

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ С КОНСТРУКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ТИПА “ДИАФРАГМА”

© 2012 г. М. А. Пономарева, Г. Р. Шрагер, В. А. Якутенок, Ю. Б. Банзула*, С. В. Карязов*

Томский государственный университет

*ФГУП “Федеральный центр двойных технологий “Союз”, г. Дзержинский, Московская область

shg@ff.tsu.ru

yva@ff.tsu.ru

Поступила в редакцию 07.02.2011 г.

ВВЕДЕНИЕ

При изготовлении изделий из высоконаполненных полимерных композиций методом свободного литья осуществляется транспорт композиций из смесителя в вертикально установленную пресс-форму [1, 2]. Данный процесс осуществляется с применением массопроводов различных конфигураций. Так, в [1] отмечается, что для изготовления малогабаритных изделий могут использоваться вертикально установленные массопроводы с конструктивным элементом типа “диафрагма”. Моделирование течений в таких массопроводах осложнено наличием свободной поверхности текучей среды, а во многих случаях и нелинейными свойствами последней. В настоящее время при разработке и оптимизации процесса формирования с помощью приближенных формул определяются напорно-расходные характеристики массопроводов или реодинамическое сопротивление, которое, в частности, может снижаться за счет установленной диафрагмы [1]. Используемые приближенные методы оценки эффективности массопроводов не дают ни качественного, ни тем более количественного описания особенностей течения жидкости внутри массопроводов, содержащих конструктивные элементы.

В данной работе проводится математическое моделирование течения жидкости в вертикальном канале с установленным конструктивным элементом типа “диафрагма” при малых числах Рейнольдса. Расход на входе в канал считается заданным. Задача формулируется в плоской постановке с использованием ньютоновской реологической модели.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается медленное течение высоковязкой ньютоновской жидкости ($Re \ll 1$), которое описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности, имеющими в двумерном случае в безразмерной форме вид

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Область течения Ω , имеющая границу $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, схематично изображена на рис. 1, где Γ_1 – свободная поверхность, Γ_2 – твердые стенки (отмечены жирными линиями), Γ_3 – входная граница. На расстоянии H от начального положения свободной поверхности установлена диафрагма под углом 45° , имеющая отверстие полушириной r .

На свободной поверхности Γ_1 выполняются условия отсутствия касательных напряжений и равенства нормального напряжения внешнему давлению, которое без ограничения общности можно считать равным нулю:

$$t_i = -Wx_2 n_i, \quad x_i \in \Gamma_1, \quad (3)$$

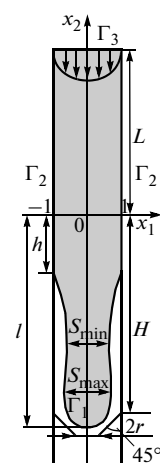


Рис. 1. Область решения.

где

$$t_i = \Pi_{ij} n_j,$$

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

На твердых стенках выполняются условия прилипания

$$u_i = 0, \quad x_i \in \Gamma_2. \quad (4)$$

На входной границе Γ_3 на расстоянии $L = 6$ от начального положения свободной поверхности, достаточном для исключения влияния последней на течение во входном сечении, задан параболический профиль скорости, характерный для стабилизированного течения в плоском канале:

$$u_2 = \frac{3}{2}(x_1^2 - 1), \quad u_1 = 0, \quad x_i \in \Gamma_3. \quad (5)$$

В начальный момент времени свободная поверхность Γ_1 имеет горизонтальную форму с уравнением $x_2 = 0$. Деформация формы свободной поверхности с течением времени происходит в соответствии с кинематическим условием, записанным в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad x_i \in \Gamma_1. \quad (6)$$

Таким образом, задача рассматривается в квазистационарной постановке. Это означает, что после решения уравнений (1), (2) в области с полученной в результате предыдущих вычислений свободной границей (или заданной при $t = 0$) с краевыми условиями (3)–(5), в соответствии с кинематическим условием (6) и вычисленными значениями скоростей на свободной поверхности, рассчитывается ее новое положение.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения задачи используется непрямой метод граничных элементов [3]. Исходная система дифференциальных уравнений (1), (2) заменяется эквивалентной системой граничных интегральных уравнений

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) d\Gamma(\xi), \quad (7)$$

$$t_i(x) = \int_{\Gamma} T_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) d\Gamma(\xi), \quad (8)$$

где плотность фиктивных источников $\varphi_j(\xi)$ заранее неизвестная величина. Граница области разбивается на N прямолинейных отрезков (элементов), вдоль которых искомая функция $\varphi_j(\xi)$ счита-

ется постоянной. Уравнения (7) и (8) при $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \in \Gamma$) приобретают вид

$$u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi_j(\xi^q) \int_{\Delta\Gamma^q} U_{ij}(x_0^p, \xi^q) d\Gamma(\xi^q), \quad (9)$$

$$t_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \varphi_j(\xi^q) \int_{\Delta\Gamma^q} T_{ij}(x_0^p, \xi^q) d\Gamma(\xi^q), \quad (10)$$

где x_0^p – середина граничного элемента с номером p , называемая узлом, ξ^q – точка, принадлежащая элементу с номером q , именуемая точкой приложения нагрузки. Интегралы в уравнениях (9), (10) вычисляются аналитически. Значения компонент вектора скорости и усилий на границе известны. Полученная система алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Значения скоростей и напряжений в любой точке области находятся численным интегрированием уравнений (7), (8).

Для вычисления новой формы свободной границы в соответствии с (6) используется разностная схема Эйлера. Вычислительный алгоритм позволяет на каждом шаге увеличивать количество элементов для сохранения точности аппроксимации свободной границы, длина которой в ходе процесса постоянно увеличивается. Таким образом, в каждом расчете значение N варьируется от начального 90 до 500. Точность выполнения закона сохранения массы во всех расчетах составляла 0.1%.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Течение жидкости определяется параметром Стокса W , характеризующим отношение гравитационных и вязких сил, и геометрическими характеристиками H и r . В работе для демонстрации возможных режимов течения выбраны значения $H = 6$ и $r = 0.35$.

На рис. 2 представлена картина течения, характерная для малых значений параметра W . В данном режиме заполнение канала до встречи с диафрагмой осуществляется сплошным образом. Линия трехфазного контакта непрерывно меняет свое положение до достижения отверстия диафрагмы. На выходе из отверстия формируется струя толщиной, равной ширине этого отверстия.

Случай, представленный на рис. 3, относится к струйному режиму течения, формируемому выше диафрагмы. Под действием силы тяжести профиль свободной поверхности вытягивается и происходит отрыв жидкости от стенок канала. При достижении струей стенок диафрагмы наблюдается процесс заполнения всего объема внутри канала, предшествующего отверстию диафрагмы с одновременным формированием струи на выходе из этого отверстия. При этом заполнение

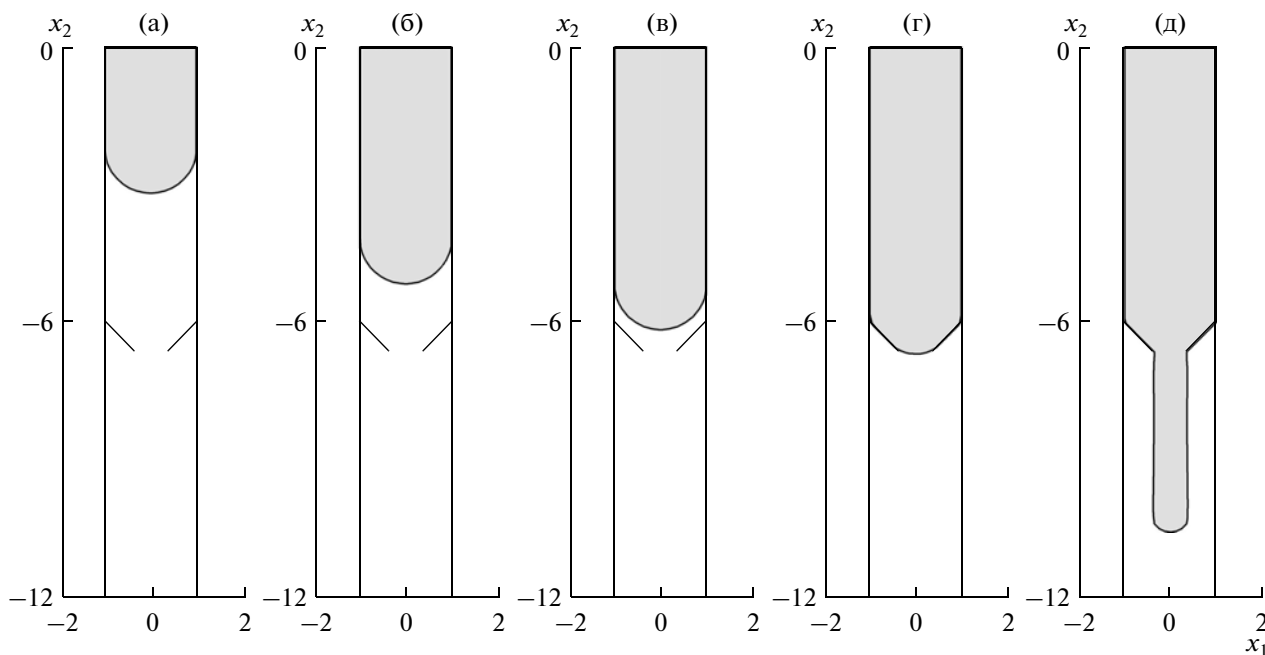


Рис. 2. Эволюция свободной поверхности при $W = 0.1$: (а) $-t = 3$; (б) $-t = 5$; (в) $-t = 6$; (г) $-t = 6.5$; (д) $-t = 8$.

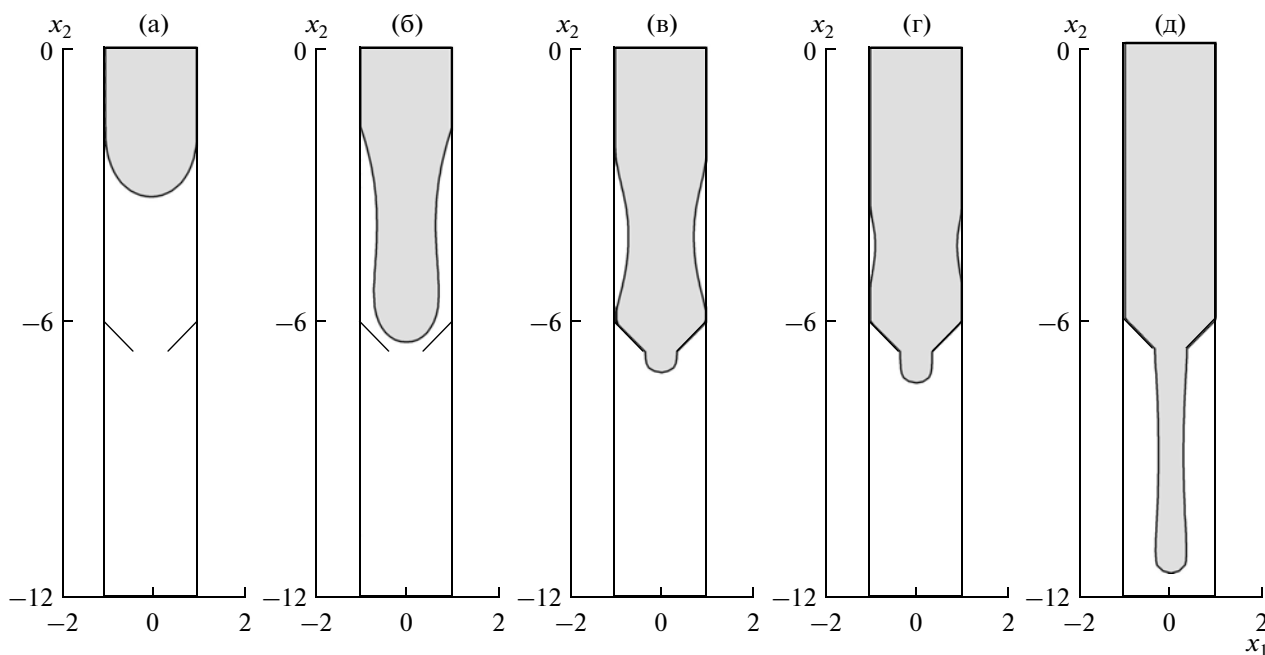


Рис. 3. Эволюция свободной поверхности при $W = 0.8$: (а) $-t = 4$; (б) $-t = 5$; (в) $-t = 6$; (г) $-t = 6.6$; (д) $-t = 8$.

происходит как сверху напорным течением, так и со стороны диафрагмы. Фиксированная до момента касания свободной поверхности стенок диафрагмы линия трехфазного контакта и линия контакта, образовавшаяся в результате этого касания, двигаются навстречу до момента их исчезновения. Такой режим течения возможен лишь

при наличии специального клапана, либо при вакуумировании заполняемого канала. Положение линии трехфазного контакта h фиксируется на определенном расстоянии от начального положения свободной поверхности. Кривая, представленная на рис. 4, демонстрирует влияние числа W на величину h без учета влияния диафрагмы. Дан-

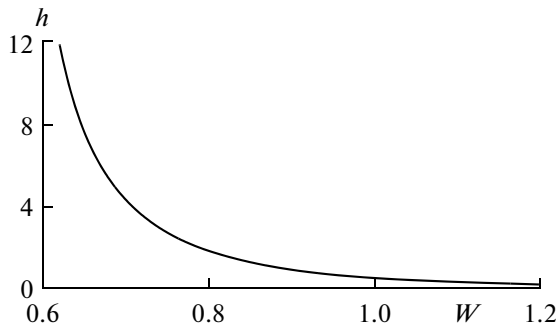


Рис. 4. Зависимость установившегося положения линии трехфазного контакта в случае перехода к струйному режиму течения от параметра W (без учета влияния диафрагмы).

ную кривую можно аппроксимировать степенным уравнением $h = 0.45W^{-6.67}$. Руководствуясь полученной зависимостью, можно определить на каком расстоянии от первоначального положения свободной поверхности произойдет отрыв жидкости от стенок канала. Если это расстояние близко к нулю, то можно говорить о струйном течении, если же оно превышает длину рассматриваемого канала, то заполнение будет осуществляться сплошным образом. Наличие струйного и сплошного режима заполнения согласуется с результатами работы [4].

На рис. 5 представлен случай струйного режима, дальнейшая эволюция которого отличается от картины течения на рис. 3. Его особенность со-

стоит в том, что заполнение промежуточного объема, предшествующего диафрагме, происходит только со стороны диафрагмы. К тому же до того, как промежуточная область будет заполнена, произойдет разрыв струи, формируемой после диафрагмы, поскольку происходит ее быстрое утоньшение по мере удлинения. В данном случае провести дальнейший расчет невозможно без прямого моделирования распада струи. О возможном распаде струй и предшествующем стремительном удлинении свидетельствует рис. 6, на котором, как и на рис. 4, зависимости для струй получены безотносительно наличия диафрагмы. В особенности следует отметить характер зависимости минимальной толщины струи s_{\min} от времени (рис. 6б). Несмотря на то, что кривые построены с учетом ограничений вычислительного алгоритма, из рисунка видно, что все они имеют выраженную тенденцию обращения в ноль. Чем больше значение W , тем ярче выражено это стремление. Еще одной важной особенностью сформировавшейся струи является формирование на конце явно выраженного каплевидного образования (рис. 3б, рис. 5а, рис. 7, 8), чего не происходит, например, при истечении струи из отверстия в случае $W \ll 1$ (рис. 2д).

Рисунок 7 демонстрирует потерю устойчивости струи, натекающей на твердую поверхность, в качестве которой выступают стенки диафрагмы. Наблюдается периодическое изгибание с образованием внутренних границ раздела. В работах [5–7] рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью вязких струй, натекающих на твердую

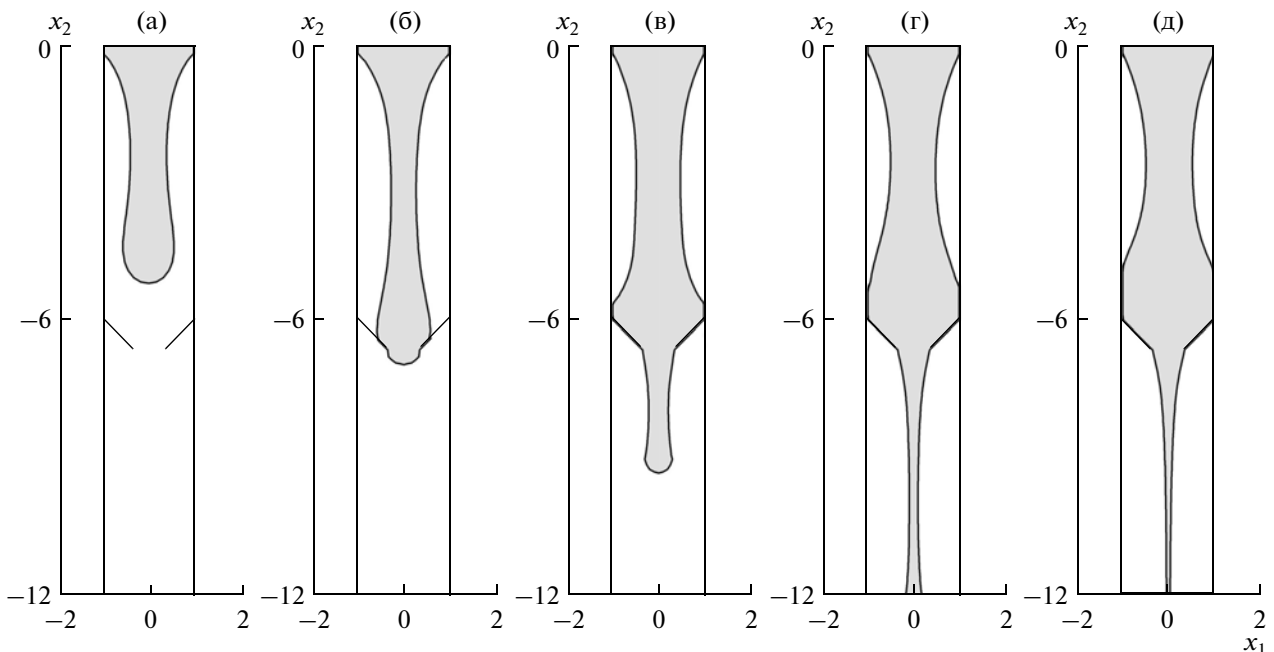


Рис. 5. Эволюция свободной поверхности при $W = 2$: (а) $-t = 2.7$; (б) $-t = 3$; (в) $-t = 5$; (г) $-t = 5.7$; (д) $-t = 6$.

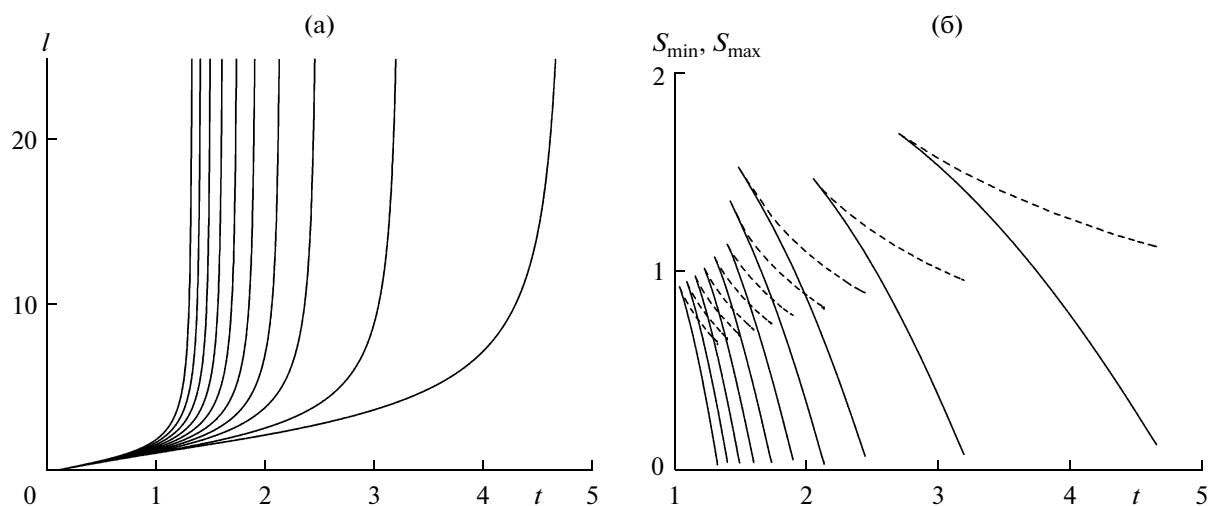


Рис. 6. Геометрические характеристики струи в зависимости от времени: (а) – длина l ; (б) – сплошные кривые соответствуют минимальной толщине s_{\min} , штриховые – толщине каплевидного образования на конце струи s_{\max} . Правые крайние кривые соответствуют $W = 1$, левые – $W = 10$; кривые построены с шагом $\Delta W = 1$.

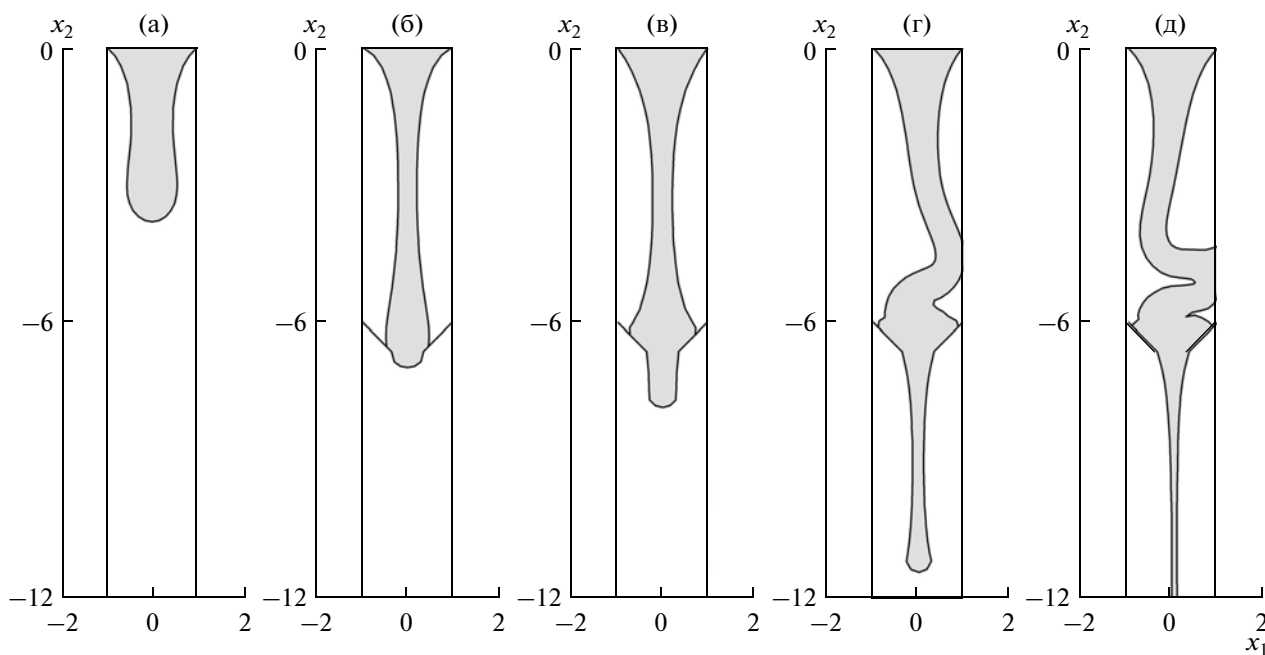


Рис. 7. Эволюция свободной поверхности при $W = 3$: (а) – $t = 2$; (б) – $t = 2.3$; (в) – $t = 3$; (г) – $t = 4$; (д) – $t = 4.25$.

горизонтальную поверхность, приводятся условия возникновения изгибов [5, 6], критическое значение высоты сливного отверстия над твердой поверхностью в зависимости от W [7], при превышении которого наблюдается указанное явление. Согласно [7], это значение уменьшается с ростом W . Величина параметра W и значение высоты сливного отверстия над диафрагмой для течения, представленного на рис. 7, согласуются с данными [7], прогнозирующими неустойчивость струи в этом случае.

Может оказаться, что значение ширины отверстия установленной диафрагмы будет больше толщины сформировавшейся струи в месте установки диафрагмы. В таком случае струя беспрепятственно преодолеет отверстие диафрагмы, и последняя не окажет никакого влияния на течение (рис. 8). Если r_c – некоторое критическое значение полуширины отверстия диафрагмы, после превышения которого струя беспрепятственно проходит через диафрагму, то условие реализации

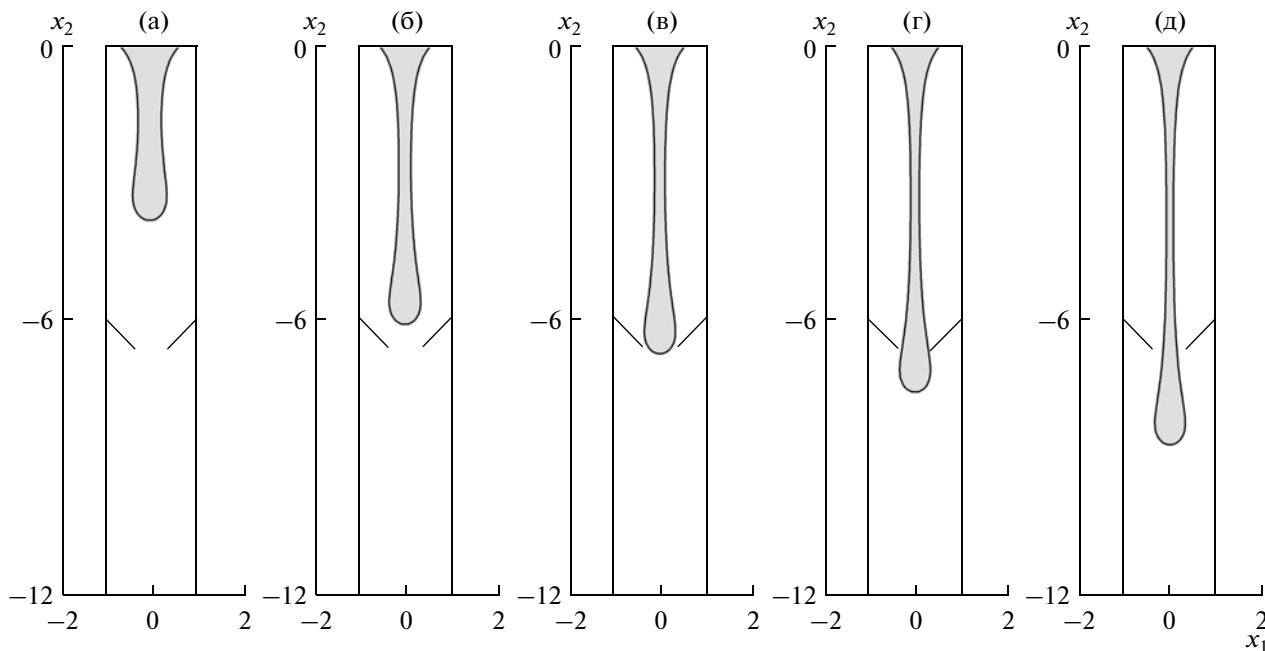


Рис. 8. Эволюция свободной поверхности при $W = 10$: (а) $-t = 1.2$; (б) $-t = 1.27$; (в) $-t = 1.28$; (г) $-t = 1.29$; (д) $-t = 1.3$.

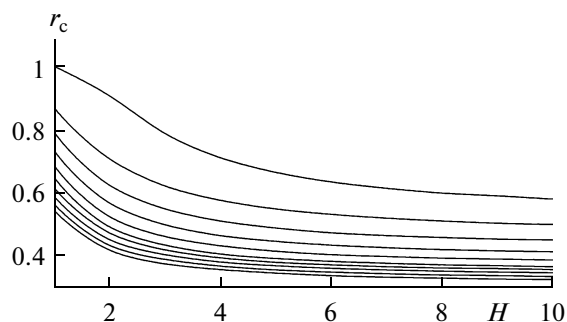


Рис. 9. Критическое значение полуширины отверстия диафрагмы: верхняя кривая соответствует $W = 1$, нижняя – $W = 10$, кривые построены с шагом $\Delta W = 1$.

такого режима $r > r_c$. Зависимость $r_c(H)$ для различных значений W представлена на рис. 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты показывают, что при определенном соотношении гравитационных и вязких сил (параметр W) и геометрических параметров диафрагмы могут реализовываться следующие варианты течений: 1) сплошной режим заполнения с формированием струи толщиной, равной ширине отверстия диафрагмы; 2) струйный режим, характеризующийся заполнением промежуточной области, предшествующей диафрагме после касания последней; 3) случай, аналогичный предыдущему, но с распадом струи до момента заполнения промежуточной области; 4) струйный

режим, характеризующийся потерей устойчивости струи после касания стенок диафрагмы; 5) беспрепятственное прохождение струей стенок диафрагмы без касания. Используя выводы настоящей работы, а также полученные условия разделения режимов заполнения канала и зависимости геометрических характеристик струй от времени, возможно осуществить выбор технологически приемлемого режима течения жидкости в массопроводе как с учетом наличия диафрагмы, так и в ее отсутствие.

Работа выполнена в рамках реализации Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

g – ускорение свободного падения, м/с^2 ;

H' – расстояние от начального положения свободной поверхности до диафрагмы, м ;

$H = H'/R$ – безразмерное расстояние от начального положения свободной поверхности до диафрагмы;

h' – значение положения линии трехфазного контакта относительно начального положения свободной поверхности, м ;

$h = h'/R$ – безразмерное значение положения линии трехфазного контакта относительно начального положения свободной поверхности;

L' – расстояние от входной границы, где задан профиль скорости до начального положения свободной поверхности, м;

$L = L'/R$ – безразмерное расстояние от входной границы, где задан профиль скорости до начального положения свободной поверхности;

l' – длина струи, м;

$l = l'/R$ – безразмерная длина струи;

N – количество граничных элементов;

n_i – компоненты внешней нормали к свободной поверхности;

p' – давление, Па;

$p = p' / (\mu U / R) + W x_2$ – безразмерное модифицированное давление;

R – полуширина канала, м;

r' – полуширина отверстия диафрагмы, м;

$r = r' / R$ – безразмерная полуширина отверстия диафрагмы;

s_{\min} – безразмерная минимальная толщина струи;

s_{\max} – безразмерная толщина каплевидного образования на конце струи;

$T_{ij}(x, \xi)$ – фундаментальное сингулярное решение линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса для безразмерных компонент вектора усилий;

t' – время, с;

$t = \frac{U}{R} t'$ – безразмерное время;

$t'_i = \Pi'_{ij} n_j$ – компоненты усилий, приложенных к свободной поверхности, Па;

$t_i = t'_i / (\mu U / R)$ – безразмерные компоненты усилий, приложенных к свободной поверхности;

U – средняя скорость течения на входе в канал, м/с;

$U_{ij}(x, \xi)$ – фундаментальное сингулярное решение линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса для безразмерных компонент вектора скорости;

u'_i – компоненты вектора скорости, м/с;

$u_i = u'_i / U$ – безразмерные компоненты вектора скорости;

x'_i – декартовы координаты, м;

$x_i = x'_i / R$ – безразмерные декартовы координаты;

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ – граница области решения;

Γ_1 – свободная поверхность;

Γ_2 – твердые стенки;

Γ_3 – входная граница;

δ_{ij} – символ Кронекера;

$\varepsilon'_{ij} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$ – компоненты тензора скоростей деформаций;

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} / (U / R)$ – безразмерные компоненты тензора скоростей деформаций;

μ – коэффициент динамической вязкости, Па с;

ξ – точки приложения сосредоточенных сил;

$\Pi'_{ij} = -p' \delta_{ij} + \mu (\varepsilon'_{ij})$ – компоненты тензора напряжений;

$\Pi_{ij} = \Pi'_{ij} / (\mu U / R)$ – безразмерные компоненты тензора напряжений;

ρ – плотность жидкости, кг/м³;

φ_i – безразмерная плотность фиктивного источника;

$W = \rho g R^2 / \mu U$ – параметр Стокса.

ИНДЕКСЫ

0 – середина граничного элемента;

c – критическое значение полуширины отверстия диафрагмы;

i, j – номера компонент;

p, q – номера граничных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков И.А., Милехин Ю.М., Меркулов В.М. и др. Моделирование формирования изделий из свободнолитевых композиций. М.: Архитектура-С, 2007.
2. Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А. Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. Томск: изд-во ТГУ, 1999.
3. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Матем. моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 62.
4. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Заполнение каналов неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 6. С. 40.
5. Tomé M.F., McKee S., Barrat L. et al. An experimental and numerical investigation of container filling with viscous liquids // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1999. V. 31. P. 1333.
6. Tomé M.F., McKee S. Numerical simulation of viscous flow: buckling of planar jets // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1999. V. 29. P. 705.
7. Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную плоскость // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 1. С. 53.