НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

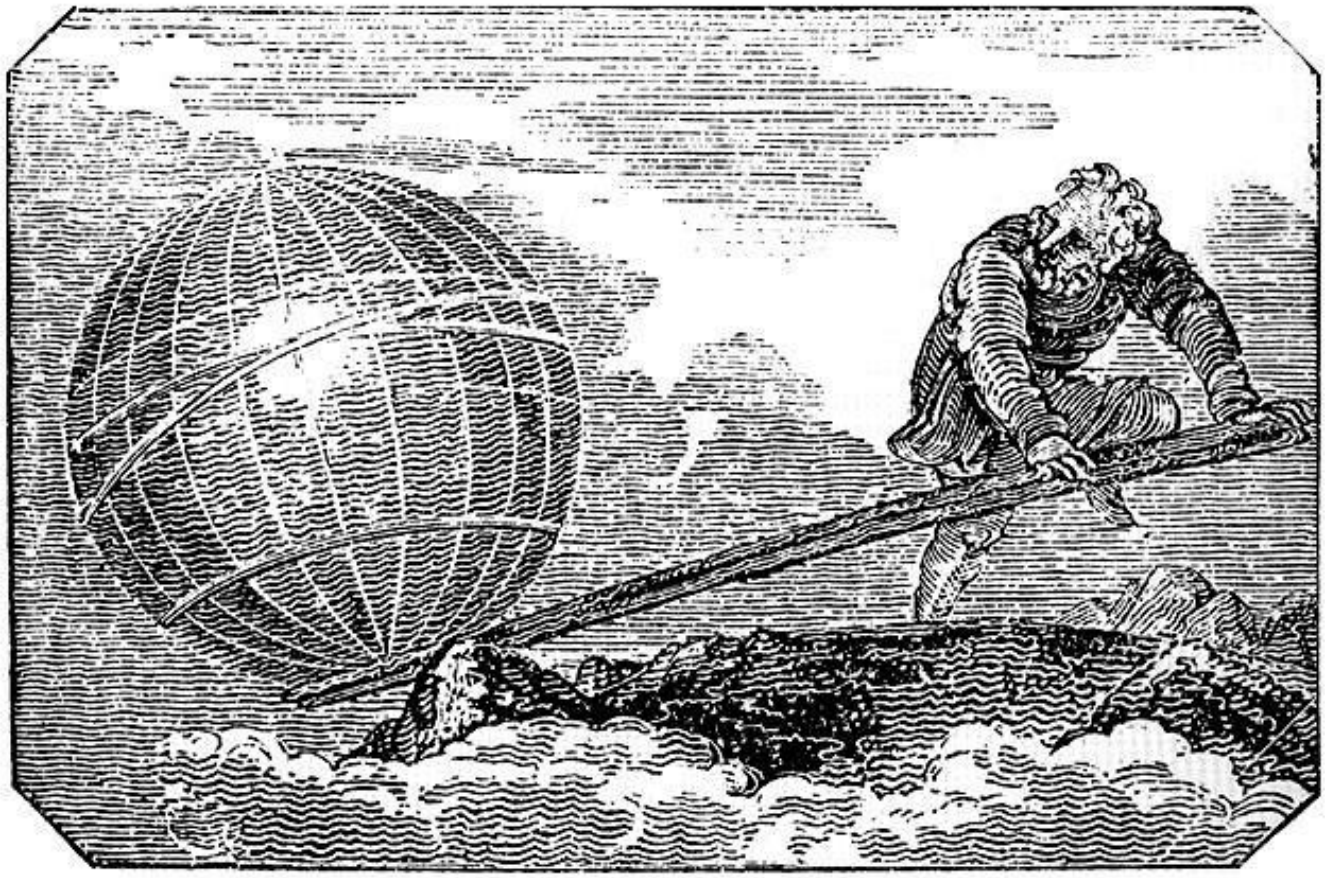
ФАКУЛЬТЕТ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра информационного обеспечения инновационной деятельности

С.Л. Минькov

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие



Томск 2012

Миньков С.Л.
Теоретическая механика: учебное пособие. – Томск: ТГУ, 2012. – 118 с.

Учебное пособие «Теоретическая механика» предназначено для подготовки бакалавров по направлениям 011800.62 – Радиофизика; 221400.62 – Управление качеством; 222000.62 – Инноватика и направлено на овладение общекультурными (ОК) и профессиональными (ПК) компетенциями ФГОС ВПО: ОК-8, ПК-2 (Радиофизика), ОК-7, ПК-12 (Инноватика), ОК-11, ПК-4 (Управление качеством). Отличительная особенность этого учебного пособия – рассмотрение на основе единой методологической базе основ механики систем материальных точек и механики сплошной среды.

При создании пособия использован опыт преподавания дисциплины «Основы теоретической механики и механики сплошной среды» (потоковые лекции и практические занятия) на радиофизическом факультете Томского государственного университета с 1991 г.

© Миньков С.Л., 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

1.1. Основные понятия и постулаты механики

1.2. Механика системы материальных точек

1.2.1. Свободные и несвободные системы
1.2.2. Классификация связей
1.2.3. Активные силы и реакции связей
1.2.4 Главный вектор и главный момент системы сил
1.2.5. Основные теоремы динамики системы материальных точек
1.2.5.1. Первый интеграл уравнений движения
1.2.5.2. Центр масс
1.2.5.3. Теорема о движении центра масс
1.2.5.4. Теорема об изменении импульса
1.2.5.5. Теорема об изменении момента импульса
1.2.5.6. Кинетическая энергия. Теорема Кёнига
1.2.5.7. Теорема об изменении кинетической энергии
1.2.5.8. Теорема об изменении механической энергии
1.2.6. Движение в неинерциальной системе отсчета
1.2.6.1. Некоторые сведения из кинематики точки
1.2.6.2. Скорости и ускорения в неинерциальной системе отсчета
1.2.6.3. Основные теоремы динамики системы в неинерциальной системе отсчета
1.2.7. Принцип Даламбера

1.3. Аналитическая механика систем материальных точек

1.3.1. Вариационные принципы механики
1.3.2. Принцип виртуальных перемещений (принцип Лагранжа)
1.3.3. Принцип Даламбера–Лагранжа
1.3.4. Обобщенные координаты. Уравнение статики в обобщенных координатах
1.3.5. Уравнения Лагранжа II рода
1.3.6. Структура переменных, входящих в уравнения Лагранжа
1.3.6.1. Кинетическая энергия в обобщенных координатах
1.3.6.2. Структура обобщенных сил
1.3.7. Уравнение изменения обобщенного импульса и обобщенной энергии. Законы сохранения
1.3.8. Принцип Гамильтона–Остроградского
1.3.9. Канонические уравнения Гамильтона
1.3.10. Скобки Пуассона и первые интегралы
1.3.11. Действие как функция координат и времени
1.3.12. Вывод канонических уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия
1.3.13. Решения уравнений движения СМТ на основе уравнения Гамильтона–Якоби

1.4. Малые колебания систем материальной точки

1.4.1. Устойчивость положения равновесия. Потенциальная энергия как квадратичная форма обобщённых координат
1.4.2. Линеаризация уравнений движения. Свободные колебания
1.4.3. Вынужденные колебания
1.4.4. Электромеханические аналогии. Уравнения Лагранжа–Максвелла

ЧАСТЬ 2. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

2.1. Основные понятия и постулаты механики сплошной среды

2.1.1. Предмет и задачи механики сплошной среды

2.1.2. Постулаты МСС
2.1.3. Системы отсчета
2.1.4. Векторное поле скорости
2.1.5. Отображение полей
2.1.6. Численное моделирование в механике сплошных сред
2.2. Основные уравнения динамики жидкости
2.2.1. Уравнение неразрывности
2.2.2. Уравнение динамики сплошной среды в напряжениях
2.2.3. Уравнения изменения момента импульса
2.2.4 Уравнение изменения энергии
2.2.5. Дивергентная форма уравнений
2.3. Идеальная жидкость
2.3.1. Система уравнений идеальной жидкости
2.3.2. Замкнутая система уравнений идеального газа
2.3.3. Замкнутая система уравнений несжимаемой жидкости
2.3.4 Потенциальное течение
2.3.5. Интеграл Бернулли
2.3.6 Адиабата Пуассона
2.3.7. Законы гидростатики
2.4. Вязкая жидкость
2.4.1. Тензор вязких напряжений
2.4.2. Уравнения движения вязкой ньютоновской жидкости
2.4.3. Уравнения Навье–Стокса
2.4.4. Сравнение граничных условий для идеальной и вязкой жидкости
2.4.5. Уравнение энергии. Диссипативная функция
2.4.6. Закон подобия стационарных течений несжимаемой вязкой жидкости
2.4.7. Критерии теплового подобия
2.4.8. Течения при Re<<1 и Re>>1
2.4.9. Турбулентность
2.4.9.1. Определение турбулентности
2.4.9.2. Свойства турбулентности
2.4.9.3. Полуэмпирические модели турбулентности
Литература

Был этот мир глубокой тьмой окутан.
Да будет свет! И вот явился Ньютон.
Эпиграмма Александра Поупа
Но сатана недолго ждал реванша.
Пришел Эйнштейн – и стало все, как раньше.
Эпиграмма Джона Сквайра
пер. С. Маршака

Введение

Механику как науку о наиболее общих законах движения материальных тел можно считать древнейшей наукой, которая оформилась в представлениях древних именно как наука, т.е. свод законов, понятий на основе наблюдений за окружающим миром. Так что есть не только первые, вторые и т.д. древнейшие профессии, но и первые, вторые и т.д. древнейшие науки.

По-гречески μηχανή («механэ») означало «орудие, приспособление, сооружение». Вместе с тем данное слово имело и смысл «уловка, ухищрение». Термином «механэ» обозначались, в частности, военные машины и театральные механизмы. Механиками в древности называли мастера чудес, имея в виду изобретателей сложных и остроумных приборов. Искусство построения различных сложных приспособлений получило название μηχανική («механикэ») – «механика». А в «Толковом словаре живого великорусского языка» В.И. Даля есть такое объяснение слову «механика» – наука выгодного приспособления сил. Очень хорошо сказано!

Первым теоретиком механики считают древнегреческого ученого, математика и механика Архимеда (287–212 гг. до н.э.). В основополагающих трудах по статике и гидростатике («О равновесии плоских фигур», «О плавании тел») он дал образцы применения математики в естествознании и технике. Ему приписывается знаменитая фраза «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!». Учебное пособие начинается гравюрой из «Журнала механики» (1842 г.), изображающей Архимеда, переворачивающего Землю с помощью рычага.

Современная **теоретическая механика** – это наука об общих законах движения материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между ними.

Фундамент классической теоретической механики заложил знаменитый английский физик, математик и астроном Исаак Ньютон, поэтому она еще называется **ньютоновой механикой**. В своей знаменитой книге «Математические начала натуральной философии» (1686 г.) он определил базовые понятия и законы механики.

В классической механике в отличие от релятивистской рассматриваются тела, скорости движения которых много меньше, чем скорость света ($V << c$), и размеры которых значительно больше размеров атомов и молекул (в отличие от квантовой механики, где изучается движение микроскопических тел).

После Ньютона классическая механика развивалась в двух направлениях. Одну ветвь можно назвать «векторной» механикой. Она исходит непосредственно из ньютоновых законов движения. Основа – анализ сил и моментов, действующих на каждую частицу. Основное уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F},$$

т.е. действие силы $\vec{F}$ измеряется её импульсом $m\vec{V}$.

Другую ветвь, получившую развитие в трудах Лейбница, Эйлера, Лагранжа, можно назвать **аналитической (или вариационной) механикой.**

В этой механике основными величинами, характеризующими движение, являются кинетическая энергия T (или «живая сила» $m\vec{V}^2$, как назвал её Лейбниц) и силовая функция U («работа силы», как первоначально определил её Лейбниц).

На первый взгляд кажется удивительным, что движение, которое по своей природе направленное, т.е. обладает векторными свойствами, можно определить с помощью двух скаляров (T и U)! И тем не менее, эти два фундаментальных скаляра действительно содержат в себе полную динамику наиболее сложных материальных систем (а не только одной материальной точки, с

изучения движения которой начиналась теоретическая механика). Но при одном условии: эти скаляры кладутся в основу некоторого принципа, а не просто уравнения, как в векторной механике.

Идеи и принципы аналитической механики оказались чрезвычайно плодотворными при изучении свойств микромира, т.е. при построении квантовой механики.

Дисциплина «Теоретическая механика и механика сплошных сред» является составной частью фундаментального блока дисциплин «Теоретическая физика», который изучается студентами физических специальностей университетов. Предлагаемое учебное пособие имеет целью дать будущим инженерам-радиофизикам представление об основных принципах механики и наиболее важных практических приложениях. Кроме собственной познавательной ценности как науки об общих принципах и законах движения, эта дисциплина является базой для других разделов теоретической физики («Квантовая механика», «Электродинамика», «Термодинамика и статистическая физика»). Весь материал разбит на две части: механика систем материальных точек и механика сплошной среды.

Основной объем материала первой части посвящен применению лагранжева и гамильтонова формализма к решению задач механики, в частности к рассмотрению колебаний в электрических цепях. Чтобы подчеркнуть взаимосвязь различных форм описания механики (векторной и вариационной), вначале рассматриваются основные теоремы динамики систем материальных точек в декартовой системе отсчета и их связь со свойствами пространства и времени, а уже затем происходит переход к пространству обобщенных координат и фазовому пространству.

Во второй части на основе эйлерова и лагранжева подходов к описанию движения сплошной среды дается вывод основных уравнений динамики жидкости – как в дивергентной, так и в недивергентной форме и анализируются несколько широко используемых моделей сплошной среды: идеальная жидкость, вязкая ньютоновская жидкость.

ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

1.1. Основные понятия и постулаты механики

Зри в корень!
Козьма Прутков

Теоретическая механика – это наука об общих законах движения материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между ними.

В классической теоретической механике рассматривается движение макроскопических тел, т.е. тел, состоящих из большого количества атомов и молекул, причем допускается, что движения совершаются со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Рассмотрим основные понятия механики, разбив их на три группы.

Первую группу представляют **идеальные модели материальных тел:**

1) **материальная точка** – тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь;

2) **система материальных точек** – совокупность точек, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения или движения всех остальных;

3) **абсолютно твердое тело** – тело, состоящее из системы материальных точек, непрерывно заполняющих некоторую часть пространства так, что расстояние между любыми двумя его точками остается неизменным. Отсюда следует, при изучении его движения пренебрегается деформациями;

4) **сплошная среда** – система материальных точек, непрерывно заполняющих некоторую часть пространства, при движении которых расстояния между материальными точками изменяются.

Ниже основное внимание будет уделено рассмотрению вопросов механики систем материальных точек и механики сплошной среды.

Во вторую группу входят такие фундаментальные понятия, как **пространство, время, система отсчета.**

Пространство и время представляют собой общие формы существования всех материальных объектов. Отдельно, вне материи, пространство и время не существуют.

Пространство – форма бытия материи, характеризующая её протяжённость, структурность, сосуществование и взаимодействие элементов во всех материальных системах.

Время – форма бытия материи, выражающая длительность её существования, последовательность смены состояний в изменении и развитии всех материальных систем. Пространство и время неразрывно связаны между собой, их единство проявляется в движении материи, в частности в механическом движении[1].

Для описания движения материального тела в пространстве и измерения пространственных и временных величин необходимо задать **систему отсчета** – совокупность тела отсчёта, системы координат и системы отсчёта времени, связанных с этим телом, по отношению к которому изучается движение других материальных точек или тел.

Систему координат можно задать тремя единичными некомпланарными векторами $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$, имеющими общее начало. Тогда положение любой точки материальной системы A относительно выбранной системы отсчета можно задать радиусом-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z,$$

где x, y, z – проекции радиуса-вектора на указанные оси (координаты точки).

Если выбрать базис ортогональным, то система координат называется декартовой (рис. 1.1).

[1] Что такое время? Если никто не спрашивает меня, то я знаю. Но если мне придется объяснить, то я не знаю. (Блаженный Августин, христианский теолог III в н.э.)

В классической механике постулируется, что наше пространство трехмерно и евклидово. Евклидовость означает, что расстояние между двумя точками пространства определяется по формуле

$$|\vec{r}_{12}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

и эта величина – одна и та же в данный момент времени относительно разных систем отсчета:

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}_{12}.$$

В классической механике постулируется, что время одномерно и абсолютно: величина данного временного интервала относительно разных систем отсчета одинакова:

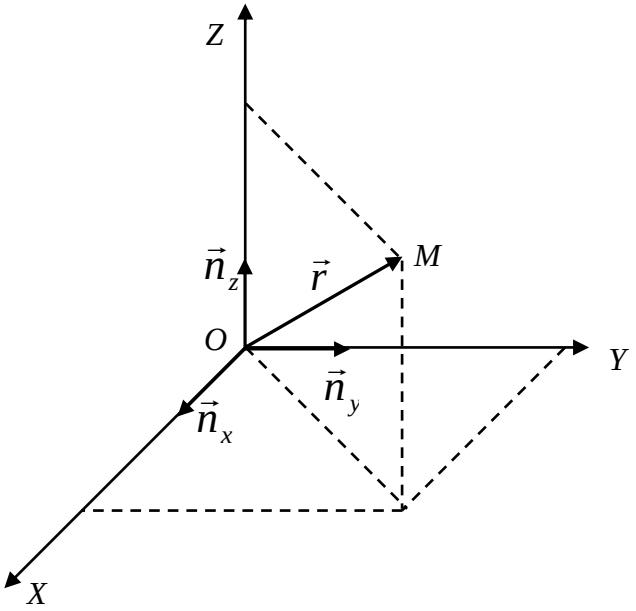


Рис. 1.1. Декартова система координат

$$t_{12} = t'_{12},$$

где $t_{12} = t_2 - t_1$ – длительность какого-либо процесса относительно одной системы отсчета, t'_{12} – относительно другой.

Предполагается также, что процесс измерения не влияет ни на положение точки, ни на длительность процесса[2].

Кроме того, постулируется непрерывность как координат, так и времени.

Основная задача механики: найти закон движения материальной точки, т.е. определить ее положение в любой момент времени относительно заданной системы отсчета: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Связанные задачи: определение скорости точки

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

и ее ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}.$$

Это векторный способ описания движения.

Используя те или иные системы координат, движение точки можно определить с помощью координатного способа. Наиболее широко применяются прямоугольная (декартова) система координат и криволинейные (цилиндрическая и сферическая (полярная)) системы координат (см. прил. 1).

В декартовой системе координат *x(t), y(t), z(t)*

$$V_x = \frac{dx}{dt},\ V_y = \frac{dy}{dt},\ V_z = \frac{dz}{dt},$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Если траектория точки известна заранее, то удобнее использовать естественный способ задания движения, при котором в качестве аргумента радиуса-вектора берется длина дуги *S* траектории (рис. 1.2)

$$\vec{r} = \vec{r}(S);\ S = S(t).$$

[2] Один из постулатов квантовой теории – результат наблюдений зависит от процедуры наблюдения, что сам процесс меняет результат. Например, чтобы наблюдать эту ручку, я должен ее осветить, но свет, как известно, давит на то, что освещает. Давление света приводит к тому, что с ручкой происходит какие-то изменения. Но это изменение столь незначительное по сравнению с размерами ручки, что не улавливается никакими приборами, и им можно пренебречь. А вот если наблюдать элементарную частицу, то ее состояние, вследствие процесса наблюдения, меняется на заметную величину – заметную по сравнению с ее размерами. Ведь наблюдая частицу, мы вынуждены ее облучить, и от этого облучения с ней что-то происходит.

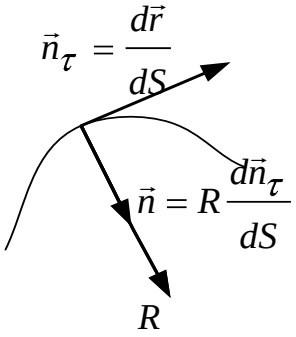


Рис. 1.2. Естественные координаты

Тогда

1) $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{n}_\tau$, где $\vec{n}_\tau = \frac{d\vec{r}}{dS}$ – орт, касательный к траектории, поэтому $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, $V_n = 0$;

2) $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{n}_\tau + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{n}_\tau}{dt}$, где $\vec{n}$ – орт главной нормали, а $\frac{d\vec{n}_\tau}{dt} = \frac{d\vec{n}_\tau}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{\vec{n}}{R}\frac{dS}{dt}$, поэтому

$$\vec{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{n}_\tau + \frac{1}{R}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\vec{n},$$

$$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2},\ a_n = \frac{1}{R}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \text{ или } a_\tau = \frac{dV}{dt},\ a_n = \frac{V^2}{R}.$$

В классической механике постулируется существование **инерциальных систем отсчета**. Это системы отсчета, в которых все тела, на которые не действуют внешние силы или их действие компенсируется, движутся прямолинейно и равномерно или покоятся.

Свойства инерциальных систем отсчета:

1) все системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, инерциальны; это означает, что существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета;

2) все физические процессы в инерциальных системах протекают одинаково, независимо от того, неподвижна ли система или движется равномерно и прямолинейно.

Последнее утверждение называют **принципом относительности Галилея** в честь итальянского физика, механика, астронома, философа и математика Галилео Галилея, сформулировавшего его в книге «Диалоги о двух системах мира» (1632 г.) для механических процессов.

Координаты $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ одной и той же точки в двух различных инерциальных системах отсчета, из которых вторая движется относительно первой со скоростью $\vec{U}$, связаны друг с другом соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{U}t.$$

С учетом абсолютности времени: $t = t'$.

Эти два соотношения называются преобразованиями Галилея.

Из этих преобразований следуют соотношения между скоростями движения точки и её ускорениями в обеих системах отсчета:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{U};\ \vec{a} = \vec{a}'.$$

В инерциальных системах отсчета пространство и время имеют следующие свойства:

- пространство однородно, т.е. механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого;
- пространство изотропно, т.е. механические свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте системы как целого;
- время однородно, т.е. механические свойства замкнутой системы не меняются при любом переносе системы во времени;
- время изотропно, т.е. его свойства одинаковы в обоих направлениях. Это означает, что если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т.е. такое, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, проходящие по законам классической механики, обратимы.

Теорема Нётер связывает эти свойства с законами сохранения (п. 1.2.5).

Третью группу составляют **законы Ньютона.**

Первый закон Ньютона (аксиома инерции): *существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальная точка при отсутствии внешних воздействий (или при их взаимной компенсации) сохраняет величину и направление своей скорости неограниченно долго.*

В такой формулировке первый закон Ньютона постулирует существование **инерции**, т.е. явления сохранения скорости тела, когда внешние воздействия отсутствуют или взаимно скомпенсированы, и существование **инерциальных систем**, о которых было сказано выше.

Если нет внешних воздействий на материальную точку, то она называется изолированной.

Система из изолированных материальных точек называется замкнутой.

Если же точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета, то говорят, что на нее действует сила. **Сила** есть причина возникновения ускорения точки; она является количественной мерой механического действия на точку, в результате которого возникает ускорение этой точки. Сила как векторная величина характеризуется модулем, направлением и точкой приложения силы.

Наблюдения и опыт показывают, что материальные тела обладают «врожденным» свойством, из-за которого тело «с трудом» выводится из состояния покоя или изменяет свое движение. «Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называется **инертностью.**

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется ее **массой.**

Масса – скалярная положительная величина, обладающая свойством аддитивности. Масса материальной точки считается постоянной величиной, не зависящей от обстоятельств движения.

Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики): в *инерциальной системе отсчета ускорение, которое получает материальная точка, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В общем случае сила $\vec{F}$ является функцией времени, координат и скорости движения точки

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{V}, t).$$

Если известна масса материальной точки и силы, действующие на нее, то задание всех координат и скоростей точки в какой-нибудь момент времени (начальные условия) полностью определяет ее поведение в дальнейшем:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В этом проявляется принцип **детерминированности** (причинной обусловленности) движения в механике.

Из второго закона Ньютона вытекает и **принцип суперпозиции сил** (аксиома независимости действия сил): ускорение материальной точки, возникающее при одновременном действии на неё нескольких сил, равно векторной сумме ускорений, сообщаемых точке отдельными силами:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_N = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N) = \frac{1}{m}\vec{F},$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая сил.

На примере уравнения движения можно проиллюстрировать принцип относительности Галилея.

Так как в инерциальных системах отсчета $\vec{a} = \vec{a}'$, то в уравнениях движения

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{ и } ma' = F',$$

записанных в этих же системах отсчета, силы равны:

$$\vec{F} = \vec{F}',$$

т.е. все величины, входящие в уравнение движения, не изменяются при переходе из одной инерциальной системы в другую.

Поэтому уравнения движения инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

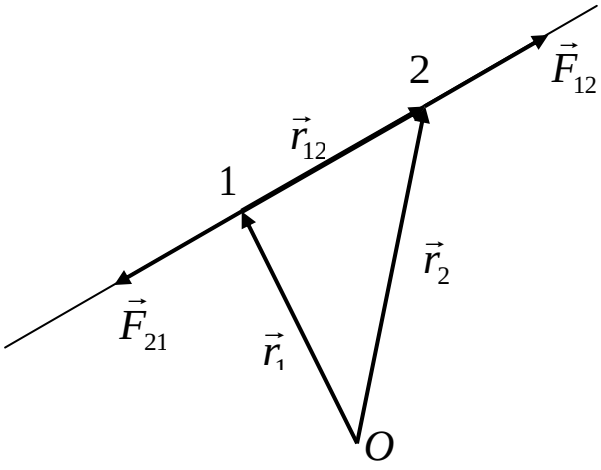


Рис. 1.3. Иллюстрация к 3-му закону Ньютона

Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек): с*илы, с которыми две любые материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки* (рис.1.3):

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}\,.$$

Таким образом, фундаментом классической механики являются: принцип относительности Галилея, принцип детерминированности Ньютона, законы (аксиомы) Ньютона, понятия о материальной точке, о пространстве и времени, об инерциальной системе отсчета, о силе и массе.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на кинематику и динамику.

В **кинематике** изучаются общие геометрические свойства движения тел независимо от действующих сил. Кинематика – геометрия движения, она дает связь между пространственно-временными характеристиками механического движения.

В **динамике** изучаются законы движения материальных тел под действием сил. Основная (прямая) задача динамики – по заданному механическому движению определить силы, под действием которых совершается это движение. Обратная задача динамики – по заданным силам, приложенным к телу, и начальным условиям определить движение, которое они вызывают.

Частным случаем динамики является **статика**, где изучаются условия равновесия тел под действием сил.

1.2. Механика системы материальных точек

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

А.С. Пушкин

1.2.1. Свободные и несвободные системы

Рассмотрим движение системы материальных точек (СМТ) M_k (k=1, 2 ...N) относительно некоторой неподвижной прямоугольной декартовой системы координат. Состояние системы задается радиусом-вектором $\vec{r}_k$ и скоростями $\vec{V}_k$ ее точек.

Часто при движении системы положение и скорость ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\vec{r}_k$ и $\vec{V}_k$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются **связями.**

Если на систему не наложены связи, то она называется **свободной.**

При наличии одной или нескольких связей система называется **несвободной.**

С физической точки зрения связи – это тела, ограничивающие свободу движения системы материальных точек. С математической точки зрения связи – это некоторые условия, налагаемые на движение материальных точек системы. Эти условия задаются уравнениями или неравенствами.

Примеры.

1. Материальная точка может двигаться только в плоскости Oxy декартовой системы координат. Уравнение связи: z=0 (рис. 1.4 *а*).

2. Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Уравнение связи: $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$ (рис. 1.4 *б*).

3. Две материальные точки M_1 и M_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Уравнение связи: $l^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \geq 0$ (рис. 1.4 *в*).

4. Материальная точка может двигаться только внутри единичного куба первого октанта или на его границе. Уравнения связи: $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$ (рис. 1.4 *г*).

1.2.2. Классификация связей

В общем случае связь задается соотношением

$$f(t, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{V}_1, \vec{V}_2, ..., \vec{V}_N, t) \geq 0.$$

Будем использовать сокращенное выражение

$$f(\vec{r}_k, \vec{V}_k, t) \geq 0, \quad k=1,\ldots,N.$$

Связи можно классифицировать по разным признакам.

Если в формуле для связи реализуется только знак равенства, то связь называется **удерживающей** (двухсторонней, неосвобождающей).

В примерах 1, 2 связи удерживающие.

В противном случае связь называется **неудерживающей** (односторонней, освобождающей).

В примерах 3, 4 связи неудерживающие.

Сразу оговоримся, что системы с неудерживающими связями мы рассматривать не будем.

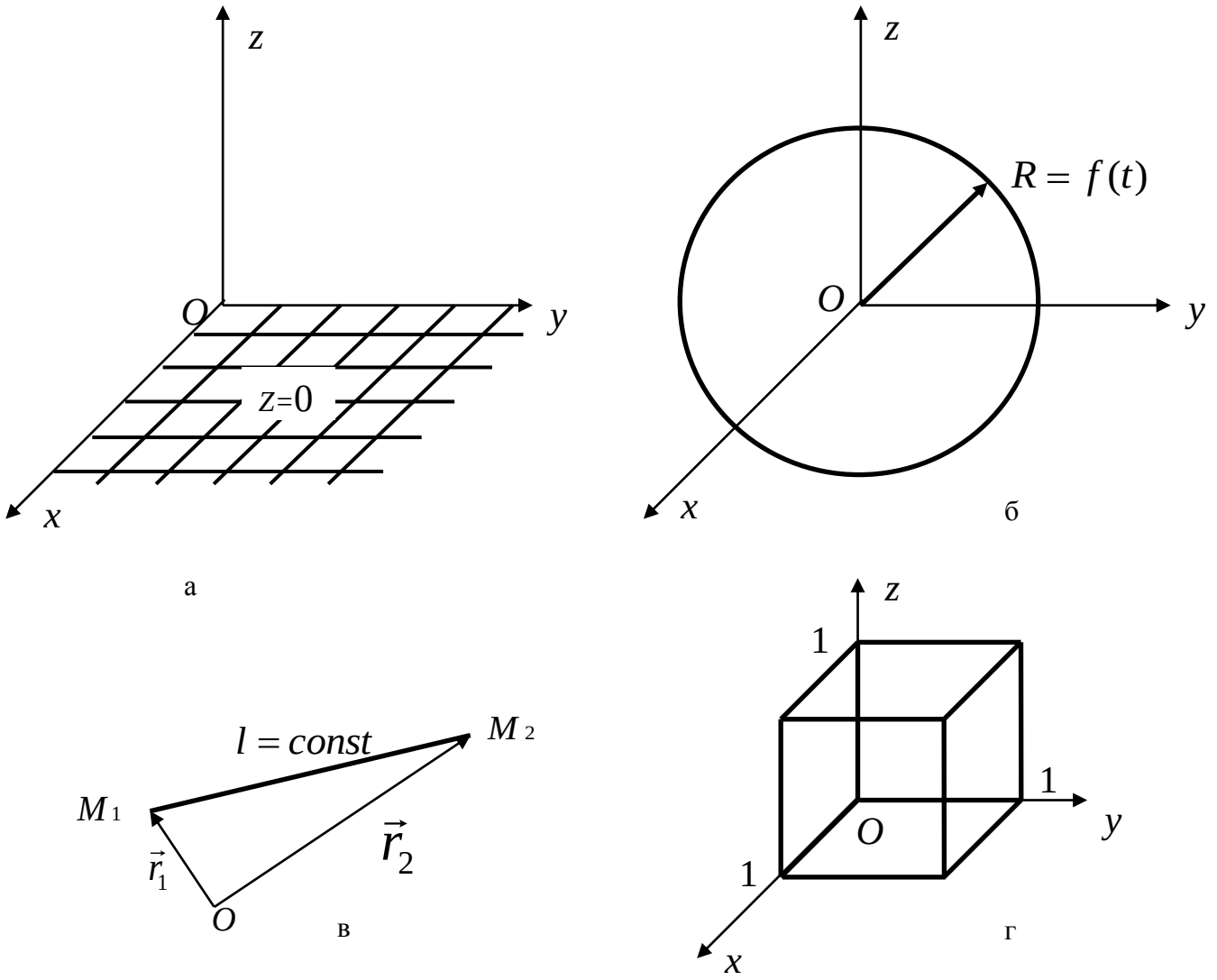


Рис. 1.4. Примеры связей

Если уравнение связи можно записать в виде $f(\vec{r}_k, t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то связь называется **геометрической** (конечной, голономной). Характерным для голономных связей является то, что они могут быть проинтегрированы, т.е. представлены в виде зависимости между координатами точек системы и временем.

Если же уравнение связи нельзя свести к уравнению, содержащему только координаты точки и время, то связь называют **кинематической** (дифференциальной, неголономной).

Ниже в основном будут рассматриваться голономные связи:

$$f(\vec{r}_k, t) = 0 \qquad (2.1)$$

(для простоты будем рассматривать одну связь).

Геометрическая связь называется **стационарной** (склерономной), если время не входит в ее уравнение: $f(\vec{r}_k) = 0$ (пример 1).

В противном случае связь называется **нестационарной** (реономной) (пример 2).

Так как точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно, то их совместимые со связями (допускаемыми связями) координаты, скорости, ускорения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей.

Если уравнение связи имеет вид $f(\vec{r}_k, t) = 0$, то продифференцировав по времени, получаем ограничение на скорости:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_k} \vec{V}_k + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \qquad (2.2)$$

Дифференцируя дважды, получаем условие, накладываемое связью на ускорения:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_k}\vec{V}_k+\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_k}\vec{V}_k\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{r}_k\partial \vec{r}_i}\vec{V}_i\vec{V}_k+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \vec{r}_k}\vec{V}_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_k}\vec{a}_k+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \vec{r}_k}\vec{V}_k+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_k}\vec{a}_k+\sum_{k,i=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{r}_k\partial \vec{r}_i}\vec{V}_i\vec{V}_k+2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \vec{r}_k}\vec{V}_k+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0.$$

Радиусы-векторы $\vec{r}_k$, скорости $\vec{V}_k$, ускорения $\vec{a}_k$, удовлетворяющие этим уравнениям в некоторый момент времени, называются возможными.

1.2.3. Активные силы и реакции связей

Если система свободна, то ускорения $\ddot{\vec{r}}_k$ образующих ее материальных точек определяются из второго закона Ньютона

$$\ddot{\vec{r}}_k=\frac{\vec{F}_k}{m_k}\qquad (k=1,\ldots,N).$$

Если система несвободна, то ускорения ее точек $\vec{a}_k$, вообще говоря, будут отличаться от ускорений свободной системы $\ddot{\vec{r}}_k$. Наличие связей приводит к возникновению у точек системы дополнительного ускорения $\vec{a}_k-\ddot{\vec{r}}_k$. Следовательно, имеются силы, вызывающие это ускорение.

Эти силы называются **реакциями связи**. Обозначим через $\vec{R}_k$ равнодействующую реакций связей, приложенных к точке M_k.

Остальные силы называют **активными** (или заданными) силами $\vec{F}_k$.

Тогда уравнение движения несвободной системы можно записать в виде

$$m_k\left(\vec{a}_k-\ddot{\vec{r}}_k\right)=\vec{R}_k$$

или

$$m_k\vec{a}_k=\vec{F}_k+\vec{R}_k\qquad (k=1,\ldots,N). \tag{2.3}$$

Выводы.

1. Действие связей можно учитывать введением реакций связей. При этом уравнения движения должны дополняться уравнениями связей.

2. С точки зрения динамики движение несвободной системы можно рассматривать как движение свободной, находящейся под действием активных сил и реакций связей.

1.2.4. Главный вектор и главный момент системы сил

Совокупность всех сил, действующих на точки M_k материальной системы, можно разделить на внутренние и внешние силы.

Внутренние силы $\vec{F}_k^{\,i}$ – это силы взаимодействия между точками системы.

Внешние силы $\vec{F}_k^{\,e}$ – это силы, действующие на точки системы со стороны других точек, не входящих в систему.

Пусть $\vec{F}_k$ – равнодействующая всех сил, приложенных к точке M_k.

$$\vec{F}_k=\vec{F}_k^{\,i}+\vec{F}_k^{\,e}.$$

Сумма $\vec{F}=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k$ называется главным вектором системы сил.

$\vec{F}^{\,i}=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^{\,i}$ – главный вектор внутренних сил,

где $\vec{F}_k^{\,i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\vec{F}_{jk}^{\,i}$ – сумма внутренних сил, действующих на k-ю точку системы,

где, в свою очередь, $\vec{F}_{jk}^{\,i}$ – сила, действующая на *k*–ю точку со стороны *j*-й точки системы.

Свойство главного вектора внутренних сил:

$$\vec{F}^{\,i} = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\vec{F}_{jk}^{\,i}\right) = \sum_{\substack{k,j=1\\ k<j}}^{N}\left(\vec{F}_{jk}^{\,i} + \vec{F}_{kj}^{\,i}\right) = 0,$$

т.к. в силу третьего закона Ньютона $\vec{F}_{jk}^{\,i} = -\vec{F}_{kj}^{\,i}$.

$\vec{F}^{\,e} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{k}^{\,e}$ – главный вектор внешних сил,

где $\vec{F}_{k}^{\,e}$ – сумма внешних сил, действующих на *k*-ю точку системы со стороны других тел, не входящих в систему. Если $\vec{F}_{k}^{\,e} = 0$, то система называется замкнутой или изолированной.

Таким образом, **главный вектор системы сил, действующих на СМТ, равен главному вектору внешних сил:**

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{k}^{\,e}.$$

Отсюда не следует, однако, что все внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы. Они приложены к разным материальным точкам и могут вызывать взаимное перемещение этих точек. Это утверждение справедливо лишь для абсолютно твердого тела.

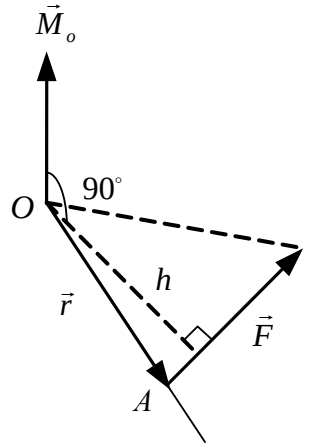


Рис. 1.5. Момент силы

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки *O* называется вектор $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F}$, равный вектору произведения радиуса-вектора $\vec{r}$ точки *A* приложения силы относительно точки *O* на вектор силы $\vec{F}$ (рис. 1.5). Из свойств векторного произведения следует $\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = rF\sin\alpha = hF$, где $h = r\sin\alpha$ – плечо силы.

Используется также символическая запись векторного произведения

$$\vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

позволяющая быстро получить проекции на координатные оси:

$$M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y;$$
$$M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$
$$M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси *z* называется проекция на эту ось момента силы $\vec{F}$ относительно любой точки, взятой на этой оси.

Введем понятие главного момента системы сил.

Пусть $\vec{F}_k$ – равнодействующая всех сил, приложенных к точке M_k механической системы, а $\vec{r}_k$ – радиусы-векторы точек M_k относительно точки *O*. Тогда главным моментом системы сил относительно точки *O* называется сумма

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_K) = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\left(\vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^{\,i}.$$

Легко показать, что главный момент внутренних сил равен нулю (также из третьего закона Ньютона)

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^{\,i}=\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{r}_k\times\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}\vec{F}_{ik}\right)=\sum_{\substack{k,i=1\\ k>i}}^{N}\left(\vec{r}_k\times\vec{F}_{ik}+\vec{r}_i\times\vec{F}_{ki}\right)=\sum_{\substack{k,i=1\\ k>i}}^{N}\left(\vec{r}_k-\vec{r}_i\right)\times\vec{F}_{ik}=0,$$

т.к. $\vec{F}_{ik}\parallel\vec{r}_{ik}=\vec{r}_k-\vec{r}_i$.

Таким образом, **главный момент системы сил, действующих на СМТ, равен главному моменту внешних сил:**

$$\vec{M}_O=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^{\,e}.$$

Примечание.

В частном случае, если рассматривается твердое тело, то с помощью введенных понятий главного вектора и главного момента можно сформулировать **условия равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу**, позволяющие решать многие задачи статики: *для равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы, относительно произвольного центра приведения, были равны нулю, т.е.*

$$\vec{F}_O=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k=0;\quad\vec{M}_O=\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_0\left(\vec{F}_i\right)=0.$$

Эти же равенства дают необходимые, но недостаточные условия равновесия любой изменяемой механической системы (например, СМТ). При этом используется **принцип отвердевания**: если изменяемая система тел находится в равновесии, то это состояние не может быть нарушено присоединением дополнительных связей между точками и телами системы. Следуя этому принципу при составлении необходимых условий равновесия, любую изменяемую систему можно рассмотреть как абсолютно твердое тело.

Конец примечания.

1.2.5. Основные теоремы динамики системы материальных точек

1.2.5.1. Первый интеграл уравнений движения

Рассмотрим движение системы материальных точек M_k *(k*=1,...,*N)* в инерциальной системе координат. Если все силы, приложенные к системе, разбить на внешние и внутренние, то на основе законов Ньютона получим дифференциальные уравнения движения СМТ в виде

$$m_k\vec{a}_k=\vec{F}_k^{\,e}+\vec{F}_k^{\,i}\qquad(k=1,...,N),\tag{2.4}$$

где $\vec{a}_k$ – ускорение точки M_k в инерциальной системе отсчета, а $\vec{F}_k^{\,e}$ и $\vec{F}_k^{\,i}$ – равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке M_k.

Для исследования движения надо при заданных начальных условиях проинтегрировать систему N уравнений и найти зависимость $\vec{r}_k\left(\right)$. Если число уравнений велико, то это в большинстве случаев затруднительно.

Однако при практическом исследовании движения очень часто нет необходимости изучать всю систему уравнений, а достаточно знать изменение со временем некоторых величин, общих для всей системы и являющихся функциями координат и скоростей точек системы (и быть может, времени). Если такая функция при движении системы остается постоянной, то она называется **первым интегралом уравнений движения**.

Использование первых интегралов позволяет упростить задачу исследования движения системы.

Первый интеграл движения определяет соотношение вида

$$f\left(\vec{r}_k,\vec{V}_k\right)=C_0\qquad(k=1,...,N),$$

где C_0 – константа, определяемая начальными условиями: $C_0=f\left(,\vec{r}_{10},\vec{r}_{20},...,\vec{r}_{N0},\vec{V}_{10},\vec{V}_{20},...,\vec{V}_{N0}\right)$.

Если известны 6*N* независимых первых интегралов движения, то уравнение можно считать проинтегрированным. Ну, а если известно только *s* первых интегралов, то тем самым мы понижаем порядок системы уравнений движения на *s*.

Самый распространенный прием получения первых интегралов – из основных теорем динамики, являющихся следствием законов Ньютона.

1.2.5.2. Центр масс

Важную роль в динамике систем играет замечательная точка – центр масс (или центр инерции).

Рассмотрим систему материальных точек M_k *(k*=1,...,*N)*. Пусть m_k – масса, $\vec{r}_k$ – радиус-вектор точки M_k относительно начала некоторой системы координат *Oxyz*.

Центром масс системы называется геометрическая точка *C* пространства, определяемая радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{m},$$

где $m = \sum_{k=1}^{N} m_k$ – масса системы.

Тогда скорость центра масс $\vec{V}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_k}{m}$, ускорение центра масс $\vec{a}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k}{m}$.

Положение центра масс не полностью характеризует распределение масс системы, поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс – момент инерции.

Моментом инерции системы *N* материальных точек относительно оси *Oz* называется сумма произведений масс точек системы на квадраты расстояний *h* от точек до оси:

$$I_z = \sum_{k-1}^{N} m_k h_k^2 = \sum_{k-1}^{N} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right).$$

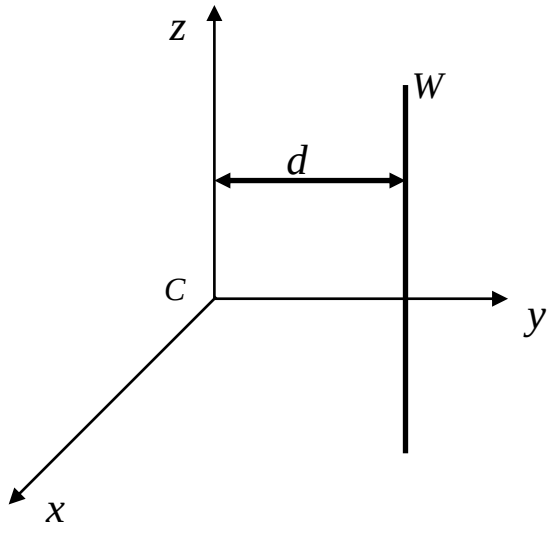


Рис.1.6. К теореме Гюйгенса-Штейнера

Теорема Гюйгенса–Штейнера: *если известен момент инерции I_C относительно оси, проходящей через центр масс системы, то момент инерции I_W относительно любой параллельной оси W, находящейся на расстоянии d, равен*

$$I_W = I_C + md^2.$$

Доказательство.

Поместим начало координат в центр масс системы *C*, направим ось *Oz* по оси, относительно которой известен момент инерции I_C, а ось *Cy* направим так чтобы она пересекала ось *W*, параллельную оси *Cz* (рис. 1.6).

Тогда

$$I_W = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(x_k^2 + \left(y_k - d \right)^2 \right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right)}_{I_C} - 2d \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k y_k}_{my_c=0} + d^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k}_{m} = I_C + md^2.$$

Осевой момент инерции играет во вращательном движении ту же роль, какую масса – при поступательном, иными словами, осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

1.2.5.3. Теорема о движении центра масс

Складывая левые и правые части уравнений (2.4), получим

$$\sum_{k=1}^{N} m_k a_k = \sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i)$$

или

$$ma_c = \vec{F}^e. \tag{2.5}$$

Теорема.

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно главному вектору всех внешних сил системы.

Иными словами, центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равнялась бы массе системы, под действием сил равным главному вектору сил системы.

1.2.5.4. Теорема об изменении импульса

Импульс, или количество движения системы – это векторная величина $\vec{Q}$, равная сумме произведений масс точек системы на их скорости. Используя понятие центра масс, импульс можно записать в виде

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_k = m\vec{V}_C = m\dot{\vec{r}}_C,$$

т.е. это масса системы, умноженная на скорость ее центра масс.

Импульс характеризует поступательное движение системы вместе с центром масс. Если центр масс не движется, то импульс системы равно нулю. Поэтому по величине $\vec{Q}$ нельзя судить полностью о характере движения системы.

Записав уравнение (2.5) в виде $m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}^e$, получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e. \tag{2.6}$$

Теорема.

Производная по времени от импульса системы равна главному вектору всех внешних сил системы.

Видно, что (2.5) и (2.6) просто разные математические формулировки одного и того же процесса. Когда изучается движение твердого тела, обычно пользуются видом (2.5); когда изучается движение сплошной среды, где понятие центра масс теряет смысл, пользуются видом (2.6).

Следствие этой теоремы – **закон сохранения импульса**: при движении замкнутой ($\vec{F}^e = 0$) системы ее импульс сохраняет постоянное значение. Другая формулировка (вытекающая из (2.5)) – скорость V_C центра масс замкнутой системы постоянна.

Естественно, эти утверждения справедливы и не для замкнутой системы, если только $\vec{F}^e = 0$ во время движения.

Таким образом, закон сохранения импульса дает первый интеграл:

$$\vec{Q} = const, \tag{2.7}$$

или, в проекциях на координатные оси

$$Q_x = C_1, Q_y = C_2, Q_z = C_3.$$

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь одну ось равна нулю, то получаем один первый интеграл, например $Q_x = const$ и т.п.

Вывод: внутренние силы изменить импульс системы не могут.

Примеры.

1. Барон Мюнхгаузен. Вытащить себя за волосы из болота, как это сделал знаменитый барон, увы, невозможно: мышечные силы – это силы внутренние и не могут изменить импульс системы «барон-болото», первоначально равный нулю. Но, заметим, если действие внутренних сил вызывает изменение внешних сил, то импульс изменяется (парашютист дергает кольцо, парашют раскрывается, скорость падает).

2. Горизонтальная плоскость. При отсутствии трения человек не мог бы сам (за счет внутренних сил) двигаться по горизонтальной плоскости, так как равна нулю сумма проекций на горизонтальную ось всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости). Если при $t = 0$ $V_{c_x} = 0$, то $x_c = const$. При наличии же трения скольжению ноги будет препятствовать сила трения, направленная вперед. Эта сила и будет той внешней силой, которая позволяет человеку перемещаться в сторону ее действия.

3. Ракета. Силы давления продуктов сгорания на стены камеры – внутренние силы, и они не могут изменить импульс системы «ракета–продукты сгорания». Импульс ракеты может измениться только внешними силами (реакция вытекающей струи газов).

4. Выстрел. Если рассматривать орудие и снаряд как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить импульс системы. Но так как пороховые газы, действуя на снаряд, сообщают ему некоторый импульс, направленный вперед, то они одновременно должны сообщить орудию такой же импульс в обратном направлении. Это вызовет движение орудия назад – так называемую отдачу.

5. Самолет. Пропеллер (гребной винт) сообщает движение самолету (катеру) за счет отбрасывания частиц среды. Импульс системы «самолет–отбрасываемая масса» остается постоянным. Поэтому работа пропеллера в безвоздушном пространстве невозможна.

Примечание.

Согласно теореме Э. Нётер (1918 г.), каждой непрерывной симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения. В частности, закон сохранения импульса эквивалентен однородности пространства, т.е. независимости всех законов, описывающих систему, от положения системы в пространстве, или, иными словами, инвариантности физических законов относительно пространственных сдвигов.

Конец примечания.

1.2.5.5. Теорема об изменении момента импульса

Моментом импульса (моментом количества движения, кинетическим моментом) материальной точки M_k относительно некоторой точки O пространства (которое может и не совпадать с какой-либо материальной точкой системы) называется вектор (рис. 1.7)

$$\vec{K}_{kO} = \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k .$$

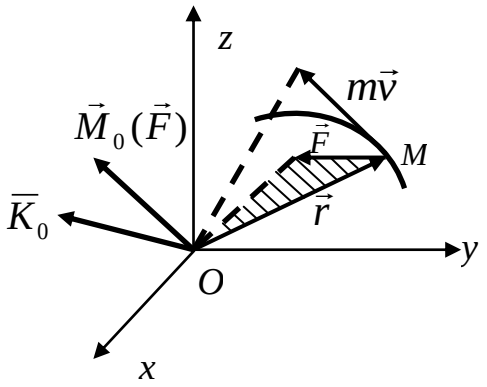


Рис. 1.7. К понятию момента импульса

Главным моментом импульса системы относительно центра O называется величина

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k .$$

Если импульс системы является характеристикой ее поступательного движения, то момент импульса является характеристикой вращательного движения.

Проиллюстрируем это на примере твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz. Для любой точки тела $V_k = \omega h_k$, где h_k – расстояние от оси вращения, ω – угловая скорость вращения.

Тогда для этой точки

$$K_{kO} = h_k m_k V_k = m_k h_k^2 \omega \text{ и } K_z = \omega \sum m_k h_k^2 = I_z \omega ,$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси *Oz*.

Сравним: импульс равен произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на линейную скорость: $Q = mV$, момент импульса равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость: $K = I\omega$.

Теорема.

Производная по времени от момента импульса системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{2.8}$$

Покажем это.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times m_k\vec{V}_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{d\vec{r}_k}{dt}\times m_k\vec{V}_k + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \underbrace{\vec{V}_k \times \vec{V}_k}_{\text{равно нулю}} + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times \left(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e = \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right).$$

Следствие этой теоремы – **закон сохранения момента импульса**: при движении замкнутой системы ее момент импульса относительно любого неподвижного центра постоянен:

$$\vec{K}_O = const \text{ при } \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) = 0, \tag{2.9}$$

или в проекциях на координатные оси

$$K_{Ox} = C_1,\ K_{Oy} = C_2\ K_{Oz} = C_3 .$$

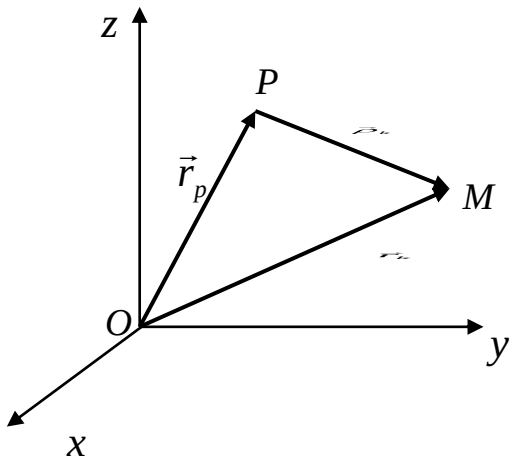


Рис. 1.8. Момент импульса относительно подвижного центра

Естественно, это утверждение справедливо не только для замкнутой системы, но и тогда, когда система не замкнута, но для некоторого неподвижного центра *O* во все время движения момент внешних сил $\vec{M}_k^e = 0$ (например, когда внешние силы центральные, т.е. $\vec{r}_k \| \vec{F}_k^e$).

Предположим теперь, что точка (назовем ее *P*), относительно которой рассматривается момент импульса, движется (рис. 1.8).

Тогда момент импульса системы запишется в виде

$$\vec{K}_P = \sum_{k=1}^{N}\vec{\rho}_k \times m_k\vec{V}_k$$

и, учитывая, что $\frac{d\vec{\rho}_k}{dt} = \frac{d\vec{r}_k}{dt} - \frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{V}_k - \vec{V}_p$,

получаем

$$\frac{d\vec{K}_p}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\left(\vec{V}_k - \vec{V}_p\right)\times m_k\vec{V}_k + \vec{M}_P\left(\vec{F}_k^e\right) = \sum_{k=1}^{N} m_k \underbrace{\vec{V}_k \times \vec{V}_k}_{\text{равно нулю}} + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{V}_k\right)\times\vec{V}_p + \vec{M}_p^e = m\vec{V}_c \times \vec{V}_p + \vec{M}_p^e .$$

Производная по времени от момента импульса системы относительно подвижного центра равна сумме главного момента внешних сил системы относительно этого центра и векторного произведения импульса системы на скорость центра:

$$\frac{d\vec{K}_p}{dt} = m\vec{V}_c \times \vec{V}_p + \vec{M}_p^e . \tag{2.10}$$

В этом случае для существования первого интеграла необходимо сделать дополнительные предположения.

Первый интеграл для замкнутой системы относительно подвижного центра

$$\vec{K}_P = const$$

существует, когда радиусы-векторы $\vec{r}_p$ и $\vec{r}_c$ центра P и центра масс системы C относительно начала координат O связаны отношением

$$\vec{r}_p = \alpha\vec{r}_c + \vec{a},$$

где скалярная величина α и вектор $\vec{a}$ являются постоянными величинами.

Действительно, тогда $\vec{V}_p = \alpha\vec{V}_c$, и первое слагаемое в правой части формулы (2.10) тождественно равно нулю.

При $\alpha = 0$ – случай неподвижного центра $\vec{V}_p = 0$

При $\alpha = 1$ и $\vec{a} = 0$ $\vec{r}_p = \vec{r}_c$, и формула (2.10) принимает вид

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \vec{M}_c^e. \qquad (2.11)$$

Таким образом, математические формулировки теоремы об изменении момента импульса системы для неподвижного центра O и для центра масс C имеют одинаковый вид.

Примеры.

1. Система, вращающаяся вокруг неподвижной оси (или проходящей через центр масс).

Тогда $K_z = I_z\omega$, и если $\sum \vec{M}_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $I_z\omega = const$.

Выводы:

а) если система – абсолютно твердое тело, то $I_z = const$ и, следовательно, $\omega = const$, т.е. твердое тело, закрепленное на оси, будет вращаться с постоянной угловой скоростью;

б) если система изменяема, то действие внутренних сил может изменить угловую скорость вращения системы: при удалении точек от оси увеличивается I_z и, следовательно, уменьшается ω и наоборот.

2. Кошка. При ее падении внешней силой является сила тяжести, которая не создает момента относительно центра тяжести кошки (система движется поступательно). Если момент был равен нулю в начале движения, то останется равным нулю и далее. Оказывается, кошка, усиленно вращая во время падения головой и хвостом, поворачивает свое тело в противоположную сторону на необходимый угол и приземляется на ноги. То же самое можно сказать об акробатах, балеринах, фигуристах, гимнастах (увеличение скорости вращения за счет уменьшения момента инерции).

3. Качели. Чтобы раскачаться, надо приседать в левом и правом верхних положениях, где угловая скорость $\omega = 0$ (что очевидно не повлияет на величину ω), а при прохождении вертикали резко выпрямляться. Центр масс приближается к оси вращения, I_z уменьшается, ω возрастает.

4. Вертолет. До запуска двигателя момент импульса системы «корпус+винт+отбрасываемая масса воздуха» равен нулю. Силы взаимодействия между отдельными частями системы являются внутренними и не могут изменить этот момент. Поэтому корпус вертолета должен вращаться в противоположную сторону (реактивный момент).

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

Примечание.

Сохранение момента импульса связано с изотропией пространства, в силу которого механические свойства замкнутой системы не изменяются при любом повороте системы как целого.

Изотропия пространства приводит к инвариантности физических законов относительно вращений пространства.

Конец примечания.

1.2.5.6. Кинетическая энергия. Теорема Кёнига

Кинетической энергией системы материальных точек называется скалярная величина

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_k \vec{V}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\dot{x}_k^{\,2} + \dot{y}_k^{\,2} + \dot{z}_k^{\,2} \right). \tag{2.12}$$

Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик движения системы $\vec{Q}$ (импульс) и $\vec{K}$ (момент импульса) состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и неотрицательной, а также что на ее изменение оказывают действие как внешние, так и внутренние силы.

Кинетическую энергию системы можно представить в другом виде, удобном для практических приложений.

Рассмотрим движение СМТ относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Такая система координат называется кёниговой системой координат.

Тогда скорость любой точки M системы можно представить как сумму скорости центра масс и относительной скорости точки в движении системы относительно центра масс:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{k\rho},$$

а кинетическую энергию как

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k V_{k\rho}^2, \tag{2.13}$$

т.е. кинетическая энергия системы равна кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, имеющая массу системы и расположенная в центре масс, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс (теорема Кёнига).

Действительно:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{V}_C + \vec{V}_{k\rho} \right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \right) V_C^2 + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_{k\rho} \right) \vec{V}_C + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_{k\rho}^2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + m \vec{V}_{C\rho} V_C + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k V_{k\rho}^2,$$

где $\vec{V}_{C\rho} = 0$ – относительная скорость центра масс.

Например, для твердого тела:

а) система движется поступательно $\left(\vec{V}_{k\rho} = 0 \right)$

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2;$$

б) система вращается вокруг неподвижной оси Oz $\left(\vec{V}_C = 0,\ \vec{V}_\rho = \omega h_k \right)$

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

Между основными динамическими величинами $\vec{Q}$, $\vec{K}$, T существует связь:

$$2T = \vec{Q} \cdot \vec{V}_p + \vec{K}_p \cdot \vec{\omega},$$

т.е. сумма скалярного произведения импульса системы на скорость полюса и скалярного произведения ее момента импульса относительно полюса на угловую скорость вращения равна удвоенной кинетической энергии (полюс – произвольная фиксированная точка твердого тела).

1.2.5.7. Теорема об изменении кинетической энергии

Элементарной работой $d'A_k$ силы $\vec{F}_k$ на перемещении $d\vec{r}_k$ материальной точки M_k называется скалярное произведение

$$d'A_k = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k.$$

Штрих означает, что правая часть не всегда является полным дифференциалом.

Элементарная работа $d'A$ всех сил системы:

$$d'A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k \right).$$

Теорема.

Дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы:

$$dT = d'A^e + d'A^i = d'A. \tag{2.14}$$

Доказательство.

$$dT = d\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_k^2 \right) = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_k dV_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}_k \frac{dV_k}{dt} dt = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k \vec{V}_k dt = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \right) d\vec{r}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e d\vec{r} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i d\vec{r} = = d'A^e + d'A^i = dA'.$$

В отличие от рассмотренных выше основных теорем динамики, в этой теореме участвуют как внешние, так и внутренние силы. Хотя силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и противоположно направлены, не обязательно одинаково перемещения этих точек. Поэтому в общем случае это не приводит к нулю работу внутренних сил системы.

Отметим некоторые частные случаи.

а) Неизменяемая система (в которой расстояние между точками приложения внутренних сил при движении не меняется: абсолютно твердое тело, нерастяжимая нить). Для такой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю, поэтому

$$dT = \sum_{k=1}^{N} d'A_k^e .$$

б) Система с идеальными связями. Если на систему наложены связи, то все действующие внутренние и внешние силы можно разделить на активные силы A_k^a и реакции связи A_k^R, и тогда изменение кинетической энергии системы можно представить в виде

$$dT = \sum_{k=1}^{N} d'A_k^a + \sum_{k=1}^{N} d'A_k^R .$$

Удерживающая склерономная связь называется **идеальной**, если сумма работ всех реакций связи при элементарном перемещении системы равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} d'A_k^R = \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k d\vec{r}_k = 0. \tag{2.15}$$

Тогда

$$dT = \sum_{k=1}^{N} d'A_k^a ,$$

т.е. наличие идеальных связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении.

Примеры идеальных связей:

1) абсолютно гладкая поверхность $dA = \vec{R} \cdot d\vec{r} = \left|\vec{R}\right| |dr| \cos\varphi = 0$;

2) свободное твердое тело. Связи обеспечивают постоянство взаимных расстояний между точками тела. Реакции связей – внутренние силы, $dA^i = 0$ для твердого тела;

3) твердое тело, имеющее одну неподвижную точку (или вращающееся вокруг неподвижной оси): $dA = 0$, так как $d\vec{r} = 0$;

4) два твердых тела, соприкасающиеся при движении абсолютно шероховатыми поверхностями. По определению это означает, что относительные скорости точек, которыми соприкасаются тела равны нулю. Следовательно, $dr_1 = dr_2$, $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$ и поэтому $dA = \vec{R}_1 d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 d\vec{r}_2 = 0$.

В реальных ситуациях работа реакции связей всегда отлична от нуля. Но часто эта работа бывает малой и допустимо ее считать равной нулю. Это и привело в теоретической механике к выделению важнейшего класса связей, называемых идеальными.

Из теоремы об изменении кинетической энергии для произвольных действующих сил никакого (нетривиального) закона сохранения не вытекает, и, следовательно, нет первых интегралов.

1.2.5.8. Теорема об изменении механической энергии

Пусть на систему действуют только позиционные силы, т.е. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_k)$. В этом случае говорят, что в пространстве задано силовое поле, например электрическое, магнитное, гравитационное.

Силовое поле называется потенциальным, если существует скалярная функция U, зависящая только от координат x_K, y_K, z_K точек M_k материальной системы (и, быть может, от времени), такая, что

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k};\ F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k};\ F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}\ \ (k=1,\ldots,N).$$

Функция U называется силовой функцией.

Функция $\Pi = -U$ называется потенциалом, или потенциальной энергией. Она определена с точностью до аддитивной постоянной.

Силы, удовлетворяющие этим равенствам, называется потенциальными:

$$\vec{F} = grad U = -grad\,\Pi$$

Потенциальное поле называется потенциальным или стационарным в зависимости от того, зависит функция Π явно от времени или нет.

Особый интерес представляет **стационарное потенциальное поле**: элементарная работа сил стационарного потенциального поля представляет собой полный дифференциал

$$d'A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k}dz_k\right) = dU(x,y,z) = -d\Pi .$$

Вывод: работа потенциальной силы равна разности значений потенциалов в начальной и конечной точках пути и не зависит от вида траекторий точек: $A_{1,2} = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2$.

В частности, если все точки системы описывают замкнутые пути, то полная работа равна нулю.

Примеры

1. Однородное поле тяжести. $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -mg$.

$$\Pi = mgz,$$

где z – координата, направленная противоположно действию вектора сил тяжести (считаем Π=0 при z=0), g – ускорение свободного падения, m – масса точки.

2. Силовое поле упругой пружины, $F = kx\ \ (>0)$,

$$\Pi = \frac{1}{2}kx^2,$$

где x – координата, отсчитываемая от недеформированного состояния пружины, k – коэффициент упругости пружины.

3. Ньютоновское гравитационное поле тела массой M. $F(r) = -\gamma\frac{mM}{r^2}$.

Если $\Pi = 0$ при $r \to \infty$, то $\Pi = -\int F(r)dr + const = -\gamma\frac{mM}{r}$, где m – масса некоторой точки; γ – универсальная гравитационная постоянная.

Пусть все силы, действующие на систему, потенциальны и их потенциал не зависит от времени. Тогда $d'A = -d\Pi$.

С другой стороны, по теореме об изменении кинетической энергии $d'A = dT$.

Следовательно, $-d\Pi = dT$ и $T+\Pi=const$.

Таким образом, сформулирован **закон сохранения механической энергии**: если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна:

$$E=T+\Pi=const \text{ (**интеграл энергии**).} \qquad (2.16)$$

Требование о том, чтобы все силы были потенциальны, необязательно. Достаточно потребовать, чтобы потенциальными были те силы, работа которых при перемещении системы отлична от нуля. Например, работа реакций стационарных идеальных связей равна нулю, и если остальные силы потенциальны и потенциал не зависит явно от времени, то для такой системы справедлив закон сохранения механической энергии.

Закон сохранения механической энергии является следствием **теоремы об изменении механической энергии**: изменение полной механической энергии системы на произвольном перемещении равно мощности непотенциальных сил.

Пусть $d'A^d$ – элементарная работа непотенциальных сил, $d'A$ – элементарная работа потенциальных сил. Тогда

$$dT = d'A + d'A^d = d'A^d - d\Pi; \Rightarrow d(T-\Pi) = d'A^d \Rightarrow dE = d'A^d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d'A^d}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^d d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^d\vec{V}_k = N^d,$$

где N^d – мощность диссипативных (внутренних и внешних) сил, действующих на систему.

Если потенциал зависит от времени, то

$$\frac{dE}{dt} = N^d + \frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (2.17)$$

На основании закона сохранения механической энергии системы делятся на два класса:

– консервативные – для них выполняется этот закон;

– диссипативные – при их движении часть механической энергии переходит в другую форму (тепловую, электрическую и т.п.). Этот процесс называется диссипацией.

Отметим, что неконсервативная система может не быть диссипативной, если в ней диссипация энергии компенсируется притоком энергии извне.

Примечание.

Сохранение механической энергии связано с однородностью времени, т.е. инвариантностью физических законов относительно изменения начала отсчета времени.

Конец примечания.

Подведем итоги п. 2.5.

Уравнения изменения основных динамических величин системы представляют собой два векторных и одно скалярное уравнение:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e;\ \frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} r_k \times \vec{F}_k^e = \vec{M}_0(\vec{F}^e);\ \frac{dE}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^d\vec{V}_k + \frac{\partial U}{\partial t} = N^d + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

В случае замкнутой системы и при отсутствии диссипативных сил эти уравнения дают законы сохранения:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0,\ \vec{K} = \vec{K}_0,\ E = E_0.$$

1.2.6. Движение в неинерциальной системе отсчета

1.2.6.1. Некоторые сведения из кинематики точки

Пусть система координат *Pxyz* движется по любому заданному закону относительно абсолютной системы координат *OXYZ* (рис. 1.9). Это значит, что известны движение полюса *P* и матрица $\vec{\Phi}(t)$, задающая ориентацию осей P_x, P_y, P_z относительно абсолютной системы координат.

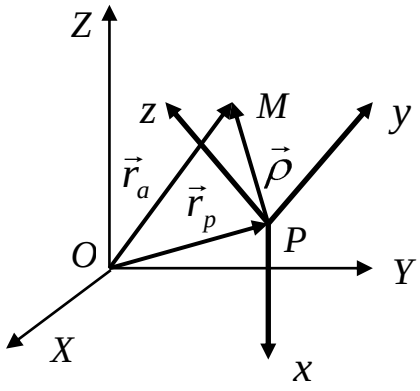


Рис. 1.9. Абсолютное и относительное движение

Движение точки *M* относительно неподвижной системы координат называется абсолютным (или сложным), а по отношению к подвижной системе координат – относительным. Скорости и ускорения точки, рассматриваемые по отношению к указанным системам, соответственно называются абсолютными и относительными. Обозначим их $\vec{V}_a(t_a)$, $\vec{V}_\rho(t_\rho)$.

Движение подвижной системы координат *Pxyz* по отношению к неподвижной системе *OXYZ* является для движущейся точки переносным движением, т.е. это движение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка *M*. Соответственно, скорости и ускорения точки, неизменно связанной с подвижной системой координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка *M*, называются переносными $\vec{V}_e(t_e)$.

Иными словами, переносная скорость (ускорение) есть та скорость (ускорение), которую движущаяся точка имела бы в данный момент, если бы она в этот момент оказалась жестко связанной с подвижной системой координат, т.е. не совершала бы относительного движения.

Уравнения абсолютного движения

$$X = X(t);\ Y = Y(t);\ Z = Z(t)$$

Уравнения относительного движения

$$x = x(t),\ y = y(t);\ z = z(t)$$

Установим связь между абсолютной, относительной и переносной скоростями и ускорениями.

Положение точки *M* в подвижной системе координат определяется радиусом-вектором

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

Найдем производную по времени от этого вектора в неподвижной системе координат (абсолютную производную от $\vec{\rho}$ по *t*):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}_{\frac{d'\vec{\rho}}{dt}} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Первые три слагаемых получены в предположении «замороженности» ортов подвижной системы координат. Это выражение называется локальной (относительной) производной вектора $\frac{d'\rho}{dt}$.

Рассмотрим последние три слагаемых. Обозначим их сумму через $\vec{b}$

$$x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{b}\ .$$

Поочередно умножим обе части скалярно на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$x\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{i} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\vec{i} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\vec{i} = \vec{b}\vec{i};$$

$$x\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\vec{j} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\vec{j} = \vec{b}\vec{j};$$

$$x\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{k} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\vec{k} = \vec{b}\vec{k}.$$

Правые части получившихся соотношений представляют собой проекции вектора на оси подвижной системы координат, т.е. b_x, b_y, b_z, а левые части преобразуем с помощью очевидных соотношений

$$\vec{i}^{\,2}=1;\ \vec{j}^{\,2}=1;\ \vec{k}^{\,2}=1;\ \vec{i}\vec{j}=0;\ \vec{i}\vec{k}=0;\ \vec{j}\vec{k}=0,$$

взяв производные по времени от которых, получим

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{i}=0;\ \frac{d\vec{j}}{dt}\vec{j}=0;\ \frac{d\vec{k}}{dt}\vec{k}=0;$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{j}=-\underbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}_{\omega_z}\vec{i};\ \frac{d\vec{i}}{dt}\vec{k}=-\underbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}_{\omega_y}\vec{i};\ \frac{d\vec{k}}{dt}\vec{j}=-\underbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}_{\omega_x}\vec{k}.$$

С помощью введенных обозначений выражения можно переписать в виде

$$b_x=\omega_y z-\omega_z y;$$
$$b_y=\omega_z x-\omega_x z;$$
$$b_z=\omega_x y-\omega_y x.$$

Если ввести в рассмотрение вектор $\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$, то очевидно

$$\vec{b}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

Следовательно:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\frac{d'\rho}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{\rho},$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости.

Эта формула применима к любому вектору: абсолютная производная $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ произвольного вектора $\vec{\varphi}$ по времени равна сумме локальной производной $\frac{d'\vec{\varphi}}{dt}$ и векторного произведения вектора $\vec{\omega}$ на вектор $\vec{\varphi}$, поэтому ей широко пользуются не только в кинематике, но и в динамике:

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\frac{d'\vec{\varphi}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{\varphi}. \qquad (2.18)$$

1.2.6.2. Скорости и ускорения в неинерциальной системе отсчета

Обратимся к скоростям и покажем, что абсолютная скорость $\vec{V}_a$ точки при сложном движении равна векторной сумме относительной $\vec{V}_\rho$ и переменной $\vec{V}_e$ скоростей.

Доказательство.

Так как $\vec{r}_a=\vec{r}_p+\vec{\rho}$, то $\frac{d\vec{r}_a}{dt}=\frac{d\vec{r}_\rho}{dt}+\frac{d'\vec{\rho}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}$.

Здесь $\frac{d\vec{r}_a}{dt}=\vec{V}_a;\ \frac{d'\vec{\rho}}{dt}=\vec{V}_\rho,\ \vec{V}_\rho+\vec{\omega}\times\vec{\rho}=\vec{V}_e$, следовательно

$$\vec{V}_a=\vec{V}_\rho+\vec{V}_e. \qquad (2.19)$$

Теперь обратимся к ускорениям и покажем, что абсолютное ускорение точки при сложном движении равно векторной сумме относительного, переносного ускорения и ускорения Кориолиса.

Доказательство.

$$\vec{a}_a=\frac{d\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}_\rho}{dt}+\frac{d\vec{V}_e}{dt}.$$

Вычислим каждую производную в отдельности.

$\frac{d\vec{V}_\rho}{dt} = \frac{d'V_\rho}{dt} + \frac{d'\rho}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{V}_\rho$ (абсолютная производная вектора $\vec{V}_\rho$).

$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_\rho + \vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{d\vec{V}_\rho}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dV_\rho}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{V}_\rho + \vec{\omega}\times\rho) =$

$= \vec{a}_\rho + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{V}_\rho + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$.

Введем обозначения $\vec{a}_\rho = \frac{d'V_\rho}{dt}$ – относительное ускорение,

$\vec{a}_e = \vec{a}_\rho + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{V}_\rho + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$ – переносное ускорение.

Тогда

$$\vec{a}_a = \vec{a}_\rho + \vec{a}_e + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_\rho . \qquad (2.20)$$

Последнее слагаемое называется поворотным или кориолисовым ускорением

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_\rho .$$

Оно исчезает в трех случаях:

1) при жестком сцеплении точки с системой *Pxyz* $(\vec{V}_\rho = 0)$;
2) при поступательном движении системы *Pxyz* $(\vec{\omega} = 0)$;
3) при движении точки параллельно вектору угловой скорости $(\vec{\omega} \| \vec{V}_\rho)$.

Только в этих случаях работает правило параллелограмма для сложения ускорений:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_\rho + \vec{a}_e .$$

Следовательно, абсолютное ускорение $\vec{a}_k$ точки M_k системы материальных точек в неинерциальной системе отсчета складывается из относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\vec{a}_k = \vec{a}_{k\rho} + \vec{a}_{ke} + \vec{a}_{kC} \text{ при } (k = 1,..., N).$$

1.2.6.3. Основные теоремы динамики системы в неинерциальной системе отсчета

Подставим полученное выражение для ускорения в уравнение второго закона Ньютона:

$$m_k\vec{a}_{k\rho} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_{ke} + \vec{F}_{kC}, \qquad (2.21)$$

где $\vec{F}_{ke} = -m_k\vec{a}_{ke}$, $\vec{F}_{kC} = -m_k\vec{a}_{kC} = -2m_k\vec{\omega}\times\vec{V}_{k\rho}$ – переносная и кориолисова силы инерции соответственно.

Таким образом, *второй закон Ньютона может быть применен и в* ***неинерциальной системе отсчета****, если к силам, приложенным к точкам системы, добавить еще переносные и кориолисовы силы инерции.*

Так как записанные основные теоремы динамики вытекали из уравнений (2.4), то все они будут верны и в неинерциальной системе отсчета (с соответствующим добавлением к правым частям). Силы инерции формально следует относить к внешним силам.

Теорема об изменении количества движения:

$$\frac{d\vec{Q}_\rho}{dt} = \vec{F}^{\vec{e}} + \vec{F}_e + \vec{F}_C , \qquad (2.22)$$

где $\vec{Q} = \sum m_k V_{k\rho}$;

$\vec{F}^{\vec{e}}$ – главный вектор внешних сил;

$\vec{F}_e = \sum \vec{j}_{ke}$ – главный вектор переносных сил;

$\vec{F}_C = \sum \vec{j}_{kC}$ – главный вектор кориолисовых сил.

Теорема об изменении момента импульса (для неподвижного относительно неинерциальной системы центра *P*):

$$\frac{d\vec{K}_{P\rho}}{dt} = \vec{M}_P^e + \vec{M}_{Pe} + \vec{M}_{PC}, \tag{2.23}$$

где $\vec{K}_{P\rho} = \sum \rho_k \times m_k \vec{V}_{k\rho}$, а в правой части – главные моменты сил относительно точки *P*.

Теорема об изменении кинетической энергии

$$dT_\rho = d'A^e + d'A^i + dA_e, \tag{2.24}$$

где $\vec{T}_\rho = \frac{1}{2}\sum m_k V_{k\rho}^2$,

$d'A^e$, $d'A^i$ – элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на относительных перемещениях $d\vec{\rho}_k$ ее точек;

$d'A_e$ – элементарная работа переносных сил инерции на тех же перемещениях.

Работа кориолисовых сил инерции для каждой точки M_k перпендикулярна ее относительному перемещению $d\vec{\rho}_k$.

Примечание.

Интересно отметить, что существует подвижная система координат, являющаяся в общем случае неинерциальной, такая, что в этой системе отсчета теоремы об изменении момента импульса и кинетической энергии выглядят точно так же, как и в инерциальной системе отсчета. Это рассмотренная ранее кёнигова система координат, т.е. поступательно движущаяся система координат с началом в центре масс системы. Для теоремы о моменте импульса это уже было показано

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e.$$

Рассмотрим теперь теорему о кинетической энергии. Сразу отметим, что для поступательного движения переносное ускорение $\vec{a}_{ke}$ для всех точек системы одинаково и равно ускорению $\vec{a}_C$ центра масс системы: $\vec{a}_e = \vec{a}_C + \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}}_{=0} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})}_{=0} = \vec{a}_C$.

Тогда $dT_\rho = d'A^e + d'A^i - \sum m_k \vec{a}_{ke} d\vec{\rho}_k$.

Так как $\sum m_k \vec{\rho}_k = m\vec{\rho}_C = 0$, то, следовательно:

$$dT_\rho = d'A^e + d'A^i.$$

Конец примечания.

1.2.7. Принцип Даламбера

Пусть имеется механическая система, состоящая из *N* точек. Выделим точку M_k с массой m_k.

Под действием активных сил $\vec{F}_k^a$ и реакций связи $\vec{R}_k$ точка получает по отношению к инерциальной системе отсчета ускорение $\vec{a}_k$

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^a + \vec{R}_k.$$

Введем в рассмотрение векторную величину

$$\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k,$$

равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению. Эту величину называют **даламберовой силой инерции**, или просто силой инерции.

Принцип Даламбера: если к активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям положительных связей присоединить силы инерции, то получится уравновешенная система сил

$$\vec{F}_k^a + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.25}$$

Просуммировав *N* векторных равенств, получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a+\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k+\sum_{k=1}^{N}\vec{\Phi}_k=0\text{, или }\vec{F}^a+\vec{R}+\vec{\Phi}=0, \tag{2.26}$$

где $\vec{F}^a$ – главный вектор активных сил;

$\vec{R}$ – главный вектор реакций связей;

$\vec{\Phi}$ – главный вектор сил инерции.

В другом виде: $\vec{F}^e+\vec{F}^i+\vec{\Phi}=0$ или

$$\vec{F}^e+\vec{\Phi}=0\text{, т.к. }\vec{F}^i=0.$$

Выбрав произвольную точку *O* за центр, найдем момент всех сил относительно этого центра. Сумма моментов сил, находящихся в равновесии, равна нулю (следует из основной теоремы статики).

Следовательно:

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_k^a)+\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{R}_k)+\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{\Phi}_k)=0, \tag{2.27}$$

или

$$\vec{M}_O^a+\vec{M}_O^R+\vec{M}_O^\Phi=0,$$

или

$$\vec{M}_O^e+\vec{M}_O^\Phi=0.$$

Уравнения (2.26) и (2.27) называются **уравнениями кинетостатики**. Эти уравнения по существу, эквивалентны уравнениям, выражающим теоремы об изменении количества движения и момента импульса системы.

Принцип Даламбера позволяет использовать более простые методы статики для решения задач динамики. Им широко пользуются в инженерной практике, особенно для определения реакций связей в случаях, когда закон движения известен или найден из решения уравнений, не содержащих реакции связей.

1.3. Аналитическая механика систем материальных точек

Я поставил себе целью свести теорию механики и
методы решения связанных с нею задач к общим формулам,
простое развитие которых дает все уравнения,
необходимые для решения каждой задачи.
Ж.Л.Лагранж «Аналитическая механика» (1788 г.)

1.3.1. Вариационные принципы механики

Принципами механики называются исходные положения, отражающие настолько общие закономерности механических явлений, что из этих положений как следствие можно получить уравнения, определяющие движение механической системы.

Эти принципы подразделяются на вариационные и невариационные.

Невариационные принципы механики непосредственно устанавливают закономерности движения, совершаемого системой под действием приложенных к ней сил.

К ним относятся законы Ньютона и, в том числе, принцип Даламбера. Эти принципы справедливы для любой механической системы и имеют довольно простое математическое выражение.

Но применение невариационных принципов ограничено только рамками механики, поскольку в выражение принципов входит такое чисто механическое понятие, как сила. Кроме того, в большинстве задач механики рассматривается движение несвободных систем. Если исходить из невариационных принципов, то при изучении движения эффект связей учитывают введением реакций связей, величины которых заранее неизвестны. Поэтому в уравнения движения войдут дополнительные неизвестные величины – реакции связи, что приводит к усложнению решения этих уравнений.

Преимущество же вариационных принципов механики состоит в том, что в них сразу получаются уравнения движения системы, не содержащие неизвестных реакций связей. Это достигается тем, что *эффект действия связей учитывается не заменой их неизвестными силами (реакциями), а рассмотрением тех перемещений и движений, которые точки этой системы могут иметь при наличии данных связей*.

Рассмотрим пример. Пусть материальная точка M движется по идеально гладкой поверхности, которая является для нее связью (рис. 1.9).

Как учесть действие связи?

Способ 1. Заменить связь реакцией $\vec{N}$, направленной в любой момент времени по нормали $\vec{n}$ и включить эту силу в уравнение движения (рис. 1.10 *а*);

Способ 2. Установить, что для точки M при любом ее положении возможны лишь элементарные перемещения перпендикулярные к нормали $\vec{n}$ (такие перемещения называют возможными) (рис. 1.10 *б*);

Способ 3. Установить, что движение точки M из положения 1 в положение 2 возможно по любой кривой 1–2, лежащей на поверхности, которая является связью; такие движения называются кинематически возможными (рис. 1.10 *в*).

Содержание вариационных принципов состоит в том, что они устанавливают свойства (признаки), позволяющие отличить истинное движение системы (т.е. фактически происходящее под действием заданных сил) от тех или иных кинематически возможных ее движений (или состояние равновесия от других возможных ее состояний).

По форме эти принципы разделяют на **дифференциальные**, в которых устанавливается, чем истинное движение отличается от кинематически возможных **в каждый момент времени**, и **интегральные**, в которых это различие устанавливается для перемещений, совершаемых системой за какой-нибудь **конечный промежуток времени**.

Дифференциальные принципы в рамках механики являются более общими и справедливы для любых механических систем, интегральные – для консервативных систем.

Но в интегральные принципы в отличие от дифференциальных вариационных и невариационных вместо сил входит энергия, что позволяет распространить эти принципы и на немеханические системы.

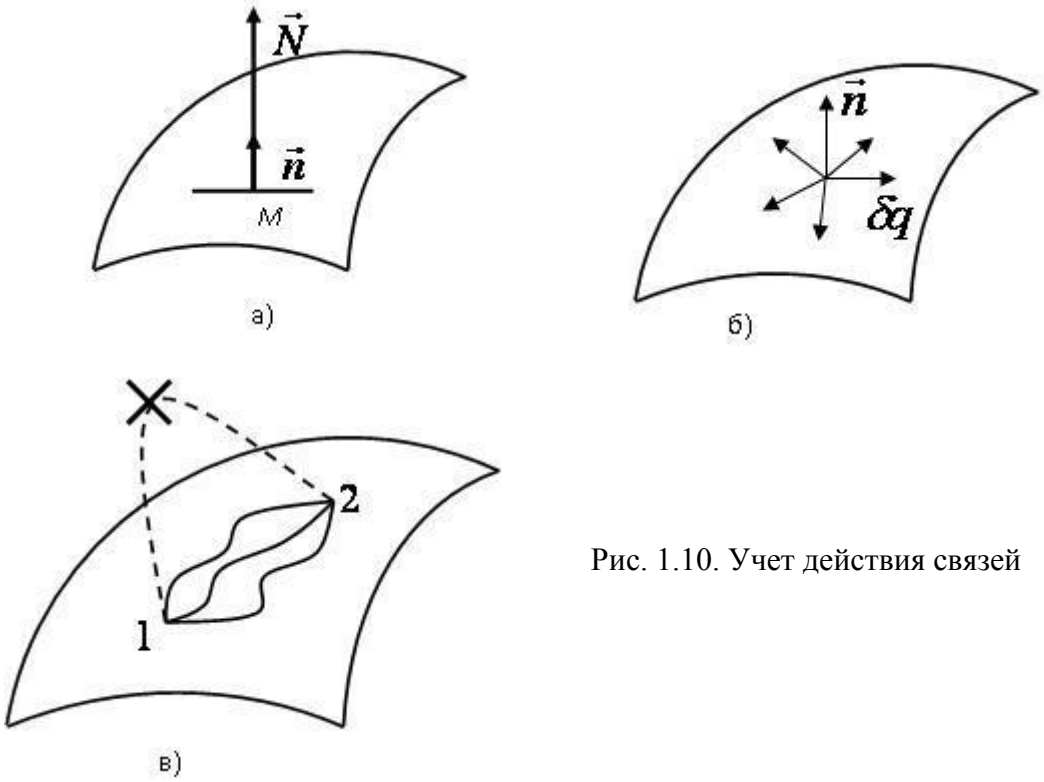


Рис. 1.10. Учет действия связей

Механика, основанная на вариационных принципах, называется **аналитической механикой.** Эти принципы и методы решения задач, основанные на этих принципах, оказались настолько эффективными, что проникли в другие области математики и физики: геометрию, прикладную математику, термодинамику, электродинамику, статистическую физику и квантовую механику.

Рассмотрим эти принципы и уравнения движения как следствие этих принципов.

1.3.2. Принцип виртуальных перемещений (принцип Лагранжа)

Введем понятия «действительное (истинное) перемещение», «возможное перемещение», «виртуальное перемещение» (на примере одной точки, подчиненной одной голономной удерживающей связи $f(\vec{r},t)=0$).

Действительным перемещением $d\vec{r}$ точки называется бесконечно малое перемещение этой точки под действием как заданных сил, так и реакций связи; действительное перемещение происходит за время *dt* в соответствии с уравнением движения и уравнением связи: $d\vec{r}=\vec{V}dt$.

Возможным перемещением $d^*\vec{r}$ называют «перемещение» точки, допускаемое связью; в отличие от действительных перемещений возможное перемещение удовлетворяет только уравнению связи. Воображаемых перемещений – бесконечное множество. Действительное перемещение является одним из возможных.

Возможные перемещения подчиняются дифференциальному уравнению, которое получается, если продифференцировать уравнение связи

$$df=\frac{\partial f}{\partial r}d^*\vec{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0. \qquad (3.1)$$

Виртуальным перемещением $\delta\vec{r}$ называется воображаемое бесконечно малое «перемещение» точки, допускаемое связью в данной фиксированный момент времени.

В этот момент времени связь «застывает», т.е. ее изменение со временем мысленно прекращается. Виртуальные перемещения не происходят под действием сил и не обладают длительностью.

Другими словами, виртуальное перемещение – это **изохронная вариация радиуса-вектора** точки, подчиненная уравнениям связи.

Примечание. О вариации.

Пусть $r = r(t)$ – некоторая функция. Тогда главная линейная часть изменения функции, возникающего вследствие приращения аргумента на величину dt, называется **дифференциалом функции**

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt .$$

Наряду с этим можно рассматривать другое изменение функции, возникающее вследствие очень малого изменения самого вида функциональной зависимости и рассматриваемое при неизменном значении аргумента. Такое изменение называется **вариацией функции**.

Если записать

$$r'(t) = r(t) + \varepsilon\eta(t),$$

где ε – малое число, $\eta(t)$ – любая дифференциальная функция,

то

$$\delta r = r'(t) - r(t) = \varepsilon\eta(t)$$

и будет вариацией функции r (при неизменном t).

Конец примечания

Дифференциальное уравнение, которому подчиняется виртуальное перемещение точки, получим, вычисляя вариацию $f(r,t) = 0$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial r}\delta \vec{r} = 0 . \qquad (3.2)$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), видим, что **для стационарных связей возможные и виртуальные перемещения совпадают**.

Обобщим уравнения (3.1) и (3.2) на систему N точек, подчиненных l голономным удерживающим связям $f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1,2,...,l)$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} d\vec{r}_k + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \qquad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} \delta\vec{r}_k = 0 \qquad (3.4)$$

Пользуясь понятием виртуальных перемещений, дадим более широкое определение идеальных связей, понятие о которых мы ввели ранее.

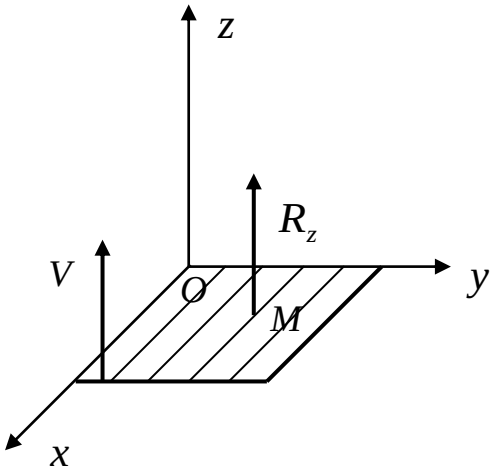


Рис. 1.11. Идеальная связь

Идеальными называются связи, сумма элементарных работ реакций которых на любом виртуальном перемещении точек системы равна нулю (иными словами – виртуальная работа реакций связей равна нулю):

$$\delta' A^R = \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (R_{kx}\delta x_k + R_{ky}\delta y_k + R_{kz}\delta z_k) = 0 \qquad (3.5)$$

Пример. Точка M движется по абсолютно гладкой горизонтальной поверхности (рис. 1.11).

Тогда $R_x = R_y = 0$, $R_z \neq 0$ следовательно, виртуальная работа $\delta' A^R = \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = R_z \delta z = 0$, т.к. $\delta z = 0$ для рассматриваемой связи – независимо от того, движется плоскость или покоится.

Отметим, что действительная работа $d'A$, совершаемая реакцией на действительном перемещении, если плоскость движется со скоростью V, будет отлична от нуля

$$d'A^R = R_z dz = R_z V dt \neq 0.$$

Таким образом, виртуальная работа отражает физическое свойство поверхности – ее гладкость.

Сформулируем **принцип виртуальных перемещений** (принцип Лагранжа).

Для равновесия системы материальных точек, подчиненных удерживающим идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю сумма элементарных работ активных сил на любом виртуальном перемещении системы из рассматриваемого положения равновесия, при условии, если в начальный момент система неподвижна:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (3.6)$$

или

$$\sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k \right) = 0.$$

Пользуясь уже известными положениями (принципами) механики Ньютона, этот принцип можно доказать, т.е. можно рассматривать его как теорему.

Доказательство.

Необходимость.

Если система находится в равновесии, то $\vec{F}_k^a + \vec{R}_k = 0 \quad (k = 1,....N)$.

Сообщим системе виртуальное перемещение $\delta \vec{r}_k$, тогда $(\vec{F}_k^a + \vec{R}_k)\delta \vec{r}_k = 0$.

Суммируя, имеем: $\sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^a + \vec{R}_k)\delta \vec{r}_k = 0$ или $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0$.

Так как связи идеальны: $\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0$, то $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \delta A = 0$.

Достаточность (для стационарных связей).

Пусть выполняется соотношение $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \delta A = 0$.

Докажем от противного. Пусть система пришла в движение. Действительные перемещения входят в число виртуальных (если связи стационарны). Тогда по теореме об изменении кинетической энергии

$$\delta T = \delta A = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k + \vec{R}_k \right) \delta \vec{r}_k > 0,$$

где $\delta \vec{r}_k$ – возможные перемещения, с которыми совпадают действительные перемещения точек системы.

Это противоречит условию.

Теорема доказана.

Принцип виртуальных перемещений представляет собой самый общий принцип аналитической статики. Из него можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы, т.е. он дает **общее уравнение статики**.

Примечание.

Если не все связи являются идеальными, например имеются связи с трением, то к активным силам следует добавить силы реакций, соответствующих неидеальным связям.

Конец примечания

1.3.3. Принцип Даламбера–Лагранжа

Принцип Лагранжа (принцип виртуальных перемещений) дает общее уравнение статики. С другой стороны, известен принцип Даламбера, позволяющий использовать методы статики для решения задач динамики.

Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, можно получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему N материальных точек M_k. Связи, наложенные на систему, считаем удерживающими и идеальными.

Тогда согласно принципу Даламбера

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a+\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k+\sum_{k=1}^{N}\vec{\Phi}_k=0 \text{ (уравновешенная система сил).}$$

Применяя к этим силам принцип Лагранжа, имеем

$$\delta A=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\delta\vec{r}+\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\delta\vec{r}+\sum_{k=1}^{N}\vec{\Phi}_k\delta\vec{r}=0,\ \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\delta\vec{r}+\sum_{k=1}^{N}\vec{\Phi}_k\delta\vec{r}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_k-m_k\vec{a}_k\right)\delta\vec{r}_k=0 \qquad (3.7)$$

Это равенство представляет собой уравнение **принципа Даламбера–Лагранжа**.

При движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом виртуальном перемещении системы будет равна нулю.

Или иначе:

Истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Уравнение принципа содержит в себе всю информацию о движении данной механической системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил, поэтому оно называется **общим уравнением динамики**.

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\left(F_{kx}^a-m_ka_{kx}\right)\delta x_k+\left(F_{ky}^a-m_ka_{ky}\right)\delta y_k+\left(F_{kz}^a-m_ka_{kz}\right)\delta z_k\right]=0.$$

Пример. Две материальные точки m_1 и m_2 ($m_2>m_1$) соединены идеальной нитью, перекинутой через гладкий неподвижный стержень (рис. 1.12), и движутся в поле тяжести в вертикальной плоскости. Найти ускорения точек.

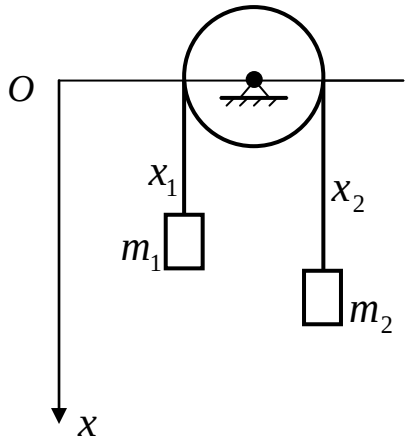


Рис. 1.12. Пример на использование общего уравнения динамики

Движение одномерное, поэтому используем координату x, направленную вниз (рис. 1.12). Дадим точке 2 виртуальное перемещение δx_2 вниз. Общее уравнение динамики имеет вид

$$\left(m_1g-m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1+\left(m_2g-m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2=0.$$

Нить нерастяжима: $x_1+x_2=const$.

Следовательно, $\delta x_1=-\delta x_2$, $\ddot{x}_1=-\ddot{x}_2$, и уравнение примет вид $\left(m_2-m_1\right)g-\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}_2\delta x_2=0$.

В силу произвольности δx_2 получаем

$$\ddot{x}_2=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g.$$

При $m_2-m_1>0$ точка m_2 будет двигаться вниз.

1.3.4. Обобщенные координаты. Уравнение статики в обобщенных координатах

Пусть на систему N материальных точек наложено l голономных связей.

Число независимых виртуальных перемещений системы называется ее числом степеней свободы *s*. Это число определяется количеством независимых координат, однозначно определяющих положение материальной системы в пространстве. Очевидно, $s = 3N - l$.

Примеры.

1) свободная точка в пространстве: *s*=3 (в качестве обобщенных координат выбираются декартовы координаты *x,y,z*);

2) точка на плоскости: *s*=2 (обобщенные координаты – плоские декартовы координаты *x,y*);

3) точка на кривой: *s*=1 (обобщенная координата – *s* – дуга траектории);

4) свободное движение твердого тела. Соединяем три любые точки *A*, *B*, *C* тела прямыми линиями, имеем девять неизвестных, определяющих координаты векторов $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$, и три уравнения связи: *s*=6 *(*обобщенные координаты – x_p, y_p, z_p и 3 угла);

5) система из двух точек *A* и *B*, соединенных стержнем, движущаяся в плоскости, имеем 4 координаты точек $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ и одно уравнение связи: *s*=3 (обобщенные координаты – две декартовы координаты точки *A* и угол между горизонталью и стержнем).

Эти независимые координаты не обязательно должны быть декартовыми. В зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-нибудь других координат, имеющих любую размерность и любой геометрический (или физический) смысл – дуга, угол, площадь и т.п. Поэтому их назвали обобщенными.

Итак, **обобщенными координатами** называется совокупность независимых параметров $q_1,..., q_s$, однозначно определяющих положение материальной системы в пространстве.

Требования к ним:

1) независимость;

2) должны однозначно определять положение системы в пространстве;

3) декартовы координаты x_k, y_k, z_k точек системы можно выразить через обобщенные, тогда радиус-вектор любой точки системы можно записать в виде

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1,....q_s,t); \qquad (3.8)$$

4) координаты выбираются в соответствии с уравнениями связей, т.е. функции $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q,t)$ должны обращать в тождество уравнения связей: $f_\alpha(t, \vec{r} = q) \equiv 0$, $\alpha = 1,...,l$.

Для каждого момента времени между возможными положениями системы и точками *s*-мерного пространства $(q_1, q_2,...q_s)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пространство $(q_1, q_2,...q_s)$ называется координатным пространством (или пространством конфигураций).

Каждому возможному положению системы отвечает некоторая точка координатного пространства – изображающая точка. Движению системы соответствует движение изображающей точки в координатном пространстве.

$q_1 = f_1(t)$, $q_2 = f_2(t)$, …, $q_s = f_s(t)$ – кинематические уравнения движения в обобщенных координатах.

По аналогии с обычным понятием скорости и ускорения вводят понятие обобщенной скорости и обобщенного ускорения:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}; \ \ddot{q}_j = \frac{d^2 q_j}{dt^2}, \quad j=1...s.$$

Размерность обобщенной скорости и ускорения зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты (если q – линейная величина, то $\dot{q}$ – линейная скорость, если q – угол, то $\dot{q}$ – угловая скорость, если q – площадь, то $\dot{q}$ – секторная скорость и т.п.).

Связь скоростей и ускорений точек системы в декартовой системе координат и в пространстве конфигураций можно найти, продифференцировав (3.8).

$$\vec{V}_k = \dot{\vec{r}}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{d\vec{r}_k}{dt};$$

$$\vec{a}_k = \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\ddot{q}_j + \sum_{m=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_m}\dot{q}_j\dot{q}_m + 2\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t^2} \qquad k = 1...N \ . \tag{3.9}$$

Для голономных связей обобщенные скорости $\dot{q}_j$ независимы и совершенно произвольны (т.к. нет ограничений связи на скорости).

Связь виртуальных перемещений $\delta\vec{r}_k$ точек системы с вариациями δq_j обобщенных координат дается выражением

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (k = 1,..., N). \tag{3.10}$$

Эта формула справедлива и для любой функции $\varphi(q_1, q_2,..., q_S, t)$:

$$\delta\varphi = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\delta q_j \ .$$

Теперь определим понятие **обобщенной силы**.

По определению виртуальная работа всех сил, приложенных к точкам системы:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta\vec{r}_k \ .$$

Заменим виртуальные перемещения $\delta\vec{r}_k$ через вариации δq_j обобщенных координат, тогда

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j \ .$$

Введем обозначение:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \ (j=1...s). \tag{3.11}$$

Тогда $\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \delta A_j$.

Величина Q_j называется обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате q_j.

Таким образом, *обобщенные силы являются коэффициентами при вариациях обобщенных координат в выражении элементарной работы сил, действующих на материальную систему*.

В практических задачах для вычисления обобщенных сил формулами (3.11) обычно не пользуются. Обычно дают системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_i = 0$ (i=1...s) для всех i, кроме i=j. Тогда

$$\delta A = \delta A_j = Q_j \delta q_j$$

и

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j} \ . \tag{3.12}$$

Перебирая все j, находим все Q_j .

Размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, то Q – это сила в обычном смысле, если q – угол поворота, то это момент силы относительно оси вращения, если q – объем, то Q – это давление и т.п.

В общем случае обобщенные силы будут функциями обобщенных координат, скоростей и времени.

Если же действующие силы $\vec{F}_k$ потенциальные с потенциалом $\Pi = \Pi(\vec{r}_k, t)$, тогда и обобщенные силы – потенциальные, причем им соответствует потенциал, полученный из функции $\Pi(\vec{r}_k, t)$, если в ней величины $\vec{r}_k$ выразить через обобщенные координаты.

Получим выражение для **потенциальных обобщенных сил**.

В п.1.2.5.8 было получено соотношение $d'A = -d\Pi$, выполняющееся в поле стационарных потенциальных сил. Тогда соотношение $\delta A = -\delta\Pi$ будет выполняться и для нестационарного потенциального поля (вариация – изохронная). В этом соотношении

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j \,,\ \delta\Pi = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j \,.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{s} \left(Q_j + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \,.$$

В силу независимости вариаций обобщенных координат

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1 \ldots s) \ . \tag{3.13}$$

Запишем **основное уравнение статики в обобщенных координатах**.

Принцип виртуальных перемещений гласит, что при равновесии системы $\delta A = 0$ или

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F} \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0 \,.$$

В силу независимости вариаций обобщенных координат

$$Q_j = 0 \qquad j = 1 \ldots s \,. \tag{3.14}$$

Таким образом, можно сформулировать принцип Лагранжа в обобщенных координатах: для равновесия механической системы с идеальными голономными связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.

Число условий равновесия будет равно числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы системы.

В частном случае, если все активные силы потенциальны, то условие равновесия

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1 \ldots s) \,. \tag{3.15}$$

Вывод: необходимые и достаточные условия равновесия голономной системы (с идеальными удерживающими связями, в потенциальном поле сил) совпадают с необходимыми условиями экстремума потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия системы.

Если $\Pi = \Pi(q_j)$, то условие равновесия принимает вид $d\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = 0$.

1.3.5. Уравнения Лагранжа II рода

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек и ограниченную l идеальными голономными связями.

Для описания ее движения можно использовать или непосредственно уравнения, которые дает II закон Ньютона, или основные теоремы динамики.

В первом случае записывается 3N уравнений:

$$m_k \ddot{x}_k = F^a_{xk} + R_{xk} \,;$$

$$m_k \ddot{y}_k = F^a_{yk} + R_{yk} \,;$$

$$m_k \ddot{z}_k = F_{zk} + R_{zk} \,, \quad (k = 1 \ldots N).$$

Неизвестных здесь 6N (3N координат и 3N проекций реакций связи), поэтому вторая задача динамики в общем случае неразрешима.

Второй путь требует применения каждый раз разных теорем и для сложных систем приводит к большим математическим трудностям (т.е. нет универсального подхода).

Попробуем решить эти проблемы в обобщенных координатах. Определим положение системы в пространстве конфигураций s обобщенными координатами q_j.

Возьмем за основу общее уравнение динамики (принцип Даламбера – Лагранжа) и запишем его в обобщенных координатах.

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_k+\vec{\Phi}_k\right)\delta\vec{r}_k=0 \text{ или } \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\delta\vec{r}_k=\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{a}_k\delta\vec{r}_k\ .$$

Левая часть уравнения – работа активных сил:

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\delta\vec{r}_k=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j\ .$$

Правая часть уравнения – работа даламберовых сил инерции:

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{a}_k\delta\vec{r}_k=\sum_{k=1}^{N}\left(m_k\frac{d\vec{V}_k}{dt}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j\right)=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

(изменить порядок суммирования можно в связи с независимостью суммирования по *k* и по *j*).

Выделим в последнем выражении отдельно сумму по *k*:

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{V}_k\underbrace{\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}}_{2}\right)-\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{V}_k\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right)}_{1}=\ldots$$

Преобразуем подчеркнутые сомножители:

1) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right)=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{d\vec{r}_k}{dt}\right)=\dfrac{\partial\vec{V}_k}{\partial q_j}$;

2) используем выражение (3.9): $\vec{V}_k=\sum_{j=1}^{s}\dfrac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j+\dfrac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}$. Беря частную производную по $\dot{q}_j$, получаем $\dfrac{\partial\vec{V}_k}{\partial\dot{q}_j}=\dfrac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}$.

Продолжаем преобразование

$$\ldots=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}m_kV_k\frac{\partial V_k}{\partial\dot{q}_j}-\sum_{k=1}^{N}m_kV_k\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial\dot{q}_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_kV_k^2}{2}-\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_kV_k^2}{2}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\ .$$

Таким образом, общее уравнение динамики запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j$$

или

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0\ .$$

В силу произвольности виртуальных перемещений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\ \ (j=1,\ldots,s). \qquad (3.16)$$

Это и есть **уравнения Лагранжа II рода – уравнения движения голономных систем в обобщенных координатах**.

Характеристика этих уравнений:

1. Они образуют систему *s* дифференциальных уравнений второго порядка относительно *s* переменных q_j.

2. Их форма не зависит от выбора обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$. При другом их выборе изменятся только функции T и Q_j, а сама форма уравнений осталась бы той же. В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа II рода обладают **свойством ковариантности**.

3. Они не содержат реакций идеальных связей. Это означает, что при использовании обобщенных координат удается отделить задачу нахождения закона движения несвободной системы от задачи определения неизвестных реакций связи.

Если же нужно найти эти реакции, то после интегрирования уравнений Лагранжа следует подставить найденные $q_j(t)$ в выражение

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

и тогда равнодействующая $\vec{R}_k$ реакций связи, приложенных к точке M_k, найдется из принципа Даламбера:

$$\vec{R}_k = m_k \ddot{\vec{r}}_k - F_k(t, \vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t).$$

4. Уравнения Лагранжа позволяют указать единую последовательность действий, которые нужно выполнить при решении любой задачи динамики:

а) определить число степеней свободы;

б) выбрать обобщенные координаты;

в) записать кинетическую энергию системы, найти производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ и $\frac{\partial T}{\partial q_j}$;

г) найти обобщенные силы; для этого:

– изобразить на чертеже все приложенные силы, совершающие работу;

– сообщить системе виртуальное перемещение, при котором меняется только координата q_1, и вычислить сумму элементарных работ всех действующих сил. Коэффициент при δq_1 даст искомую силу Q_1;

– аналогично вычислить Q_2, Q_3,…,Q_s;

д) составить уравнения движения и проинтегрировать их с учетом начальных условий.

«Пожалуй, одним из главных преимуществ нашего метода заключается в том, что он всегда дает уравнения каждой задачи в наиболее простой форме по отношению к применённым при этом переменным, и даёт нам возможность наперед судить о том, каковы те переменные, пользование которыми может нам облегчить интегрирование». Ж.Л.Лагранж «Аналитическая механика» (1788 г.)

В частном случае при движении под действием потенциальных сил

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

и уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Так как потенциальная энергия является функцией обобщенных координат, времени, но не скоростей $(T = \Pi(q_j, t))$, то это уравнение можно формально представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (3.17)$$

(уравнение Лагранжа II рода для потенциальных сил).

Функция $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}, t) - \Pi(q, t)$ называется функцией Лагранжа (лагранжиан, кинетический потенциал). Совокупность переменных $t, q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$ называется переменными Лагранжа.

Отметим особенность этих уравнений: если, например, какая-то из обобщенных координат $j=i$ не входит явно в выражение для лагранжиана L, то $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ и получаем **первый интеграл уравнения** в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const \text{, или } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = const .$$

Такие координаты q_i называются **циклическими координатами**.

Понятие функции Лагранжа распространяется и на системы с бесконечным числом степеней свободы – классические физические поля (электромагнитные, гравитационные, поля ядерных сил, квантованные (волновые) поля); при этом обобщенные координаты – значения функций поля. Соответственно, для них справедливы уравнения Лагранжа в виде (3.17).

1.3.6. Структура переменных, входящих в уравнения Лагранжа

1.3.6.1. Кинетическая энергия в обобщенных координатах

Подставим в кинетическую энергию скорости точек, выраженные через обобщенные координаты:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{s} a_j\dot{q}_j + a_0 = T_2 + T_1 + T_0.$$

Здесь

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}; \qquad T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

$$a_j = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}; \qquad T_1 = \sum_{i,j=1}^{s} a_j\dot{q}_j,$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2; \qquad T_0 = a_0.$$

Вывод: кинетическая энергия является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей.

В случае склерономной системы (стационарные связи) $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = 0$ (k=1...N).

Тогда $a_0 = 0$, $a_j = 0$ и

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j , \tag{3.18}$$

т.е. кинетическая энергия склерономной системы является квадратичной формой обобщенных скоростей. Коэффициенты a_{ij} образуют симметричную матрицу, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Отметим, что T_1 и T_2 являются однородными функциями обобщенных скоростей.

Примечание.

Однородной функцией называется такая функция $f(x_1, x_2, .., x_n)$, для которой

$f(\alpha x_1, \alpha x_2, .., \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, x_2, .., x_n)$, k – степень однородности.

Для однородных функций справедлива теорема Эйлера:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf .$$

Конец примечания.

Применяя эту теорему к функциям $T_2(\dot{q})$ и $T_1(\dot{q})$, имеем

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i = 2T_2 ; \ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i = T_1 ; \ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i = 0 . \tag{3.19}$$

Эти полезные соотношения будут использованы позже.

1.3.6.2. Структура обобщенных сил

Как видно из определения, обобщенные силы определяются известными векторными силами $\vec{F}(\vec{r},\vec{V},t)$, а в случае потенциальных сил – потенциальной энергией $\Pi(\vec{r},t)$.

Рассмотрим обобщенно-потенциальные силы, которые могут быть заданы с помощью скалярной функции V, зависящей не только от положения точек и времени, но и от скоростей точек.

Эта функция называется обобщенным потенциалом.

Обобщенно-потенциальные силы в декартовых координатах представляются в виде

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial V}{\partial r},$$

а в обобщенных

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \delta S = 0. \tag{3.20}$$

Обобщенный потенциал, определяющий обобщенно-потенциальные силы, должен быть линейной формой относительно скоростей точек, иначе мы получили бы силы, зависящие от ускорения, которые не рассматриваются в классической механике.

Таким образом, обобщенный потенциал должен представляться в форме

$$V = V_1 + V_0,$$

где $V_1 = \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{q}_j$ – линейная однородная форма обобщенных скоростей ($b_j = f(q_j, t)$),

V_0 – нулевая форма скоростей (т.е. не зависит от них).

Представив это выражение в выражении для обобщенно-потенциальных сил (3.20), получим

$$Q_j = \frac{db_j}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{s} b_i \dot{q}_i + V_0\right) = \frac{\partial b_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial b_j}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial b_i}{\partial q_j}\dot{q}_i - \frac{\partial V_0}{\partial q_j} = -\frac{\partial V_0}{\partial q_i} + \frac{\partial b_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\beta_{ji}\dot{q}_i,$$

где $\beta_{ji} = -\beta_{ij} = \frac{\partial b_j}{\partial q_i} - \frac{\partial b_i}{\partial q_j}$ $(i, j = 1,..., s)$ – коэффициенты, антисимметричные по индексам (образуют антисимметричную (или кососимметрическую) матрицу).

Силы, являющиеся линейными однородными формами относительно скоростей, с коэффициентами, составляющими антисимметричную матрицу, называются **гироскопическими силами**:

$$Q_j^{\Gamma} = \sum_{i=1}^{s}\beta_{ji}\dot{q}_i\ . \tag{3.21}$$

Таким образом, обобщенно-потенциальные силы составляют потенциальные силы $-\frac{\partial V_0}{\partial q_i}$, гироскопические силы $\sum_{i=1}^{s}\beta_{ji}\dot{q}_i$ и силы, обусловленные нестационарностью обобщенного потенциала $\frac{\partial b_j}{\partial t}$.

Отметим свойство гироскопических сил – их мощность равна нулю:

$$N^{\Gamma} = \sum_{j=1}^{s} Q_j^{\Gamma}\dot{q}_j = \sum_{i,j=1}^{s}\beta_{ji}\dot{q}_i\dot{q}_j = 0. \tag{3.22}$$

Таким образом, существуют непотенциальные силы, для которых выполняется закон сохранения полной механической энергии (2.16).

Примеры гироскопических сил:

1) силы, приложенные к гироскопу – массивному телу, вращающемуся вокруг своей оси симметрии, и обеспечивающие его постоянную прецессию;

2) кориолисова сила инерции (2.21), действующая на материальную точку, движущуюся с некоторой скоростью по отношению к подвижной (неинерциальной) системе отсчёта;

3) сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле.

Рассмотрим еще один класс непотенциальных сил – **диссипативные силы.**

Непотенциальные силы называются **диссипативными**, если их мощность отрицательна.

Для характеристики диссипативных сил вводят диссипативную функцию Рэлея (или функцию рассеивания). Она представляет собой однородную квадратичную функцию скоростей с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат (положительная квадратичная форма):

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} b_{i,j}\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad (b_{i,j} = b_{j,i}). \tag{3.23}$$

Тогда диссипативные силы определяются соотношением:

$$Q_j^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{i=1}^{s} b_{i,j}\dot{q}_i = -(b_{1j}\dot{q}_1 + b_{2j}\dot{q}_2 + ... + b_{sj}\dot{q}_s).$$

Мощность диссипативных сил:

$$N^d = \sum_{j=1}^{s} Q_s^d \dot{q}_j = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = -2R$$ (по теореме об однородных функциях).

Тогда для склерономных систем с потенциалом, не зависящим от времени, теорема об изменении полной механической энергии примет вид:

$$\frac{dE}{dt} = -2R \le 0,$$

т.е. скорость убывания полной механической энергии равна удвоенной функции Рэлея.

В качестве примера рассмотрим склерономную систему, к каждой точке которой приложена сила сопротивления, пропорциональная скорости этой точки:

$$\vec{F}_\kappa = -k\vec{V}_\kappa \quad (k = 1,...,N),$$

где $k > 0$.

Мощность этих сил

$$N^d = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k\vec{V}_k = -k\sum_{k=1}^{N} \vec{V}_k\vec{V}_k = -2R,$$

где $R = \frac{1}{2}k\sum_{\kappa=1}^{N} V_\kappa^2$ – диссипативная функция Рэлея.

Таким образом, при наличии обобщённо-потенциальных сил и диссипативных сил уравнения Лагранжа можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d \quad (j = 1..s), \tag{3.24}$$

где $L = T - V$, V – обобщенный интеграл,

$Q_j^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$, R – диссипативная функция Рэлея.

1.3.7. Уравнение изменения обобщенного импульса и обобщенной энергии. Законы сохранения

Запишем уравнение (3.24) в виде

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^d. \tag{3.25}$$

Величина $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ называется обобщенным импульсом, соответствующим координате q_j, а само уравнение – **уравнением изменения обобщенного импульса**.

Если диссипативные силы равны нулю $Q_j^d = 0$, то при $\dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (условие цикличности координаты q_j) выполняется **закон сохранения обобщенного импульса**:

$$p_j = const\,.$$

Получим теперь уравнение изменения обобщенной энергии. Для этого проведем некоторые преобразования уравнений Лагранжа (3.25). Умножим каждое уравнение на соответствующую обобщенную скорость q_j и сложим:

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right\}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} Q^d \dot{q}_j\,. \tag{3.26}$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)-\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)=$$

…

Так как $L = L(q, \dot{q}, t)$,

то производная по времени $\dfrac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) + \dfrac{dL}{dt}$.

Продолжаем преобразование,

$$\ldots = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)-\frac{dL}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

Обозначим $H = \sum_{j=1}^{s}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L$.

Тогда уравнение (3.26) примет вид

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j \;\delta S = 0\,. \tag{3.27}$$

Функцию $H = H(q, \dot{q}, t)$ называют **обобщённой энергией**, а уравнение (3.27) – **уравнением изменения обобщённой энергии**.

Покажем, что в частном случае *H* совпадает с полной энергией механической системы *E*.

Так как $L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V_1 - V_0$, то по теореме об однородных функциях

$$H = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = 2T_2 + T_1 - V_1 - L = 2T_2 + T_1 - V_1 - T_2 - T_1 + V_1 - T_0 + V_0 = T_2 - T_0 + V_0\,.$$

С другой стороны, полная механическая энергия

$E = T + П = T_2 + T_1 + T_0 + П$, где $П$ – обычная потенциальная энергия.

Для стационарных связей $H = T_2 + V_0$ и $E = T_2 + П$.

Таким образом, если на систему не наложены связи или связи стационарны, то $V_0 \equiv П$ и понятие обобщённой энергии совпадает с понятием полной механической энергии.

Закон сохранения обобщённой энергии непосредственно вытекает из уравнения (3.27):

1) обобщённая энергия сохраняется, если функция Лагранжа явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют:

$H = const$, если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $Q_j^d = 0$ (интеграл Якоби);

2) обобщённая энергия сохраняется, если $\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j Q_j^d \dot{q}_j$, т.е. затраты на рассеивание энергии компенсируются «подкачкой» (изменением во времени функции Лагранжа).

1.3.8. Принцип Гамильтона–Остроградского

Дифференциальные вариационные принципы механики (например, принцип Даламбера–Лагранжа) дают критерий, позволяющий выделить действительное (истинное) движение механической системы среди других кинематически возможных её движений *для данного момента времени*.

Принцип Гамильтона–Остроградского – интегральный вариационный принцип. Он даёт критерий истинного движения системы не для одного момента времени, а для некоторого конечного промежутка времени $t_0 \le t \le t_1$.

Его суть: сопоставление значений некоторой функции на действительной траектории с ее значениями на виртуальных траекториях.

Рассмотрим в пространстве конфигураций $(q_1, q_2 ... q_s)$ близкие друг к другу действительную и виртуальную траектории системы, предполагая, что в начальный и конечный момент времени обе траектории пересекаются (рис. 1.13).

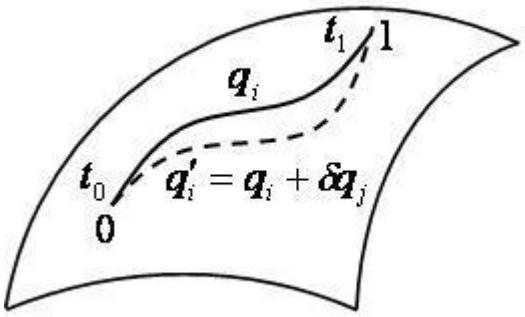


Рис. 1.13. Действительная и виртуальная траектории

Действительная траектория определяется функциями $q_j = q_j(t)$, при начальных условиях $q_j(t_0) = q_j^0$, $q_j(t_1) = q_j^1$ $(j = 1..s)$.

Виртуальная траектория получается из действительной при помощи виртуальных перемещений $\delta q_j(t)$ и задается уравнениями

$$q_j = q_j(t) + \delta q_j(t),$$

причем $\delta q_j(t_0) = 0$; $\delta q_j(t_1) = 0$ (это условие того, что действительное и виртуальное положение системы совпадают друг с другом в начальный и конечный момент времени).

В каждой точке действительной траектории удовлетворяется общее уравнение динамики, являющееся необходимым и достаточным условием движения системы, а виртуальное «движение» отличается от действительного тем, что для него не удовлетворяется общее уравнение механики; оно подчиняется только связям.

Принцип Гамильтона–Остроградского утверждает, что *действительное движение материальной системы отличается от кинематически возможных тем, что интеграл во времени, взятый от суммы вариаций кинетической энергии и элементарной работы активных сил системы, на действительной траектории равен нулю*:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt = 0. \qquad (3.28)$$

Принцип Гамильтона-Остроградского можно дать как основное понятие, т.е. без доказательства, и строить на нем дальнейшие рассуждения (см., например [1]), а можно показать его связь с другими принципами, например, с основным уравнением динамики (принцип Даламбера–Лагранжа).

Итак, пусть имеется механическая система с идеальными голономными связями. Запишем общее уравнение динамики (3.7)

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k - m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \delta\vec{r}_k = 0, \text{ или } \delta A = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \delta\vec{r}_k.$$

Преобразуем правую часть

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_k\vec{V}_k\right)\delta\vec{r}_k=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{V}_k\delta\vec{r}_k\right)-\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{V}_k\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_k)=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{V}_k\delta\vec{r}_k-\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{V}_k\delta\vec{V}_k=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{V}_k\delta\vec{r}_k-\delta T,$$

где $\delta T=\delta\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\vec{V}_k\vec{V}_k}{2}\delta\vec{r}_k$.

Таким образом, общее уравнение динамики примет вид

$$\delta T+\delta A=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\left(m_k\vec{V}_k\delta\vec{r}_k\right).$$

Проинтегрируем его в интервале от t_0 до t_1 при условии

$$\delta r_k(t_0)=\delta r_k(t_1)=0,$$

получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+\delta A\right)dt=0\ -\textbf{уравнение принципа Гамильтона–Остроградского}.$$

В потенциальном поле сил $\Pi=\Pi(q_1,q_2...q_s,t)$ и $-\delta A=\delta\Pi$.

Тогда формула принципа примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(T-\Pi\right)dt=0\ \text{ или }\ \int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0.$$

Скалярный функционал $\int_{t_0}^{t_1}Ldt=S$, зависящий от траектории движения системы, называется **действием по Гамильтону**, или просто **действием.**

Таким образом

$$\delta S=0. \qquad (3.29)$$

Принцип Гамильтона–Остроградского для голономной системы в случае существования **потенциальных сил**:

Действительное движение системы отличается от иных кинематически возможных движений тем, что для него вариация действия по Гамильтону, определяемого для произвольного промежутка времени, равна нулю.

Можно предложить другую формулировку: пусть в моменты времени от t_0 до t_1 система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами координат $q^{(0)}$ и $q^{(1)}$. Тогда, если эти положения близки друг к другу, между ними система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt,$$

имеет наименьшее возможное значение (**принцип наименьшего действия**).

Беря за основу принцип Гамильтона–Остроградского, можно вывести дифференциальные уравнения движения системы с голономными идеальными связями (уравнения Лагранжа II рода).

Так как $T=T(q,\dot{q},t)$, то вариация $\delta T=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right)$.

В пространстве конфигураций $\delta A=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j$.

Тогда уравнение принципа Гамильтона-Остроградского запишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j+\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}+Q_j\right)\delta q_j\right)dt=0.$$

Меняем местами интегрирование и суммирование и интегрируем первое слагаемое по частям (с учетом того, что $\delta q_j(t_0)=\delta q_j(t_1)=0$ и $\delta\dot{q}_j=\frac{d}{dt}\delta q_j$):

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}d\left(\delta q_j\right)=\ldots$$

Применим метод интегрирования по частям:

$\int_{t_0}^{t_1}ud(\cdot)=uv\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}vd(\cdot)$, где $u=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, $v=\delta q_j$.

Продолжим преобразование

$$\ldots=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j=0-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt.$$

Тогда уравнение принципа:

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{s}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T}{\partial q_j}+Q_j\right)\delta q_j dt=0\quad(j=1..s).$$

В силу независимости виртуальных перемещений δq_j

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j.$$

Таким образом, из принципа Гамильтона–Остроградского можно получить уравнение движения, а из уравнения движения – принцип Гамильтона–Остроградского. Из чего следует, что этот принцип может быть положен в основу динамики голономных систем.

1.3.9. Канонические уравнения Гамильтона

В уравнениях Лагранжа второго рода,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

описывающих движение голономной системы в потенциальном поле сил, проведем замену $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=p_j$. Тогда

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Новая переменная p_j называется **обобщенным импульсом**.

Гамильтон предложил записывать уравнения движения в переменных (q_j,p_j,t), которые были названы переменными Гамильтона.

Перейдем от переменных Лагранжа к переменным Гамильтона.

Запишем и преобразуем полный дифференциал функции Лагранжа $L=L(q_j,\dot{q}_j,t)$, используя определение обобщенного импульса, уравнение Лагранжа и формулу дифференцирования произведения двух функций ($d(uv)=vdu+vdu\Rightarrow vdu=d(uv)-vdu$):

$$dL(q_1,\dot{q}_1,t)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial t}dt=\sum_{j=1}^{s}\frac{dp_j}{dt}dq_j+\sum_{j=1}^{s}p_j d\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial t}dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\dot{p}_j dq_j+d\left(\sum_{j=1}^{s}p_j\dot{q}_j\right)-\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j dp_j+\frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Объединим дифференциалы в левой и правой частях:

$$d\left(\sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L\right) = -\sum_{j=1}^{s} \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt .$$

Функция $H(q, p, t) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$ называется **функцией Гамильтона, или гамильтонианом**.

Ее вид совпадает с видом обобщенной энергии $H(q, \dot{q}, t)$, поэтому ясен физический смысл функции Гамильтона: если на систему не наложены связи или связи склерономные (стационарные), то функция Гамильтона представляет собой полную механическую энергию. Отличие этих двух функций – в используемых переменных: в обобщенной энергии – координаты и скорости, в гамильтониане – координаты и импульсы.

Запишем теперь полный дифференциал функции Гамильтона $H = H(q_j, p_j, t)$:

$$dH = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt .$$

Сравним с предыдущим выражением для дифференциала гамильтониана:

$$-\sum_{j=1}^{s} \dot{p}_j dq_j + \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt .$$

Преобразовав, имеем

$$\sum_{j=1}^{s} \left(-\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) dq_j + \sum_{j=1}^{s} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) dp_j + \left(-\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt = 0 .$$

В силу независимости гамильтоновых переменных левая часть будет равна нулю, когда каждое из слагаемых будет равно нулю:

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0;\ \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0;\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (j = 1...s) .$$

Таким образом, получаем систему 2*s* дифференциальных уравнений первого порядка для 2*s* неизвестных функций *p*(*t*) и *q*(*t*):

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j};\ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} . \qquad (3.30)$$

Если действуют и диссипативные силы Q_j^d, то уравнения приобретают вид

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j};\ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j^d .$$

Ввиду формальной их простоты и симметрии эти уравнения называют **каноническими уравнениями Гамильтона**.

Попутно получено соотношение, означающее, что если функция Лагранжа не зависит от времени, то и функция Гамильтона тоже не зависит от времени, и наоборот:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} .$$

А так как для потенциальных сил (формула (3.27))

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

то

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} .$$

Вывод: если функция Гамильтона не зависит явно от времени ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$), то

$$H(q_j, p_j) = const . \qquad (3.31)$$

Следовательно, в этом случае существует **первый интеграл** канонической системы уравнений (интеграл Якоби).

Укажем еще один случай существования первого интеграла канонического уравнения.

Пусть функция Гамильтона H не зависит от какой-нибудь координаты q_i $(1 \le i \le s)$. Такие координаты ранее были названы циклическими.

Тогда $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ и из (3.30) следует $p_i = const$ (закон сохранения обобщенного импульса, соответствующего координате q_i).

Пример.

Записать канонические уравнения Гамильтона для свободной материальной точки в стационарном потенциальном поле в декартовой системе координат *x, y, z* (*s*=3).

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);\ \ П = П(x, y, z);\ \ L = T - П;\ \ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Поэтому $p_x = m\dot{x};\ p_y = m\dot{y};\ \ p_z = m\dot{z}$.

$$H = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + П(x, y, z) = \frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) + П(x, y, z).$$

Канонические уравнения:

$$\left.\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial П}{\partial x};\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial П}{\partial y};\ \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial П}{\partial z};\right\}$$ (сравните: $m\vec{a} = \vec{F}$),

$$\left.\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m};\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial p_y}{m};\ \frac{dz}{dt} = \frac{\partial p_z}{m};\right\}$$ (сравните: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$).

Кроме того, т.к. гамильтониан H не зависит явно от t, то имеем первый интеграл

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + П(x, y, z) = const,$$

выражающий закон сохранения полной механической энергии $(T + П = const)$.

Таким образом, решив канонические уравнения, можно найти как форму траектории, так и положение точки на траектории от времени, т.е. они полностью определяют движение системы.

В заключение отметим, что воображаемое пространство 2*s* измерений, по координатным осям которого «откладываются» обобщенные координаты q_j и импульсы p_j механической системы, называется **фазовым пространством**. Состояние системы в данный момент времени изображается в фазовом пространстве одной фазовой точкой. С течением времени эта точка движется по фазовой траектории. Независимость координат и импульсов в механике Гамильтона позволяет использовать ее для описания поведения микрочастиц.

1.3.10. Скобки Пуассона и первые интегралы

Ранее уже упоминалось о том, что использование первых интегралов позволяет упростить задачу исследования движения системы материальных точек.

В гамильтоновых переменных первым интегралом будет любое соотношение вида $f(q, p, t) = c$ (константа $c = f(q^0, p^0, t^0)$ определяется из начальных условий), которое тождественно удовлетворяется любым решением канонической системы уравнений.

Если удастся найти 2s независимых интегралов, тогда они образуют искомое решение

$$q_j = q_j(t, c_1, c_2 ... c_{2s}) \quad p_j = p_j(t, c_1, c_2 ... c_{2s})\ \ (j = 1...s).$$

Рассмотрим один прием нахождения первых интегралов.

Пусть $f(q_j, p_j, t)$ – некоторая функция координат, импульсов и времени. Составим ее полную производную по времени:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j .$$

Подставляя сюда вместо $\dot{q}_j$ и $\dot{p}_j$ их выражения из канонических уравнений Гамильтона, получим

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\},$$

где введено обозначение

$$\{f,H\}\equiv\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right). \qquad (3.32)$$

Это выражение называют **скобками Пуассона** для величин *H* и *f*.

Таким образом, чтобы некоторая функция была первым интегралом движения (т.е. оставалась постоянной при движении системы: $df/dt=0$), необходимо (а также и достаточно), чтобы $\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}=0$.

В частности, если интеграл не зависит явно от времени, то его скобки Пуассона с функцией Гамильтона должны обращаться в нуль $\{f,H\}=0$.

Отметим основные свойства скобок Пуассона:

1) $\{\varphi,\psi\}=-\{\psi,\varphi\}$;
2) $\{c\varphi,\psi\}=c\{\varphi,\psi\}$ ($c=const$);
3) $\{\varphi,c\}=0$;
4) $\{\varphi+\psi,\theta\}=\{\varphi,\theta\}+\{\psi,\theta\}$;
5) $\frac{\partial}{\partial t}\{\varphi,\psi\}=\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right\}+\left\{\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}$;
6) $\{\{\varphi,\psi\},\theta\}+\{\{\psi,\theta\},\varphi\}+\{\{\theta,\varphi\},\psi\}=0$ (тождество Якоби).

Имеет место следующее замечательное утверждение (**теорема Пуассона**): если f_1 и f_2 – первые интегралы системы канонических уравнений, то их скобка Пуассона $\{f_1,f_2\}$ также будет первым интегралом этой системы.

Доказательство.

По условию $\frac{\partial f_1}{\partial t}+\{f_1,H\}=0$; $\frac{\partial f_2}{\partial t}+\{f_2,H\}=0$.

Нужно доказать, что $\frac{\partial\{f_1,f_2\}}{\partial t}+\{\{f_1,f_2\},H\}=0$.

Воспользуемся тождеством Якоби, где положим $\varphi=f_1$, $\psi=f_2$, $\theta=H$:

$\{\{f_1,f_2\},H\}+\{\{f_2,H\},f_1\}+\{\{H,f_1\},f_2\}=0$.

Проведем замену: $\{f_2,H\}=-\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\{H,f_1\}=\frac{\partial f_1}{\partial t}$, получим

$\{\{f_1,f_2\},H\}+\left\{\frac{\partial f_2}{\partial t},f_1\right\}+\left\{\frac{\partial f_1}{\partial t},f_2\right\}=0$ или $\{\{f_1,f_2\},H\}+\frac{\partial\{f_1,f_2\}}{\partial t}=0$ (5-е свойство скобок Пуассона). Теорема доказана.

Может показаться, что теорема Пуассона всегда позволяет найти по двум известным первым интегралам третий первый интеграл, затем четвёртый и т.д., пока не будут найдены все.

Но на практике скобка Пуассона часто может быть либо константой, либо функцией известных первых интегралов, что часто бывает, если за первые интегралы брать интегралы, вытекающие из основных теорем динамики. Поэтому следует искать первые интегралы, характерные для данной задачи, а уже потом пытаться использовать скобки Пуассона.

Скобки Пуассона играют важную роль и в других разделах физики, например в квантовой механике (перестановочные соотношения Гейзенберга), в статической физике (уравнения для плотности вероятности) и др.

1.3.11. Действие как функция координат и времени

Каждая система материальных точек описывается своей функцией Гамильтона $H(q_j, p_j, t)$. Вид функций Гамильтона определяет фазовые траектории, которые заполняют фазовое пространство. Какая именно фазовая траектория будет реализована, зависит от начальных условий. Движение по фазовым траекториям удовлетворяет принципу наименьшего действия: $\delta S = 0$.

Но на каждой траектории значения экстремума действия будут различны. Поэтому можно рассматривать действие как величину, характеризующую движение по истинным траекториям.

Если сравнивать значения, которые действие имеет для траекторий, выходящих из общего начала $q_j(0) = q_j^{(0)}$, но проходящих в момент t_1 через различные положения, то действие для истинных траекторий будет являться явной функцией значений координат в верхнем пределе интегрирования $q_j^{(1)} = q_j$.

Если рассматривать траектории, выходящие из общего начала $q_j(0) = q_j^{(0)}$, но заканчивающиеся в заданном положении $q_j^{(1)}$ в различные моменты времени, то действие для истинных траекторий будет являться явной функцией времени.

Таким образом, действие для истинных траекторий будет являться явной функцией и времени и координат: $S = S(t, q_j)$.

Попробуем, не зная конкретного вида этой функции, записать выражение для ее частных производных по времени и координатам $\frac{\partial S}{\partial t}$ и $\frac{\partial S}{\partial q_j}$.

По определению действия его полная производная по времени вдоль траектории равна $\frac{dS}{dt} = L$. Выражая L через гамильтониан: $L = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H$, запишем дифференциал действия в виде

$$dS = \sum_{j=1}^{s} p_j dq_j - H dt. \tag{3.33}$$

С другой стороны, дифференциал действия как функции координат и времени можно записать в виде

$$dS = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

Приравнивая правые части этих выражений, имеем

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right) dt + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} - p_j \right) dq_j = 0.$$

В силу независимости переменных имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \text{ и } \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j. \tag{3.34}$$

Эти соотношения ниже будут использованы для получения уравнения Гамильтона–Якоби.

1.3.12. Вывод канонических уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия

Полученное выражение (3.33) имеет понятный физический смысл: каково бы ни было внешнее воздействие на систему во время движения, ее конечное состояние не может быть

произвольной функцией начального состояния – возможно только такое движение, при котором выражение, стоящее в правой части (3.33), является *полным дифференциалом*.

Воспользуемся этим выражением и принципом наименьшего действия, чтобы другим способом получить канонические уравнения Гамильтона. Ограничимся пока одной координатой.

Из (3.33) следует

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (pdq - Hdt).$$

Тогда

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta p dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p dt) = \int_{t_0}^{t_1} \delta p (dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt) + p\delta q\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (\delta q dp + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt)\delta p - \int_{t_0}^{t_1} (dp + \frac{\partial H}{\partial q}dt)\delta q = 0.$$

В силу независимости δp и δq

$$dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt = 0; \quad dp + \frac{\partial H}{\partial q}dt = 0.$$

Таким образом, получены канонические уравнения Гамильтона для одной степени свободы:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

В общем случае

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

1.3.13. Решения уравнений движения СМТ на основе уравнения Гамильтона–Якоби

Запишем одно из соотношений (3.34) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_j, p_j, t) = 0.$$

Если обобщенные импульсы в гамильтониане заменить через частные производные $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ (второе из соотношений (3.34), то получим уравнение в частных производных первого порядка, которому должна удовлетворять функция $S = S(t, q_j)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ...q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}; t) = 0. \qquad (3.35)$$

Это **уравнение Гамильтона–Якоби**.

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями оно также являются основой некоторого общего метода интегрирования уравнений движений механической системы.

Изложим этот метод.

Напомним, что **полным интегралом** называется решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных.

В уравнении Гамильтона–Якоби независимыми переменными являются время и координаты – всего *s*+1 переменных. Для системы с *s* степенями свободы полный интеграл этого уравнения должен содержать *s*+1 произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_s, \alpha_{s+1}$. Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби будет иметь вид

$$S = f(t, q_1, ..., q_s; \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_s, \alpha_{s+1}).$$

Сразу отметим, что так как функция *S* входит в уравнение только через свои производные, то *s*+1–я произвольная постоянная будет входить в полный интеграл только аддитивно, т.е. интеграл всегда можно представить в виде

$$S = f(t, q_1, ...q_s; \alpha_1, ...\alpha_s) + \alpha_{s+1}.$$

Существует **теорема Якоби**, которая дает возможность по известному полному интегралу уравнения Гамильтона–Якоби находить неизвестные интегралы канонических уравнений Гамильтона: если некоторая функция $S(t, q_j, \alpha_j)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби, то решение канонических уравнений Гамильтона определяется соотношениями вида

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j; \;\; p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \;\; (j = 1...s), \tag{3.36}$$

где α_j и β_j – произвольные постоянные.

Таким образом, решение задачи о движении механической системы методом Гамильтона–Якоби сводится к выполнению следующего алгоритма.

1. Записать функцию Гамильтона системы $H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{s} p_j q_j - L$.
2. Составить уравнение Гамильтона–Якоби $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_j, p_j, t) = 0$.
3. Найти первый интеграл этого уравнения $S = S(t, q_j, \alpha_j)$.
4. Продифференцировать его по произвольным постоянным α_j и приравнять к новым постоянным β_j; получится система *s* алгебраических уравнений: $\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j \;\; (j = 1...s)$.
5. Решить эту систему относительно q_j и найти: $q_j = q_j(t, \alpha_j, \beta_j)$.
6. Найти зависимость импульсов от времени из уравнений: $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$.

К сожалению, общего метода нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби (п.3 алгоритма) для произвольной функции *H* не существует. Поэтому нельзя сказать, что замена интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (которыми являются канонические уравнения) нахождением полного интеграла уравнения в частных производных (уравнения Гамильтона–Якоби) существенно облегчает задачу. Но во многих практических ситуациях он оказывается весьма эффективным методом нахождения точных решений канонических уравнений.

Рассмотрим, например, частный случай – движение системы в поле потенциальных или обобщенно-потенциальных сил. Гамильтониан здесь явно не зависит от времени $H = H(q, p)$, существует обобщенный интеграл энергии $H = h$, где *h* – произвольная постоянная, а в уравнении Гамильтона–Якоби можно провести разделение переменных.

Тогда уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}) = 0 \tag{3.37}$$

должна удовлетворять функция

$$S = -ht + W(q_1, ...q_s; \alpha_1, ...\alpha_{s-1}, h),$$

линейно зависящая от времени (полный интеграл уравнения).

Подставляя ее в уравнение (3.37) и имея в виду, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \;\; \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial q_j} \;\; (j = 1...s),$$

для функции *W* (называемой «укороченным действием») получим уравнение

$$H(q_1, ...q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_s}) = h.$$

Теперь, применяя теорему Якоби, получим соотношения:

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial q_j} = p_j \quad (j = 1...s);$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1...s-1);$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h} = \beta_s ,$$

где $\beta_1 ... \beta_s$ – произвольные постоянные.

Так как W явно от времени не зависит, то «поле импульсов» (первая группа уравнений) стационарно, s–1 интегралов (вторая группа уравнений) определяют совокупность «траекторий» системы в пространстве конфигураций (это геометрические соотношения), а последний интеграл определяет закон движения системы.

Метод разделения переменных также можно применить при наличии циклических переменных.

Пример. Свободное вертикальное падение материальной точки у поверхности Земли.

Пусть ось Oq направлена вертикально вниз. Запишем лагранжиан системы, а затем – гамильтониан, заменив скорости на импульсы:

$$L = T - \Pi = \frac{m\dot{q}^2}{2} + mgq ;$$

$$H = p\dot{q} - L = p\dot{q} - \frac{m\dot{q}^2}{2} - mgq = \left[p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}; \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \right] = p\frac{p}{m} - \frac{p^2}{2m} - mgq = \frac{p^2}{2m} - mgq .$$

Так как гамильтониан явно от времени не зависит, то имеет место обобщенный интеграл энергии $H = h$ или $\frac{p^2}{2m} - mgq = h$. Отсюда $p = \sqrt{2m(h + mgq)}$. Так как $\frac{\partial S}{\partial q} = p$, уравнение Гамильтона-Якоби $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$ записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - mgq = 0 .$$

Полный интеграл этого уравнения

$$S = -ht + \int \sqrt{2m(h + mgq)}\, dq$$

(можно убедиться непосредственной подстановкой).

По теореме Якоби $\frac{\partial S}{\partial h} = \beta$ или $-t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{(h + mgq)}} = \beta$.

Интегрируя, получаем $-t + \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{(h + mgq)}}{g} = \beta$.

Произвольные постоянные β и h находятся из начальных условий.

Пусть при $t = 0 \quad q = 0, \ \dot{q} = 0.$ Отсюда следует, что $p = 0$, т.к. $p = m\dot{q}$.

Тогда $h = 0, \ \beta = 0$ и из последнего соотношения получаем решение задачи:

$$q = \frac{gt^2}{2}; \quad p = mgt .$$

Таким образом, здание классической механики систем материальных точек можно возводить тремя способами в зависимости от того, какие принципы закладываются в основу (рис. 1.14).

1. Ньютонова механика (ньютонова форма механики).

Фундамент – законы (принципы) Ньютона. Система движется в трехмерном декартовом пространстве: $\vec{r}_k(x, y, z)$. Чтобы предсказать ее движение, надо при t=0 знать $\vec{r}_k$ и $\dot{\vec{r}}_k$ $(k = 1...N)$. Уравнения движения – уравнения II закона Ньютона $m_k \dfrac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k + \vec{R}_k$.

2. Лагранжева механика (лагранжева форма механики).

Фундамент – принцип Даламбера–Лагранжа.

Система движется в s-мерном пространстве конфигураций $q_1, q_2 ... q_s$ (s – число степеней свободы). Чтобы предсказать ее движение, надо при $t = 0$ знать q_j и $\dot{q}_j$ $(j = 1...s)$.

Уравнения движения – уравнения Лагранжа II рода $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ $(j = 1...s)$ (при отсутствии диссипативных сил).



Рис. 1.14. Принципы и уравнения классической механики

3. Гамильтонова механика (гамильтонова форма механики).

Фундамент – принцип Гамильтона–Остроградского.

Система движется в 2s-мерном фазовом пространстве $q_1,..., q_s$, $p_1,..., p_s$. Чтобы предсказать ее движение, надо при t = 0 знать q_j и p_j $j = 1...s$. Уравнения движения – канонические уравнения Гамильтона $\dfrac{dq_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}; \dfrac{dp_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}$ $(j = 1...s)$.

1.4. Малые колебания систем материальной точки

В часах старинных лишь однажды заведенный
Не в силах маятник себя остановить.
В вопросе вечном меж двух граней заключенный,
Ответа ищет, как судьбу свою решить.

Качнется вправо – и, едва достигнув края,
Назад стремится, изменяя выбор свой.
Лишь на мгновенье у предела замирая,
Обратно движется, не обретя покой.

Так он однажды посредине и застынет,
Меж двух желанных берегов навек замрет.
Одну мечту он опрометчиво покинет
В надежде тщетной, что другую обретет.

http://www.samopal.net/stixi/10237

1.4.1. Устойчивость положения равновесия. Потенциальная энергия как квадратичная форма обобщённых координат

Очень распространённый тип движения механических систем представляет собой так называемые малые колебания, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия.

Из основного уравнения статики вытекает, что для систем с идеальными голономными связями в потенциальном поле сил условие равновесия системы совпадает с условием экстремума потенциальной энергии. Для стационарного потенциального поля это условие имеет вид (п. 1.3.4):

$$d\Pi(q_1, q_2, ..., q_S) = 0 .$$

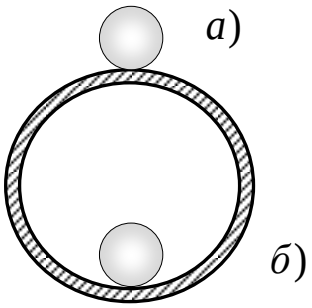


Рис.1.15. Устойчивое (а) и неустойчивое (б) равновесие

Устойчивому же равновесию соответствует такое положение системы, в котором её потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум (теорема Лагранжа–Дирихле); отклонение от такого положения приводит к возникновению силы *dП/dq*, стремящейся вернуть систему обратно. В частности, из теоремы Лагранжа–Дирихле следует, что положение равновесия механической системы в однородном поле тяжести будет устойчивым, когда центр тяжести системы занимает наинизшее положение (рис. 1.15 *б*).

Разложим потенциальную энергию в степенной ряд по обобщенным координатам в окрестности положения равновесия. Не нарушая общности, будем считать, что в положении равновесия систем все обобщённые координаты равны нулю. Тогда соответствующий ряд Тейлора имеет вид

$$\Pi(q_1 ... q_s) = \Pi(0,...,0) + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + ...$$

Так как потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то, не нарушая общности, можно считать, что $\Pi(0,...,0) = 0$.

Первая сумма в разложении равна нулю, т.к. в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю

$$Q_{j_0} = \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 = 0 .$$

Если ввести обозначения

$$c_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 ,$$

то

$$\Pi(q_1 ... q_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} c_{i,j} q_i q_j + ...$$

Многоточие – совокупность членов разложения, у которых порядок относительно величин q_j больше второго.

По определению коэффициенты $c_{i,j}$ – симметричные, т.е. $c_{i,j} = c_{j,i}$.

Если считать малыми отклонения обобщенных координат от положения устойчивого равновесия, то с точностью до величин более высокого порядка малости, чем второй, потенциальную энергию можно представить в виде квадратичной формы обобщенных координат.

Отметим, что ранее мы представили в виде квадратичных форм кинетическую энергию (для стационарных связей) и диссипативную функцию.

Таким образом, имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} a_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \, , \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} c_{i,j} q_i q_j \, , \; R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} b_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \, , \tag{4.1}$$

где $a_{i,j} = a_{i,j}(0,...,0)$ – коэффициенты инерции;

$b_{i,j} = b_{i,j}(0,...,0)$ – коэффициенты диссипации (трения);

$c_{i,j} = c_{i,j}(0,...,0)$ – коэффициенты жесткости.

$a_{i,j}(0,...,0)$ и $b_{i,j}(0,...,0)$ – постоянные коэффициенты, получающиеся при разложении коэффициентов $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия.

1.4.2. Линеаризация уравнений движения. Свободные колебания

Пусть на систему со стационарными голономными связями действуют потенциальные и диссипативные силы.

Запишем уравнения движения – уравнение Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1...s) .$$

Рассматривая эти уравнения при малых значениях величин q_j и $\dot{q}_j$, заменим величины T, Π и R их разложениями и получим систему s линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{s} \left(a_{i,j} \ddot{q}_i + b_{i,j} \dot{q}_i + c_{i,j} q_i \right) = 0 \quad (j = 1...s) . \tag{4.2}$$

По общим правилам решения таких уравнений решение ищем в виде

$$q_i = A_i \exp(pt) \quad (i = 1...s), \tag{4.3}$$

где A_i и p – постоянные коэффициенты.

Подставляя это решение в уравнение (4.2), получим уравнение для постоянных A_i:

$$\sum_{i=1}^{s} \left(a_{i,j} p^2 + b_{i,j} p + c_{i,j} \right) A_i = 0 \quad (j = 1...s) . \tag{4.4}$$

Эта система однородных линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю:

$$\Delta = \left\| a_{i,j} p^2 + b_{i,j} p + c_{i,j} \right\| = 0 . \tag{4.5}$$

или

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}p^2+b_{1,1}p+c_{1,1} & a_{2,1}p^2+b_{2,1}p+c_{2,1} & \dots & a_{s,1}p^2+b_{s,1}p+c_{s,1} \\ a_{1,2}p^2+b_{1,2}p+c_{1,2} & a_{2,2}p^2+b_{2,2}p+c_{2,2} & \dots & a_{s,2}p^2+b_{s,2}p+c_{s,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,s}p^2+b_{1,s}p+c_{1,s} & a_{2,s}p^2+b_{2,s}p+c_{2,s} & \dots & a_{s,s}p^2+b_{s,s}p+c_{s,s} \end{Vmatrix} = 0.$$

Это алгебраическое уравнение 2*s*-й степени относительно p и, следовательно, имеет 2*s* корней p_k $(k=1...2s)$.

Оно называется характеристическим уравнением, а его корни p_k – **собственными значениями** характеристического уравнения.

После подстановки каждого из корней в уравнение (4.4), находим A_i^k, которые называются **амплитудами**, соответствующими собственному значению p_k.

Так как коэффициенты характеристического уравнения вещественны, то его корни могут быть либо вещественными, либо попарно комплексно-сопряженными. При этом в рассматриваемом случае вещественные корни должны быть непременно отрицательны, а комплексные корни – иметь отрицательную вещественную часть. В противном случае координаты и скорости, а с ними и энергия механической системы экспоненциально возрастали бы со временем, между тем наличие диссипативных сил должно приводить к уменьшению энергии.

Имея в виду эти обстоятельства, можно сделать вывод, что каждое из собственных значений p_k существует в одной из форм:

$$p_k = -\lambda_k \pm i\omega_k, \text{ где } i=\sqrt{-1} \text{ – мнимая единица,}$$

или

$$p_k = -\lambda_k .$$

Здесь λ_k и ω_k – положительные коэффициенты:

λ_k – коэффициенты затухания;

ω_k – собственные частоты системы.

Таким образом, если в качестве обобщенных координат выбираются действительные величины, то общее решение системы (сумма всех частных решений) примет вид

$$q_i = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{2s} A_i^k \exp(p_k t)\right) \quad (i=1...s). \tag{4.6}$$

Рассмотрим несколько частных случаев, имеющих важное практическое применение.

1. Пусть все корни – комплексные. Тогда, учитывая, что комплексно сопряженных корней – *s*, и используя формулу Эйлера, связывающую экспоненциальную и тригонометрическую формы записи комплексного числа

$$\exp(\pm i\omega t) = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t),$$

решение (4.6) примет вид

$$q_i = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{s} A_i^k \exp(-\lambda_k t)\exp(\pm i\omega_k t)\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\exp(-\lambda_k t) D_{1i}^k \cos(\omega_k t) + D_{2i}^k \sin(\omega_k t)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} C_i^k \exp(-\lambda_k t)\cos(\omega_k t - \alpha_k) \quad (i=1...s),$$

где C_i^k и D_i^k – некоторые константы, связанные с A_i^k.

Выраженное этой формулой движение представляет собой так называемые **затухающие колебания** – гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой (рис. 1.16). Скорость убывания определяется показателем λ_k. Угол $\omega_k t - \alpha_k$ – фаза колебания, α_k – начальная фаза.

2. Пусть все корни – действительные ($\omega_k = 0$). Тогда решение (4.6) примет вид

$$q_i = \sum_{k=1}^{2s} A_i^k \exp(-\lambda_k t) \quad (i=1...s).$$

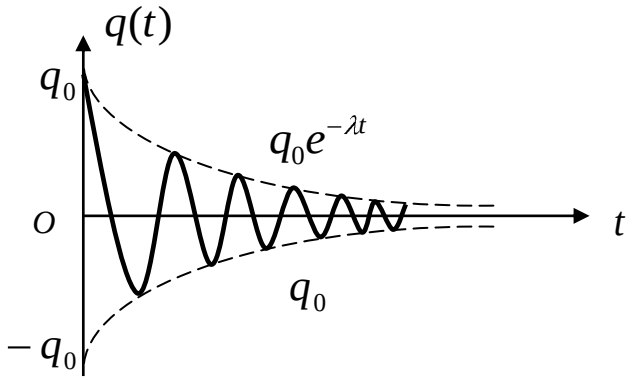


Рис. 1.16. Затухающие колебания

Видно, что колебательный процесс отсутствует, и движение заключается в убывании $|q_i|$, т.е. в асимптотическом приближении к положению равновесия (рис. 1.17). Этот тип движения называется **апериодическим затуханием**.

3. Пусть диссипация энергии отсутствует (т.е. все коэффициенты $b_{i,j} = 0$). Тогда все корни будут чисто мнимыми, их действительные части λ_k должны равняться нулю, т.к. иначе q_j и $\dot{q}_j$ имели бы экспоненциальные возрастающие и убывающие со временем множители, что при произвольных условиях привело бы к изменению со временем полной механической энергии *E=T+П* системы в противоречии с законом её сохранения.

В этом случае движение описывается формулой

$$q_i = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{2s} A_i^k \exp(\pm i\omega_k t) \right) = \sum_{k=1}^{s} C_i^k \cos(\omega_k t - \alpha_k) \qquad (i = 1...s),$$

т.е. система совершает незатухающие колебания **(собственные колебания**), представляющие собой наложение гармонических колебаний с собственными частотами системы (рис. 1.18).

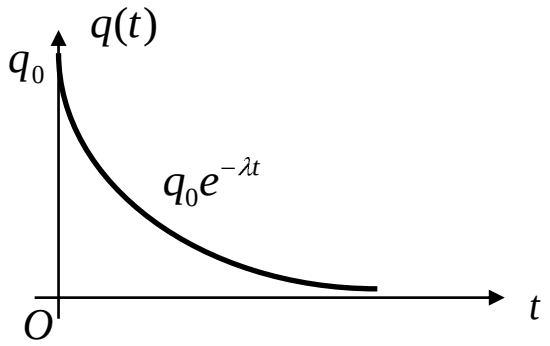


Рис. 1.17. Апериодическое затухание

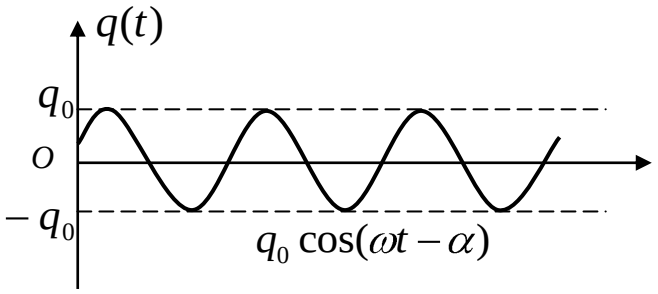


Рис. 1.18. Гармонический осциллятор

Подчеркнём два обстоятельства:

1) $q_k(t) = C_i^k \cos(\omega_k t - \alpha_k)$ в общем случае не будут строго периодическими функциями, т.е. q_k может никогда не принимать своего начального состояния q_{k0}, например при несоизмеримости собственных частот;

2) нельзя отождествлять какую-либо собственную частоту ω_k с частотой колебаний какой-либо определённой точки системы. Это результат взаимодействия всех точек системы. Вообще говоря, собственные частоты характеризуют движение системы **в целом.**

1.4.3. Вынужденные колебания

Перейдём к рассмотрению колебаний в системе, на которую действуют некоторые внешние нестационарные силы. Такие колебания называют вынужденными, в отличие от рассмотренных ранее свободных колебаний.

Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешние силы достаточно слабые. Тогда, очевидно, уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j(t) \quad (j = 1...s),$$

а линеаризованные

$$\sum_{i=1}^{s} \left(a_{i,j}\ddot{q}_i + b_{i,j}\dot{q}_i + c_{i,j}q_i \right) = Q_j(t) \quad (j = 1...s). \tag{4.7}$$

Отметим сразу, что это лишь одна из простейших систем уравнений, описывающих движение под действием нестационарных сил. В ряде случаев нестационарность сил приводит к появлению переменных коэффициентов $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$.

В отличие от (4.4) это система s линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решение такой системы находится в виде суммы двух решений: общего решения системы однородных уравнений и частого решения неоднородной системы.

Решение однородной системы было рассмотрено ранее (свободные колебания).

Найдем частное решение.

Ограничимся рассмотрением системы с одной степенью свободы, на которую действует вынуждающая сила, гармонически зависящая от времени (иными словами – простая периодическая функция времени):

$$Q(t) = Q_0 \cos(\gamma t + \beta),$$

где γ – частота, β – начальная фаза вынуждающей силы.

Тогда уравнение (4.7) запишется в виде

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \cos(\gamma t + \beta). \tag{4.8}$$

Преобразуем его:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega^2 q = Q\cos(\gamma t + \beta),$$

где $2\lambda = \frac{b}{a};\ \omega^2 = \frac{c}{a};\ Q = \frac{Q_0}{a}$.

Представляя это уравнение в комплексном виде

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega^2 q = Qe^{i(\gamma t+\beta)}. \tag{4.9}$$

его частное решение q_1 будем искать в виде

$$q_1 = be^{i(\gamma t+\beta+\Delta)} = be^{i\Delta}e^{i(\gamma t+\beta)} = Be^{i(\gamma t+\beta)},$$

где $B = be^{i\Delta}$ – комплексная амплитуда.

Подставляя частное решение в уравнение (4.9), проводя дифференцирование и сокращая на общий множитель $e^{i(\gamma t+\beta)}$, получим уравнение для B

$$-B\gamma^2 + 2B\lambda i\gamma + \omega^2 B = Q.$$

Выражая B и умножая числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное выражение, имеем

$$B = \frac{Q}{\omega^2 - \gamma^2 + i2\lambda\gamma} = \frac{Q(\omega^2 - \gamma^2 - i2\lambda\gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2 + i2\lambda\gamma)(\omega^2 - \gamma^2 - i2\lambda\gamma)} = \frac{Q(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} - \frac{2Q\lambda\gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}i.$$

Сравнивая показательную и алгебраическую формы одного и того же выражения (см. Примечание)

$$be^{i\Delta} = \frac{Q(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} - \frac{2Q\lambda\gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}i,$$

получаем выражения для неизвестных b и Δ в частном решении q_1:

$$b(\gamma)=\frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}};\ \Delta(\gamma)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2\lambda\gamma}{\omega^2-\gamma^2}\right). \tag{410}$$

Примечание.

$z=x+iy$ – алгебраическая форма комплексного числа;

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа;

$z=re^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

Формулы, их связывающие:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$.

Конец примечания.

Следовательно, частное решение, описывающее вынужденные колебания системы, имеет вид

$$q_1(t)=b(\gamma)\cos(\gamma t+\beta+\Delta(\gamma)).$$

Амплитуда вынужденного колебания $b(\gamma)$ зависит от амплитуды возмущающей силы Q и частот ω и γ.

Обозначим $\nu=\frac{\lambda}{\omega}$ – коэффициент демпфирования.

Тогда

$$b(\gamma)=\frac{Q}{\sqrt{\omega^4+\gamma^4-2\omega^2\gamma^2(1-2\nu^2)}}.$$

Анализ поведения $b(\gamma)$ показывает (рис. 1.19): если затухание достаточно мало ($\nu^2<<1$), то при $\gamma\approx\omega$ имеет место резонанс, т.е. резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний.

$$b(\gamma)\to\frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2}}\to\infty.$$

При $\nu\neq 0$ амплитуда колебаний при изменении частоты вынуждающей силы γ достигает некоторого максимума, а затем асимптотически стремится к нулю.

Нетрудно также видеть, что вынужденное колебание по фазе всегда отстает от возмущающей силы, т.е. $\Delta(\gamma)$ всегда отрицательна (рис. 1.20).

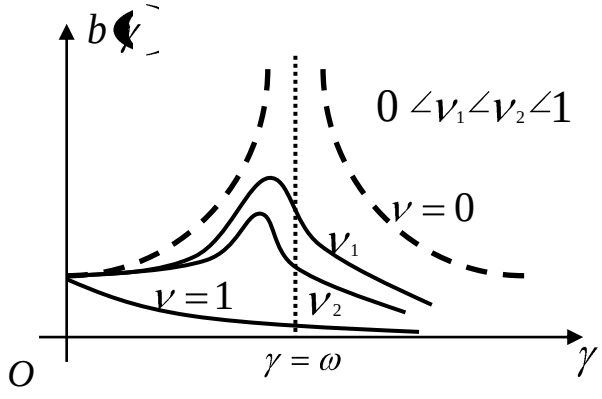


Рис. 1.19. Амплитуда вынужденных колебаний

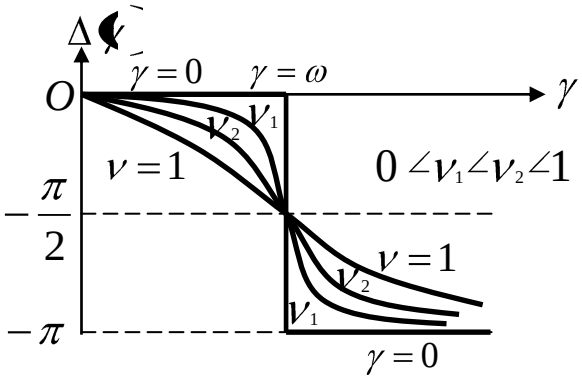


Рис. 1.20. Фаза вынужденных колебаний

Запишем теперь решение однородной системы уравнений (воспользовавшись результатами п. 1.4.2 для одной степени свободы):

$$q_0=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t-\alpha).$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \omega\sqrt{1-\nu^2}$.

Следовательно, общее решение запишется в виде

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_0 - \alpha) + b(t)\cos(\gamma t + \beta + \Delta(t)). \quad (4.11)$$

При наличии вязкого трения колебания системы состоят из затухающих колебаний, происходящих с частотой ω_0, и вынужденных колебаний, происходящих с частотой вынуждающей силы γ .

Отметим, что практический интерес, в основном, представляет рассмотрение вынужденных колебаний, так как амплитуда затухающих колебаний через конечный промежуток времени становится малой по сравнению с амплитудой вынужденных колебаний.

1.4.4. Электромеханические аналогии. Уравнения Лагранжа–Максвелла

Колебательные процессы происходят и в электрических цепях, причем они описываются теми же уравнениями, что и колебания механических систем. Поэтому можно говорить об электромеханических аналогиях.

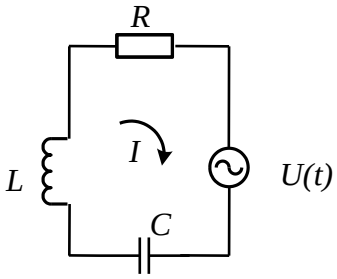


Рис. 1.21. Цепь последовательного соединения

Сложные электрические цепи являются сочетанием электрических контуров с последовательным или параллельным соединением элементов: источников напряжения и тока (активные элементы), резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности (пассивные элементы).

Рассмотрим простейшее последовательное соединение (рис. 1.21).

Здесь R – электрическое сопротивление резистора , L – индуктивность катушки индуктивности, C – емкость электрического конденсатора; $U(t)$ – напряжение (ЭДС) источника электрической энергии, необходимого для поддержания электрического тока; I – сила тока в цепи.

Используем второй закон Кирхгофа (алгебраическая сумма падений напряжений по любому замкнутому контуру цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих вдоль этого же контура).

Падение напряжения на резисторе – RI ;

ЭДС самоиндукции на катушке индуктивности – $L\dfrac{dI}{dt}$;

напряжение конденсатора – $\dfrac{1}{C}q^e$.

Здесь q^e – заряд конденсатора: $I = \dfrac{dq^e}{dt}$.

Тогда

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q^e = U(t)$$

или, выражая ток через заряд:

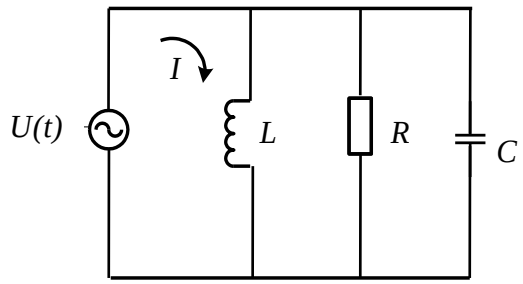
$$L\frac{d^2q^e}{dt^2} + R\frac{dq^e}{dt} + \frac{1}{C}q^e = U(t). \quad (4.12)$$

Рассмотрим простейшее параллельное соединение (рис. 1.22).

Используем первый закон Кирхгофа (алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю).

Ток в резисторе – $\dfrac{U}{R}$;

ток в катушке индуктивности – $\frac{1}{L}\int U dt$;



ток в конденсаторе – $C\frac{dU}{dt}$.

Тогда

$$\frac{U}{R}+\frac{1}{L}\int U dt + C\frac{dU}{dt} - I(t) = 0$$

или, продифференцировав по времени:

Рис. 1.22. Цепь параллельного соединения

$$C\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dU}{dt}+\frac{1}{L}U=\frac{dI}{dt}. \qquad (4.13)$$

Отметим сразу границы применимости этих уравнений. Законы Кирхгофа справедливы для электрических цепей постоянного и квазистационарного, т.е. относительно медленно изменяющегося переменного тока. Условие квазистационарности для синусоидальных переменных токов – малость геометрических размеров электрической цепи по сравнению с длиной волны. Например, токи промышленной частоты (50 Гц), как правило, можно рассматривать как квазистационарные токи (частоте 50 Гц соответствует длина волны ~ 6000 км).

Теперь запишем уравнение малых колебаний механической системы с одной степенью свободы (4.8):

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+b\frac{dq}{dt}+cq=Q(t). \qquad (4.14)$$

Сравнивая уравнения (4.12) – (4.14) можно увидеть некоторые аналогии между механическими и электрическими величинами, описывающими поведение систем. Сведем их в табл. 1.1.

Из этой системы видно, что ЭДС в электрической цепи последовательного соединения аналогична силе, индуктивность аналогична массе и обладает инерционностью и энергия, запасаемая в магнитном поле катушки индуктивности, является кинетической энергией. Конденсатор, аналогично упругому элементу механической системы, запасает энергию, которую логично считать потенциальной. Активное сопротивление действует аналогично механическому вязкому сопротивлению, и энергия, выделяемая на нем, рассеивается в виде тепла.

В электрической цепи параллельного соединения меняются роли катушки индуктивности и конденсатора. Теперь емкость аналогична массе, и энергия, запасаемая в электрическом поле конденсатора, является кинетической энергией сети. Катушка индуктивности же запасает потенциальную энергию цепи.

По аналогии можно записать выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции для системы с s степенями свободы (табл. 1.2).

Тогда формально уравнения колебаний в электрических контурах можно описывать уравнениями Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_m}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T_m}{\partial q_j}+\frac{\partial \Pi_m}{\partial q_j}+\frac{\partial R_m}{\partial \dot{q}_j}=Q_{mj}(t) \quad (j=1..s). \qquad (4.15)$$

При m = 1 работает аналогия «координата–заряд»:

$q \leftrightarrow q^e$ – обобщенная координата $\leftrightarrow$ электрический заряд;

$\dot{q} \leftrightarrow \dot{q}^e = I$ – обобщенная скорость $\leftrightarrow$ электрический ток;

T_1 – энергия магнитного поля;

Π_1 – энергия электрического поля;

R_1 – рассеивание энергии.

Таблица 1.1. Электромеханические аналогии

Механическая система	Электрическая система	
	Первая аналогия «координата–заряд» (последовательное соединение)	Вторая аналогия «координата–напряжение» (параллельное соединение)
Обобщенная координата q	Заряд q^e	Напряжение U
Обобщенная скорость $\dot{q}$	Ток $I = \dot{q}^e$	Изменение напряжения $\frac{dU}{dt}$
Обобщенная сила $Q(t)$	Напряжение (ЭДС) $U(t)$	Изменение тока $\frac{dI}{dt}$
Коэффициент инерции (масса) m	Индуктивность L	Емкость C
Коэффициент диссипации (трения) b	Сопротивление $\tilde{R}$	Проводимость $1/\tilde{R}$
Коэффициент жесткости c	Инверсная емкость $1/C$	Инверсная индуктивность $1/L$
Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$	Энергия магнитного поля $T_1 = \frac{1}{2}L(\dot{q}^e)^2$	Энергия электрического поля $T_2 = \frac{1}{2}C(\dot{U})^2$
Потенциальная энергия $П = \frac{1}{2}cq^2$	Энергия электрического поля $П_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}(q^e)^2$	Энергия магнитного поля $П_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{L}(U)^2$
Диссипативная функция $R = \frac{1}{2}b\dot{q}^2$	Мощность рассеяния (потери энергии на джоулево тепло) $R = \frac{1}{2}\tilde{R}(\dot{q}^e)^2$	Мощность рассеяния (потери энергии на джоулево тепло) $R_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\tilde{R}}(\dot{U})^2$

Таблица 1.2. Энергетические электромеханические аналогии для систем с s степенями свободы

Механическая система	Электрическая система	
	Первая аналогия «координата–заряд» (последовательное соединение)	Вторая аналогия «координата–напряжение» (параллельное соединение)
Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{i,j}\dot{q}_i\dot{q}_j$	Энергия магнитного поля $T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{i,j}\dot{q}^e{}_i\dot{q}^e{}_j$	Энергия электрического поля $T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} C_{i,j}\dot{U}_i\dot{U}_j$
Потенциальная энергия $П = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{i,j}q_iq_j$	Энергия электрического поля $П_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\frac{1}{C_{i,j}}q^e{}_iq^e{}_j$	Энергия магнитного поля $П_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\frac{1}{L_{i,j}}U_iU_j$
Диссипативная функция $R = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} b_{i,j}\dot{q}_i\dot{q}_j$	Мощность рассеяния (потери энергии на джоулево тепло) $R_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\tilde{R}_{i,j}\dot{q}^e{}_i\dot{q}^e{}_j$	Мощность рассеяния (потери энергии на джоулево тепло) $R_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\frac{1}{\tilde{R}_{i,j}}\dot{U}_i\dot{U}_j$

При $m = 2$ работает аналогия «координата–напряжение»:

$q \leftrightarrow U$ – обобщенная координата $\leftrightarrow$ напряжение;

$\dot{q} \leftrightarrow \dot{U}$ – обобщенная скорость $\leftrightarrow$ скорость изменения напряжения по времени;

T_2 – энергия электрического поля;

$П_2$ – энергия магнитного поля;

R_2 – потери энергии на джоулево тепло.

Возможность применения уравнений Лагранжа II рода к электрическим системам была показана Максвеллом. Поэтому уравнения (4.15) для систем с сосредоточенными параметрами, характеризуемых конечным числом степеней свободы, называют **уравнениями Лагранжа-Максвелла**.

На рис. 1.23 приведена трехконтурная схема последовательного соединения с тремя степенями свободы, на рис. 1.24 – двухконтурная схема параллельного соединения.

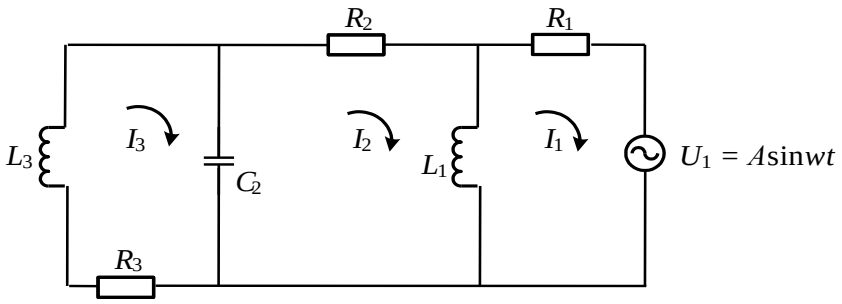


Рис. 1.23. Трехконтурная схема последовательного соединения ($s = 3$)

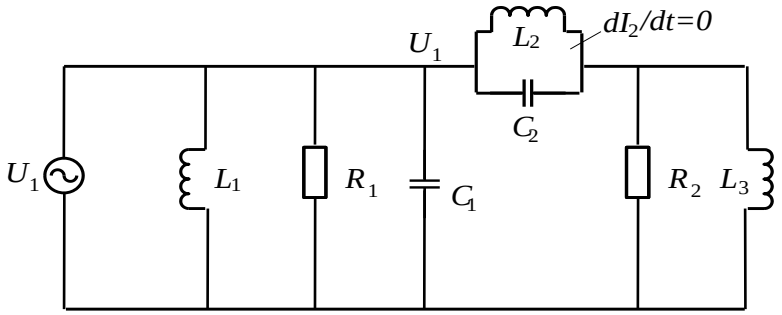


Рис. 1.24. Двухконтурная схема параллельного соединения ($s = 2$)

Применим, например, для схемы последовательного соединения аналогию «координата-заряд» и запишем кинетическую энергию, потенциальную энергию и диссипативную функцию (обозначив для простоты заряд $q^e \equiv q$):

$$T = \frac{1}{2} L_1 (I_1 - I_2)^2 + \frac{1}{2} L_3 I_3^2;$$

$$П = \frac{1}{2} \frac{1}{C_2} (q_2 - q_3)^2;$$

$$R = \frac{1}{2} R_1 I_1^2 + \frac{1}{2} R_2 I_2^2 + \frac{1}{2} R_3 I_3^2, \quad U_1 = A \sin \omega t; \quad U_2 = U_3 = 0.$$

Заменим: $I = \frac{dq}{dt}$, подставим в уравнение Лагранжа–Максвелла (4.15) и получим систему уравнений

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 - L_1\ddot{q}_2 + R_1\dot{q}_1 = A\sin\omega t; \\ -L_1\ddot{q}_1 + L_1\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \dfrac{1}{C_2}q_2 - \dfrac{1}{C_2}q_3 = 0; \\ L_3\ddot{q}_3 + R_3\dot{q}_3 + \dfrac{1}{C_2}q_3 - \dfrac{1}{C_2}q_2 = 0 \end{cases}$$

для нахождения зависимости изменения зарядов (и токов) во времени $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$.

Уравнения Лагранжа–Максвелла особенно эффективны при описании движения **электромеханических систем**, для которых существенны как «механические», так и «электрические» степени свободы. Электромеханическая система обладает как механической, так и электрической (электромагнитной) энергией, сосредоточенной в элементах ее электрической цепи (катушках индуктивностей, конденсаторах и резисторах), которые, пользуясь вышеизложенными аналогиями, можно представить в единой форме.

Постулат Максвелла для электромеханических систем гласит: *уравнения движения для электромеханических систем записываются в форме уравнений Лагранжа II рода с функцией Лагранжа* L*, составленной по механическим характеристикам системы* $L_{\text{М}}$ *и по электрическим характеристикам системы* $L_{\text{Э}}$*:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j(t) \quad (j = 1..s), \tag{4.16}$$

где $L = L_{\text{М}} + L_{\text{Э}} = T_{\text{М}} + T_{\text{Э}} - (\Pi_{\text{М}} + \Pi_{\text{Э}})$; $R = R_{\text{М}} + R_{\text{Э}}$; $Q_j = Q_{\text{М}j} + Q_{\text{Э}j}$; $s = s_{\text{М}} + s_{\text{Э}}$;

q_j – обобщенные координаты, как механические, так и электрические.

То есть электромеханическую систему, имеющую $s_{\text{М}}$ степеней механической свободы и $s_{\text{Э}}$ независимых электрических контуров, учитывая электромеханические аналогии, можно представить в виде механической системы, имеющей $s_{\text{М}} + s_{\text{Э}}$ степеней свободы и обладающей:

- суммарной кинетической энергией $T = T_{\text{М}} + T_{\text{Э}}$;
- суммарной потенциальной энергией $\Pi = \Pi_{\text{М}} + \Pi_{\text{Э}}$;
- суммарной мощностью рассеяния $R = R_{\text{М}} + R_{\text{Э}}$.

Пример.

Рассмотрим простую электромеханическую систему, состоящую из колебательного LC – контура и груза – соленоида, подвешенного на пружине, коэффициент жесткости которой k (рис. 1.25). Индуктивность соленоида зависит от смещения груза. Трение не учитываем.

Система имеет две степени свободы – механическую и электрическую. В качестве обобщенных переменных выберем линейную координату, отсчитываемую от точки подвеса пружины, и заряд конденсатора. Тогда функция Лагранжа системы

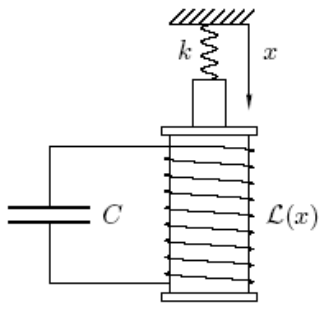


Рис. 1.25. Электромеханическая система

$$L(x, q, \dot{x}, \dot{q}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{L(x)\dot{q}^2}{2} - \frac{Cq^2}{2},$$

а уравнения Лагранжа–Максвелла

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

примут вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - \frac{1}{2}\dot{q}\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ L(x)\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}\dot{q} - Cq = 0. \end{cases}$$

В применении к единичной электрической машине как к электромеханической системе уравнения Лагранжа–Максвелла позволяют рассматривать многие вопросы динамики, например явление «качания» ротора, устойчивость различных режимов двигателя, характер переходных процессов и др.

Общую теорию электрических машин (коллекторных, бесколлекторных, униполярных и др.) можно рассматривать как своеобразный раздел аналитической механики.

При этом деление электрических машин на коллекторные и бесколлекторные соответствует разделению механических систем на голономные и неголономные. С точки зрения аналитической механики всякую коллекторную машину можно рассматривать как электромеханическую систему с переменным (зависящим от угла поворота ротора) числом степеней свободы. Коллектор здесь рассматривается как устройство, осуществляющее коммутацию, т.е. скачкообразное изменение активных сопротивлений.

ЧАСТЬ 2. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

2.1. Основные понятия и постулаты механики сплошной среды

Как корабль назовешь, так он и поплывет.
Капитан Врунгель

2.1.1. Предмет и задачи механики сплошной среды

Механика сплошной среды (МСС) изучает движение газообразных, жидких тел (гидрогазодинамика) и деформируемых твердых тел (теория упругости).

Важнейшей целью механики сплошных сред является установление общих свойств и законов движения деформируемых тел.

Практические задачи, возникающие при этом:

- воздействие жидкости и газа на движущиеся в них тела (движение самолетов, вертолетов, ракет, кораблей, подводных лодок);
- движение газов и жидкостей по трубам (проектирование газо- и нефтепроводов, насосов, турбин);
- движение жидкости сквозь пористые среды (фильтрация) (строительство платин, гидростанций, подземные работы);
- равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости (гидростатика);
- волновые движения (вибрация, звуковые колебания, сейсмические процессы, волны на поверхности морей, рек, каналов);
- неустановившиеся движения газов с химическими превращениями (горение, детонация, взрывы);
- нерегулярные движения среды, пульсирующие около некоторых средних регулярных значений (теория турбулентного движения жидкостей и газов). В основном движение газов и жидкостей носит турбулентный характер;
- движение очень сжатых жидкостей и газов (например, при изготовлении искусственных алмазов) и, наоборот, сильно разреженных газов (глубокий вакуум);
- движение плазмы – сильно ионизированной среды (магнитная гидродинамика, управляемая термоядерная реакция);
- изучение движения воздушных масс в атмосфере Земли (метеорология, прогноз погоды);
- строение и эволюции звезд, туманностей, развитие галактик и Вселенной в целом (астрофизика и космогония);
- взаимодействие мощных лазерных лучей с различными телами (задачи нелинейной оптики) и др.

Ниже под сплошной средой будут подразумеваться жидкие и газообразные тела.

Существует общепринятая классификация движения жидкости:

1) по признаку зависимости движения жидкости от времени:
   - установившееся (стационарное);
   - неустановившееся (нестационарное);
2) по виду движения жидкости:
   - безвихревое (потенциальное);
   - вихревое;
3) по отношению к скорости звука:
   - дозвуковое ($|M|<1$), M – число Маха;
   - трансзвуковое ($|M|\approx 1$);
   - сверхзвуковое ($|M|>1$);
4) по режиму течения:

- ламинарный режим ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$), Re – число Рейнольдса;
- турбулентный режим ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$).

Классификацию можно провести и по свойствам движущейся среды:

1) по признаку учёта сил вязкости и теплопроводности:
   - идеальная жидкость;
   - вязкая жидкость;
2) по характеру изменения плотности в потоке:
   - несжимаемая (жидкость);
   - сжимаемая (газ).

2.1.2. Постулаты МСС

В основе классической механики сплошной среды лежат следующие основные предположения:

- справедливы постулаты классической механики – механики Ньютона;
- справедлива модель сплошной среды;
- справедливы законы классической термодинамики.

Первое предположение означает, что исследуются движения, скорости которых малы по сравнению со скоростью света, и что исследуемые объекты гораздо больше объектов микромира. В этом случае действуют все постулаты, сформулированные в п. 1.1.

Второе предположение означает, что работает гипотеза сплошности, т.е. всякий малый объем рассматриваемой среды содержит еще очень большое число молекул. Эта гипотеза равносильна предположению о существовании **физически бесконечно малого объема**, т.е. объема, достаточно малого по сравнению с объемом тела, движение которого исследуется, но большего по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

Для таких сред мало число Кнудсена, характеризующее разреженность газов:

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L} << 1,$$

где λ – средняя длина свободного пробега молекул в газе,

L – характерный размер течения.

В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражение «жидкая частица», «точка жидкости». Можно примерно представить себе, о каких размерах идет речь. В 1 $см^3$ идеального газа при нормальных условиях содержится $2{,}68675 \times 10^{19}$ молекул (число Лошмидта). Тогда, если взять куб с гранью 1 микрон, то в нем будет содержаться еще $2{,}68675 \times 10^{7}$ молекул газа. Такой куб можно вполне считать точкой сплошной среды.

Трактуя жидкость как непрерывную сплошную среду, будем в дальнейшем все характеристики среды считать достаточно гладкими, т.е. непрерывными и имеющими достаточное число производных – это математическое следствие гипотезы сплошности.

Гипотеза сплошности позволяет макроскопические движения бесконечно большого числа микроскопических объектов-молекул описать усредненными полевыми функциями. **Полем** называется любая физическая величина, являющаяся однозначной функцией координат и времени. Важное значение в механике сплошной среды имеют поля скорости, плотности, давления, температуры.

Третье предположение означает, что рассматриваемые системы находятся в равновесном состоянии. **Термодинамическим равновесным состоянием** называется такое состояние, в котором все характеристики внутреннего состояния замкнутой системы при сохранении внешних условий могут сколь угодно долго сохранять свои значения. Вообще-то переход к такому состоянию требует времени – времени релаксации. Если это время очень мало по сравнению со временем, на котором заметным образом меняются макроскопические параметры газа, то можно считать, что система находится в состоянии термодинамического равновесия, и мы можем пользоваться **термодинамическими законами.** В этом состоянии термодинамическая система (жидкость, газ) определяется несколькими макроскопическими параметрами – параметрами

состояния: температура, давление, объем (плотность), энтропия, внутренняя энергия, энтальпия и некоторые другие.

Определим эти параметры и сформулируем законы (начала) классической термодинамики.

Плотность сплошной среды в некоторой точке – предел отношения массы среды Δm к ее объему ΔW, когда объем стягивается к одной точке:

$$\rho = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}.$$

Под точкой среды понимается физически бесконечно малый объем.

Давление – физическая величина, характеризующая интенсивность нормальных (перпендикулярных к поверхности) напряжений, действующих на некоторую поверхность, выбранную в сплошной среде:

$$p = P_n = \frac{F}{\Delta\sigma},$$

где $\Delta\sigma$ – площадь этой поверхности, F – сумма приложенных перпендикулярно к ней сил. В пределе при $\Delta\sigma \to 0$ получаем давление в точке. Это понятие будет уточнено ниже при рассмотрении тензора напряжений.

Температура – это физическая величина, характеризующая среднюю кинетическую энергию частиц макроскопической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Температура одинакова для всех частей изолированной системы, находящейся в термодинамическом равновесии.

Если изолированная система не находится в равновесии, то с течением времени переход энергии (теплопередача) от более нагретых тел системы к менее нагретым приводит к выравниванию температуры во всей системе.

В общем случае температура T определяется как производная от внутренней энергии $\mathcal{E}$ тела по его энтропии S (при постоянном объеме)

$$T = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial S} \right)_{V=const}.$$

Температура, определяемая таким образом, называется абсолютной.

Существование температуры – параметра единого для всех частей системы, находящейся в равновесии, иногда называют **нулевым началом термодинамики.**

Первое начало термодинамики устанавливает существование у всякой системы однозначной функции состояния – **внутренней энергии** $\mathcal{E}$, которая не меняется при отсутствии внешних воздействий при любых процессах внутри системы. Под влиянием внешних условий (нагрев, совершение работы) система может переходить из одного состояния в другое, и внутренняя энергия меняется:

$$d\mathcal{E} = d'A + d'Q.$$

Изменение внутренней энергии системы при переходе её из одного состояния в другое равно сумме работы внешних сил $d'A$ и количества теплоты, переданного системе $d'Q$. Оно зависит только от начального и конечного состояния системы и не зависит от способа, которым осуществляется этот переход. Штрих означает, что $d'A$ и $d'Q$ в общем случае не являются полными дифференциалами.

Работа при движении сплошной среды – работа сжатия

$$d'A = -pdW,$$

где dW – рассматриваемый элементарный объем среды.

Тогда, переходя к **удельным величинам** (отнесенным к массе), получаем

$$d\varepsilon = d'q - pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad (2.1)$$

где $d'q$ – количество тепла, подведенное к единице массы;

$d\varepsilon$ – изменение удельной внутренней энергии.

После небольшого преобразования уравнение первого начала термодинамики (2.1) можно записать в виде

$$d\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}dp+d'q\,. \qquad (2.2)$$

Величина $h=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$ называется энтальпией. Это одна из термодинамических функций, характеризующих состояние макроскопической системы. Ее изменение равно количеству теплоты, которое сообщают системе или отводят от нее при постоянном давлении. Энтальпия характеризует тепловые эффекты фазовых переходов (плавления, кипения и т.п.), т.к. они протекают при постоянном давлении.

В частном случае, когда система не обменивается теплом с окружающим воздухом ($d'q=0$), она называется **адиабатически** изолированной.

Тогда соотношение

$$dh=\frac{1}{\rho}dp \qquad (2.3)$$

можно назвать **условием адиабатичности движения** сплошной среды.

Второе начало термодинамики устанавливает существование у всякой равновесной системы еще одной однозначной функции состояния – **энтропии** S, которая в отличие от внутренней энергии не изменяется у изолированной системы только при равновесных (обратимых) процессах и всегда возрастает при неравновесных (необратимых) процессах

$$dS=\frac{d'q}{T} \quad \text{– для обратимых процессов;}$$
$$dS=\frac{d'q}{T}+\delta \ \ (\delta>0) \quad \text{– для необратимых процессов,} \qquad (2.4)$$

где dS – изменение удельной энтропии; $d'q$ – удельная теплота, подведенная к системе; T – абсолютная температура процесса.

Обратимый процесс – это равновесный процесс, представляющий собой непрерывную цепочку равновесных состояний. Его можно совершить в обратном направлении, и при этом в окружающей среде не останется никаких изменений. Это идеальная модель. Все реальные процессы – необратимые.

Энтропия характеризует меру необратимого рассеяния энергии. Определяется с точностью до аддитивной константы.

Третье начало термодинамики (тепловая теорема Нернста) определяет поведение энтропии при приближении температуры к абсолютному нулю: при $T\to 0 \quad dS\to 0$.

Третье начало термодинамики относится только к равновесным состояниям.

2.1.3. Системы отсчета

Движение всегда определяется по отношению к некоторой системе отсчета – системе координат.

В механике сплошной среды существуют два основных подхода к изучению движения жидкостей – подход Лагранжа и подход Эйлера. Соответственно используются два вида переменных – переменные Лагранжа и переменные Эйлера.

Подход Лагранжа. Наблюдение ведется за фиксированной **точкой среды**, прослеживается изменение во времени ее параметров. Зная судьбу всех частиц, мы получим исчерпывающую информацию об изучаемом процессе. Очевидно, независимыми переменными, помимо времени, в этом случае должны являться некоторые признаки, позволяющие отличить одну частицу от другой (так называемые переменные Лагранжа). Например, в начальный момент времени можно промаркировать каждую частицу, присвоив ей значение координаты в этот момент времени.

В таком случае закон движения сплошной среды, т.е. положение любой ее частицы в каждый момент времени, выражается формулой (в декартовом пространстве):

$$x=x(a,b,c,t);\ \ y=y(a,b,c,t);\ \ z=z(a,b,c,t),$$

где $x\big|_{t=0}=a$; $y\big|_{t=0}=b$; $z\big|_{t=0}=c$;

a, b, c – переменные Лагранжа.

Соответственно, гидродинамические величины записываются в виде

$$\rho = \rho(a,b,c,t);\ \vec{V} = \vec{V}(a,b,c,t);\ T = T(a,b,c,t).$$

Подход Эйлера. Наблюдение ведется за **точками физического пространства**. С течением через точку пространства с декартовыми координатами *x, y, z* проходят различные частицы среды, неся свои значения гидродинамических величин. Представляет интерес изменение искомых гидродинамических величин в фиксированной точке пространства в зависимости от времени:

$$\rho = \rho(x,y,z,t);\ \vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t);\ T = T(x,y,z,t).$$

Переменные *x, y, z* носят название переменных Эйлера.

Основное отличие подходов Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в подходе Лагранжа величины *x, y, z* являются переменными координатами **движущейся** частицы жидкости, а в подходе Эйлера – это координаты **фиксированных** точек пространства, через которые в данный момент времени проходят различные частицы жидкости.

Академик Л.И. Седов, сравнивая эти два подхода, писал: *«Изучение движения воды в реке можно вести, либо плывя в лодке от истока реки до ее устья и наблюдая за судьбой отдельных частиц жидкости (подход Лагранжа), либо наблюдая за течением с берега в отдельных местах (подход Эйлера)»* [7].

Задания движения сплошной среды по Лагранжу и по Эйлеру в механическом отношении эквивалентны друг другу. Для одномерных течений лагранжев подход часто является более простым, однако для многомерных течений (с большими искажениями расчетных сеток) лагранжевы методы становятся неточными и чрезвычайно сложными (например, в задачах о течениях в пограничном слое).

Есть подходы, в которых применяются смешанное лагранжево и эйлерово описание (метод численного моделирования СЭЛ, например, при расчете движения жидкости через гибкие каналы).

В практических приложениях наиболее часто применяют описание движения по методу Эйлера, как более удобному для математической постановки различных задач гидрогазодинамики и сопоставления данных теоретического и экспериментального исследований. Метод Лагранжа используют при формулировании физических законов движущихся индивидуальных материальных частиц.

2.1.4. Векторное поле скорости

Совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области, называется **полем** этой величины. Если рассматриваемая величина – скаляр, т.е. число, значение которого в данной точке не зависит от выбора системы координат, то поле называется скалярным, например поле температур, плотностей, давлений. Если же рассматриваемая величина – вектор, как, например, скорость, ускорение, то поле называется векторным. Любое векторное поле равносильно трем полям проекций рассматриваемого вектора.

Рассмотрим характеристики векторного поля скоростей, образованного совокупностью векторов скоростей, заданных в каждой точке рассматриваемой области течения. *Линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает по направлению со скоростью частицы жидкости в данный момент времени*, называется **линией тока**. Для различных моментов времени через произвольные фиксированные точки пространства в общем случае будут проходить различные линии тока, так как направление векторов скорости изменяется во времени.

Течение среды, характеризуемое изменением в каждой точке пространства векторов скоростей и термодинамических параметров, называется нестационарным (неустановившимся).

Если в каждой точке пространства указанные параметры не изменяются во времени, то течение называется стационарным (установившимся).

В нестационарном потоке линии тока и *линии, описываемые в пространстве частицей жидкости при ее движении* (**траектории**), не совпадают, так как перемещение частицы среды происходит под действием меняющегося во времени поля скоростей, за исключением случая,

когда изменяются только значения скорости, а направление векторов остается постоянным (например, прямолинейное движение).

В стационарном потоке линии тока и траектории совпадают.

Подчеркнем, что **касательные к линии тока** дают направление скорости **разных частиц** жидкости в последовательных точках пространства в определённый момент времени, а **касательные к траектории** дают направление скорости **определённых частиц** в последовательные моменты времени.

Запишем дифференциальные уравнения линий тока и траекторий частиц. Пусть $\delta x, \delta y, \delta z$ – произвольные бесконечно малые отрезки, проводимые в пространстве в данный момент времени, а dx, dy, dz – элементарные перемещения частиц жидкости, происходящие за бесконечно малый промежуток времени dt.

Тогда по условию совпадения направления касательной к линии тока и вектора скорости в этой же точке получим систему дифференциальных уравнений линий тока

$$\frac{\delta x}{u(x,y,z,t)} = \frac{\delta y}{v(x,y,z,t)} = \frac{\delta z}{w(x,y,z,t)}. \qquad (2.5)$$

Уравнения траекторий

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} = dt. \qquad (2.6)$$

Алгебраические уравнения линии тока и траектории получаются интегрированием этих уравнений. При интегрировании необходимо учитывать, что в первом уравнении время является константой, а во втором уравнении – переменной.

Видно, что в частном случае установившегося движения время в эти уравнения не войдет, и получаются одинаковые системы уравнений.

Через каждую точку пространства в данный момент времени можно провести, вообще говоря, только одну линию тока.

Исключения составляют так называемые особые (критические) точки, где линии тока могут пересекаться или разветвляться. В этих точках нарушается условие единственности уравнения (2.5) и в силу невозможности одной и той же точке иметь разные направления движения следует, что в этой точке скорость среды должна быть либо равна нулю, либо бесконечности.

Линии тока, проходящие через замкнутый контур, не являющийся линией тока, образуют поверхность, называемую **трубкой тока**. Поверхность трубки тока является непроницаемой для жидкости, так как в любой точке поверхности векторы скорости касательны к ней.

Жидкость, перемещающуюся внутри поверхности, образованной проходящими через замкнутый контур траекториями, называют **струей.**

2.1.5. Отображение полей

При описании свойств сплошной среды и анализе ее движения также используют векторные и скалярные поля, образованные отображением полей параметров среды.

Любому скалярному полю можно поставить во взаимно однозначное соответствие векторное поле **вектора-градиента**.

1. Рассмотрим скалярное поле температуры $T(x, y, z, t)$. Тогда вектор-градиент температуры определяется формулой

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial n}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности равного уровня *T=const*, направленный в сторону роста температуры;

$\frac{\partial T}{\partial n}$ – производная по нормали $\vec{n}$.

В декартовой системе координат

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}, \qquad (2.7)$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные орты.

Градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего возрастания некоторой скалярной величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой.

С помощью понятия градиента можно записать полную производную температуры (в механике сплошной среды ее называют **субстанциональной**, или материальной производной)

$$\frac{d}{dt}T(x,y,z,t)=\frac{\partial T}{\partial t}+V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\mathrm{grad}T,$$

где $\frac{\partial T}{\partial t}$ – локальная производная, определяет нестационарность поля физической величины в точке пространства;

$\vec{V}\cdot gradT$ – конвективная производная, характеризует неоднородность поля.

Используя *векторный дифференциальный оператор набла* (*оператор Гамильтона*)

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

градиент можно представить в виде ∇T. Тогда субстанциональная производная примет вид

$$\frac{d}{dt}T(x,y,z,t)=\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla T.$$

Конвективная производная будет равна нулю либо при отсутствии движения, либо когда температура в данный момент времени не меняется от точки к точке пространства (однородное поле), либо при движении вдоль изотермической поверхности $T(x,y,z)=const$.

2. Рассмотрим векторное поле скорости $\vec{V}$. Ему можно поставить в соответствие скалярное поле, определяемое оператором дивергенции div.

Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{V}$ в декартовых координатах называется функция

$$\mathrm{div}\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V}. \qquad (2.8)$$

Тогда субстанциональная производная скорости запишется в виде

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+V_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+V_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+V_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}.$$

Здесь $(\vec{V}\cdot\nabla)=V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}$.

С точки зрения физики, дивергенция векторного поля служит показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля: если источник, то дивергенция положительна, поле «расходится», если сток, то дивергенция отрицательна, поле «сходится».

Векторному полю $\vec{V}$ можно поставить в соответствие другое векторное поле, которое называют **ротором** (вихрем) поля $\vec{V}$ и обозначают $\mathrm{rot}\vec{V}$.

$$\mathrm{rot}\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}. \qquad (2.9)$$

Проекции вектора $\mathrm{rot}\vec{V}$:

$$\mathrm{rot}_x\vec{V}=\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z};\quad \mathrm{rot}_y\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x};\quad \mathrm{rot}_z\vec{V}=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Ротор характеризует завихренность поля: $\mathrm{rot}\vec{V}=0$ означает отсутствие вихрей в течении (см. п. 2.3.4).

Циркуляцией вектора скорости называется интеграл, взятый по произвольному замкнутому материальному контуру C (рис. 2.1):

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} d\vec{r} = \oint_C V_x dx + V_y dy + V_z dz . \qquad (2.10)$$

Циркуляция вектора скорости является критерием потенциальности поля скорости: поле будет потенциальным, когда циркуляция его по произвольному замкнутому контуру равна нулю (см. п.2.3.4).

Примечание. Некоторые полезные формулы

1. Формулы векторной алгебры

1) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0;$

2) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}A) \equiv \nabla \times (\nabla A) = 0;$

3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}A) \equiv \nabla \cdot (\nabla A) = \Delta A.$

где $\Delta A = \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, примененный к скаляру A;

4) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}A) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}A) \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \Delta\vec{A},$

где

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right)\vec{k}$$

– оператор Лапласа, примененный к вектору $\vec{A}$;

5) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} + 2\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A})$ или $\mathrm{grad}\left(\dfrac{A^2}{2}\right) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times \mathrm{rot}\vec{A}.$

2. Формула дифференцирования по времени объемного интеграла по движущемуся объему $W(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{W(t)} A dW = \int_{W(t)} \left(\frac{dA}{dt} + A\,\mathrm{div}\vec{V} \right) dW .$$

Здесь A – скаляр, вектор, тензор; $\vec{V}$ – скорость движения.

3. Формула Остроградского–Гаусса: интеграл от дивергенции векторного поля $\vec{A}$ по некоторому объему W равен потоку вектора через поверхность σ, ограничивающую этот объем

$$\int_W \mathrm{div}(\vec{A}) dW = \oint_\sigma \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma .$$

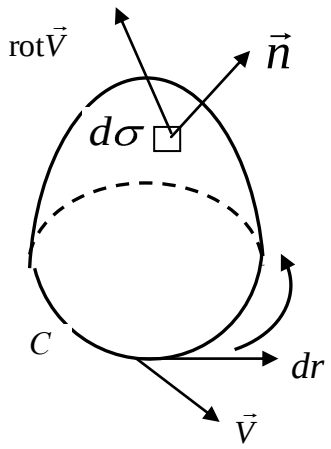


Рис. 2.1. К формуле Стокса

Распространение этой формулы на тензорные величины дает аналогичное векторное соотношение

$$\int_W \mathrm{Div}(\mathrm{A}) dW = \oint_\sigma \vec{n}\,\mathrm{A}\, d\sigma .$$

Здесь A – тензор, $\mathrm{Div}(\mathrm{A}) = \dfrac{\partial \vec{A}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \vec{A}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \vec{A}_z}{\partial z}$.

4. Формула Стокса: циркуляция скорости по замкнутому контуру C равняется потоку ротора скорости сквозь поверхность σ, опирающуюся на этот контур (рис. 2.1):

$$\oint_C \vec{V} d\vec{r} = \int_\sigma \mathrm{rot}(\vec{V}) d\vec{\sigma} .$$

Направление нормали $\vec{n}$ ориентированной площадки $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$ должно быть выбрано так, чтобы с конца нормали обход контура происходил против часовой стрелки.

Конец примечания

2.1.6. Численное моделирование в механике сплошных сред

В прошлом гидродинамика, как и другие физические науки, делилась на теоретическую и экспериментальную части. В начале 50-х годов XX столетия на стыке вычислительной математики и теоретической гидромеханики возникла **вычислительная гидромеханика** [10]. В настоящее время она оформилась как самостоятельный раздел науки, предметом которого является численное моделирование различных течений жидкости и газа и решение возникающих при этом задач при помощи компьютерной техники и специализированного программного обеспечения, например, такого, как мощные программные системы **ANSYS, FLUENT, XFlow, OpenFOAM** и др.

Механика сплошных сред относится к числу наук, исследующих явления, которые описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных или интегральных уравнений, выражающих, например, законы сохранения.

Для многих режимов движения сплошных сред физический эксперимент трудноосуществим, так как требует для полного моделирования практически натуральных условий (например, получения полей обтекания летательных аппаратов). Аналитическое исследование также затруднено, так как мы имеем дело с весьма сложными математическими моделями, решение которых без привлечения численных методов не только сейчас, но и в обозримом будущем вряд ли будет возможно. Именно многомерность и сильная нелинейность движения сплошной среды приводят к тому, что численные подходы представляют практически единственное средство для его достаточно полного теоретического исследования.

Можно сказать, что одной из характерных черт современных исследований стала математизация физического познания. Родился новый метод познания – математическое моделирование **(вычислительный эксперимент).**

Суть его состоит в том, что некий объект (явление, процесс) заменяется математической моделью, т.е. набором уравнений, описывающих взаимодействие частей объекта друг с другом (обычно это законы сохранения). Затем эти уравнения с помощью численных методов реализуются на компьютере.

В общем случае эти уравнения образуют нелинейную систему смешанного типа с неизвестной формой поверхности перехода (где уравнения меняют свой тип) и подвижными границами – граничные условия часто ставятся на поверхностях или линиях, которые сами определяются в процессе вычислений.

Отметим также, что для подавляющего числа задач МСС не только не доказано математических теорем существования и единственности, но даже часто нет уверенности в том, что такие теоремы могут быть получены.

Поэтому математическое моделирование ближе к физическому моделированию, нежели к теоретическому исследованию. Здесь исследователь «включает» уравнения, а затем следит за тем, что происходит. Именно то же самое делает и экспериментатор.

Вычислитель может делать то, что не может делать ни теоретик, ни экспериментатор-физик: он может произвольно задавать свойства среды. Он не стеснен в выборе параметров течения, он может проверить, как на данное физическое явление влияет в отдельности каждая из принимаемых гипотез.

Однако вычислительный эксперимент никогда и ни в коей мере не может заменить ни физический эксперимент, ни теоретический анализ. Одна из очевидных причин этого заключается в том, что уравнения сплошной среды никогда нельзя считать точными, а другая – в том, что

экспериментатор-вычислитель не работает с дифференциальными уравнениями движения сплошной среды. Он работает с их разностными аналогами, т.е. дискретизированными уравнениями, что влияет не только на количественную точность, но и на качественное поведение решения. Отсюда вытекает, что необходимым элементом исследования должна быть адекватность физического, математического и численного представления среды.

Таким образом, на всех этапах исследования математическая теория, физический и численный эксперимент должны применяться совместно и согласованно. Только творческое объединение сильных сторон и методологий различных инструментов может привести к успеху при решении конкретных практических задач, а также определить возможные и наиболее перспективные направления развития математической теории.

2.2. Основные уравнения динамики жидкости

Все течет, ничего не стоит на месте.
Гераклит

2.2.1. Уравнение неразрывности

Начнем вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в сплошной среде. Это уравнение неразрывности. Для его вывода не требуется каких-то дополнительных предположений о жидкости, т.е. оно относится в равной мере к движению любой сплошной среды. Используем оба подхода – Лагранжа и Эйлера, чтобы показать особенности их применения.

1. Подход Лагранжа.

Пусть W – объем **среды**. По определению плотность жидкости $\rho = \dfrac{dm}{dW}$, т.е. $dm = \rho dW$.

Закон сохранения массы запишется в виде

$$\int_W dm = const \text{ или } \frac{d}{dt}\int_W \rho dW = 0.$$

Используя формулу дифференцирования объемного интеграла, получаем интегральное уравнение неразрывности

$$\int_W \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\vec{V} \right) = 0.$$

Если в сплошной среде нет разрывов (ударных волн, например), то получаем дифференциальное уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\vec{V} = 0. \qquad (2.11)$$

2. Подход Эйлера.

Рассмотрим некоторый объем W_0 **пространства**. Масса жидкости в этом объеме есть

$$\int_{W_0} \rho dW,$$

где ρ – плотность жидкости, а интегрирование производится по объему W_0. Через элемент $d\vec{\sigma}$ поверхности, ограничивающий рассматриваемый объем, в единицу времени протекает количество жидкости

$$\rho \vec{V} d\vec{\sigma}.$$

Вектор $\rho\vec{V}$ называют плотностью потока жидкости. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно к скорости.

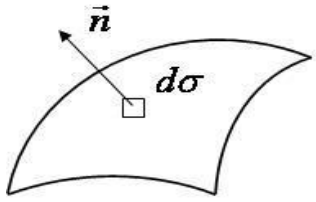


Рис. 2.2. Ориентированная площадка

Вектор $d\vec{\sigma}$ по модулю равен площади элемента поверхности и направлен по нормали к ней. Условимся направлять $d\vec{\sigma}$ по внешней нормали (рис. 2.2). Тогда $\rho\vec{V}d\vec{\sigma}$ положительно, если жидкость вытекает из объема, и отрицательно, если жидкость втекает в него.

Тогда полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из объема W_0, будет положительно и равно

$$\oint_{\sigma_0} \rho \vec{V} d\vec{\sigma},$$

где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемый объем.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объеме можно записать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{W_0}\rho dW .$$

Сформулируем закон сохранения массы: скорость изменения массы среды в объеме W_0 пространства равна разности масс частиц среды вытекающих и втекающих за единицу времени через поверхность σ_0, охватывающую объем W_0 :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{W_0}\rho dW = \oint_{\sigma_0}\rho\vec{V}d\vec{\sigma} .$$

Получили уравнение неразрывности в интегральной форме.

Преобразуем интеграл по поверхности в интеграл по объему по теореме Остроградского–Гаусса

$$\oint_{\sigma_0}\rho\vec{V}d\vec{\sigma} = \int_{W_0}\mathrm{div}\rho\vec{V}dW .$$

Таким образом

$$\int_{W_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)\right)dW = 0 .$$

Если в сплошной среде нет разрывов, то должно быть равным нулю и подынтегральное выражение.

Получаем уравнение неразрывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)=0 . \qquad (2.12)$$

Эта другая форма записи уравнения неразрывности называется **дивергентной**. Подробнее о различии дивергентной и недивергентной форм записи см. в п. 2.2.5.

Одна форма легко преобразуется в другую:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho V\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\vec{V}+\vec{V}\cdot\nabla\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\mathrm{grad}\rho\right)+\rho\mathrm{div}\vec{V}=\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}\vec{V}=0 .$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть плотность не зависит от времени $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\right)$, т.е. поле плотности – **стационарное.**

Тогда уравнение неразрывности имеет вид

$$\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)=0 .$$

Пусть плотность не зависит также и от координат.

Тогда уравнение неразрывности имеет вид

$$\mathrm{div}\vec{V}=0 . \qquad (2.13)$$

Это уравнение в механике сплошной среды часто называют **уравнением несжимаемости** $\left(\rho=const\right)$.

Если же движение сплошной среды происходят с непрерывным по ходу движения возникновением (исчезновением) массы за счет, например, химических реакций или изменения фазового состояния вещества, то вводят понятие интенсивности этого процесса (это отнесенный к единице объема секундный прирост массы вещества в данной точке потока) J [кг/м^{3}с], тогда уравнение неразрывности для отдельной компоненты в потоке

$$\frac{\partial\rho_к}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho_к\vec{V}_к\right)=J_к .$$

Но для смеси $\sum_{k=1}^{K}J_к=0$ и в целом уравнение имеет вид $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\sum_{k=1}^{K}\rho_к\vec{V}_к=0$.

Здесь $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k$, K – количество компонент.

2.2.2. Уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

Это уравнение описывает изменение импульса (количества движения) в сплошной среде.

Выделим в сплошной среде некоторый объем W и рассмотрим, какие силы влияют на его движение.

Во-первых, внешние, *массовые* силы (например, силы тяжести, электромагнитные силы, если движение происходит в электромагнитном поле).

Обозначим $\vec{F}$ – массовую силу, действующую на единицу массы, тогда на весь рассматриваемый объем действуют силы

$$\vec{R}^m = \int_W \rho \vec{F} dW .$$

Во-вторых, внутренние (*поверхностные*) силы, возникающие при деформации этого объема под воздействием частиц жидкости, примыкающих к поверхности с внешней от выделенного объема стороны (силы вязкости, давления). Для их характеристики вводят понятие **механического напряжения.**

Выделим на поверхности σ объема W элемент $d\sigma$. Пусть $d\vec{R}^{\Pi}$ – равнодействующая всех сил воздействия на элемент поверхности $d\sigma$. Тогда $\frac{d\vec{R}^{\Pi}}{d\sigma} = \vec{p}_n$ – вектор напряжения в точке A, принадлежащей площадке $d\sigma$ с нормалью $\vec{n}$, и

$$\vec{R}^{\Pi} = \int_\sigma \vec{p}_n d\sigma .$$

Теперь, используя лагранжев подход, запишем второй закон Ньютона: изменение импульса для произвольного объема среды W равно главному вектору сил, действующих на этот объем:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \vec{V} dW = \int_W \rho \vec{F} dW + \int_\sigma \vec{p}_n d\sigma .$$

Но через точку можно провести множество плоскостей (элементарных площадок), поэтому напряжение $\vec{p}_n$ – не простой вектор, он не является однозначной функцией координат и времени, зависит от ориентации нормали: $\vec{p}_n = f(x, y, z, t, \vec{n})$ и, следовательно, не является полеобразующей величиной. К нему нельзя, например, применить формулу Остроградского–Гаусса и, соответственно, не удастся провести преобразования, которые были сделаны в предыдущем пункте (переход к дифференциальной форме уравнения изменения импульса).

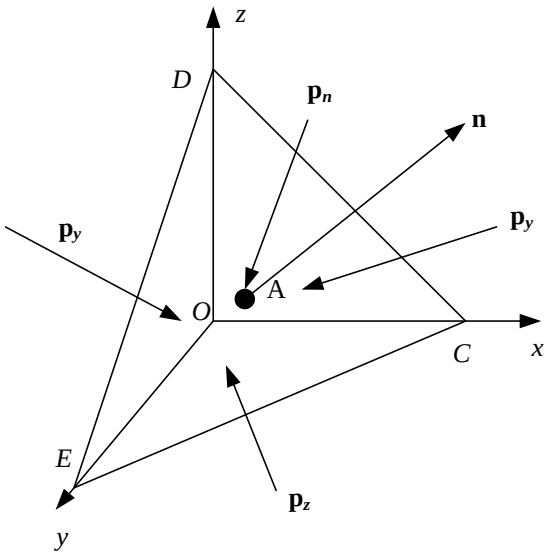


Рис. 2.3. Равновесие элементарного тетраэдра (к формуле Коши)

Попробуем найти, как напряжение в точке зависит от направления нормали.

Для этого рассмотрим элементарный тетраэдр OCED, три грани которого параллельны координатным плоскостям, а четвёртая ориентирована произвольным образом (рис. 2.3). Обозначим $d\sigma = S_{\Delta CED}$ – площадь этой четвертой грани.

Ориентация этой площади определяется нормалью $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$, где $n_x = \cos(\vec{n}, \vec{x})$, $n_y = \cos(\vec{n}, \vec{y})$, $n_z = \cos(\vec{n}, \vec{z})$ – направляющие косинусы (косинусы угла наклона единичной нормали $\vec{n}$ к координатным осям).

Тогда

$$S_{\Delta EOD} = d\sigma_x = d\sigma_n \cos(\vec{n}, \vec{x}) = n_x d\sigma;$$
$$S_{\Delta DOC} = d\sigma_y = d\sigma_n \cos(\vec{n}, \vec{y}) = n_y d\sigma;$$
$$S_{\Delta EOC} = d\sigma_z = d\sigma_n \cos(\vec{n}, \vec{z}) = n_z d\sigma.$$

Объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}hS_{\Delta CED}$, где h – высота тетраэдра, опущенная из вершины O на ΔCED.

Если размеры тетраэдра достаточно малы, то можно считать, что напряжения, действующие на его гранях $\vec{p}_n$, $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, постоянны в пределах каждой грани.

Применим теорему об изменении импульса к объему этого тетраэдра, заменив интегралы их средними значениями:

$$\left(\frac{d(\rho\vec{V})}{dt}\right)_{\text{ср}} \cdot \frac{1}{3}hS_{\Delta CED} = (\rho\vec{F})_{\text{ср}} \cdot \frac{1}{3}hS_{\Delta CED} + (\vec{p}_n)_{\text{ср}} S_{\Delta CED} - (\vec{p}_x)_{\text{ср}} S_{\Delta EOD} - (\vec{p}_y)_{\text{ср}} S_{\Delta DOC} - (\vec{p}_z)_{\text{ср}} S_{\Delta EOC},$$

или

$$\left(\frac{d(\rho\vec{V})}{dt}\right)_{\text{ср}} \cdot \frac{1}{3}hd\sigma = (\rho\vec{F})_{\text{ср}} \cdot \frac{1}{3}hd\sigma + (\vec{p}_n)_{\text{ср}} n_x d\sigma - (\vec{p}_x)_{\text{ср}} n_x d\sigma - (\vec{p}_y)_{\text{ср}} n_x d\sigma - (\vec{p}_z)_{\text{ср}} n_x d\sigma.$$

Устремим $h \to 0$, стягивая тетраэдр в точку. Предельный переход дает соотношение

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z,$$

т.е. напряжения на гранях образуют систему взаимно уравновешенных напряжений.

Получили формулу, позволяющую по положению нормали к плоскости вычислить действующее в этой плоскости напряжение **(формула Коши** условия равновесия бесконечно малого тетраэдра).

Проектируя на координатные оси, получаем три скалярных соотношения:

$$p_{nx} = p_{xx}n_x + p_{yx}n_y + p_{zx}n_z;$$
$$p_{ny} = p_{xy}n_x + p_{yy}n_y + p_{zy}n_z;$$
$$p_{nz} = p_{xz}n_x + p_{yz}n_y + p_{zz}n_z.$$

Коэффициенты при направляющих косинусах образуют тензор, который называется **тензором напряжения**. В декартовой системе координат координаты тензора напряжения имеют простой физический смысл: они равны нормальным и касательным напряжениям в соответствующих координатных площадках.

Таким образом, напряжение в произвольной точке сплошной среды определяется девятью скалярными величинами, образующими тензор напряжений:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (2.14)$$

и тогда

$$\vec{p}_n = \vec{n}\mathrm{P}. \qquad (2.15)$$

Этот тензор является полеобразующей величиной.

Теперь, применяя формулу дифференцирования объемного интеграла и теорему Остроградского–Гаусса к уравнению изменения импульса, имеем:

$$\int_W \left(\frac{d}{dt}(\rho\vec{V}) + \rho\vec{V}\,\mathrm{div}\vec{V}\right)dW = \int_W \rho\vec{F}dW + \underbrace{\int_\sigma \vec{n}\mathrm{P}d\sigma}_{=\int_W \mathrm{Div}\mathrm{P}dW}.$$

Переходя от интегральной к дифференциальной форме уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt}(\rho\vec{V}) + \rho\vec{V}\,\mathrm{div}\vec{V} - \rho\vec{F} - \mathrm{Div}\mathrm{P} = 0.$$

Преобразуем, выделив в нем левую часть уравнения неразрывности

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{V}\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}\vec{V}\right)}_{\substack{=0\\ \text{в силу уравнения}\\ \text{неразрывности}}}-\rho\vec{F}-\mathrm{DivP}=0.$$

Окончательно получаем **уравнение движения в напряжениях**:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}+\mathrm{Div}P, \qquad (2.16)$$

где $\mathrm{Div}P=\frac{\partial\vec{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{P}_z}{\partial z}$.

2.2.3. Уравнения изменения момента импульса

Выделим объем W движущейся среды.

Обозначим $d\vec{K}=\vec{r}\times\vec{V}dm$ – момент импульса (момент количества движения) элементарной массы $dm=\rho dW$. Тогда $\vec{K}=\int\limits_W\vec{r}\times\rho\vec{V}dW$ – момент импульса всего выделенного объема.

Примечание.

В сильных электромагнитных полях следует учитывать также и собственные (внутренние) моменты импульса (спины атомов). Без воздействия поля их хаотичное расположение не вносит вклад в суммарный момент импульса, но под действием поля они ориентируются в одном направлении, и их вклад следует учитывать (например, в задачах магнитной гидродинамики).

Конец примечания.

Запишем уравнение изменения момента импульса (производная по времени от момента импульса относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил относительно того же центра)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_W\vec{r}\times\rho\vec{V}dW=\int\limits_W\vec{r}\times\rho\vec{F}dW+\int\limits_\sigma\vec{r}\times\vec{p}_nd\sigma.$$

Преобразуем левую часть, используя формулу дифференцирования объемного интеграла:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_W\vec{r}\times\rho\vec{V}dW=\int\limits_W\left(\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\rho\vec{V})+(\vec{r}\times\rho\vec{V})\mathrm{div}\vec{V}\right)dW=\int\limits_W\left(\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\rho\vec{V}\right)}_{\substack{=0,\\ \text{как векторное}\\ \text{произведение}\\ \text{коллинеарных}\\ \text{векторов}}}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(\rho\vec{V})+\vec{r}\times\rho\vec{V}\mathrm{div}\vec{V}\right)dW=$$

$$=\int\limits_W\vec{r}\times\left(\rho\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{V}\frac{d\rho}{dt}+\rho\vec{V}\mathrm{div}\vec{V}\right)dW=\int\limits_W\vec{r}\times\left(\rho\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{V}\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}\vec{V}\right)}_{\substack{=0\\ \text{в силу уравнения}\\ \text{неразрывности}}}\right)dW=\int\limits_W\vec{r}\times\rho\frac{d\vec{V}}{dt}dW.$$

Теперь преобразуем второй интеграл правой части, используя теорему Остроградского–Гаусса:

$$\int_\sigma \vec{r}\times\vec{p}_n d\sigma = \int_\sigma \vec{r}\times\vec{n}\mathrm{P}d\sigma = \int_W \mathrm{div}\left(\vec{r}\times\vec{n}\mathrm{P}\right)dW = \int_W\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{r}\times\vec{P}_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{r}\times\vec{P}_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{r}\times\vec{P}_z\right)\right)dW =$$

$$= \int_W\left(\vec{r}\times\left(\frac{\partial\vec{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{P}_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\vec{P}_x+\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\times\vec{P}_y+\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\times\vec{P}_z\right)dW =$$

$$= \int_W\left(\vec{r}\times\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{P}_z}{\partial z}\right)}_{\mathrm{DivP}}+\vec{i}\times\vec{P}_x+\vec{j}\times\vec{P}_y+\vec{k}\times\vec{P}_z\right)dW.$$

Собираем вместе преобразованные левую и правую части уравнения изменения момента импульса:

$$\int_W\left(\vec{r}\times\underbrace{\left(\rho\frac{d\vec{V}}{dt}-\rho\vec{F}-\mathrm{DivP}\right)}_{\substack{=0\\ \text{в силу уравнения движения}\\ \text{в напряжениях}}}-\vec{i}\times\vec{P}_x-\vec{j}\times\vec{P}_y-\vec{k}\times\vec{P}_z\right)dW=0.$$

Приравнивая к нулю подынтегральное выражение, получаем простое векторное уравнение, в которое выродилось уравнение изменения момента импульса:

$$\vec{i}\times\vec{P}_x+\vec{j}\times\vec{P}_y+\vec{k}\times\vec{P}_z=0 \qquad (2.17)$$

или

$$\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&0&0\\ p_{xx}&p_{xy}&p_{xz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 0&1&0\\ p_{yx}&p_{yy}&p_{yz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 0&0&1\\ p_{zx}&p_{zy}&p_{zz}\end{pmatrix}=0.$$

Последовательно проецируя это уравнение на координатные оси, получаем:

на ось x: $p_{yz}=p_{zy}$;

на ось y: $p_{xz}=p_{zx}$;

на ось z: $p_{xy}=p_{yx}$.

Вывод: в рамках сделанных выше предположений **тензор напряжений симметричен** («симметричная механика сплошной среды»), т.е. неизвестных компонент тензора 6, а не 9.

2.2.4. Уравнение изменения энергии

Полная энергия движущегося объема W сплошной среды складывается из внутренней и кинетической: $E=\mathcal{E}+K$.

Отметим, что здесь нет потенциальной энергии, т.к. сила тяжести является внешней силой, и ее влияние учитывается в работе внешних сил.

$\mathcal{E}=\int_W \varepsilon\rho dW$, где ε – удельная внутренняя энергия (внутренняя энергия единицы массы среды).

$K=\int_W\frac{V^2}{2}\rho dW$ – по определению кинетической энергии.

Поэтому

$$E=\int_W\left(\varepsilon+\frac{V^2}{2}\right)\rho dW=\int_W e\rho dW,$$

где e – удельная полная энергия.

Приращение полной энергии dE в объеме происходит за счет работы массовых и поверхностных сил dA, а также за счет притока тепла dQ через поверхность, ограничивающую объем (если нет внутренних источников массы и энергии):

$$dE = dA + dQ,$$

где $dA = \int\limits_W \rho\vec{F}d\vec{r}dW + \int\limits_\sigma \vec{p}_n d\vec{r}d\sigma$; $dQ = -\oint\limits_\sigma \vec{q}d\vec{\sigma}dt$;

$\vec{q}$ – вектор теплового потока (количество тепла, проходящего через единицу площади в единицу времени). Знак минус вызван тем, что выбранная нормаль к поверхности – внешняя: вытекающее тепло имеет знак «плюс», втекающее – знак «минус».

Тогда уравнение изменения энергии сплошной среды

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_W \rho e dW = \int\limits_W \rho\vec{F}\cdot\vec{V}dW + \int\limits_\sigma \vec{p}_n\vec{V}d\sigma - \oint\limits_\sigma \vec{q}d\vec{\sigma}.$$

Преобразуем, используя в левой части формулу дифференцирования объемного интеграла, а в правой части – формулу Остроградского–Гаусса:

$$\int\limits_W \left(\frac{d}{dt}(\rho e) + \rho e\,\mathrm{div}\vec{V}\right)dW = \int\limits_W \rho\vec{F}\cdot\vec{V}dW + \int\limits_W \mathrm{div}(\vec{V}\,\underline{d})W - \int\limits_W \mathrm{div}\vec{q}dW\,.$$

Здесь $\mathrm{div}(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(p_x\cdot\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(p_y\cdot\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(p_z\cdot\vec{V})$,

т.к. $\mathrm{P}\vec{V} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}\cdot\vec{V} = (\vec{P}_x\vec{V}, \vec{P}_y\vec{V}, \vec{P}_z\vec{V})$.

Подынтегральное выражение в левой части можно упростить с помощью уравнения неразрывности: $\frac{d}{dt}(\rho e) + \rho e\,\mathrm{div}\vec{V} = \rho\frac{de}{dt} + e\frac{d\rho}{dt} + \rho e\,\mathrm{div}\vec{V} = \rho\frac{de}{dt} + e\underbrace{(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{V})}_{=0} = \rho\frac{de}{dt}$.

Окончательно получаем скалярное **уравнение изменения полной энергии**:

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + \mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}) - \mathrm{div}\vec{q}\,. \qquad (2.18)$$

Для изотропных сред справедлив эмпирический **закон теплопроводности Фурье**: поток тепла пропорционален градиенту температуры:

$$\vec{q} = -\lambda\,\mathrm{grad}T\,. \qquad (2.19)$$

Минус показывает, что тепловой поток направлен в сторону скорейшего убывания температуры.

Коэффициент пропорциональности λ называется **коэффициентом теплопроводности**, измеряется в Вт/(мК), зависит от температуры. При небольших изменениях температуры его можно считать константой. В неизотропных средах вместо скаляра λ приходится вводить тензор теплопроводности Λ.

В смесях газов существенную роль приобретает диффузия, и вектор $\vec{q}$ зависит не только от градиента температуры, но и от градиента концентрации.

Если принять $\lambda = const$, то уравнение изменения энергии

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + \mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}) + \lambda\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}T)$$

или

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + \mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}) + \lambda\Delta T, \qquad (2.20)$$

где $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, примененный к температуре.

Если **среда нетеплопроводная**, то $\vec{q} = 0,$ т.е. движение жидкости происходит адиабатически, и

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}).$$

В некоторых случаях полезна другая форма записи энергетического уравнения – для изменения внутренней энергии.

Для этого сначала преобразуем уравнение энергии (2.18)

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}) - \mathrm{div}\vec{q}\,.$$

Так как $\mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{P}_x \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{P}_y \cdot \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{P}_z \cdot \vec{V})$, то уравнение энергии можно представить в виде

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \rho \vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + (\mathrm{P} \cdot \nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \mathrm{Div}\mathrm{P} - \mathrm{div}\vec{q}\,,$$

где $(\mathrm{P} \cdot \nabla)\vec{V} = \vec{P}_x \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{P}_y \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \vec{P}_z \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}.$

Вычтем из него уравнение движения (2.16), умноженное скалярно на скорость $\vec{V}$:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \mathrm{Div}P\,.$$

Остается

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = (\mathrm{P} \cdot \nabla)\vec{V} - \mathrm{div}\vec{q} \qquad (2.21)$$

– **уравнение изменения внутренней энергии сплошной среды.**

Подведем итоги. Для описания движения сплошной среды было получено три уравнения: два скалярных (2.11) и (2.18) (или (2.21)) и одно векторное (2.16).

В декартовых координатах эта система уравнений запишется в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = 0;$$

$$\rho \frac{dV_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z};$$

$$\rho \frac{dV_y}{dt} = \rho F_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z};$$

$$\rho \frac{dV_z}{dt} = \rho F_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z};$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho(F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z) + \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}V_x + p_{xy}V_y + p_{xz}V_z) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}V_x + p_{yy}V_y + p_{yz}V_z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}V_x + p_{zy}V_y + p_{zz}V_z) - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)$$

или

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = p_{xx}\frac{\partial V_x}{\partial x} + p_{xy}\frac{\partial V_y}{\partial x} + p_{xz}\frac{\partial V_z}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial V_x}{\partial y} + p_{yy}\frac{\partial V_y}{\partial y} + p_{yz}\frac{\partial V_z}{\partial y} +$$

$$+ p_{zx}\frac{\partial V_x}{\partial z} + p_{zy}\frac{\partial V_y}{\partial z} + p_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right).$$

2.2.5. Дивергентная форма уравнений

Говорят, что уравнение в частных производных записано в «дивергентной форме», или, что эквивалентно, «в консервативной форме», если коэффициенты при производных являются константами. Обычно уравнения в частных производных, описывающие законы сохранения, записываются в дивергентной форме тогда, когда в них явно входит дивергенция той величины, для которой этот закон формулируется.

Например, уравнение неразрывности, описывающее закон сохранения массы (2.12)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{V}) = 0,$$

записано в дивергентной форме ($\rho\vec{V}$ – поток плотности), а уравнение (2.11) $\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{V} = 0$ – не в дивергентной форме.

Для дифференцируемых (неразрывных) решений эти уравнения эквивалентны. Однако во многих задачах МСС (например, в задачах газовой динамики) в поле течения образуются ударные волны – поверхности, на которых терпят разрыв параметры течения газа.

На поверхностях разрыва дифференциальные уравнения не имеют смысла, т.к. не существуют производные от разрывных функций. Поэтому при расчете течений с разрывами параметров необходимо пользоваться обобщенными решениями интегральных уравнений, описывающих законы сохранения («изменение какой-либо величины в некотором объеме равно потоку этой величины через поверхность этого объема»). Например, интегральное уравнение сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho dW = -\oint_\sigma \rho \vec{V} d\vec{\sigma}.$$

Эта форма полностью соответствует дивергентной форме записи дифференциального уравнения. Поэтому именно дивергентная форма правильно отражает физическую суть описываемого процесса.

Более того, из теории разностных схем численного решения дифференциальных уравнений известно, что и разностные схемы должны обладать тем же свойством (там оно называется консервативностью): консервативной схемой называются разностная схема, обеспечивающая точное выполнение законов сохранения (исключая погрешности округления) на любой сетке в конечной области, содержащей произвольное число узлов разностной сетки.

Уточним: любая согласованная разностная схема обеспечивает приближенное выполнение законов сохранения в большой области, но лишь консервативная разностная схема обеспечивает точное выполнение этих законов вследствие взаимного уничтожения ряда членов разностного уравнения (сокращаются все, кроме тех, которые описывают поток массы через границу). Если же используемая схема неконсервативна, то внутри области могут появиться источники и стоки небольшой интенсивности как артефакты разностного происхождения.

Запишем теперь два других уравнения – движения (2.16) и энергии (2.18) в дивергентном виде.

Преобразуем левую часть уравнения движения (2.16), перейдя от полной (субстанциональной) производной к частной производной и воспользовавшись уравнением неразрывности:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\right) = \rho\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \vec{V}\left(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{V})}_{=0}\right) = \frac{\partial \rho\vec{V}}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{V}\vec{V}).$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial \rho\vec{V}}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{F} + \mathrm{DivP}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \mathrm{Div}\Pi = \rho\vec{F}\,. \qquad (2.22)$$

Здесь $\Pi = -\mathrm{P} + \rho\vec{V}\vec{V}$ – **тензор плотности потока импульса**,

$$\Pi = \begin{pmatrix} -p_{xx} + \rho V_x^2 & -p_{xy} + V_x V_y & -p_{xz} + V_x V_z \\ -p_{yx} + V_y V_x & -p_{yy} + \rho V_y^2 & -p_{yz} + V_y V_z \\ -p_{zx} + V_z V_x & -p_{zy} + V_z V_y & -p_{zz} + \rho V_z^2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что этому уравнению (при $\vec{F} = 0$) соответствует интегральное уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho\vec{V}dW = -\oint_\sigma \Pi d\vec{\sigma}\,.$$

Преобразуем и левую часть уравнения движения (2.18):

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla e\right) = \rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\nabla e + e\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V})\right)}_{=0} = \frac{\partial\rho\vec{V}}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{V}e).$$

Тогда уравнение энергии примет вид

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}e) = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + \mathrm{div}(\mathrm{P}\vec{V}) - \mathrm{div}\vec{q}$$

или

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{V}e - \mathrm{P}\vec{V} + \vec{q}) = \rho\vec{F}\cdot\vec{V}\,. \qquad (2.23)$$

При $\vec{q} = 0$ и $\vec{F} = 0$ этому уравнению соответствует интегральное уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho e dW = -\oint_\sigma (\rho e - \mathrm{P}\vec{V})d\vec{\sigma}\,.$$

В декартовых координатах система уравнений (2.12), (2.22), (2.23) запишется в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 - p_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y V_x - p_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z V_x - p_{zx}) = \rho F_x\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - p_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y^2 - p_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z V_y - p_{zy}) = \rho F_y\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_z - p_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y V_z - p_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z^2 - p_{zz}) = \rho F_z\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x e - p_{xx}V_x - p_{xy}V_y - p_{xz}V_z + q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y e - p_{yx}V_x - p_{yy}V_y - p_{yz}V_z + q_y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z e - p_{zx}V_x - p_{zy}V_y - p_{zz}V_z + q_z) = \rho(F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z).$$

Вывод: для описания движения сплошной среды имеется пять скалярных дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в дивергентном или недивергентном виде.

Сколько же неизвестных содержат эти уравнения? Подсчитаем, полагая, что внешние (массовые) силы известны:

- плотность ρ;
- внутренняя энергия ε (или полная энергия $e = \varepsilon + \frac{V^2}{2}$);
- три компоненты вектора скорости V_x, V_y, V_z;

- три компоненты вектора теплового потока q_x, q_y, q_z;
- шесть компонентов тензора напряжений $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}$.

Итого – 14 неизвестных.

Даже если предположить, что теплопередача происходит в соответствии с законом Фурье (тогда вместо трех переменных q_x, q_y, q_z появится одна переменная T – температура), то число неизвестных уменьшится только до 12.

Таким образом, система уравнений сплошной среды не замкнута (число уравнений меньше, чем число неизвестных).

Для разрешения проблемы замыкания необходимо использовать дополнительные предположения о свойствах сплошной среды, т.е. вводить модельные объекты сплошной среды.

Под **модельным объектом сплошной среды** понимают такую гипотетическую среду, в которой учтены только некоторые из физических свойств, существенные для определенного круга явлений и технических задач. Другие малосущественные свойства среды игнорируются.

Рассмотрим несколько широко используемых моделей: идеальная жидкость, идеальный газ, несжимаемая жидкость, вязкая ньютоновская жидкость.

2.3. Идеальная жидкость

Идеал – это путеводная звезда.
Без нее нет твердого направления, а нет направления – нет жизни.
Л. Н. Толстой

2.3.1. Система уравнений идеальной жидкости

Можно по-разному ввести понятие идеальной жидкости:

1) Л.Д. Ландау [6]: «Идеальной жидкостью называется среда, в которой не существенны процессы вязкости и теплопроводности».

2) Л.И. Седов [7]: «Идеальная жидкость – среда, в которой вектор напряжения $\vec{P}_n$ на любой площадке с нормалью $\vec{n}$ ортогонален площадке, т.е. $\vec{P}_n$ параллелен $\vec{n}$».

3) И.И. Ольховский [2]: «Идеальная жидкость – среда, в которой при любой деформации и любой скорости деформации касательные напряжения пренебрежимо малы по сравнению с нормальными напряжениями, а все нормальные напряжения одинаковы (в данный момент времени в данной точке пространства, занимаемого средой)».

Математически все эти высказывания (за исключением некоторых моментов первого), можно свести к следующему: в тензоре напряжений отличны от нуля только нормальные напряжения, причем все нормальные напряжения одинаковы.

Таким образом, тензор напряжений идеальной жидкости имеет вид («шаровой тензор»)

$$P=\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}=-p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=-p\mathrm{I},$$

где I – единичный (метрический) тензор.

Выбор знака «минус» диктуется желанием ввести давление как положительную величину, т.к. опыт показывает, что среды, для которых годится модель идеальной жидкости, в типичных случаях находятся в сжатом состоянии при $p>0$ (давление обычно сжимает жидкость, т.е. действует против положительного направления нормали к площадке).

Обычно одновременно с предположением об идеальности жидкости принимают предположение о ее нетеплопроводности, т.е. в среде происходит идеальный адиабатический процесс – отсутствует теплообмен между отдельными участками жидкости (а также между жидкостью и соприкасающимися с ней телами), вектор потока тепла $\vec{q}$ равен нулю.

Так как рассматриваются равновесные процессы, то в уравнении второго закона термодинамики

$$dS=\frac{d'q}{T}$$

при адиабатическом движении $d'q=0$, и, следовательно, $dS=0$ – процесс адиабатического движения жидкости **изэнтропичен**.

Таким образом, подставляя выражение для тензора напряжений идеальной жидкости в уравнения (2.11), (2.16), (2.18) и (2.12), (2.22), (2.23), получаем уравнения МСС для идеальной жидкости:

Недивергентная форма:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\vec{V}=0; \\ \rho\dfrac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}-\mathrm{grad}(p)\ \text{(уравнение Эйлера)}; \\ \rho\dfrac{de}{dt}=\rho\vec{F}\vec{V}-\mathrm{div}(p\vec{V})\ \left(\text{или}\ \ \rho\dfrac{d\varepsilon}{dt}=-p\,\mathrm{div}\vec{V}\right). \end{cases} \quad (2.24)$$

Дивергентная форма:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\vec{V}=0; \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\ \rho\vec{V}\ +\mathrm{Div}\ \ pI+\rho\vec{V}\vec{V}\ =\rho\vec{F}; \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\ \rho e\ +\mathrm{div}\ \ \rho\vec{V}e+p\vec{V}\ =\rho\vec{F}\vec{V}. \end{cases} \quad (2.25)$$

По аналогии с этими уравнениями условие изэнтропичности тоже можно записать в виде уравнения в недивергентной и дивергентной форме:

$$\frac{dS}{dt}=0\Rightarrow\frac{\partial S}{\partial t}+\vec{V}\,\mathrm{grad}S=0 \text{ и } \frac{\partial\rho S}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho S\vec{V}\right)=0.$$

Если отсутствуют массовые силы, то уравнения в дивергентной форме примут вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right);\quad \frac{\partial\rho\vec{V}}{\partial t}=-\mathrm{Div}(\Pi);\quad \frac{\partial\rho e}{\partial t}=-\mathrm{div}\,\psi.$$

Здесь $\Pi=pI+\rho\vec{V}\vec{V}$ – тензор плотности потока импульса

$$\Pi=\begin{pmatrix} p+\rho V_x^{\,2} & V_xV_y & V_xV_z\\ V_yV_x & p+\rho V_y^{\,2} & V_yV_z\\ V_zV_x & V_zV_y & p+\rho V_z^{\,2}\end{pmatrix}.$$

Вектор потока импульса в направлении $\vec{n}$ имеет вид $\Pi_n=p\vec{n}+\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})$.

Если выбрать направление вдоль скорости жидкости, то в этом направлении переносится лишь продольная компонента импульса; плотность ее потока $p+\rho V^2$. В направлении же, перпендикулярном к скорости, переносится лишь поперечная (по отношению к $\vec{V}$) компонента импульса; плотность ее потока – p.

$\psi=\rho\vec{V}\left(e+\frac{p}{\rho}\right)=\rho\vec{V}\left(\varepsilon+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=\rho\vec{V}\left(h+\frac{V^2}{2}\right)$ – вектор плотности потока энергии (вектор Умова), $h=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$ – энтальпия.

Это выражение показывает, что каждая единица массы жидкости переносит с собой при своем движении энергию $h+\frac{V^2}{2}$.

В проекциях на координатные оси уравнения движения идеального газа (2.24) и (2.25) записываются в виде

1) недивергентная форма

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+V_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+V_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=0;$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+V_x\frac{\partial e}{\partial x}+V_y\frac{\partial e}{\partial y}+V_z\frac{\partial e}{\partial z}\right)=\rho(F_xV_x+F_yV_y+F_zV_z)-\left(\frac{\partial(pV_x)}{\partial x}+\frac{\partial(pV_y)}{\partial y}+\frac{\partial(pV_z)}{\partial z}\right),$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+V_x\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+V_y\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+V_z\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)=-p\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right);$$

2) дивергентная форма

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z)=0;$$

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2+p)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_x V_z)=0;$$

$$\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_y V_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y^2+p)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_y V_z)=0;$$

$$\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_z V_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_z V_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z^2+p)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho V_x\left(h+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho V_y\left(h+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho V_z\left(h+\frac{V^2}{2}\right)\right]=0,$$

где ε – удельная внутренняя энергия; $h=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$ – удельная энтальпия.

Таким образом, для идеальной жидкости имеем 5 скалярных уравнений и шесть скалярных неизвестных $\rho,\varepsilon,p,V_x,V_y,V_z$. Число неизвестных пока еще больше, чем число уравнений. Система уравнений не замкнута.

Для замыкания привлекают **уравнения состояния**, связывающие макроскопические параметры сплошной среды. Эти уравнения не содержатся в началах термодинамики, получаются эмпирическим путем или методами статистической физики.

Термическое уравнение состояния связывает давление, температуру и плотность

$$f(\rho, p, T)=0.$$

Калорическое уравнение состояния показывает связь внутренней энергии с давлением, температурой и плотностью

$$\varepsilon=f(\rho, p, T).$$

Эти два уравнения, вводя еще одну переменную (T), замыкают систему уравнений.

Система дифференциальных уравнений (2.24) (или (2.25)) имеет множество решений. Конкретное же решение определяется **начальными и граничными условиями.**

Начальные условия определяют начальное состояние среды и задаются в начальный момент времени:

$$\vec{V}\Big|_{t=t_0}=\vec{V}_0(x,y,z);\ p\Big|_{t=t_0}=p_0(x,y,z);\ T\Big|_{t=t_0}=T_0(x,y,z).$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся граничные условия:

1. Граничные условия на поверхности обтекаемого тела (например, стенка трубы при внутреннем течении).

Нормальная составляющая скорости на границе σ должна быть равна нулю (условие непротекания):

$$V_n\big|_\sigma=0.$$

На касательную составляющую $V_\tau\big|_\sigma$ поставить условие не получится. Она определяется из решения задачи.

Температура стенки сохраняет свое постоянное значение

$$T\Big|_\sigma=T_0.$$

2. Граничные условия на свободной поверхности.

$p\big|_\sigma=p_0$, где p_0 – давление во внешней среде.

3. Граничные условия на поверхности раздела жидкостей 1 и 2.

Пусть Σ – поверхность раздела, тогда

$$V_n^{(1)}\Big|_\Sigma=V_n^{(2)}\Big|_\Sigma=\begin{cases}V_n^\Sigma-\text{скорость движения поверхности};\\ 0-\text{если поверхность неподвижна}.\end{cases}$$

Еще одно условие $p^{(1)}\big|_{\Sigma} = p^{(2)}\big|_{\Sigma}$.

4. Условия «на бесконечности». Пусть тело обтекается потоком поступательным и однородным на бесконечности (т.е. там, где нет возмущений от тела). В этом случае задают

$$\vec{V}\big|_{\infty} = \vec{V}_{\infty};\ p\big|_{\infty} = p_{\infty};\ T\big|_{\infty} = T_{\infty}\ .$$

Таким образом, задача ставится так: найти такие гидродинамические параметры $V_x, V_y, V_z, p, \rho, T$, как функции координат и времени, которые бы:

- являлись решением системы уравнений идеальной жидкости;
- в начальный момент времени удовлетворяли начальным условиям;
- во все моменты времени удовлетворяли бы граничным условиям.

Рассмотрим некоторые модели идеальной жидкости: идеальный газ и несжимаемую жидкость.

2.3.2. Замкнутая система уравнений идеального газа

Возьмем в качестве модели идеальной жидкости идеальный в термодинамическом смысле (совершенный) газ.

В модели идеального газа предполагается, что между молекулами не действуют силы притяжения или отталкивания, соударения частиц абсолютно упругие, время взаимодействия между молекулами пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями и потенциальной энергией взаимодействия молекул можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией.

Для него термическое уравнение состояния имеет вид (**уравнение Клапейрона–Менделеева**)

$$p = \rho R T\,,$$

где $R = R_0/\mu$ – удельная газовая постоянная $\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right]$;

μ – молекулярная масса газа $\left[\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}\right]$;

$R_0 = 8{,}31$ Дж/(К · моль) – универсальная газовая постоянная.

Калорическое уравнение состояния идеального газа связывает внутреннюю энергию и температуру

$$\varepsilon = C_w T + const\,,$$

где C_w – массовая теплоемкость при постоянном объеме $\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right]$; это количество теплоты, которую необходимо подвести к единице массы тела, чтобы нагреть его на 1 К.

В общем случае $C_w = \left(\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_w$. Поэтому в записи калорического уравнения состояния полагается постоянство изохорной теплоемкости и появляется константа интегрирования.

Теплоемкость при постоянном объеме (изохорную теплоемкость) C_w, теплоемкость при постоянном давлении (изобарную теплоемкость) C_p и удельную газовую постоянную R связывает **соотношение Майера**

$$C_p - C_w = R\,.$$

Отметим также, что для идеального газа энтальпия выражается формулой (с точностью до константы)

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = C_w T + RT = C_p T$$

или

$$h = C_p \frac{p}{R\rho} = \frac{C_p}{C_p - C_w}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1}, \qquad (2.26)$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_w}$ – отношение изобарной и изохорной теплоемкостей, называемое **показателем адиабаты** (см. п. 2.3.6);

$a = \sqrt{\gamma \dfrac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука в газе.

Таким образом, замкнутая система уравнений движения идеального газа имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0; \\ \rho \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \operatorname{grad}(p); \\ \rho C_w \dfrac{dT}{dt} + p \operatorname{div}\vec{V} = 0; \\ p = \rho RT. \end{cases} \qquad (2.27)$$

Эта модель лежит в основе *прикладной газовой динамики* и используется при расчёте компрессоров и турбин, сопел и диффузоров, ракетных двигателей, аэродинамических труб, эжекторов, газопроводов и многих других технических устройств.

2.3.3. Замкнутая система уравнений несжимаемой жидкости

Уравнения движения идеальной жидкости заметно упрощаются, если жидкость считать несжимаемой: $\rho = const = \rho_0$. Это соотношение можно назвать простейшим уравнением состояния. Внутренняя энергия несжимаемой жидкости $\varepsilon = CT + const$, где C – массовая теплоемкость.

Как отмечалось в п.2.2.1, в этом случае уравнение неразрывности имеет вид $\operatorname{div}\vec{V} = 0$, а уравнение Эйлера (2.24) $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \operatorname{grad}\dfrac{p}{\rho_0}$.

В частном случае, если поле массовых сил – потенциальное ($\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi$), то

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho_0} + \Pi\right).$$

Уравнение энергии примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \text{ или } \frac{dT}{dt} = 0,$$

т.е. для несжимаемой жидкости внутренняя энергия в частице сохраняется.

Таким образом, уравнения движения несжимаемой идеальной жидкости

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{V} = 0; \\ \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \operatorname{grad}\dfrac{p}{\rho_0}; \\ \dfrac{dT}{dt} = 0. \end{cases} \qquad (2.28)$$

Анализируя эти уравнения, видим, что первые два («механическая задача») образуют замкнутую систему уравнений для нахождения давления и скорости, т.е. для решения задачи о механическом движении несжимаемой идеальной жидкости не требуется знания внутренней энергии (температуры).

Это означает, что *решение механической задачи об определении движения идеальной несжимаемой жидкости под действием заданных сил не зависит от решения задачи распределения температуры в объеме жидкости*.

Наоборот, решение тепловой задачи $\frac{dT}{dt}=0$ зависит от решения механической задачи, т.к. для нахождения температурного поля надо знать поле скоростей V_x, V_y, V_z :

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=0.$$

Используя эту модель, удалось решить много практических задач гидродинамики кораблей, аэродинамики самолетов, движения жидкостей по трубам и др. – то, что входит в круг задач *классической гидромеханики*.

2.3.4. Потенциальное течение

Из условия адиабатичности (или изэнтропичности) течения идеальной жидкости вытекает важное ее свойство: п*ри изэнтропическом движении идеальной жидкости циркуляция скорости* $\Gamma=\oint_c \vec{V}d\vec{r}$ *по замкнутому контуру сохраняется, если массовые силы потенциальны* (**теорема Томсона**).

Теорема Томсона утверждает, что полная производная по времени от циркуляции скорости вдоль замкнутого материального контура (т.е. контура, состоящего из одних и тех же частиц жидкости) равна нулю, т.е. $\frac{d\Gamma}{dt}=0$.

Запишем условия, данные в формулировке теоремы.

Течение изэнтропичное (адиабатичное), условие адиабатичности (2.3):

$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla h.$$

Массовые силы потенциальные:

$\vec{F}=-\nabla \Pi$, где Π – потенциал силового поля.

Жидкость идеальная, уравнение движения имеет форму Эйлера (2.24):

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\mathrm{grad}(h+\Pi).$$

Тогда, используя формулу Стокса (п.2.1.5), получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_C\vec{V}d\vec{r}=\oint_C\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{r}+\oint_C\vec{V}d\vec{V}=\oint_C\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{r}+\underbrace{\oint_C d\left(\frac{V^2}{2}\right)}_{\substack{=0 \text{ как интеграл по}\\ \text{замкнутому контуру}\\ \text{от полного дифференциала}}}=\int_\sigma \mathrm{rot}\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)d\vec{\sigma}=$$

$$=-\int_\sigma \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}(h+\Pi)\,d\vec{\sigma}=0.$$

Поэтому

$$\oint_C\vec{V}d\vec{r}=C;\ \ \oint_\sigma \mathrm{rot}\vec{V}d\vec{\sigma}=C.$$

Последнее равенство означает, что завихренность переносится вместе с движущейся жидкостью.

Отсюда следует, что если в начальный момент времени $\mathrm{rot}\vec{V}=0$ во всей среде, то и в последующие моменты времени во всей среде $\mathrm{rot}\vec{V}=0$ (если не нарушается изэнтропичность течения, например в случае пересечения ударной волны). Такое течение называют **безвихревым течением**, в отличие от вихревых, для которых $\mathrm{rot}\vec{V}\neq 0$.

В таком течении вихри не могут самообразовываться, а если искусственно внести вихрь, он будет существовать бесконечно долго.

Из условия $\mathrm{rot}\vec{V} = 0$ можно сделать вывод, что в этом случае $\vec{V} = \mathrm{grad}\varphi$.

Скалярная функция φ называется **потенциалом скорости**, поэтому течения, в которых скорость можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции, называют **потенциальными**. При потенциальном течении деформация и перемещение малого объема жидкости происходит без образования вихрей, т.е. без вращения.

Отметим, что теорема Томсона, строго говоря, неприменима вблизи поверхности тела, обтекаемого средой (или при движении жидкости в многосвязной области пространства), т.к. не удается построить произвольный материальный контур, охватывающий траекторию.

Уравнения **идеальной несжимаемой жидкости** упрощаются, если и течение потенциальное ($\vec{V} = \mathrm{grad}\varphi$), и поле массовых сил потенциальное ($\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi$).

Уравнение неразрывности приобретает вид уравнения Лапласа для потенциала φ:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho_0} + \Pi\right),$$

применив известную формулу векторной алгебры (п.2.1.5)

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \mathrm{grad}\frac{V^2}{2} - \vec{V}\times\mathrm{rot}\vec{V},$$

удается представить в виде

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\mathrm{grad}\varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \Pi\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\varphi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + \Pi = f(t), \qquad (2.29)$$

где $f(t)$ – произвольная функция времени, одинаковая во всем объеме, занятом средой.

Это соотношение (первый интеграл уравнения Эйлера) называют **интегралом Лагранжа–Коши**.

В частности, для **стационарного** потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости

$\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\varphi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + \Pi = const$ для всех частиц жидкости при ее движении.

Таким образом, решив уравнение Лапласа, найдем потенциал скорости φ , затем из интеграла Лагранжа–Коши определим p .

Проекции скорости на оси координат находятся из условия потенциальности течения $\vec{V} = \mathrm{grad}\varphi$:

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

2.3.5. Интеграл Бернулли

В силу многомерности и нелинейности уравнений движения идеальной жидкости их решение возможно только численными методами.

Но при определенных дополнительных допущениях некоторые из уравнений системы могут быть проинтегрированы. Эти допущения носят достаточно общий характер и выполняются во многих разных по характеру практических задачах. Полученные соотношения (их называют первыми интегралами системы уравнений) как уже отмечалось в первом разделе, более удобны для исследования задач, чем исходные уравнения.

Один такой интеграл – для потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости мы получили – это интеграл Лагранжа–Коши.

Уберем условие несжимаемости и предположим, что:

- поле массовых сил потенциально, т.е. $\vec{F} = -\text{grad}\Pi$, где Π – потенциал поля;
- движение – установившееся (стационарное), т. е. $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$.

Тогда уравнение Эйлера идеальной жидкости

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

с условием адиабатичности (2.3)

$$\nabla h = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

и замены (п.2.1.5)

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \text{grad}\frac{V^2}{2} - \vec{V} \times \text{rot}\vec{V}$$

примет вид

$$\text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + h + \Pi\right) = \vec{V} \times \text{rot}\vec{V}.$$

При выводе интеграла Лагранжа–Коши (п. 2.3.4) нуль в правой части обеспечила потенциальность поля скоростей. Здесь же это не выполняется.

Можно, правда, указать частный случай, когда $\vec{V} \uparrow\uparrow \text{rot}\vec{V}$, следовательно, $\vec{V} \times \text{rot}\vec{V} = 0$ и $\frac{V^2}{2} + h + \Pi = const$ – для всей области течения. Такое движение называется **винтовым.**

Но поступим по-другому: спроектируем это уравнение на направление $\vec{l}$, касательное к линии тока. По определению линии тока это направление совпадает с направлением скорости, и проекция вектора $\vec{V} \times \text{rot}\vec{V}$ на это направление будет равна нулю, т.к. $\vec{V} \times \text{rot}\vec{V} \perp \vec{V}$ (рис. 2.4).

Проекция же градиента на некоторое направление равна производной, взятой по этому направлению.

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2} + h + \Pi\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{V^2}{2} + h + \Pi = const \quad \textbf{вдоль линии тока.} \qquad (2.30)$$

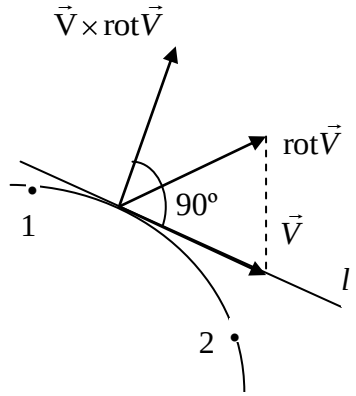


Рис. 2.4. К выводу уравнения Бернулли

Это соотношение (первый интеграл уравнения Эйлера) называется **интегралом Бернулли.**

Интеграл Бернулли связывает параметры жидкости (при вышеупомянутых предположениях) в точках 1 и 2, находящихся на одной линии тока:

$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 + \Pi_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2 + \Pi_2.$$

Частные случаи:

а) движение в поле сил тяжести ($\Pi = gz + const$):

$$\frac{V^2}{2} + h + gz = const$$

(сумма кинетической, тепловой и потенциальной энергии сохраняет свое постоянное значение на линии тока);

б) движение несжимаемой жидкости $(\rho = \rho_0 = const)$, тогда

$$dh = \frac{1}{\rho_0} dp \Rightarrow dh = d\frac{p}{\rho_0} \Rightarrow h = \frac{p}{\rho_0} + const$$

и

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \Pi = const\,.$$

Получили интеграл Лагранжа–Коши для стационарного течения. Отсюда вывод, что только в случае установившегося потенциального течения несжимаемой жидкости интеграл Бернулли переходит в интеграл Лагранжа–Коши и выполняется для любой точки пространства.

Этот интеграл показывает, что если пренебречь изменением потенциала сил (Π=const)

$$\rho_0 \frac{V^2}{2} + p = const\,,$$

то в потоке жидкости (с объявленными предположениями) существует однозначная зависимость между давлением и скоростью течения: повышение скорости всегда сопровождается уменьшением давления и наоборот;

в) движение несжимаемой жидкости в поле сил тяжести

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho_0 g} + z = const$$

(сохраняется сумма скоростной, пьезометрической и геометрической высот),

или в другом виде

$$\rho_0 \frac{V^2}{2} + p + \rho_0 g z = const$$

(напор, или полное давление, равное сумме скоростного, гидростатического и высотного напоров, сохраняет свое постоянное значение);

г) движение совершенного газа (пренебрегаем изменением потенциала массовых сил и используем (2.25)):

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = h_* = const$$

или

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = h_* = const\,,$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_w}$, $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT$ – квадрат скорости звука в газе.

Отсюда следует: если газовый поток полностью затормозить, то энтальпия газа достигнет своего максимально возможного значения h_*, называемого полной энтальпией, или **энтальпией торможения**. Соответствующая температура $T_* = \frac{h_*}{C_p}$ называется температурой торможения.

Этот интеграл показывает, что в потоке газа (с объявленными предположениями) существует однозначная зависимость между температурой газа (энтальпией) и скоростью течения: повышение скорости всегда сопровождается снижением температуры. При снижении скорости до нуля газ приобретает одинаковую температуру T_* независимо от особенностей торможения.

2.3.6. Адиабата Пуассона

Рассмотрим адиабатическое движение идеальной жидкости.

Исключая $\mathrm{div}\vec{V}$ из уравнения неразрывности $\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\vec{V} = 0$ и уравнения изменения внутренней энергии $\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p\mathrm{div}\vec{V}$, получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$$

или

$$d\varepsilon = \frac{p}{\rho^2}d\rho\,.$$

Отметим, что это же выражение можно получить из первого начала термодинамики (2.1), принимая во внимание адиабатичность процесса.

С другой стороны, если внутренняя энергия идеальной жидкости является функцией давления и времени $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$, то ее дифференциал

$$d\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial p}dp + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}d\rho\,.$$

Сравнивая оба выражения для $d\varepsilon$, после преобразования получаем

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\frac{p}{\rho^2} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}} = \theta(p,\rho)\,. \qquad (2.31)$$

После интегрирования получаем зависимость вида $\rho = \Theta(p, C)$, где C – константа, сохраняющая свое значение в движущейся жидкой частице.

Это уравнение связывает изменение давления с изменением плотности в движущейся частице жидкости, т.к. мы работали с полными производными $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{d\rho}{dt}$.

Жидкость называется **баротропной**, если ее плотность есть функция только давления: $\rho = f(p)$. В противном случае жидкость называется бароклинной.

Таким образом, имеется баротропность для жидкой частицы.

Для установившихся течений имеется место баротропности для линии тока (т.к. траектории движения и линии тока в этом случае совпадают).

Рассмотрим частный случай: **движение идеального газа.**

В этом случае калорическое уравнение состояния

$\varepsilon = c_w T + const = c_w\frac{p}{\rho R} + const = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + const$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_w}$.

Тогда частные производные, входящие в уравнение (2.31), принимают вид

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = -\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho^2};\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho},$$

а само уравнение преобразуется к простому виду

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho}.$$

После интегрирования получаем первый интеграл – уравнение **адиабаты Пуассона**

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = const\,. \qquad (2.32)$$

При адиабатическом движении идеального газа отношение $\frac{p}{\rho^\gamma}$ сохраняет постоянное значение. Параметр $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ называют **показателем адиабаты.**

Адиабату Пуассона $\frac{p}{\rho^\gamma} = C_1$ и интеграл Бернулли $\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = C_2$ используют для расчета параметров установившегося адиабатического движения идеального газа вместо дифференциальных уравнений движения (Эйлера) и энергии.

2.3.7. Законы гидростатики

Рассмотрим покоящуюся жидкость. В этом случае в жидкости наблюдаются только нормальные напряжения, причем их величина не зависит от ориентации площадки, т.е. $P = -p\mathrm{I}$. Поэтому для задач о равновесии жидкости несущественно различие между идеальной и вязкой жидкостью и можно использовать уравнение Эйлера

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p.$$

При $\vec{V} = 0$ имеем

$$\mathrm{grad}p = \rho\vec{F}. \qquad (2.33)$$

Если массовыми силами можно пренебречь: $\vec{F} = 0$, то $p = const$ – давление одинаково во всех точках жидкости (**закон Паскаля**).

Если поле сил – потенциальное: $\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi$ и плотность жидкости постоянна по всему объему $\rho = const = \rho_0$, то получаем

$$\mathrm{grad}(p + \rho_0\Pi) = 0$$

или

$$p + \rho_0\Pi = const -$$

условие равновесия несжимаемой жидкости.

В частности, если покоящаяся жидкость находится в однородном поле сил тяжести ($\vec{F} = \vec{g}$), то, направив ось *z* вертикально вверх (тогда $\Pi = gz + const$), получаем условие равновесия в виде постоянства суммы гидростатического и высотного напоров:

$$p + \rho_0 gz = const.$$

Полагая при $z = z_0$ $p = p_0$, получаем *изменение давления в покоящейся несжимаемой жидкости в зависимости от глубины (высоты)*

$$p = p_0 + \rho_0 g(z_0 - z). \qquad (2.34)$$

2.4. Вязкая жидкость

> Если смесь выше сорока градусов, в ней больше гидратов с одной молекулой воды — получаем высокую вязкость и ощущение неприятной крепости, сухости. Только сорок частей спирта по весу дают в растворе сбалансированную смесь гидратов… Такая вязкость раствора единственно возможная для того, чтобы водка не была водянистой и крепкой — была идеальной питкости.
>
> *Д.И. Менделеев*

Приведем несколько определений вязкой жидкости.

1) Л.Д. Ландау [6]: *вязкой жидкостью называется сплошная среда, на движение которой оказывают влияние процессы диссипации энергии, связанные с наличием внутреннего трения и теплопроводности.*

2) Л.И. Седов [7]: *вязкой жидкостью называется сплошная среда, в которой компоненты тензора напряжений представлены в виде*

$$\mathrm{P} = -p\mathrm{I} + \mathrm{T},$$

где второе слагаемое зависит от компонентов тензора скоростей деформации.

3) И.И. Ольховский [2]: *вязкой жидкостью называется сплошная среда, в которой напряжения зависят от скоростей деформации. При этом наряду с нормальными напряжениями, вообще говоря, отличаются от нуля и касательные напряжения*, т.е. в тензоре напряжений

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

все компоненты отличны от нуля.

Все эти определения говорят об отличительном признаке вязкой жидкости по сравнению с идеальной – ненулевые касательные напряжения в записи тензора напряжений.

2.4.1. Тензор вязких напряжений

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство текучих тел оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

Текучесть – непрерывное изменение формы под действием постоянной сдвигающей силы. Жидкость не обладает способностью к упругому сопротивлению, которое в конечном счете уравновесило бы сдвиговое усилие, т.е. любое касательное усилие может вызвать бесконечную сдвиговую деформацию.

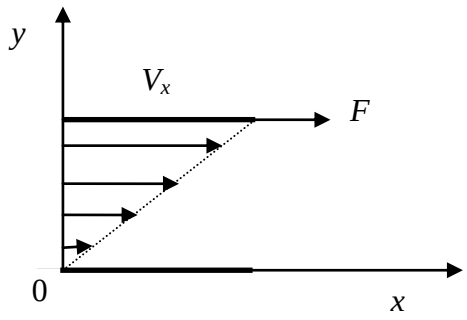


Рис. 2.5. Эпюра скоростей между двумя пластинами

Поэтому в отличие от деформируемого твердого тела при движении жидкости б**о**льшую роль играют не деформации, а скорости деформации. Это ещё в 1683 г. показал Ньютон.

Пусть вязкая жидкость находится между двумя пластинами, верхняя из которых движется со скоростью $V_x = const$ под действием силы F (рис. 2.5). Экспериментально было установлено, что

$$F = \mu \frac{\partial Vx}{\partial y} S,$$

где S – площадь слоя, по которому происходит сдвиг (площадь пластины);

$\frac{\partial Vx}{\partial y}$ – изменение скорости по координате y (скорость деформации).

Коэффициент пропорциональности μ был назван коэффициентом динамической вязкости. Он характеризует сопротивление жидкости смещению ее слоев. Его размерность в СИ $\left[\frac{\text{н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}\right] = [\text{Па}\cdot\text{с}]$.

Тогда сдвиговое напряжение $\tau_{yx} = \frac{F}{S} = \mu\frac{\partial V_x}{\partial y}$.

При рассмотрении пространственного движения вязкой жидкости вводят **тензор скоростей деформации** $\dot{\mathrm{S}}$

$$\dot{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} \dot{S}_{xx} & \dot{S}_{xy} & \dot{S}_{xz} \\ \dot{S}_{yx} & \dot{S}_{yy} & \dot{S}_{yz} \\ \dot{S}_{zx} & \dot{S}_{zy} & \dot{S}_{zz} \end{pmatrix},$$

который определяет скорость изменения расстояния между соседними точками сплошной среды при ее движении, т.е. деформацию жидкого объема.

Компоненты этого симметричного тензора определяются по формуле

$$\dot{S}_{ik} = \dot{S}_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right),\ i,k = 1,2.3.$$

Здесь $x_1 \equiv x;\ x_2 \equiv y;\ x_3 \equiv z.$

$$\dot{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Сумма диагональных элементов тензора является его инвариантом (величиной, не зависящей от выбора системы координат) и представляет собой увеличение объема среды в единицу времени – объемное расширение, или расхождение (дивергенция) вектора скорости: $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{V}$.

Для условий опыта Ньютона $\dot{S}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial y}$, т.е. $\frac{\partial V_x}{\partial y} = 2\dot{S}_{yx}$.

Поэтому сдвиговое напряжение τ_{yx} выражается через соответствующую компоненту тензора скоростей деформации:

$$\tau_{yx} = 2\mu\dot{S}_{yx},$$

т.е. между компонентой тензора напряжений и компонентой тензора скоростей деформации существует **линейная зависимость.**

Уравнения такого типа называются **реологическими уравнениями**. Для разных вязких жидкостей они выглядят различно.

Сделаем несколько предположений о вязкой жидкости:

1) в жидкости, когда она покоится или движется как абсолютно твердое тело, наблюдаются только нормальные напряжения;

2) все компоненты тензора напряжений есть линейные функции компонентов тензора скоростей деформации;

3) жидкость изотропна, т.е. ее свойства одинаковы во всех направлениях.

Такая жидкость называется **вязкой ньютоновской жидкостью.** Довольно много жидких сред с достаточной степенью достоверности соответствуют этим условиям (вода, масло, бензин, керосин, глицерин и др.).

Если же жидкость не подчиняется этим условиям, то её называют неньютоновской жидкостью, например битум, растворы полимеров, некоторые суспензии и коллоиды. Обычно такие жидкости сильно неоднородны и состоят из крупных молекул (или частиц), образующих сложные пространственные структуры.

Анализируя вышеприведенные предположения, можно логически предположить, что в общем случае реологическое уравнение для ньютоновской жидкости должно иметь вид

$$\mathrm{P} = a\dot{\mathrm{S}} + b\mathrm{I}, \tag{2.35}$$

где a, b должны быть скалярами в силу третьего условия ньютоновской жидкости, причем для совпадения с экспериментом необходимо $a = 2\mu$. Выполнение первого и второго условий очевидно.

Найдем скаляр b. Для этого запишем равенство линейных инвариантов тензоров (сумма диагональных элементов), стоящих в левой и правой части уравнения (2.35):

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 2\mu\left(\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}_{\mathrm{div}\,\vec{V}}\right) + 3b.$$

Отсюда

$$b = \frac{1}{3}\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\left(\vec{V}\right).$$

Воспользуемся **гипотезой Стокса** (для не очень быстро протекающих процессов): давление вязкой жидкости равно среднему значению нормальных напряжений, взятому с обратным знаком:

$$p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}. \tag{2.36}$$

Давление, определяемое таким образом, не зависит от ориентации площадки (как и в случае идеальной жидкости, для которой это утверждение автоматически выполняется), и его можно использовать в формулах термодинамики. Справедливость этой гипотезы подтверждена экспериментально.

Тогда

$$b = -p - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\left(\vec{V}\right).$$

Следовательно, реологическое уравнение для вязкой ньютоновской жидкости примет вид

$$\mathrm{P} = -p\mathrm{I} + 2\mu\dot{\mathrm{S}} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\left(\vec{V}\right)\mathrm{I} = -p\mathrm{I} + 2\mu\left(\dot{\mathrm{S}} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\left(\vec{V}\right)\mathrm{I}\right) = -p\mathrm{I} + \mathrm{T}, \tag{2.37}$$

т.е. тензор напряжений вязкой ньютоновской жидкости складывается из тензора напряжений для идеальной жидкости и тензора вязких напряжений T:

$$\mathrm{T} = 2\mu\left(\dot{\mathrm{S}} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\left(\vec{V}\right)\mathrm{I}\right). \tag{2.38}$$

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{\partial V_x}{\partial x} - \dfrac{2}{3}\mu\mathrm{div}(\vec{V}) & \mu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y} + \dfrac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z} + \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y} + \dfrac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 2\mu\dfrac{\partial V_y}{\partial y} - \dfrac{2}{3}\mu\mathrm{div}(\vec{V}) & \mu\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial z} + \dfrac{\partial V_z}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z} + \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial z} + \dfrac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 2\mu\dfrac{\partial V_z}{\partial z} - \dfrac{2}{3}\mu\mathrm{div}(\vec{V}) \end{pmatrix}.$$

Частный случай: для несжимаемой вязкой жидкости ($\mathrm{div}(\vec{V}) = 0$)

$$\mathrm{T} = 2\mu\dot{\mathrm{S}}.$$

2.4.2. Уравнения движения вязкой ньютоновской жидкости

Запишем систему уравнений МСС (2.11, 2.16, 2.18) применительно к вязкой ньютоновской жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\vec{V} = 0; \\ \rho \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}\,p + \mathrm{DivT}; \\ \rho \dfrac{de}{dt} = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} - \mathrm{div}(p\vec{V}) + \mathrm{div}(\mathrm{T}\cdot\vec{V}) - \mathrm{div}\vec{q}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Здесь $\mathrm{DivT} = \dfrac{\partial\vec{\mathrm{T}}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\vec{\mathrm{T}}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\vec{\mathrm{T}}_z}{\partial z}$.

Уравнение энергии с учетом формулы (2.21), где $\mathrm{P} = -p\mathrm{I} + \mathrm{T}$, можно представить в виде

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p\mathrm{div}\vec{V} + \mathrm{T}\cdot\nabla\vec{V} - div\vec{q}\,. \tag{2.40}$$

Здесь

$$\mathrm{T}\cdot\nabla\vec{V} = \bar{\tau}_x\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} + \bar{\tau}_y\frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + \bar{\tau}_z\frac{\partial\bar{V}}{\partial z}.$$

Система уравнений (2.39) становится замкнутой, если ее дополнить уравнениями состояния

$$f(\rho, p, T) = 0 \text{ и } \varepsilon = f(\rho, p, T)$$

и эмпирическим законом Фурье (2.19)

$$\vec{q} = -\lambda\mathrm{grad}T\,.$$

2.4.3. Уравнения Навье–Стокса

Уравнения движения вязкой ньютоновской жидкости несколько упрощаются, если считать коэффициент вязкости величиной постоянной μ =const.

Подставим в уравнение движения выражение для тензора вязких напряжений

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}(p) + 2\mu\mathrm{Div}\,\dot{\mathrm{S}} - \frac{2}{3}\mu\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{V}).$$

Если взять соответствующие производные от компонент тензора скоростей деформации, то после несложных преобразований выражение для $\mathrm{Div}\,\dot{\mathrm{S}}$ запишется в виде

$$\mathrm{Div}\,\dot{\mathrm{S}} = \frac{\partial\dot{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial\dot{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial\dot{S}_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{V}) + \frac{1}{2}\Delta\vec{V}\,,$$

где $\Delta\vec{A} = \left(\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$.

Подставляя его в уравнение, получим

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}(p) + \frac{1}{3}\mu\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{V}) + \mu\Delta\vec{V}\,. \tag{2.41}$$

Это уравнение носит название **уравнения Навье–Стокса** по имени французского физика Анри Навье и британского математика Джорджа Стокса, получивших и исследовавших его.

Проецируя на оси декартовой системы координат, получаем уравнения Навье–Стокса в проекциях:

$$\rho\frac{dV_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\frac{dV_y}{dt}=\rho F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right);$$

$$\rho\frac{dV_z}{dt}=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right).$$

В частном случае для несжимаемой жидкости ($\rho=\rho_0$; $\mathrm{div}\vec{V}=0$) уравнение Навье-Стокса еще упрощается

$$\rho_0\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho_0\vec{F}-\mathrm{grad}(p)+\mu\Delta\vec{V}$$

или

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho_0}\right)+\nu\Delta\vec{V}. \qquad (2.42)$$

Здесь коэффициент $\nu=\mu/\rho_0$ называется кинематической вязкостью.

Уравнение (2.41) вместе с уравнением неразрывности $\mathrm{div}\vec{V}=0$ образует **замкнутую систему уравнений Навье–Стокса** для нахождения p и $\vec{V}$, т.е. как и для идеальной жидкости, эта задача (механическая) решается отдельно от тепловой (см. п. 2.3.3).

Примечание.

Уравнения Навье–Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в численном моделировании многих природных явлений и технических задач. Но в аналитическом виде точные решения этих уравнений найдены лишь в некоторых частных случаях (течение в цилиндрической трубке круглого сечения под действием постоянной разности давлений (течение Пуазейля), течение между двумя параллельными стенками, одна из которых движется относительно другой (течение Куэтта) и др.), поэтому нет полного понимания свойств этих уравнений (например, при турбулентном течении (п. 2.5)).

Проблема существования и гладкости решений системы трехмерных уравнений Навье–Стокса является одной из семи математических «задач тысячелетия», сформулированных в 2000 г. Математическим институтом Клэя (США). За ее решение обещана премия $1 млн. Кстати, одна из этих задач – доказательство гипотезы Пуанкаре (топологическая проблема) уже решена в 2002 г. российским математиком Григорием Перельманом.

Конец примечания.

2.4.4. Сравнение граничных условий для идеальной и вязкой жидкости

В п.2.3.1 были описаны начальные и граничные условия для идеальной жидкости.

Для вязкой жидкости начальные условия задаются так же – распределением параметров течения в начальный момент времени.

Рассмотрим граничные условия на примере внутреннего течения в трубе (рис. 2.6).

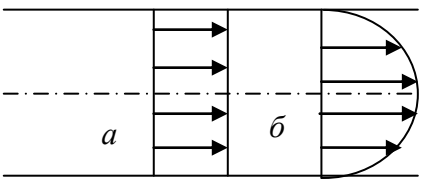


Рис. 2.6. Эпюры скоростей в трубе при течении идеальной (*а*) и вязкой (*б*) жидкости

К аналогичному условию «непротекания» $V_n\big|_\sigma=0$ добавляется условие «прилипания» $V_\tau\big|_\sigma=0$ – равенство нулю касательной скорости на стенке трубы.

Поэтому профиль течения для идеальной жидкости (*а*)– равномерный по сечению трубы, а для вязкой жидкости имеет максимум на оси трубы и нуль на стенке (*б*).

Условия, налагаемые на температуру:

1) $T\big|_\sigma=T_w$ – задана температура стенки (граничное условие 1-го рода);

2) $\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\sigma} = q_w$ – задан тепловой поток от стенки к жидкости (граничное условие 2 рода);

3) $\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\sigma} = \alpha\ (T - T_w)$ – задан теплообмен с окружающим пространством в соответствии с эмпирическим законом Ньютона–Рихмана, где α – коэффициент теплоотдачи;

4) $\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\sigma} = \lambda_w \left.\frac{\partial T_w}{\partial n}\right|_{\sigma}$, $T\big|_{\sigma} = T_w\big|_{\sigma}$ – сопряженная задача теплообмена: заданы непрерывность потока тепла и равенство температур (граничное условие 4-го рода).

2.4.5. Уравнение энергии. Диссипативная функция

Рассмотрим уравнение энергии вязкой жидкости в форме (2.40)

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p\,\mathrm{div}\vec{V} + \Pi \cdot \nabla \vec{V} - div\bar{q}\,.$$

Отличие от аналогичного уравнения для идеальной жидкости (2.24) – в скалярном слагаемом $\Pi \cdot \nabla \vec{V} = \Phi$ и слагаемом, связанном с вектором теплового потока $-div\bar{q}$.

Распишем первое из указанных слагаемых покоординатно:

$$\Phi = \Pi \cdot \nabla \vec{V} = \bar{\tau}_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{\tau}_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{\tau}_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = \tau_{xx} \frac{\partial Vx}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial Vy}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial Vz}{\partial x} +$$

$$+ \tau_{yx} \frac{\partial Vx}{\partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial Vy}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial Vz}{dy} + \tau_{zx} \frac{\partial Vx}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial Vy}{\partial z} + \tau_{zz} \frac{\partial Vz}{\partial z}.$$

Подставив в него компоненты тензора вязких напряжений

$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \mathrm{div}\vec{V}$; $\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) = \tau_{yx} \ldots$ и т.д., после преобразования получаем

$$\Phi = \frac{2}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2\right] +$$

$$+ \mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2\right] \geq 0. \qquad (2.43)$$

Физический смысл этой величины – удельная мощность деформации, т.е. отнесенная к единице времени и единице объема та часть работы сил вязкости, которая расходуется на деформацию жидкого объема. Ее также называют диссипативной функцией.

В частном случае для несжимаемой жидкости ($\rho = \rho_0 = const$, $\mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$) диссипативная функция имеет вид

$$\Phi = 2\mu \dot{S}^2, \qquad (2.44)$$

где $\dot{S}^2 = S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2S_{xy}^2 + 2S_{xz}^2 + 2S_{yz}^2$.

Внутренняя энергия несжимаемой жидкости $\varepsilon = CT + const$, где C – массовая теплоемкость.

Тогда **уравнение энергии**

$$\rho_0 C \frac{dT}{dt} = \Phi - div(\bar{q})\,.$$

Если предположить, что теплообмен с окружающей средой происходит по закону Фурье $\bar{q} = -\lambda \mathrm{grad}T$ и $\lambda = const$, то уравнение энергии несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости примет вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho_0 C}\Phi + \kappa\Delta T \text{ или } \frac{dT}{dt} = \frac{2\nu}{C}\overset{\bullet}{S}^2 + \kappa\Delta T, \qquad (2.45)$$

где $\kappa = \dfrac{\lambda}{C\rho_0}$ – коэффициент температуропроводности $\left[\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$. Он характеризует скорость изменения (выравнивания) температуры вещества в неравновесных тепловых процессах.

Если рассматривать еще более частный случай – среда неподвижна ($\vec{V} = 0$), то получаем известное уравнение теплопроводности в неподвижной среде (например, в твердом теле)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T .$$

Судя по выражению (2.43) диссипативная функция является неотрицательной величиной: $\Phi \geq 0$, причем нулевое значение реализуется при условии покоя.

Это говорит о том, что при отсутствии теплообмена с внешней средой ($\bar{q} = 0$) прирост энтропии, выражающей необратимость перехода механической энергии потока несжимаемой вязкой жидкости в тепло, всегда больше нуля, т.к. в этом случае, исходя из первого и второго начал термодинамики, имеем $d\varepsilon = TdS$, и уравнение энергии запишется в виде

$$\rho_0 T\frac{dS}{dt} = \Phi > 0 .$$

Следовательно, движение вязкой теплоизолированной несжимаемой жидкости всегда сопровождается потерей механической энергии. Поэтому приведенная в движение и предоставленная сама себе вязкая жидкость рассеивает сообщенную ей механическую энергию по всей жидкости до тех пор, пока не остановится.

Переход части энергии упорядоченных процессов (например, кинетической энергии движущегося тела) в энергию неупорядоченных процессов (в конечном счёте в теплоту) называется **диссипацией энергии**. Системы, в которых происходят такие процессы, называются диссипативными. Если диссипация энергии происходит **в замкнутой системе**, то (как это было показано), энтропия системы возрастает.

Диссипация осуществляется двумя отличными друг от друга процессами:

– **конвекцией** – это макроперенос: перенос энергии потоком жидкости (различают естественную конвекцию (при перепаде температур) и вынужденную конвекцию (под действием каких-то внешних сил);

– **диффузией** (теплопроводностью) – это микроперенос: перенос энергии молекулами и атомами в процессе их теплового движения.

Соотношение между интенсивностью теплообмена за счёт конвекции q_c и интенсивностью теплообмена за счёт теплопроводности q_T (в условиях неподвижной среды) показывает **число Нуссельта** $\text{Nu} = \dfrac{q_c}{q_T} \geq 1$. Это число – один из основных критериев подобия тепловых процессов (см. п. 2.4.7).

Диссипация энергии **в открытых системах**, обусловленная процессами уноса энергии, например в виде излучения ($\bar{q} \neq 0$), может приводить к уменьшению энтропии рассматриваемой системы при увеличении полной энергии системы и окружающей среды.

2.4.6. Закон подобия стационарных течений несжимаемой вязкой жидкости

Ввиду невозможности получить точное решение уравнений Навье–Стокса и уравнения энергии для подавляющего большинства задач гидрогазодинамики используют либо приближенные решения, либо физическое моделирование – эксперименты на моделях (например, продувка в аэродинамических трубах моделей летательных аппаратов, автомобилей, мостов, высотных зданий и т.п.). В последнем случае возникает вопрос: какие условия (**условия подобия**) нужно обеспечить на физической модели, чтобы результаты, полученные в экспериментах, перенести на натурные изделия?

Два физических явления называют **подобными**, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках и умноженных на некоторые одинаковые множители. Эти множители называются коэффициентами подобия.

Первым условием такого подобия является **геометрическое подобие**, которое выполняется, если размеры всех сходственных элементов модели и натурного объекта отличаются в одно и то же число раз, т.е. любой характерный размер модельного объекта R_M отличается от соответствующего характерного размера натурного объекта R_N в k_L раз.

Второе условие – это **кинематическое подобие**, которое выполняется, если в сходственных точках, координаты которых пропорциональны: $\frac{x_M}{x_N} = \frac{y_M}{y_N} = \frac{z_M}{z_N} = k_L$, компоненты векторов скорости будут удовлетворять условию $\frac{V_{xM}}{V_{xN}} = \frac{V_{yM}}{V_{yN}} = \frac{V_{zM}}{V_{zN}} = k_V$.

Третье условие – это **динамическое подобие**, которое выполняется, когда значения сходственных сил, приложенных к модельному и к натурному объекту, отличаются в одно и то же число раз. В уравнении Навье–Стокса, например, участвуют силы инерции потока, массовые силы, силы гидродинамического давления и силы вязкости.

Тогда гидродинамически подобными будут являться такие течения, в которых одновременно выполняются все три условия.

Рассмотрим упрощенную задачу определения критериев подобия стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, пренебрегая действием массовых сил.

Запишем соответствующие этим условиям уравнения Навье–Стокса:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{V} = 0; \\ (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\operatorname{grad}\frac{p}{\rho_0} + \nu\Delta\vec{V}. \end{cases}$$

Приведем эти уравнения к безразмерному виду. Тогда мы не будем зависеть от конкретных условий течения и первые два условия (геометрическое и кинематическое подобие) будут выполнены. Останется найти критерии динамического подобия.

Как провести обезразмеривание? Для каждой переменной размерной величины φ введем свой масштаб, т.е. представим ее в виде $\varphi = \tilde{\varphi}\varphi_M$, где $\tilde{\varphi}$ – безразмерная величина; φ_M – масштаб.

Пусть L – масштаб длины (обычно характеризует размер: во внутренних задачах – диаметр трубы; во внешних задачах – диаметр или длина обтекаемого тела), U – масштаб скорости (например, скорость звука в среде), P – масштаб давления (о его выборе – чуть позже).

После подстановки получаем

$$\frac{U^2}{L}(\tilde{\vec{V}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{V}} = -\frac{P}{\rho_0 L}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{\nu}{L^2}U\tilde{\Delta}\tilde{\vec{V}}.$$

Поделим это уравнение на $\frac{U^2}{L}$:

$$(\tilde{\vec{V}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{V}} = -\frac{P}{\rho_0 U^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{\nu}{LU}\tilde{\Delta}\tilde{\vec{V}}.$$

Здесь $\frac{P}{\rho_0 U^2} = \mathrm{Eu}$ – **число Эйлера**; характеризует отношение силы гидродинамического давления в потоке к силе инерции. В несжимаемой жидкости не является определяющим критерием, т.к. в качестве масштаба давления можно взять удвоенный динамический напор $\rho_0 U^2 = P$, и этот критерий исчезает из уравнения.

Тогда (опуская для простоты записи знак безразмерности) уравнение Навье–Стокса в безразмерном виде

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{V}. \qquad (2.46)$$

Здесь $\mathrm{Re} = \dfrac{UL}{\nu} = \dfrac{\rho_0 UL}{\mu} = \dfrac{\rho_0 U^2}{\dfrac{\mu U}{L}}$ – число Рейнольдса; характеризует отношение силы инерции к силе вязкости в потоке. Видно, что это единственная безразмерная комбинация размерных величин U, L, ν характеризующих течение и свойства жидкости, т.к. уравнение несжимаемости при переходе к безразмерным величинам не меняет свой вид.

Вывод: *чтобы два стационарных потока несжимаемой вязкой жидкости были подобны необходимо, чтобы числа Рейнольдса этих потоков были одинаковые* (**закон подобия Рейнольдса**):

$$\mathrm{Re} = idem \quad (idem \text{ (лат.)} – \text{один и тот же}) \qquad (2.47)$$

Число Рейнольдса Re является критерием динамического подобия. Названо в честь Осборна Рейнольдса – английского инженера и физика, специалиста в области гидравлики, исследовавшего ламинарные и турбулентные течения (см. п. 2.4.8).

Это не единственный критерий динамического подобия потоков вязкой жидкости. Если отказаться от условия стационарности течения, то появляется новый критерий – **число Струхаля**

$$\mathrm{Sh} = \frac{L}{t_M U} = \frac{\dfrac{\rho_0 LU}{t_M}}{\rho_0 U^2},$$

характеризующее отношение дополнительной (локальной) силы, вызванной неустановившимся характером движения, к силе инерции, или обратный ему **критерий гомохронности** Но

$$\mathrm{Ho} = \frac{1}{\mathrm{Sh}}.$$

Если учесть действие массовых сил (силы тяжести, например), то появляется критерий – **число Фруда**, характеризующее отношение силы инерции к силе тяжести:

$$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL} = \frac{\rho_0 U^2}{\rho_0 gL}.$$

Если отказаться от условия несжимаемости, то появляется критерий – **число Эйлера** $\mathrm{Eu} = \dfrac{P}{\rho_M U^2}$, рассмотренное выше.

Для газовых потоков (где нужно учитывать сжимаемость) критерий Эйлера выражается через **число Маха** $M = \dfrac{V}{a}$ – отношение скорости потока к местной скорости звука. Квадрат скорости звука $a^2 = \gamma\dfrac{p}{\rho}$, поэтому $\mathrm{Eu} = \dfrac{1}{\gamma M^2}$, откуда следует, что у газовых потоков появляются два дополнительных критерия подобия: показатель адиабаты γ и число Маха M.

Добиться одновременного выполнения всех условий динамического подобия невозможно. Но в большинстве случаев это и не нужно. В каждой конкретной гидродинамической задаче оценка членов уравнения Навье–Стокса позволяет какими-то членами пренебречь, и работать с определяющими критериями подобия. В рассматриваемом случае таким определяющим критерием является $\mathrm{Re} = idem$.

2.4.7. Критерии теплового подобия

Выше было рассмотрено гидродинамическое подобие. Но если моделируются тепловые процессы (например, распределение температур в энергетических устройствах), необходимо знать критерии теплового подобия. Для этого рассмотрим уравнение энергии несжимаемой вязкой жидкости (2.46)

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\mathrm{grad}T=\frac{2\nu}{C}\dot{\mathrm{S}}^2+\kappa\Delta T\,.$$

Примем предположение об установившемся процессе теплообмена $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ и проведем обезразмеривание , введя масштаб T_M для температуры:

$$\frac{UT_M}{L}\tilde{\vec{V}}\cdot\tilde{\nabla}\tilde{T}=\frac{2\mu}{C\rho_0}\frac{U^2}{L^2}\tilde{\dot{\mathrm{S}}}^2+\kappa\frac{T_M}{L^2}\tilde{\Delta}\tilde{T}.$$

Умножим уравнение на комплекс $\frac{L^2}{\nu T_M}$ и опустим для простоты записи знак безразмерности:

$$\frac{UL}{\nu}\vec{V}\cdot\mathrm{grad}T=\frac{2U^2}{CT_M}\dot{\mathrm{S}}^2+\frac{\kappa}{\nu}\Delta T\,. \qquad (2.48)$$

В уравнении появилось три безразмерных комплекса, составленных из масштабов течения и характеристик жидкости.

Это уже известное число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$, которое здесь можно рассматривать как отношение кинетической энергии жидкости к потерям энергии на характерной длине за счет вязкости, и два новых безразмерных критерия подобия.

Во-первых, это **число Эккерта** $\mathrm{Ec}=\frac{U^2}{CT_M}$ – критерий теплового подобия, характеризующий отношение кинетической энергии потока к энтальпии течения.

Для газовых потоков $\frac{U^2}{C_pT_M}=\frac{\gamma RU^2}{C_p\gamma RT_M}=(\gamma-1)M^2$, где M – число Маха, $\gamma=\frac{C_p}{C_w}$ – показатель адиабаты.

Во-вторых, это **число Прандтля** $\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\kappa}=\frac{C\mu}{\lambda}$ – физическая характеристика среды, зависящая только от её термодинамического состояния; учитывает влияние физических свойств теплоносителя на теплоотдачу.

Тогда уравнение энергии

$$\mathrm{Re}\cdot\vec{V}\cdot\mathrm{grad}T=2\mathrm{Ec}\dot{\mathrm{S}}^2+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T\,.$$

Если поделить на число Рейнольдса, то

$$\vec{V}\cdot\mathrm{grad}T=2\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\dot{\mathrm{S}}^2+\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta T\,,$$

где $\mathrm{Pe}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}=\frac{C\rho_0UL}{\lambda}=\frac{UL}{\kappa}$ – **число Пекле**, характеризующее соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла в потоке жидкости. Также является одним из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах:

В свою очередь отношение $\frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}=\frac{\mu U}{\rho_0CT_ML}$ характеризует отношение рассеиваемого тепла (выделяемого за счет внутренних сил трения) в жидкости к конвективному тепловому потоку.

Таким образом, для рассматриваемого процесса (стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил) условия гидродинамического и теплового подобия имеют вид

$$\mathrm{Re}=idem,\ \mathrm{Ec}=idem,\ \mathrm{Pr}=idem\ (\text{или}\ \mathrm{Pe}=idem).$$

2.4.8. Течения при Re<<1 и Re>>1

В зависимости от значения числа Рейнольдса течение вязкой жидкости может иметь различный характер.

1. Пусть **Re<<1**, т.е. инерционные силы малы по сравнению с силами вязкости, и ими можно пренебречь.

Тогда уравнение Навье–Стокса для стационарного движения несжимаемой жидкости (2.42) приобретает вид

$$\nabla p = \mu \Delta \vec{V} . \qquad (2.49)$$

Это уравнение называется уравнением Стокса для «ползущих» течений. К этому классу относятся медленное течение вязкой жидкости, движение жидкости с большой вязкостью, движение малых тел в вязких жидкостях. Это уравнение линейно, поэтому строить его решение проще.

Пример.

Рассмотрим обтекание сферы при малых числах Рейнольдса установившимся потоком, скорость которого $\vec{V}$ на бесконечности направлена параллельно оси *x* (рис. 2.7).

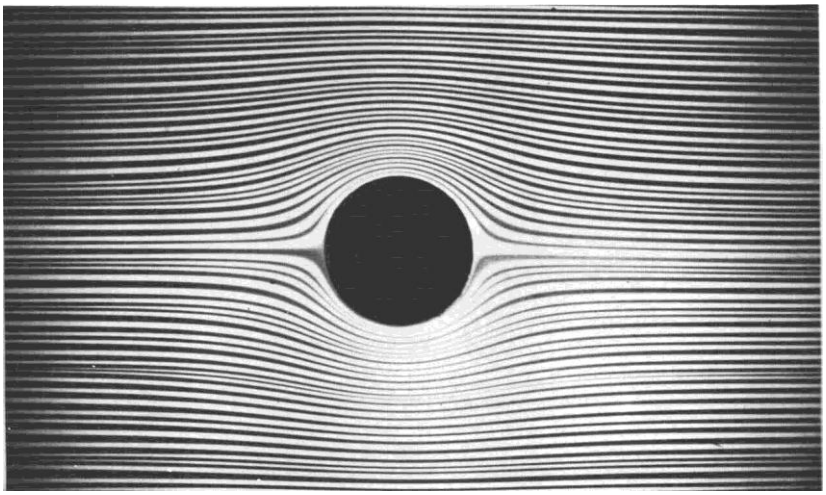


Рис. 2.7. Обтекание сферы при малых Re [11]

Тогда замкнутая система уравнений:

$$\mu\left(\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2}\right)=grad(p);$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=0.$$

Граничные условия на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$: $\vec{V}\big|_{r=a}=0$ или

$V_x\big|_{r=a}=0;\ V_y\big|_{r=a}=0;\ V_z\big|_{r=a}=0;$

на бесконечности

$V_x\big|_{\infty}=V_0;\ V_y\big|_{\infty}=0;\ V_z\big|_{\infty}=0;\ p\big|_{\infty}=p.$

Решение этой системы имеет вид

$$V_x=V_0\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)-\frac{3}{4}\frac{V_0 a x^2}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$V_y=-\frac{3}{4}\frac{V_0 a x y}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$V_z = -\frac{3}{4}\frac{V_0 axz}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right);\ p = p_0 - \frac{3}{2}\mu\frac{V_0 ax}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

По этому решению можно вычислить силу сопротивления сферы в потоке:

$$R_x = \iint_S p_{nx} dS = \iint_S \left(\frac{x}{a}p_{xx} + \frac{y}{a}p_{yx} + \frac{z}{a}p_{zx}\right) dS,$$

где p_{xx}, p_{yx}, p_{zx} – компоненты первой строки тензора напряжений.

После интегрирования получается известная формула Стокса для сопротивления сферы при малых Re:

$$R_x = 6\pi\mu a V_0.$$

Коэффициент сопротивления сферы тогда

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho V_c^2 \pi a^2} = \frac{12}{\mathrm{Re}_a} = \frac{24}{\mathrm{Re}_d}.$$

Но полученное решение оказывается неприемлемым на достаточно больших расстояниях от шара, несмотря на малость числа Рейнольдса, т.к. там сказываются погрешности из-за отбрасывания члена $\vec{V}\cdot\nabla\ \vec{V}$.

2. Пусть **Re>>1**. Из уравнения (2.46) видно, что для больших чисел Рейнольдса, уравнение становится похожим на уравнение Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости, т.е. можно ожидать, что при Re>>1 течение вязкой жидкости близко к течению идеальной жидкости. На этот вывод наталкивает также и тот факт, что решение задачи о потенциальном течении идеальной жидкости является точным решением уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.

Действительно, в безразмерном виде уравнение движения несжимаемой жидкости:

$\vec{V}\nabla\vec{V} = -\nabla p$ – для идеальной жидкости;

$\vec{V}\nabla\vec{V} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{V}$ – для вязкой жидкости.

Если течение потенциально, то $\vec{V} = \mathrm{grad}\,\varphi$. Тогда $\Delta\vec{V} = \Delta(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathrm{grad}(\Delta\varphi) = 0$, т.к. $\Delta\varphi = 0$ в силу уравнения неразрывности.

Следует вроде бы естественный вывод: чтобы получить уравнение движения вязкой жидкости при Re>>1, можно пренебречь малым членом $\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{V}$.

Но есть два обстоятельства: математическое и физическое, препятствующие этому.

Во-первых, мы понизим этим порядок дифференциального уравнения со второго до первого; изменим его тип, а следовательно, и вид решения.

Во-вторых, решение этого упрощенного уравнения уже не будет удовлетворять граничным условиям: для вязкой жидкости касательная скорость на границе обтекаемой области равна нулю (условие прилипания), т.е. теряется физический смысл решения вблизи границ. Попутно можно сделать вывод, что течение вязкой жидкости всегда вихревое, причем причина вихревых движений – внутреннее трение, особенно существенное в тонком слое вблизи границ обтекаемого тела.

Это все дало основание немецкому физику-гидроаэродинамику Людвигу Прандтлю (1904 г.) предположить, что при Re>>1 течение жидкости в окрестностях твердой поверхности можно разделить на две области (**гипотеза Прандтля**):

- область очень тонкого слоя вблизи тела (**пограничный слой**), где трение (вязкость) играют существенную роль. В экспериментальной физике за толщину погранслоя принято брать такое расстояние от стенки обтекаемого тела, на котором скорость течения отличается на 1% от скорости внешнего течения.
- область вне этого слоя, где трением можно пренебречь (**ядро потока**) и использовать уравнение движения идеальной жидкости Эйлера, в частности интеграл Бернулли.

Внутри пограничного слоя происходит плавное изменение скорости от ее значения во внешнем потоке (ядре потока) до нуля на стенке вследствие прилипания вязкой жидкости к твердой поверхности.

Разработанная теория пограничного слоя [9] позволила существенно упростить решение полных уравнений Навье–Стокса, в том числе и теплового уравнения. Теплообмен обтекаемого тела с потоком тоже происходит исключительно в пограничном слое, и это позволяет упростить решение уравнений за его пределами.

2.4.9 Турбулентность

> Я старый человек и когда после смерти попаду на небо, то спрошу у Всевышнего две вещи: что такое квантовая электродинамика и что такое турбулентность. В отношении первого я настроен более оптимистически.
>
> *Гораций Ламб. Гидродинамика (1932 г.)*

2.4.9.1 Определение турбулентности

Решение рассмотренных выше уравнений вязкой жидкости формально может существовать при любых числах Рейнольдса. В действительности только то решение описывает реальное течение, которое является устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Экспериментальные исследования течений вязкой жидкости показали, что существует два режима течения: ламинарное и турбулентное.

Ламинарным (lamina (лат.) – пластинка, полоска) называется слоистое течение без перемешивания частиц жидкости и без пульсации скорости и давления. При ламинарном течении жидкости в прямой трубе постоянного сечения все линии тока направлены параллельно оси трубы, при этом отсутствуют поперечные перемещения частиц жидкости (рис. 2.7).

Турбулентным (turbulentus (лат.) – бурный, беспорядочный) называется течение, сопровождающееся интенсивным перемешиванием жидкости с пульсациями скоростей и давлений. Наряду с основным продольным перемещением жидкости наблюдаются поперечные перемещения и вращательные движения отдельных объемов жидкости (рис. 2.8).

Систематическое изучение турбулентности начал О. Рейнольдс в 1883 г. Он изучал течение жидкости в трубе, подкрашивая жидкость в центре сечения трубы для визуализации течения. При малом перепаде давления подкрашенная струйка жидкости, не смешиваясь с остальной жидкостью в объёме трубы, спокойно текла вместе с ней. При некотором критическом перепаде давления по подкрашенной струйке появлялись волнообразные движения. При очень большом перепаде давления движение внутри трубы было быстрым и хаотичным, струйка сразу же размешивалась по трубе. Рейнольдс проводил опыты с разными размерами труб и жидкостями и выяснил, что переход от спокойного слоистого течения жидкости к хаотически изменяющемуся течению происходит, когда некоторая безразмерная комбинация скорости жидкости, её вязкости и размеров трубы достигает одного и того же значения. Эта безразмерная комбинация получила название **число Рейнольдса** Re (оно было представлено выше в п.2.4.6 как критерий гидродинамического подобия): $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_0 UL}{\mu}$.

Число Рейнольдса позволяет судить о режиме течения жидкости в трубе. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ течение является ламинарным, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ течение является турбулентным. Как показывает опыт, для труб круглого сечения $\mathrm{Re}_{кр}$ примерно равно 2300. Точнее говоря, вполне развитое турбулентное течение в трубах устанавливается лишь при Re примерно равном 4000, а при Re = 2300…4000 имеет место переходная, критическая область. Путем подбора условий входа в трубу (плавный вход, уменьшение степени начальной возмущённости течения), можно добиться затягивания ламинарного режима до значительно больших $\mathrm{Re}_{кр}$, например, в трубах до 50 000. Но такое затянутое ламинарное течение не терпит появления даже очень небольших возмущений и сразу переходит в турбулентное.

Качественная картина развитой турбулентности была дана английским метеорологом Льюисом Ричардсоном в 20-х гг. XX в. Вязкость жидкости действует на течение тем сильнее, чем

меньше характерный размер течения (больше градиент скорости). Если число Рейнольдса большое, то на эти крупномасштабные движения она действует слабо, эти движения за счёт вязкости затухали бы очень долго. Уравнение движения жидкости (уравнение Навье–Стокса) нелинейно (это связано с тем, что скорость жидкости переносится самой скоростью), и эти крупномасштабные движения неустойчивы. Они дробятся на более мелкие вихри, те в свою очередь на ещё более мелкие. В конце концов, на самых маленьких масштабах вступает в действие вязкость, и самые мелкие вихри затухают за счёт вязкости. Эта картина получила название прямого каскада (каскад от больших масштабов в маленькие).

Исходя из этого турбулентность можно определить как «*трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса*». (Брэдшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974).

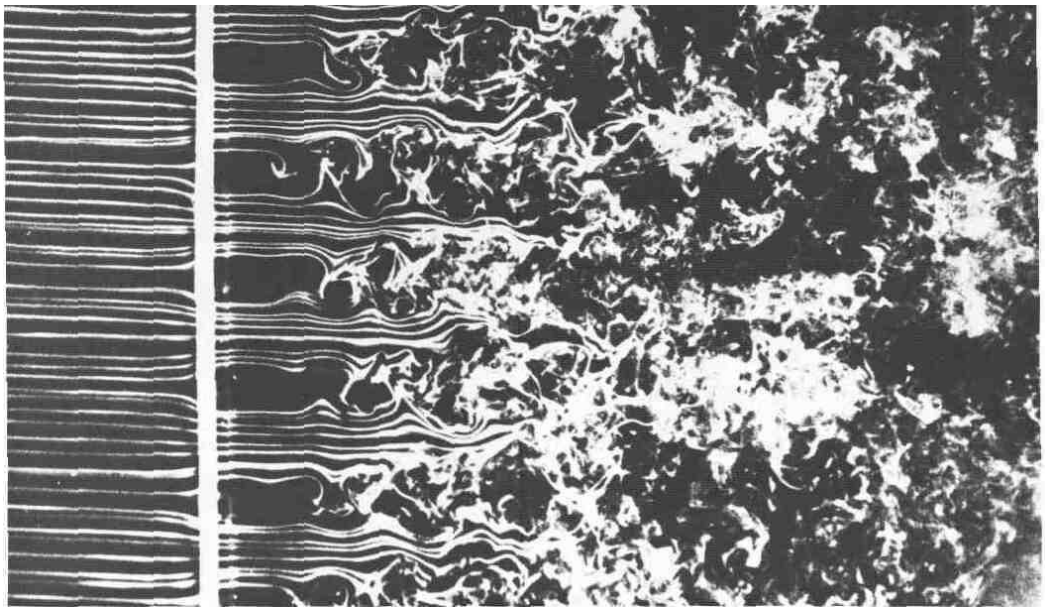


Рис. 2.8. Порождение турбулентности решеткой [11]

2.4.9.2 Свойства турбулентности

Отметим характерные особенности, присущие турбулентным течениям сплошных сред, описанные Теннекесом и Ламли (Tennekes H., Lumley J.L. A First Course in Turbulence. The MIT Press, 1972):

1. Турбулентность – это не физическое свойство жидкости, это **свойство течения** жидкости. Динамика турбулентности, по большей части, одна и та же во всех текучих средах, будь это жидкости или газы, если число Рейнольдса достаточно велико. Общее решение уравнений Навье–Стокса не известно; следовательно, нет общих решений задач, связанных с турбулентными потоками. Поскольку каждое течение индивидуально, каждое турбулентное течение будет иметь свои особенности, связанные с его начальными и граничными условиями, хотя все они имеют немало общих характеристик.

2. **Нерегулярность.** Для турбулентных течений жидкостей и газов характерен нерегулярный, или случайный, характер изменения гидродинамических полей в пространстве и времени. Поэтому для корректного описания турбулентных течений следует использовать статистические методы.

3. **Диффузионный характер**. Это свойство связано с фактом быстрого перемешивания и возрастания скоростей переноса импульса, тепла и массы. Скорости турбулентного переноса и смешения на несколько порядков выше, чем скорости молекулярной диффузии.

4. **Большие числа Рейнольдса.** Турбулентность возникает вследствие неустойчивости ламинарного течения, когда число Рейнольдса становится достаточно большим. Математически неустойчивость связана с взаимодействием вязких и нелинейных инерционных членов в уравнении движения. Случайность в сочетании с нелинейностью делает уравнения турбулентности почти неприступными для общего теоретического подхода.

5. **Трехмерность флуктуаций завихренности**. Турбулентность есть вихревое движение сплошной среды, и это движение трехмерно. Существенную роль в понимании природы турбулентного течения играет изучение взаимодействия вихрей разного размера.

6. **Диссипативность.** Турбулентные течения всегда диссипативные. Вязкие напряжения сдвига выполняют работу деформации, которая увеличивает внутреннюю энергию жидкости за счет кинетической энергии турбулентности. Для компенсации этих потерь, вызванных вязкостью, турбулентности нужен постоянный подвод энергии. Если энергия поступать не будет, турбулентность быстро исчезнет.

7. **Континуальность**. Турбулентность – это феномен, относящийся к сплошной среде, описываемый уравнениями механики жидкости. Даже наименьшие из масштабов, свойственных турбулентному течению, значительно больше любого молекулярного масштаба.

Все это приводит к большим проблемам при теоретическом описании, решении и анализе турбулентных течений. До сих пор не существует общей формальной теории турбулентности. Вследствие чрезвычайной нерегулярности гидродинамических полей турбулентных течений обычно применяется статистическое описание турбулентности: гидродинамические поля трактуются как случайные функции от точек пространства и времени и изучаются распределения вероятностей для значений этих функций на конечных наборах таких точек.

Но этот подход приводит к тому, что обычно число неизвестных оказывается больше, чем число уравнений (возникает проблема замыкания). Поэтому при решении практических задач турбулентного движения приходится использовать простые физические соображения, основанные на данных эксперимента, чтобы заполнить пробел между уравнениями и реальным течением.

2.4.9.3 Полуэмпирические модели турбулентности

Исходя из того, что при турбулентном течении жидкости параметры потока изменяются случайным образом во времени и пространстве вокруг некоторых своих средних значений, для количественного описания развитого турбулентного движения Рейнольдс в 1884 г. предложил следующий прием: представить мгновенные значения всех гидродинамических величин в виде суммы осредненных по времени и пульсационных составляющих:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi',$$

где $\overline{\varphi}(x,y,x,t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\varphi(x,y,z,\tau)d\tau$, T – период осреднения.

Для осреднения надо брать такой большой промежуток времени T, чтобы осредненное значение не зависело от времени. Тогда осредненное значение пульсационной величины будет равно по определению нулю: $\overline{\varphi'} = 0$. Но осреднение от произведения двух случайных величин в общем случае не равно нулю: $\overline{\varphi' \cdot \phi'} \neq 0$.

Еще правила осреднения:

$$\overline{\overline{\varphi} + \varphi'} = \overline{\overline{\varphi}} + \overline{\varphi'} = \overline{\varphi};\ \overline{\overline{\varphi} + \varphi'^{2}} = \overline{\varphi}^{2} + \overline{\varphi'^{2}};\ \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x};\ \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t}.$$

При этом предполагается, что турбулентное течение, несмотря на всю его нерегулярность и наличие случайных обстоятельств, связанных с предысторией потока, подчиняется уравнениям Навье–Стокса. В этом простом, но далеко не очевидном допущении заключается основная идея одного из подходов к описанию турбулентности.

Рассмотрим турбулентное движение вязкой несжимаемой жидкости. Тогда уравнения Навье–Стокса в дивергентном виде:

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0; \qquad (2.50)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \mathrm{Div}\left(\mathrm{P} - \rho \vec{V}\vec{V}\right),$$

где $\mathrm{P} = -p\mathrm{I} + 2\mu\dot{\mathrm{S}}$.

Проведя замену $\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}'$, $p = \bar{p} + p'$,... и проведя процедуру осреднения, используя правила осреднения, получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\bar{\vec{V}} = 0; \\ &\rho_0 \frac{\partial \bar{\vec{V}}}{\partial t} = \mathrm{Div}\left(\bar{\mathrm{P}} - \rho\bar{\vec{V}}\bar{\vec{V}} - \rho\overline{\vec{V}'\vec{V}'}\right). \end{aligned} \qquad (2.51)$$

В уравнении движения по сравнению с исходным появился новый член $-\rho\overline{\vec{V}'\vec{V}'} = P_t$. Его можно трактовать как дополнительный («рейнольдсов») тензор турбулентных напряжений, обусловленных осредненной величиной переноса пульсационного количества движения $\rho\vec{V}'$ пульсационными же скоростями $\vec{V}'$.

Уравнения осредненного турбулентного движения (2.51) называются уравнениями Рейнольдса. Эта система, в отличие от системы уравнений Навье-Стокса (2.50) не замкнута: P_t – неизвестная величина.

Для замыкания требуется ввести какие-то дополнительные допущения, не связанные с уравнениями Рейнольдса. Такие допущения образовали особую область теории турбулентности, получившую название **«полуэмпирическая теория турбулентности»**. Само ее название говорит о том, что лежащие в ее основе допущения появились как обобщение экспериментального материала и содержат эмпирические константы.

Например, согласно гипотезе французского ученого-механика Жозефа Буссинеска, можно провести аналогию между вязкими и турбулентными напряжениями, введя понятие **турбулентной вязкости.** Турбулентная вязкость в отличие от молекулярной является характеристикой не жидкости, а течения. Она связана с «трением малых вихрей», а не с «трением молекул». Поэтому ее величина зависит от обстоятельств движения и должна быть определена экспериментально в каждой частной задаче.

Так как тензор вязких напряжений $\mathrm{T} = 2\mu\dot{\mathrm{S}}$, где μ – коэффициент динамической вязкости, то по аналогии можно записать тензор турбулентных напряжений $-P_t = 2\mu_t\bar{\dot{\mathrm{S}}}$, где μ_t – коэффициент турбулентной вязкости.

Тогда тензор напряжений вязкой жидкости в уравнении Рейнольдса примет вид

$$\bar{\mathrm{P}} = -\bar{p}\mathrm{I} + 2(\mu + \mu_t)\bar{\dot{\mathrm{S}}}. \qquad (2.52)$$

При движении в трубе в пристеночной области преимущественное значение имеет вязкое трение, а вне ее в турбулентном ядре потока – турбулентное трение.

Однако чтобы применить на практике идею Буссинеска, необходимо установить недостающую зависимость между турбулентной вязкостью и полем осредненных скоростей. Существует несколько групп моделей, предлагающих способы получения такой зависимости. В результате решается проблема замыкания уравнений Рейнольдса.

Эти модели можно подразделить на следующие группы [8]:

1) модели нулевого порядка (алгебраические модели) – для характеристики турбулентности используются только алгебраические уравнения;

2) однопараметрические модели – для характеристики турбулентности используют одно дифференциальное уравнение;

3) двухпараметрические уравнения – для характеристики турбулентности используют два дифференциальных уравнения;

4) многопараметрические модели – три и более уравнений.

К алгебраическим моделям, например, относится **модель пути смешивания** Прандтля, устанавливающая связь между турбулентной вязкостью и локальным градиентом скорости

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{dV_x}{dy} \right|, \qquad (2.53)$$

где l – путь смешивания; расстояние в поперечном направлении течения жидкости, которое частица жидкости, двигаясь со средней скоростью первоначального слоя, должна пройти, чтобы разность ее скорости и скорости течения в новом слое стала равной осредненному значению абсолютной величины продольной пульсации турбулентного течения. Определяется экспериментально. При течении в трубах путь смешивания может быть задан достаточно простыми формулами:

$$l = 0{,}4(R - r) \text{ или } l = 0{,}14 - 0{,}08(R - r)^2 - 0{,}006(R - r)^4,$$

где R – радиус трубы, r– расстояние от оси трубы.

В настоящее время величине l уже не придают обязательный смысл пути смешивания. Считается, что эта величина характеризует геометрическую структуру турбулентного потока, т.е. это масштаб турбулентности.

Модель пути смешения непригодна в тех случаях, когда существенную роль играют конвективный и диффузионный перенос турбулентности или предыстория процесса. Однако для многих случаев эта простая модель дает удовлетворительные результаты и поэтому часто используется.

В однопараметрических моделях отказались от прямой связи между градиентом скорости и путем смешивания (или масштабом турбулентности) и стали определять турбулентную вязкость из уравнений переноса. В моделях этого типа величина турбулентной вязкости определяется выражением

$$\mu_t = c' \rho \sqrt{k} / L. \qquad (2.53)$$

Здесь c' – эмпирическая константа, L – масштаб турбулентности, являющийся функцией геометрии течения, k – кинетическая энергия турбулентности, определяется из дифференциального уравнения, описывающего ее перенос.

К двухпараметрическим моделям принадлежит известная модель «$k - \varepsilon$». В ней из решения соответствующих дифференциальных уравнений определяется не только кинетическая энергия турбулентности k, но и диссипация турбулентной энергии $\varepsilon = k^{0,75} L^{-1}$.

Быстрый рост ресурсов памяти и быстродействия ЭВМ и неудовлетворенность результатами, получаемыми на основе подхода Рейнольдса, уже в 60-е гг. XX в. обозначили серьезный интерес к методам **прямого численного моделирования** турбулентных течений на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса.

Фундаментальным основанием для использования этих уравнений служит то обстоятельство, что пространственно-временные масштабы турбулентности всегда существенно превосходят пространственно-временные масштабы молекулярных движений.

Но их практическая реализация пока ограничивается возможностями компьютерной техники. Оценки показывают, что для того чтобы результаты расчета были пригодны для определения средних величин, суммарное число шагов разностной схемы по времени и по пространству должно иметь порядок Re^3.

:

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 1: Механика. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2004. – 224 с.
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 575 с.
3. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
4. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 256 с.
5. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 336 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6: Гидродинамика. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. 492 с.; Т. 2. – 568 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – 7-е изд.. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
10. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
11. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
12. Тирский Г.А. Введение в математические модели механики сплошных сред [Электронный ресурс]: [видеокурс].– Режим доступа: http://www.intuit.ru/department/physics/mmcontmech

Об авторе

Миньков Сергей Леонидович – заведующий кафедрой информационного обеспечения инновационной деятельности факультета инновационных технологий Томского государственного университета, кандидат физико-математических наук, профессор Российской академии естествознания, член-корреспондент Международной академии информатизации.

Контакты: e-mail smin@tic.tsu.ru , тел.сл. (3822)529498

