекватными моделями, описывающими функционирование различных объектов в экономике, технике, производстве и т.п. Однако при построении и анализе этих моделей, как правило, выдвигается предположение о том, что длительности обслуживания поступающих требований и (или) длительности пребывания обслуживающих приборов в режимах имеют экспоненциальное распределение. Это предположение часто не соответствует функционированию реальных объектов. Поэтому в ряде работ были исследованы сети, свободные от данных ограничений.