

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2012

№ 2(18)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бухтяк М.С., канд. физ.-мат. наук, доц.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Лейцин В.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

УДК 532.5, 532.22

Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер

**НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ ПЛОСКОГО КАНАЛА¹**

Рассматривается течение вязкой жидкости, реализуемое при заполнении плоского канала, с учетом диссипативного разогрева и зависимости вязкости от температуры. Предлагается численный алгоритм решения задачи о течении жидкости со свободной поверхностью, приводятся результаты параметрических исследований.

Ключевые слова: *неизотермическое течение, свободная поверхность, плоский канал, численное моделирование.*

Заполнение пресс-форм расплавом полимера является основной стадией формирования изделий методом литья под давлением. Именно на этой стадии возможно формирование дефектов изделия, таких, как воздушные включения, поверхностные дефекты, линии спая и т.п. Для прогнозирования качества изделий необходимы предварительные исследования технологического процесса, которые могут осуществляться методами физического и математического моделирования. Метод математического моделирования представляется предпочтительным, поскольку более экономичен и информативен по сравнению с физическим моделированием, привлекаемым на последней стадии исследования для проверки теоретических результатов. Процесс заполнения характеризуется наличием свободной поверхности, неизотермичностью, связанной с диссипативным разогревом, химическим превращением, условиями теплообмена на границах, зависимостью реологических характеристик среды от температуры. Результаты исследования неизотермических течений реологически сложных сред в каналах без учета свободной поверхности достаточно полно представлены в [1, 2]. Имеются работы [3–5], в которых описываются вычислительные технологии и приводятся результаты исследований процесса заполнения с учетом свободной границы.

В данной работе с помощью оригинального численного метода исследуется течение вязкой жидкости при заполнении вертикального плоского канала с учетом диссипативного разогрева и зависимости вязкости от температуры.

Постановка задачи

Рассматривается заполнение вертикального плоского канала жидкостью с учетом зависимости вязкости от температуры, наличия диссипативного разогрева и свободной поверхности. Область течения схематично изображена на рис. 1. Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в неизотермических условиях в поле силы тяжести описывается уравнениями движения, неразрывности и теплопроводности, которые в безразмерном виде записываются следующим образом:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00313-а) и Гранта Президента РФ (МК-2100.2012.1).

$$\text{Re} \frac{du}{dt} = -\text{grad } p + \nabla \cdot (2BE) + W,$$

$$\text{Pe} \frac{d\theta}{dt} = \Delta\theta + C_1 BA^2,$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости, p – давление, $\theta = (T - T_0)/T_0$ – температура, T – размерная температура, T_0 – размерная температура на твердой стенке, t – время, A^2 – второй инвариант тензора скоростей деформаций E , $W = \{W, 0\}$. Зависимость вязкости от температуры описывается выражением [6]

$$B = e^{-C_2\theta}$$

Безразмерные числа подобия имеют вид

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}, \text{Pe} = \frac{c\rho UL}{\lambda}, W = \frac{\rho L^2}{\mu U} g, C_1 = \frac{\mu U^2}{\lambda T_0}, C_2 = \alpha T_0.$$

Здесь: ρ – плотность жидкости; L – полуширина канала; U – среднерасходная скорость во входном сечении; μ – вязкость при температуре T_0 ; α – параметр неизотермичности; c – теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности, g – ускорение свободного падения.

На твердой стенке Γ_2 выполняется условие прилипания, а температура считается заданной. Во входном сечении Γ_1 профили скорости и температуры соответствуют стационарному неизотермическому течению жидкости в бесконечном канале с заданным расходом. На свободной поверхности Γ_4 граничные условия заключаются в отсутствии касательного напряжения и равенстве нормального внешнего давления, которое без ограничения общности можно считать равным нулю, задается также нулевой тепловой поток. На плоскости симметрии Γ_3 используются условия симметрии. В начальный момент времени канал частично заполнен жидкостью, а свободная поверхность плоская. Сила тяжести направлена против направления движения, капиллярные эффекты не учитываются.

Метод решения

Поставленная задача решается с помощью конечно-разностного метода [7]. Алгоритм SIMPLE используется для расчета искомых переменных во внутренних узлах разнесенной сетки, причем значения скорости и температуры вычисляются с применением экспоненциальной и противопоточной схемы соответственно. Граничные условия на свободной поверхности удовлетворяются с использованием метода инвариантов, в котором условие отсутствия касательного напряжения и уравнение неразрывности записываются совместно, что позволяет построить устойчивый алгоритм расчета.

Тестирование методики расчета проводилось на задаче течения жидкости в плоском полубесконечном канале с заданным расходом с учетом диссипативного разогрева и экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. На входе в канал задавались параболический профиль для скорости и нулевая температура; а на выходе – мягкие граничные условия. На твердых стенках выполняется усло-

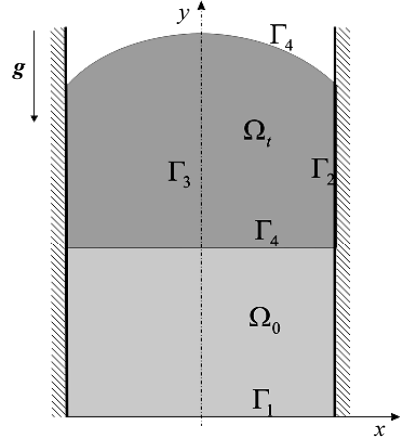


Рис. 1. Область течения

вие прилипания, температура равна нулю. При этом длина канала выбирается достаточной для установления стационарного течения в выходном сечении.

Результаты расчетов сравнивались с решением одномерной задачи, описывающей неизотермическое течение жидкости в бесконечной трубе с заданным расходом. При постановке этой задачи используется система уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(e^{-C_2 \theta} \frac{dv}{dx} \right) = \delta p, \\ \frac{d^2 \theta}{dx^2} + C_1 e^{-C_2 \theta} \left| \frac{dv}{dx} \right|^2 = 0 \end{cases}$$

и граничные условия на твердой стенке, аналогичные условиям в постановке двумерной задачи.

Здесь δp – перепад давления вдоль канала. Из последней системы дифференциальных уравнений получается уравнение для температуры

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\delta p^2}{C_1} e^{C_2 \theta} x^2 = 0,$$

приближенное решение которого находится с заданной точностью методом прогонки. Для определения скорости используется процедура численного интегрирования первого уравнения системы.

На рис. 2 представлено сравнение распределений скорости и температуры на выходе из канала с решением одномерной задачи. Из рисунка видно, что значения, полученные с помощью вышеописанной методики расчета, с уменьшением шага расчетной сетки практически совпадают с решением одномерной задачи. Максимальная ошибка на сетке с шагом $1/20$ составляет не более полпроцента.

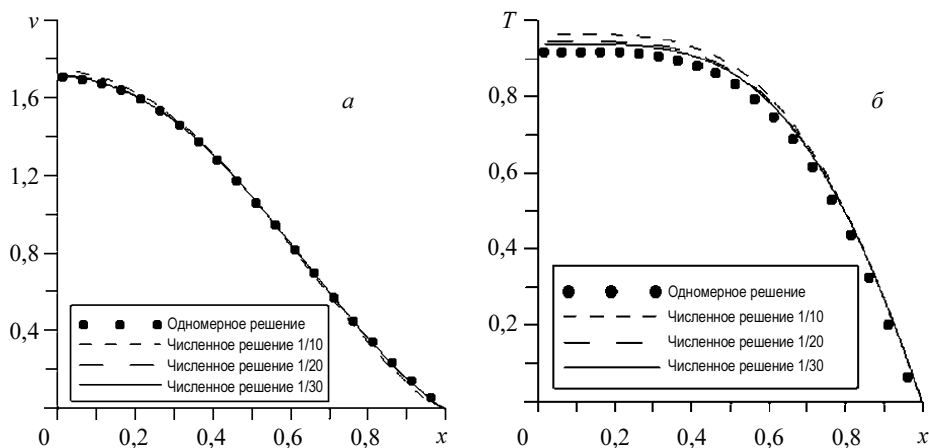


Рис. 2. Распределения скорости (а) и температуры (б) в выходном сечении ($Re = 10^{-3}$, $W = 0$, $Pe = 10^{-4}$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,3334$)

Результаты расчетов

Течение жидкости при заполнении канала можно разделить на две зоны. Большая часть канала, расположенная на достаточном удалении от свободной поверхности, является зоной одномерного течения. Движение жидкости в окрестно-

сти свободной границы имеет двумерный характер и определяется как зона фонтанирующего течения [8]. Кинематика такого течения, оказывающая существенное влияние на свойства формуемого изделия, для изотермического случая детально описывается в работах [9–11]. Для прогнозирования физико-механических характеристик изделия необходимо определять топограмму распределения порций жидкости в заполненном объеме, поступающих в канал в разные промежутки времени. Для решения задачи построения топограмм во входном сечении размещается слой частиц-маркеров. Эти частицы не обладают массой и перемещаются со скоростью жидкости. Совокупность частиц определяет в потоке некоторую реперную поверхность, которая разделяет соседние порции жидкости в предположении, что они не смешиваются. В конечном итоге местоположение всех реперных поверхностей в момент времени, соответствующий окончанию процесса заполнения, дает топограмму распределения выделенных порций жидкости.

Уравнения движения частиц имеют вид

$$\frac{dx_q^p}{dt} = u_q^p, \quad \frac{dy_q^p}{dt} = v_q^p, \quad p=1, \dots, M_1, \quad q=1, \dots, M_2,$$

где u, v – составляющие скорости в декартовой системе координат, M_1 – число частиц в одном репере, M_2 – количество реперов. Координаты частиц в потоке определяются численным интегрированием выписанной системы.

На рис. 3 представлены типичные топограммы массораспределения порций жидкости, последовательно поступающих в канал, в различные моменты времени.

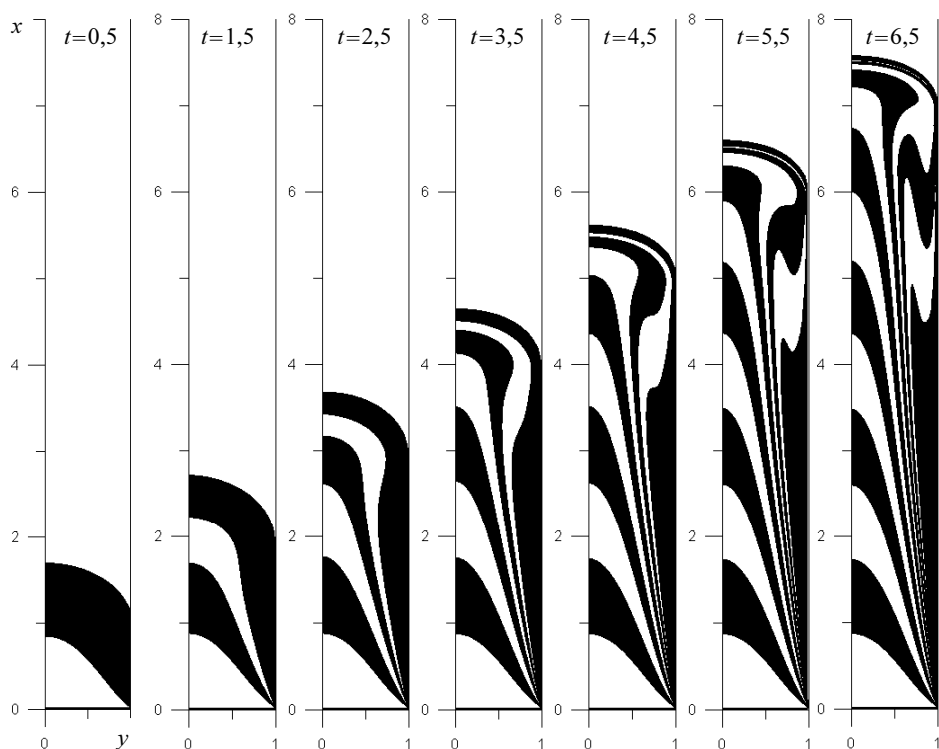


Рис. 3. Топограммы массораспределения ($Re = 0,5$, $W = 5$, $Pe = 1000$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,3334$)

Чередование темных и светлых полос разделяет соседние порции жидкости. Эволюция реперных поверхностей с формированием грибовидных форм в окрестности свободной границы демонстрирует фонтанирующий характер течения в зоне двумерного движения жидкости. Учет неизомеричности процесса влияет на кинематику течения, в свою очередь кинематика течения обуславливает распределение температуры в потоке. В случае, когда в переносе тепла преобладает конвективная составляющая ($Pe \gg 1$), поведение изотерм в потоке должно быть подобно эволюции реперных линий, разделяющих порции жидкости. Действительно, это утверждение демонстрирует рис. 4, на котором представлена эволюция поля температуры при высоком значении числа Пекле. Линии на рисунке – изотермы, качественное поведение которых согласуется с эволюцией реперных линий на рис. 3.

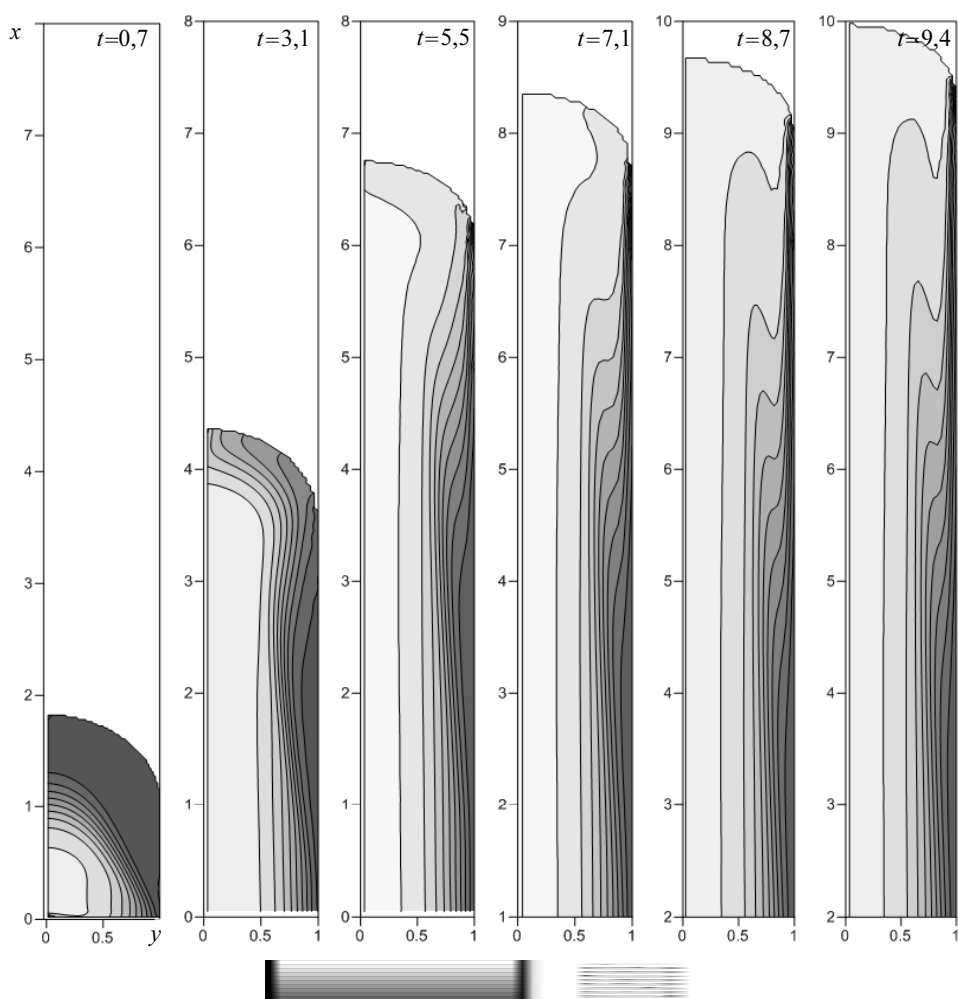


Рис. 4. Эволюция поля температуры с течением времени
($Re = 0,5$, $W = 5$, $Pe = 1000$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,3334$)

Проявление эффектов кондуктивного теплопереноса и их усиление с уменьшением числа Пекле, при прочих равных условиях, демонстрируют рис. 5 и 6. По аналогии с кинематикой течения, картины теплораспределения можно также разделить на две зоны: зону двумерного распределения температуры в окрестности свободной границы и зону распределения температуры, соответствующую установившемуся течению в бесконечном канале, в остальной части потока. Размер зоны двумерного распределения температуры растёт с увеличением Re при прочих равных условиях. В процессе заполнения первоначально плоская свободная поверхность приобретает некую выпуклую форму. Выпуклость свободной поверхности можно определить как разность значений высоты поверхности на плоскости симметрии и на твердой стенке. Влияние эффектов неизотермичности на выпуклость свободной границы показано на рис. 7.

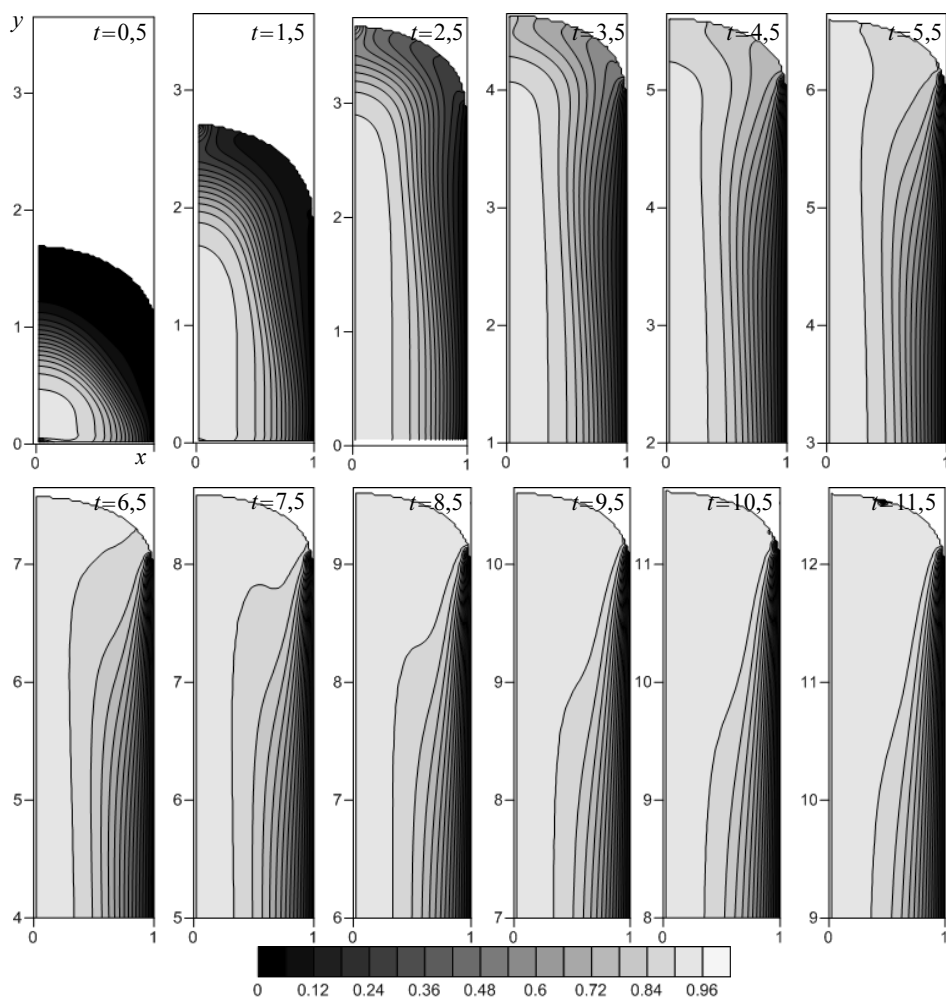


Рис. 5. Эволюция поля температуры с течением времени
($Re = 0,5$, $W = 5$, $Pe = 100$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,3334$)

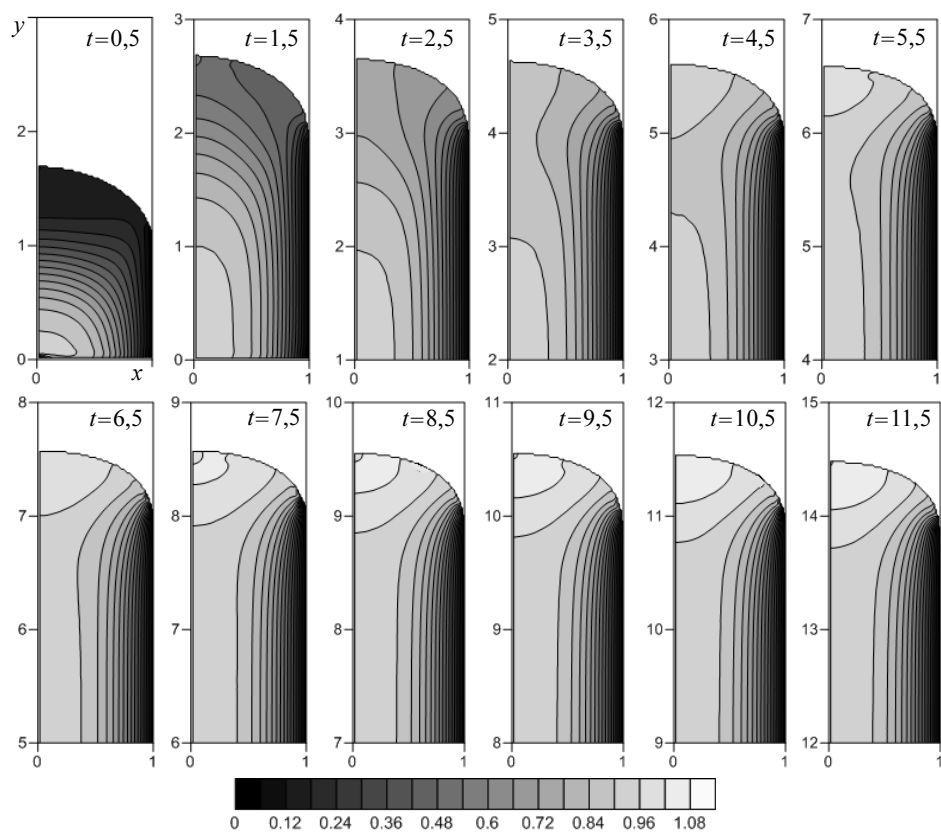


Рис. 6. Эволюция поля температуры с течением времени
($Re = 0,5$, $W = 5$, $Pe = 10$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,3334$)

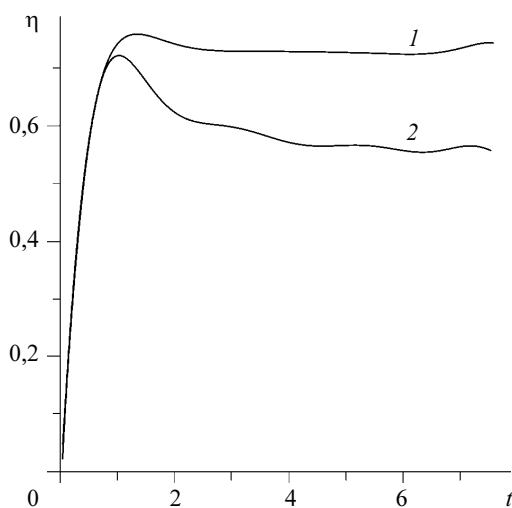


Рис. 7. Выпуклость свободной поверхности с течением времени
($Re = 0,5$, $W = 5$, $Pe = 10$, 1 – $C_1 = 2$, $C_2 = 1,3334$, 2 – $C_1 = 0$, $C_2 = 0$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов А.В. Неизотермическое течение реологически сложных сред в условиях химических превращений // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. – Т. 16. № 3. С. 384–399.
2. Hassan H., Regnier N., Pujos C., Defaye G. Effect at viscous dissipation on the temperature of the polymer during injection molding filling // Polymer Engineering & Science. 2008. V. 48. I. 6. P. 1199–1206.
3. Nguyen-Chung T., Mennig G. Non-isothermal transient flow and molecular orientation during injection mold filling // Rheologica Acta. 2001. V. 40. I. 1. P. 67–73.
4. Otmani R.E., Zinet M., Boutaous M., Benhadid H. Numerical simulation and thermal analysis of the filling stage in the injection molding process: role of the mold-polymer interface // J. Applied Polymer Science. 2011. V. 121. I. 3. P. 1579–1592.
5. Wang W., Li X., Han X. Numerical simulation and experimental verification of the filling stage in injection molding // Polymer Engineering & Science. 2012. V. 52. I. 1. P. 42–51.
6. Янков В.И., Боярченко В.И., Первадчук В.П., Глот И.О., Шакиров Н.В. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 264 с.
7. Якутенок В.А., Борзенко Е.И. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе метода SIMPLE // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 3. С. 52–58.
8. Rose W. Fluid-fluid interface in steady motion // Nature. 1961. V. 191. I. 4785. P. 242–243.
9. Coyle D.J., Blake J.W., Macosko C.W. The kinematics of fountain flow in mold-filling // AIChE journal. 1987. V. 33. I. 7. P. 1168–1177.
10. Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J. Finite element simulation of fountain flow in injection molding // Polymer Engineering & Science. 1986. V. 26. I. 7. P. 449–454.
11. Борзенко Е.И., Якутенок В.А. Эволюция свободной поверхности при заполнении плоских каналов вязкой жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 24–30.

Статья поступила 25.04.2012 г.

Borzenko E.I., Shrager G.R. NONISOTHERMAL FLOW OF A VISCOUS FLUID WHEN FILLING A PLANE CHANNEL. The flow of viscous liquid implemented when filling a plane channel is considered with allowance for dissipative heating and temperature dependence of viscosity. A numerical algorithm for solving the problem of a fluid flow with a free surface is proposed and the results of parametric studies are presented.

Keywords: nonisothermal flow, free surface, plane channel, numerical simulation.

BORZENKO Evgeny Ivanovich (Tomsk State University)
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

SHRAGER Gennady Rafailovich (Tomsk State University)
E-mail: shg@ftf.tsu.ru