

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2012

№ 3(19)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бухтяк М.С., канд. физ.-мат. наук, доц.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Лейцин В.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

УДК 517.54

В.А. Пчелинцев

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

В статье рассматривается задача о множестве Δ значений одного функционала на классе пар функций однолистных и мероморфных в системе круг – внешность круга. Посредством вариационного метода Голузина удаётся получить систему дифференциальных уравнений для граничных функций, а также найти уравнение границы множества Δ .

Ключевые слова: класс \mathfrak{M}' , функционал, метод внутренних вариаций, вариационные формулы, необходимое условие, граничные функции, дифференциальные уравнения.

Пусть D и D^* – односвязные области в w -плоскости и такие, что $0 \in D$, а $\infty \in D^*$. Пусть $f(z) : U \rightarrow D$ – голоморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

и $F(\zeta) : U^* \rightarrow D^*$ – мероморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$F(\zeta) = \zeta + d_0 + \frac{d_{-1}}{\zeta} + \dots + \frac{d_{-n}}{\zeta^n} + \dots,$$

где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. Семейство пар функций $(f(z), F(\zeta))$ такого вида назовём классом \mathfrak{M}' .

В настоящей статье решается задача о нахождении множества Δ значений функционала

$$\Phi(f, F) = \ln \left[\left(\frac{f(z_0)}{z_0} \right)^\lambda \left(\frac{\zeta_0}{F(\zeta_0)} \right)^{1-\lambda} \right] = \lambda \int_0^{z_0} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} \right) dz - (1-\lambda) \int_{\zeta_0}^{\infty} \left(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \quad (1)$$

при фиксированных λ, z_0 и ζ_0 , $0 < \lambda < 1$, $|z_0| < 1$ и $|\zeta_0| > 1$.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный метод Г.М. Голузина [2]. Как и метод внутренних вариаций Шиффера, вариационный метод Г.М. Голузина приводит к функционально-дифференциальным уравнениям для граничных функций. Вариационный метод Г.М. Голузина даёт важную геометрическую характеристику экстремальных отображений. С помощью этого метода были получены решения разнообразных по постановкам экстремальных задач. Он нашёл многочисленные приложения к экстремальным задачам в различных классах однолистных и мероморфных функций, характеризующихся теми или иными геометрическими свойствами.

Вариационный метод Г.М. Голузина, как и другие методы решения экстремальных задач геометрической теории однолистных функций (метод площадей,

метод параметрических представлений, метод контурного интегрирования, метод симметризации, метод экстремальной метрики, методы внутренних и граничных вариаций Шиффера, метод крайних точек, метод интегральных представлений), составляет содержание многочисленных монографий и статей.

В данной работе с помощью метода внутренних вариаций получены вариационные пары функций. Указаны необходимые условия для граничных отображений $f(z)$ и $F(\zeta)$ функционала (1), посредством которого совместно с парой простых вариаций доказано, что области D и D^* не имеют внешних точек (лемма 1). В результате рассмотрения необходимого условия и вариационных формул (5) получена система дифференциальных уравнений для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$, зависящая от параметра $\alpha = \arg(\Phi(f, F) - a)$ (теорема 1). Проведя качественный анализ полученной системы уравнений, заключаем, что каждая граница областей D и D^* состоит из одной аналитической кривой. Выполняя интегрирование дифференциальных уравнений из этой системы по определённым путям интегрирования, находим уравнение границы множества Δ значений функционала (1) (теорема 2).

1. Вариационные формулы

Пусть $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область и \mathcal{K} – некоторое подмножество множества голоморфных или мероморфных в G функций. Если для каждой функции $g \in \mathcal{K}$ и для любого малого $\varepsilon > 0$ имеется функция $g_\varepsilon \in \mathcal{K}$, такая, что

$$g_\varepsilon(z) = g(z) + \varepsilon R(z) + o(z, \varepsilon), \tag{2}$$

где $R(z)$ – голоморфная в G функция (не зависящая от ε) и $o(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри G , то говорят, что (2) есть вариационная формула в классе \mathcal{K} [1].

Если пара функций $(f(z), F(\zeta))$ принадлежит классу \mathfrak{M}' , то при ε положительном достаточно малом классу \mathfrak{M}' также принадлежат следующие пары варьированных функций:

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - w_0}, \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{w_0^* F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0^*} + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

где w_0 и w_0^* – внешние точки соответственно для областей D и D^* , A_0 – произвольная комплексная постоянная;

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \left[z f'(z) \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} + f(z) \right] + o(z, \varepsilon), \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) - \varepsilon \left[\zeta F'(\zeta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} + F(\zeta) \right] + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, – произвольная постоянная;

$$\begin{aligned}
 f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \left(A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_0)} - \frac{A_0}{2} \left[z f'(z) \frac{z + z_0}{z - z_0} + f(z) \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{A_0}{2} \left[z f'(z) \frac{\bar{z}_0 z + 1}{z_0 \bar{z} - 1} + f(z) \right] \left[\frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right) + o(z, \varepsilon), \\
 F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon \left(A_0 \frac{F(\zeta_0) F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} + \frac{A_0}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0 - \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_0}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{\overline{F(\zeta_0)}}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 \right) + o(\zeta, \varepsilon), \quad (5)
 \end{aligned}$$

где $z_0 \in U$, $\zeta_0 \in U^*$, A_0 – произвольная комплексная постоянная. С доказательствами указанных вариационных формул, например, можно ознакомиться в [1].

2. Необходимые условия для граничных функций

Нетрудно заметить, что в класс \mathfrak{M}' вместе с парой функций $(f(z), F(\zeta))$ входит пара функций $(e^{-i\varphi} f(ze^{i\varphi}), e^{-i\psi} F(\zeta e^{-i\psi}))$ при любых $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. В связи с этим заключаем о независимости множества Δ от аргументов точек z_0 и ζ_0 . Поэтому будем считать в дальнейшем $|z_0| = r \in (0, 1)$, $|\zeta_0| = \rho \in (1, +\infty)$. Для нахождения множества Δ достаточно найти его границу $\partial\Delta$.

Пусть Γ – граница множества Δ . Точку $\Phi_0 \in \Gamma$ назовём неособой точкой Γ , если существует такая точка $a \notin \Delta$, что для любых $\Phi \in \Delta$ величина $|\Phi - a|$ достигает наименьшего значения в классе \mathfrak{M}' при $\Phi = \Phi_0$ [3]. Множество неособых точек Γ оказывается всюду плотным на Γ [3], следовательно, задача нахождения множества Δ сводится к отысканию наименьшего значения вещественнозначного функционала

$$\left| \ln \left(\frac{f(r)}{r} \right)^\lambda \left(\frac{\rho}{F(\rho)} \right)^{1-\lambda} - a \right|, \quad 0 < \lambda < 1,$$

в классе \mathfrak{M}' при всевозможных $a \notin \Delta$.

Пусть Φ_0 – неособая граничная точка множества Δ и $(f(z), F(\zeta))$ – та пара функций из класса \mathfrak{M}' , для которой $\Phi(f(z), F(\zeta)) = \Phi_0$. Функции такой пары называются граничными.

Записывая вариационные формулы для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ на классе \mathfrak{M}' в виде

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(z, \varepsilon),$$

$$F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta, \varepsilon),$$

при ε положительном и достаточно малом, укажем функциональные производ-

ные относительно $|\Phi(f, F) - a|$. В силу неравенств

$$|\Phi(f^*, F) - a|^2 \geq |\Phi(f, F) - a|^2,$$

$$|\Phi(f, F^*) - a|^2 \geq |\Phi(f, F) - a|^2,$$

получим

$$\left| \ln \left(\frac{f(r)}{r} \right)^\lambda \left(\frac{\rho}{F(\rho)} \right)^{1-\lambda} + \lambda \ln \left(1 + \varepsilon \frac{P(r)}{f(r)} \right) + o(\varepsilon) - a \right|^2 \geq \left| \ln \left(\frac{f(r)}{r} \right)^\lambda \left(\frac{\rho}{F(\rho)} \right)^{1-\lambda} - a \right|^2,$$

$$\left| \ln \left(\frac{f(r)}{r} \right)^\lambda \left(\frac{\rho}{F(\rho)} \right)^{1-\lambda} - (1-\lambda) \ln \left(1 + \varepsilon \frac{Q(\rho)}{F(\rho)} \right) + o(\varepsilon) - a \right|^2 \geq \left| \ln \left(\frac{f(r)}{r} \right)^\lambda \left(\frac{\rho}{F(\rho)} \right)^{1-\lambda} - a \right|^2.$$

Разложив слагаемые в левых частях последних неравенств по формуле Тейлора по степеням ε и выполнив несложные вычисления, находим необходимые условия для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$:

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} \frac{P(r)}{f(r)} \right] \geq 0 \tag{6}$$

и
$$\operatorname{Re} \left[-e^{-i\alpha} \frac{Q(\rho)}{F(\rho)} \right] \geq 0, \tag{7}$$

где $\alpha = \arg(\Phi(f, F) - a)$, $f^* = f(z, \varepsilon)$, $F^* = F(\zeta, \varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ – граничные функции функционала (1). Тогда области D и D^* не имеют внешних точек.

Доказательство. Предположим, что область D имеет хотя бы одну внешнюю точку w_0 . Рассмотрим условие (6), выбрав первую варьированную функцию из (3) в качестве функции сравнения. Оно примет вид

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} A_0 \frac{f(r)}{f(r) - w_0} \right] \geq 0.$$

Поскольку дробь в скобках отлична от нуля, то в силу произвольности $\arg A_0$ будет справедливо неравенство $|\Phi(f^*, F) - a| < |\Phi(f, F) - a|$, которое противоречит экстремальности функции $f(z)$. Полученное противоречие доказывает отсутствие внешних точек для области D . Подобным образом доказывается, что область D^* не имеет внешних точек. Нужно только рассмотреть неравенство (7) и выбрать вторую варьированную функцию из (3) в качестве функции сравнения. Лемма доказана. ◀

3. Дифференциальные уравнения для граничных функций

Применив совместно условие (6) с первой вариационной формулой из (5), а условие (7) со второй вариационной формулой из (5), получаем систему дифференциальных уравнений для граничных функций множества Δ , соответствующих

неособым точкам. Уравнения этой системы зависят от параметра $\alpha = \arg(\Phi(f, F) - a)$.

Теорема 1. Каждая граничная пара функций $(f(z), F(\zeta))$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений

$$e^{-i\alpha} \left[\frac{f(r)}{f(r) - f(z)} \right] \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^2 = \frac{Az^2 + Bz + C}{2(r-z)(rz-1)}, \quad (8)$$

$$e^{-i\alpha} \left[\frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\rho)} \right] \left[\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right]^2 = \frac{A^*\zeta^2 + B^*\zeta + C^*}{2(\zeta - \rho)(1 - \rho\zeta)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (e^{-i\alpha} [H - 1] - e^{i\alpha} [\overline{H} + 1])r, \\ B &= e^{-i\alpha} ([H + 1]r^2 - [H - 1]) + e^{i\alpha} ([\overline{H} + 1]r^2 - [\overline{H} - 1]), \\ C &= (e^{i\alpha} [\overline{H} - 1] - e^{-i\alpha} [H + 1])r, \quad H = H(r) = \frac{rf'(r)}{f(r)}, \quad C = \overline{A}, \\ A^* &= (e^{-i\alpha} [\overline{H}^* - 1] - e^{i\alpha} [H^* + 1])\rho, \\ B^* &= e^{-i\alpha} ([H^* + 1] - [H^* - 1]\rho^2) + e^{i\alpha} ([\overline{H}^* + 1] - [\overline{H}^* - 1]\rho^2), \\ C^* &= (e^{-i\alpha} [H^* - 1] - e^{i\alpha} [\overline{H}^* + 1])\rho, \quad H^* = H^*(r) = \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}, \quad A^* = \overline{C^*}. \end{aligned}$$

Причём правые части уравнений (7) и (8) на единичной окружности $|z| = |\zeta| = 1$ неотрицательны.

Доказательство. Неравенство (6) в случае выбора первой вариационной формулы из (5) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} A_0 \frac{f(r)}{f(r) - f(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha} A_0}{2} \left[\frac{rf'(r)}{f(r)} \frac{r + z_0}{r - z_0} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{e^{-i\alpha} \overline{A_0}}{2} \left[\frac{rf'(r)}{f(r)} \frac{r \overline{z_0} + 1}{r \overline{z_0} - 1} + 1 \right] \left[\frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 \overline{f'(z_0)}} \right]^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Заменяя последнее слагаемое под знаком вещественной части на его сопряженное значение, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_0 \left(e^{-i\alpha} \frac{f(r)}{f(r) - f(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[\frac{rf'(r)}{f(r)} \frac{r + z_0}{r - z_0} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{\overline{rf'(r)}}{f(r)} \frac{r z_0 + 1}{r z_0 - 1} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\arg A_0$, заключаем, что стоящая под знаком вещественной части величина должна быть равна нулю, иначе при надлежащем выборе

A_0 получили бы, что левая часть последнего неравенства отрицательна. Это противоречие приводит к условию

$$e^{-i\alpha} \left[\frac{f(r)}{f(r) - f(z_0)} \right] \left[\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right]^2 = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[\frac{rf'(r)r + z_0}{f(r)r - z_0} + 1 \right] + \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{\overline{rf'(r)}rz_0 + 1}{f(r)rz_0 - 1} + 1 \right].$$

Так как в этом соотношении z_0 – любая точка из круга U , то, заменив z_0 на z , получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет граничная функция $f(z)$. Вычисления показывают, что оно имеет вид (8).

Выбрав теперь первую вариационную формулу из (4), посредством (6) приходим к неравенству

$$e^{-i\alpha} \left[\frac{rf'(r)r + e^{i\theta}}{f(r)r - e^{i\theta}} + 1 \right] + e^{i\alpha} \left[\frac{\overline{rf'(r)}re^{i\theta} + 1}{f(r)re^{i\theta} - 1} + 1 \right] \geq 0,$$

которое указывает на неотрицательность правой части уравнения (7) на единичной окружности $|z|=1$.

Аналогично, применяя неравенство (7) совместно со вторыми вариационными формулами из (5) и (4), получаем дифференциальное уравнение для граничной функции $F(\zeta)$ с правой неотрицательной частью на единичной окружности $|\zeta|=1$, которое имеет вид (9). Теорема доказана. ◀

4. Качественный анализ уравнений (8) и (9)

Из аналитической теории дифференциальных уравнений [5] следует, что всякое решение уравнения (8) и всякое решение уравнения (9) могут иметь только алгебраические особые точки и только конечное их число. Вспомним, что области D и D^* не имеют внешних точек. Таким образом, границы областей D и D^* состоят из конечного числа аналитических кривых.

Покажем, что в нашем случае каждая из границ областей D и D^* состоит из одной аналитической кривой. Для этого введем следующие обозначения:

\mathbf{M}_1 – множество конечных концевых точек $f(\mu)$, $|\mu|=1$, границы области D .

\mathbf{M}_2 – множество конечных концевых точек $F(\eta)$, $|\eta|=1$, границы области D^* .

Предположим, что $f(\mu) \in \mathbf{M}_1$, а $F(\eta) \in \mathbf{M}_2$. Тогда существуют такие окрестности $K(\mu)$ и $K(\eta)$ соответственно точек μ и η , что на множествах $U \cap K(\mu)$ и $U^* \cap K(\eta)$ граничные функции и их производные могут быть представлены в виде

$$f(z) = f(\mu) + (z - \mu)^2 [a_0(\mu) + a_1(\mu)(z - \mu) + \dots], \quad a_0(\mu) \neq 0,$$

$$f'(z) = (z - \mu)[a'_0(\mu) + a'_1(\mu)(z - \mu) + \dots], \quad a'_0(\mu) \neq 0 \quad (10)$$

и
$$F(\zeta) = F(\eta) + (\zeta - \eta)^2 [b_0(\eta) + b_1(\eta)(\zeta - \eta) + \dots], \quad b_0(\eta) \neq 0,$$

$$F'(\zeta) = (\zeta - \eta)[b'_0(\eta) + b'_1(\eta)(\zeta - \eta) + \dots], \quad b'_0(\eta) \neq 0. \quad (11)$$

Используя разложения (10) и (11), отметим, что если $f(\mu) \in \mathbf{M}_1$, а $F(\eta) \in \mathbf{M}_2$, то левые части уравнений (8) и (9) имеют в точках $z = \mu$ и $\zeta = \eta$ нули не ниже второго порядка. Следовательно, правые части уравнений в этом случае содержат множители $(z - \mu)$ и $(\zeta - \eta)$ по меньшей мере во второй степени. Отсюда следу-

ет, что граница области D и граница области D^* могут содержать не более одной конечной концевой точки.

Отметим, что поскольку числители правых частей уравнений (8) и (9) обязательно содержат множители $(z-\mu)^2$ и $(\zeta-\eta)^2$ соответственно, то правые части уравнений (8) и (9), на окружности $|z|=|\zeta|=1$ не могут иметь нулей нечётной кратности. Поэтому уравнения (8) и (9) перепишем как

$$e^{-i\alpha} \left[\frac{f(r)}{f(r)-f(z)} \right] \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]^2 = A \frac{(z-\mu)^2}{2(r-z)(rz-1)},$$

где
$$(z-\mu)^2 = z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{\bar{A}}{A}, \quad \mu^2 = \frac{\bar{A}}{A}, \quad |\mu|=1,$$

и
$$e^{-i\alpha} \left[\frac{F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\rho)} \right] \left[\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right]^2 = C^* \frac{(\eta\zeta-1)^2}{2(\zeta-\rho)(1-\rho\zeta)},$$

где
$$(\eta\zeta-1)^2 = \frac{\bar{C}^*}{C^*}\zeta^2 + \frac{B^*}{C^*}\zeta + 1, \quad \eta^2 = \frac{\bar{C}^*}{C^*}, \quad |\eta|=1.$$

Определим коэффициенты A и C^* . Для этого рассмотрим первое из последних уравнений при $z=0$, а второе при $\zeta=\infty$, находим $A=-2re^{i\alpha}$, а $C^*=-2\rho e^{i\alpha}$.

Таким образом, уравнения примут вид

$$\frac{f(r)}{f(r)-f(z)} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 = re^{2i\alpha} \frac{(z-\mu)^2}{z^2(r-z)(1-rz)}, \quad (12)$$

$$\frac{F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\rho)} \left(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \rho e^{2i\alpha} \frac{(\eta\zeta-1)^2}{\zeta^2(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}. \quad (13)$$

5. Интегрирование дифференциальных уравнений

Для нахождения границы множества Δ значений функционала (1) необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения (12) и (13).

Извлечём из обеих частей равенства (12) квадратный корень и проинтегрируем его от 0 до z :

$$\sqrt{f(r)} \int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)\sqrt{f(r)-f(z)}} dz = \sqrt{r}e^{i\alpha} \int_0^z \frac{\mu-z}{z\sqrt{(r-z)(1-rz)}} dz.$$

Делая замену переменной интегрирования $w=f(z)$ и учитывая, что

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{A}}{A}} = e^{-i\alpha}, \quad \text{получим}$$

$$\sqrt{f(r)} \int_0^{f(z)} \frac{dw}{w\sqrt{f(r)-w}} = \sqrt{r} \int_0^z \frac{dz}{z\sqrt{(r-z)(1-rz)}} - \sqrt{r}e^{i\alpha} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(r-z)(1-rz)}}.$$

Вычисляя эти интегралы, находим

$$\ln f(r) \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(r)}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{f(z)}{f(r)}}} = \ln \frac{rz}{2\sqrt{r(r-z)(1-rz)} - (1+r^2)z + 2r} + \ln \left(\frac{-(1-r)^2}{2\sqrt{r(r-z)(1-rz)} + 2rz - (1+r^2)} \right)^{e^{i\alpha}}. \quad (14)$$

Уравнение (14) неявно определяет граничную функцию $f(z)$.

Устремим в уравнении (14) точку z к r . В пределе получим

$$\ln \frac{f(r)}{r} = \ln \frac{1}{1-r^2} + \ln \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{e^{i\alpha}}. \quad (15)$$

Далее проинтегрируем равенство (13) после извлечения квадратного корня от ζ до ∞ .

$$\int_{\zeta}^{\infty} \frac{F'(\zeta)}{\sqrt{F(\zeta)(F(\zeta)-F(\rho))}} d\zeta = \sqrt{\rho} e^{i\alpha} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\eta\zeta-1}{\zeta\sqrt{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}} d\zeta.$$

Положив $w = F(\zeta)$ и вспомнив, что $\eta = \sqrt{\frac{C^*}{C^*}} = e^{-i\alpha}$, имеем

$$\int_{F(\zeta)}^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{w(w-F(\rho))}} = \sqrt{\rho} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}} - \sqrt{\rho} e^{i\alpha} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}}.$$

Проведя вычисления интегралов, получаем

$$\ln 2F(\zeta) \left(\sqrt{1 - \frac{F(\rho)}{F(\zeta)}} - \frac{F(\rho)}{2F(\zeta)} + 1 \right) = \ln \frac{2\sqrt{\rho(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)} + 2\rho\zeta - (\rho^2 + 1)}{\rho} + \ln \left(\frac{2\sqrt{\rho(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)} - (\rho^2 + 1)\zeta + 2\rho}{-(\rho-1)^2\zeta} \right)^{e^{i\alpha}}. \quad (16)$$

Уравнение (16) неявно определяет граничную функцию $F(\zeta)$.

Вычитая из обеих частей равенства (16) $\ln \rho$ и устремляя точку ζ к ρ , получим

$$\ln \frac{F(\rho)}{\rho} = \ln \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \ln \left(\frac{\rho+1}{\rho-1} \right)^{e^{i\alpha}}. \quad (17)$$

Умножая равенство (15) на λ , а равенство (17) на $1-\lambda$ и почленно вычитая первое из второго, находим

$$\ln \left(\frac{f(r)}{r} \right)^{\lambda} \left(\frac{\rho}{F(\rho)} \right)^{1-\lambda} = \lambda \left[\ln \frac{1}{1-r^2} + \ln \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{e^{i\alpha}} \right] - (1-\lambda) \left[\ln \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \ln \left(\frac{\rho+1}{\rho-1} \right)^{e^{i\alpha}} \right]. \quad (18)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Множество Δ значений функционала (1) на классе \mathfrak{M}' ограничено кривой, заданной уравнением (18).

Следствие 1. Если $\lambda = 1/2$, то множество Δ значений функционала (1) на классе \mathfrak{M}' ограничено кривой, заданной следующим уравнением:

$$\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right) = \ln\frac{\rho^2}{(1-r^2)(\rho^2-1)} + \ln\left(\frac{(1-r)(\rho-1)}{(1+r)(\rho+1)}\right)^{e^{i\alpha}}.$$

Следствие 2. Если в последнем равенстве воспользоваться формулой

$$F(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad f \in S, \quad F \in \Sigma, \quad \zeta \in U^*,$$

которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами S и Σ , то получим известные неравенства

$$\left| \ln \frac{f(r)}{r} + \ln(1-r^2) \right| \leq \ln \frac{1+r}{1-r},$$

$$\left| \ln \frac{\rho}{F(\rho)} + \ln\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \right| \leq \ln \frac{\rho+1}{\rho-1},$$

которые определяют множества значений функционалов $\ln f(r)/r$ и $\ln \rho/F(\rho)$ соответственно на классах S и Σ (см., например, [1, 4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Том. гос. ун-т, 2001.
2. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. № 2. С. 203–236.
3. Лебедев Н.А. Мажорантная область для выражения $I = \ln\left\{z^\lambda [f'(z)]^{1-\lambda} / [f(z)]^\lambda\right\}$ в классе S // Вестник Ленингр. ун-та. 1955. Вып. 3. № 8. С. 29–41.
4. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
5. Матвеев П.Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. СПб.: Лань, 2008.

Статья поступила 02.07.2012 г.

Pchelintsev V.A. ON AN EXTREMAL PROBLEM. The paper consider the problem about a range Δ of some functional on a class of pairs functions univalent and meromorphic in a “circle–exterior of the circle” system. By means of the Goluzin variation method, it is possible to obtain a system of differential equations for boundary functions, and to find the equation of the boundary of range Δ .

Keywords: class \mathfrak{M}' , functional, method of internal variations, variation formulas, necessary condition, boundary functions, differential equations.

PCHELINTSEV Valery Anatol'evich (Tomsk State University)
E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru