ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 539.12

Э.А. АРИНШТЕЙН, В.Г. БАГРОВ**,****

СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА ПРИ ДВИЖЕНИИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. СВЯЗЬ КОЛЕБАНИЙ И ВРАЩЕНИЯ[1]

Ключевые слова: *магнитное поле, квантование энергии, законы сохранения.*

Квантово-механическая задача о движении электрона в однородном магнитном поле имеет не только исторический, но и несомненный методический интерес, поэтому к ней неоднократно обращались многие авторы. Решение нерелятивистского уравнения Шредингера для этой задачи изложено в широко известном курсе Ландау и Лифшица [1]. С некоторыми изменениями оно может быть использовано и для решения соответствующих релятивистских уравнений – уравнений Клейна – Гордона и Дирака [3].

Краткая справка о работах, посвященных этой задаче, и подробный анализ соотношения решения и его классической интерпретации даны в [2]. Интересно также проследить квантовомеханическую реализацию связи вращения и двух взаимно перпендикулярных колебаний, вполне очевидную при классическом решении. Эта связь составляет предмет настоящего исследования, являющегося продолжением работы [2].

1. Определение состояния

Учет магнитного поля производится заменой $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}/c$ в гамильтониане. Осевую симметрию задачи можно сохранить, выбрав векторный потенциал в виде $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{Br}]/2$. Принимая направление поля $\boldsymbol{B}$ за ось x^3 $(=z)$, приведем нерелятивистский гамильтониан (гамильтониан Паули) к виду

$$H = p^2/2m + m^2\omega^2(x^2 + y^2)/8m - \omega L_z/2 - \omega S_z =$$
$$= p_z^2/2m + (p_x^2 + m^2\omega^2x^2/4)/2m + (p_y^2 + m^2\omega^2y^2/4)/2m - \omega L_z/2 - \omega S_z, \quad (1)$$

где $\omega = eB/mc$ – циклотронная частота; $L_z = xp_y - yp_x$ – проекция орбитального момента; S_z – проекция спина на направление поля. Таким образом, движение распадается на равномерное движение вдоль поля (член $p_z^2/2m$), ориентацию спина в магнитном поле (член $-\omega S_z$), которая дает очевидный вклад $\pm\hbar eB/2mc = \pm\hbar\omega/2$ в энергию, и два связанных, ортогональных полю и взаимно ортогональных гармонических колебания. Связь этих колебаний выражена членом $-\omega L_z/2 = -\omega(xp_y - yp_x)/2$.

Введем операторы поглощения и рождения

$$b_x = (ip_x + m\hbar\omega x/2)(m\hbar\omega)^{-1/2}, \quad b_x^+ = (-ip_x + m\hbar\omega x/2)(m\hbar\omega)^{-1/2}$$

квантов колебаний вдоль оси x и соответственно b_y, b_y^+ для колебаний вдоль второй оси. Тогда

$$(p_x^2 + m^2\omega^2x^2/4)/2m + (p_y^2 + m^2\omega^2y^2/4)/2m - \omega L_z/2 =$$
$$= \hbar\omega(b_x^+ - ib_y^+)(b_x + ib_y)/2 + \hbar\omega/2.$$

Если, наконец, ввести операторы рождения и поглощения

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x + ib_y); \quad a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x^+ - ib_y^+); \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x - ib_y); \quad a_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x^+ + ib_y^+), \quad (2)$$

квантов вращения против или по направлению поля, то есть суперпозиции взаимно перпендикулярных колебаний, сдвинутых по фазе на $\pm\pi/4$, то

$$(p_x^2 + m^2\omega^2x^2/4)/2m + (p_y^2 + m^2\omega^2y^2/4)/2m - \omega L_z/2 = \hbar\omega(a_1^+a_1 + 1/2), \quad (3)$$

при этом

$$L_z = i\hbar(b_y^+b_x - b_x^+b_y) = \hbar(a_1^+a_1 - a_2^+a_2). \quad (4)$$

[1] Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 и грантом Президента по поддержке ведущих научных школ НШ – 871.2008.2.

Таким образом, произведено полное разделение коммутирующих между собой операторов, и каждый шаг этой процедуры имеет вполне определенную классическую интерпретацию, что существенно с методической точки зрения. Классическая интерпретация решений, приведенная в работе [2], также использует операторы a и a^+ и операторы b и b^+.

Операторы a и a^+ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_1;a_2] = [a_1^+; a_2^+] = [a_1; a_2^+] = [a_2; a_1^+] = 0; \quad [a_1; a_1^+] = [a_2; a_2^+] = 1, \tag{5}$$

откуда следует, что собственные значения операторов $a_1^+a_1 = n$ и $a_2^+a_2 = s$ являются, как и в случае двух несвязанных осцилляторов, неотрицательными целыми числами. Таким образом, $E = \hbar\omega(n+1/2)+p_z^2/2m$; $L_z = \hbar\omega(n-s)$.

В этом состоянии магнитный момент $\boldsymbol{M} = -\partial E/\partial \boldsymbol{B}$ имеет одну компоненту $M_z = -e\hbar(n+1/2)/mc < 0$, следовательно, он направлен против поля.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом:

Кинетическая энергия вращения электрона и энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле равны по величине, но в случае момента, направленного по полю, они имеют противоположные знаки, а в случае момента, направленного против поля, и та и другая энергия положительны. Поэтому энергия момента, направленного по полю, равна нулю и не входит в полную энергию. Момент равен алгебраической сумме квантованных моментов противоположных направлений.

И нерелятивистский гамильтониан, и оператор Клейна – Гордона содержат комбинацию (3), куда входят операторы рождения и поглощения a_1 и a_1^+ квантов момента, направленного против поля, и не зависят от операторов рождения и поглощения a_2 и a_2^+ квантов момента противоположного направления. Оператор Дирака содержит комбинацию $(\gamma^2-i\gamma^1)a_1 + (\gamma^2+i\gamma^1)a_1^+$, где γ – матрицы Дирака в стандартном представлении, и также не зависит от операторов a_2 и a_2^+ [3]. Другими словами, при любом описании состояния электрона в магнитном поле операторы a_2 и a_2^+ коммутируют с гамильтонианом, поэтому момент является интегралом движения. Преобразования этих операторов позволяют найти другие интегралы движения вместо момента.

2. Определение волновых функций

Координатная зависимость произвольного состояния электрона в однородном магнитном поле, направленном по оси x^3, и в нерелятивистском случае, и при решении уравнений Клейна – Гордона и Дирака может быть представлена в виде $\Psi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \psi_1(x^0 = t; x^3 = z)\psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ – функция состояния, определяемая операторами (2) – a_1; a_2; a_1^+; a_2^+, переменные x и y не обязательно разделены. Для удобства введем безразмерные координаты

$$x^1 = x\rightarrow(2c\hbar/eB)^{1/2}x = (2m\hbar\omega)^{1/2}x, \quad x^2 = y\rightarrow(2m\hbar\omega)^{1/2}y,$$

что приводит операторы a_1, a_1^+, a_2, a_2^+ к виду

$$a_1 = (x - iy + \partial_x - i\partial_y)/2; \quad a_1^+ = (x + iy - \partial_x - i\partial_y)/2; \tag{6}$$

$$a_2 = (x+ iy + \partial_x + i\partial_y)/2; \quad a_2^+ = (x - iy - \partial_x + i\partial_y)/2. \tag{7}$$

Координаты x и y независимы, поэтому комплексные переменные $\xi = 2^{-1/2}(x - iy)$ и $\eta = \xi^* = 2^{-1/2}(x + iy)$ также независимы. В этих переменных

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \partial_\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\xi\eta}\partial_\eta e^{\xi\eta}; \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \partial_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\xi\eta}\partial_\xi e^{\xi\eta}; \tag{8}$$

$$a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \partial_\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\xi\eta}\partial_\xi e^{-\xi\eta}; \quad a_2^+ \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \partial_\eta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\xi\eta}\partial_\eta e^{-\xi\eta}. \tag{9}$$

Основное состояние определяется условиями $a_1\psi_0 = a_2\psi_0 = 0$. Тогда

$$e^{\xi\eta}\psi_0 = \text{const}, \quad \psi_0 = (2\pi)^{-1}\exp(-\xi\eta) = (2\pi)^{-1}\exp(-(x^2 + y^2)/2). \tag{10}$$

Действуя на ψ_0 операторами a_1^+ и a_2^+ n и s раз соответственно, получим

$$\Psi_{n,s} = (n!s!)^{-1/2}(a_1^+)^n(a_2^+)^s\psi_0 = (-1)^{n+s}(2^{n+s}n!s!)^{-1/2}e^{\xi\eta}\partial_\xi^n\partial_\eta^s e^{-\xi\eta}\psi_0. \tag{11}$$

При этом $a_1^+a_1\Psi_{n,s} = n\Psi_{n,s}$, $a_2^+a_2\Psi_{n,s} = s\Psi_{n,s}$,

$$e^{\xi\eta}\partial_\eta^n\partial_\xi^s e^{-2\xi\eta} = (-2)^s e^{\xi\eta}\partial_\eta^n e^{-2\xi\eta}\eta^s = (-2)^s e^{-\xi\eta}(\partial_\eta - 2\xi)^n\eta^s =$$

$$= (-2)^n e^{-\xi\eta}(\partial_\xi - 2\eta)^s\xi^n = (-2)^{s+n}e^{-\xi\eta}P_{n,s}(\xi,\eta).$$

Полином $P_{n,s}(\xi,\eta)=\sum\frac{n!s!\xi^{n-k}\eta^{s-k}(-1)^k}{k!(n-k)!(s-k)!}$, $k \le n, s$, может быть сведен к полиномам Лягера либо к сумме произведений полиномов Эрмита $H_k(x)H_l(y)$.

Очевидно, что волновая функция (11) является суперпозицией состояний симметричного двухмерного осциллятора, и, в соответствии с классической интерпретацией, вращение заряда в магнитном поле можно определить как суперпозицию взаимно перпендикулярных колебаний.

В то же время видно, что из условий $a_1^+\psi' = a_2^+\psi' = 0$ следует $\psi' = C\exp(\xi\eta) = C\exp((x^2+y^2)/2)$, эта функция ненормируема и не дает возможности найти нормируемые функции, отличные от функций (10), (11).

Определение зависимости состояния от времени и третьей координаты является достаточно тривиальной независимой задачей.

3. Преобразование состояний

Состояния (11) имеют определенную энергию вращения в магнитном поле, входящую в полную энергию и равную $\hbar\omega(n+1/2)$, в соответствии с выражением (3), и определенный момент $L_z = \hbar(n-s)$. Эти состояния могут быть преобразованы унитарными операторами, действующими на операторы a_2 и a_2^+, в состояния той же энергии, но характеризуемые не моментом, а другими интегралами движения, так как подобные преобразования сохраняют коммутативность новых операторов (функций от a_2 и a_2^+) с гамильтонианом.

Прежде всего заметим, что операторы a_2 и a_2^+ (так же, как и операторы a_1 и a_1^+) определены с точностью до фазового множителя. Замена $a\to e^{i\varepsilon}a$ эквивалентна замене $x-iy\to e^{i\varepsilon}(x-iy)$, т.е. сводится к повороту в плоскости, перпендикулярной полю. Это обстоятельство упрощает анализ преобразования $a_2\to A_2 = \alpha a_2+\beta a_2^+$ с произвольными комплексными параметрами α и β, смешивающего операторы a_2 и a_2^+ [3].

Если $\alpha = e^{i\delta}|\alpha|$, $\beta = \pm e^{i\zeta}|\beta|$, то $A_2 = \alpha a_2+\beta a_2^+ = e^{i(\delta+\zeta)/2}(|\alpha|e^{i(\delta-\zeta)/2}a_2\pm|\beta|e^{-i(\delta-\zeta)/2}a_2^+)$. Отсюда следует, что изменение фазы операторов a_2 и A_2 позволяет в общем случае рассматривать только действительные значения параметров α и β.

Унитарный оператор, смешивающий операторы a и a^+, имеет в общем случае вид

$$U(t)=\exp(t(a^{+2}-a^2)/2). \tag{12}$$

Действительно, если $A(t) = U^+(t)aU(t)$ и $A^+(t) = U^+(t)a^+U(t)$, то легко найти

$$\frac{dA}{dt}=A^+;\quad \frac{dA^+}{dt}=A;\quad \frac{d(A+A^+)}{dt}=(A+A^+);\quad \frac{d(A-A^+)}{dt}=-(A-A^+),$$

откуда с учетом начальных условий $A(0) = a$, $A^+(0) = a^+$ получим

$$A(t) = a\operatorname{ch}t+a^+\operatorname{sh}t,\qquad A^+(t) = a\operatorname{sh}t+a^+\operatorname{ch}t. \tag{13}$$

Используя явный вид (7) операторов a_2 и a_2^+, получим

$$A_2 = (e^tx+ie^{-t}y+e^{-t}\partial_x+ ie^t\partial_y)/2;\qquad A_2^+ = (e^tx-ie^{-t}y-e^{-t}\partial_x+ie^t\partial_y)/2, \tag{14}$$

другими словами, преобразование (12) состоит в одновременном изменении масштабов по осям x и y, $x\to xe^t$, $y\to ye^{-t}$, сжатии вдоль одной и растяжении вдоль другой оси, причем произведение xy остается инвариантным.

В особом случае смешения операторов a_2 и a_2^+ при $\alpha = \pm\beta = 2^{-1/2}$ получим $A_2 = x+i\partial_y$ (знак +) либо $A_2 = i(y-i\partial_x)$ (знак –). В этом случае собственное состояние оператора A_2 имеет вид $\psi = \delta(x-x_0)e^{iky}(2\pi)^{-1/2}$ либо $\psi = \delta(y-y_0)e^{ikx}(2\pi)^{-1/2}$. Эти состояния можно в некотором смысле рассматривать как результат предельного случая преобразования (12).

Другой тип преобразований операторов a и a^+ определяется унитарным оператором

$$U_1(z) = \exp(za^+-z^*a) = \exp(-|z|^2/2)\exp(za^+)\exp(-z^*a), \tag{15}$$

где z – комплексный параметр. Это преобразование генерирует когерентные состояния осциллятора: $\psi_0\to\exp(-|z|^2/2)\sum z^n(n!)^{-1}(a^+)^n\psi_0 = \exp(-|z|^2/2)\sum z^n(n!)^{-1/2}\psi_n$ и определяет сдвиг $a\to a+z$, $a^+\to a^++z^*$ в фазовой плоскости. Все свойства этих состояний изучены весьма подробно.

Заменяя в операторе (15) $a\to a_2$ и $a^+\to a_2^+$, получаем

$$U_1(z) = \exp(za_2^+-z^*a_2) = \exp((z\xi-z^*\partial_\xi-z^*\eta-z\partial_\eta)2^{-1/2}), \tag{16}$$

что определяет замену $\xi\to U_1^+\xi U_1 = \xi+2^{-1/2}z^*$, $\eta\to\eta+2^{-1/2}z$, эквивалентную сдвигу в плоскости (x, y): $x+iy\to x+iy+z$.

Таким образом, основные преобразования симметрии – сдвиги, повороты и сохраняющие площадь однородные деформации плоскости, перпендикулярной полю, генерируются достаточно простыми унитарными преобразованиями в соответствии с основными положениями квантовой механики. При этих преобразованиях, а именно деформациях и сдвигах, сохраняющих ортогональную магнитному полю площадь и, следовательно, магнитный поток, энергия электрона остается инвариантной.

Эти свойства и система состояний (10), (11) имеют место и в нерелятивистской теории с учетом спина, и в релятивистской теории.

Кроме преобразований операторов допустимо также калибровочное преобразование состояний $\psi \to e^{if(x,\,y)}\psi$, где $f(x, y)$ – действительная функция своих аргументов. Однако такое преобразование изменит вид векторного потенциала и симметрия задачи будет далеко не очевидна. Выбор векторного потенциала в виде $A_x = -By$, $A_y = A_z = 0$ [1] приводит к полному разделению переменных, другому набору измеримых величин и несколько отличной интерпретации решения. Измеримой будет не момент, а координата y_0 оси вращения, при этом решение не сохраняет симметрию в плоскости, перпендикулярной полю, тогда как множество решений (10) – (11) содержит и симметричные, и несимметричные решения.

Заключение

Вращение электрона в однородном магнитном поле – это простейший случай вращения вокруг фиксированного направления, реализуемый на уровне, где эффективно действуют квантовые законы. Детальное квантово-механическое исследование уже этого простейшего случая позволяет проиллюстрировать классическую интерпретацию решения и ряд достаточно глубоких общих свойств состояний осциллятора, этого своеобразного «универсального инструмента» [4] (и любой курс по методу вторичного квантования), используемого при квантовом описании движения.

Примечание. Тот факт, что оператор проекции момента определяется операторами рождения и поглощения квантов двух осцилляторов a_1^+, a_1, и a_2^+, a_2, а его значение – двумя целыми собственными числами n и s, не является случайным. Оператор произвольного момента может быть представлен в виде

$$J_x = (\hbar/2)(a_1^+a_2 + a_2^+a_1), \quad J_y = (\hbar/2i)(a_1^+a_2 - a_2^+a_1), \quad J_z = (\hbar/2)(a_1^+a_1 - a_2^+a_2),$$

или кратко $\boldsymbol{J} = (\hbar/2)A^+\boldsymbol{\sigma}A$, где A – оператор-столбец, составленный из операторов a_1 и a_2, A^+ – строка сопряженных операторов и $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор матриц Паули. При этом числа заполнения n и s осцилляторов связаны с собственными значениями момента j и m соотношениями $n = j+m$, $s = j-m$ (либо $j = (n+s)/2$, $m = (n-s)/2$).

При одинаковой четности чисел n и s числа j и m – целые, при различной – полуцелые. Состояние спина 1/2 (спинор) содержит только один квант, причем $n = 0$, $s = 1$ соответствует состоянию «спин вниз», $n = 1$, $s = 0$ – «спин вверх». Таким образом, произвольный момент, как целый, так и полуцелый, можно представить, как совокупность «квантов вращения», или как систему двух вращений, каждому из которых сопоставляется осциллятор. Это представление следует из сопоставления матричных элементов операторов момента и операторов рождения и поглощения квантов колебаний. По существу, это вариант введения в спинорный формализм теории момента [1, 5, 6] (a_1, a_2 – спинор, a_1^+, a_2^+ – сопряженный спинор).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Теоретическая физика. Т. III. – М.: Наука, 1982.
2. Аринштейн Э.А., Багров В.Г. // Изв. вузов. Физика. – 2008. – № 8. – С. 12–18.
3. Bagrov V.G., Baldiotti M.C., Gitman D.M., and Shirokov I.V. // J. Math. Phys. – 2002. – V. 43. – No. 5. – P. 2284–2305.
4. Мошанский М. Гармонический осциллятор в современной физике: от атомов до кварков. – М.: Мир, 1972.
5. Бринкман Г. Применение спинорных инвариантов в атомной физике. – М.: ИЛ, 1959.
6. Картан Э. Теория спиноров. – М.: ИЛ, 1947.

*Тюменский госуниверситет, г. Тюмень, Россия
**Томский госуниверситет, г. Томск, Россия
***Институт сильноточной электроники СО РАН, г. Томск, Россия
E-mail: earin@utmn.ru

Поступила в редакцию 12.01.09.

Аринштейн Эдуард Абрамович, д.ф.-м.н., профессор каф. теоретической физики ТюмГУ;
Багров Владислав Гавриилович, д.ф.-м.н., профессор каф. квантовой теории поля ТГУ.