Автоматика и телемеханика, № 5, 2012

© 2012 г. **И.Л. ЛАПАТИН,**
А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук
(Томский государственный университет)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ВЫХОДЯЩИХ ПОТОКОВ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ВХОДЯЩИМ MAP-ПОТОКОМ

Исследуется выходящий поток систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком. Рассматриваются модели с экспоненциальным и произвольным распределением времени обслуживания. Для случая произвольного времени обслуживания предложен метод просеянного потока, который сводит исследование выходящего потока к исследованию просеянного. Показано, что в условиях растущего времени обслуживания независимо от распределения времени обслуживания выходящий поток является асимптотически простейшим.

1. Введение

Построение адекватных математических моделей телекоммуникационных, вычислительных, производственных систем может быть осуществлено в рамках теории массового обслуживания [1–3], которая в настоящее время находит также широкое применение в исследовании социально-экономических систем. Системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов используются как математические модели реальных систем: в страховании, банковском деле, документообороте и в других областях. С другой стороны, системы массового обслуживания являются элементами сетей массового обслуживания (СеМО), которые применяются при анализе сетей передачи данных и оценке производительности вычислительных систем.

Большая часть работ по исследованию систем массового обслуживания посвящена анализу входящих потоков (см., например, [4]) и нахождению распределения вероятностей числа заявок в системе (см., например, [5, 6]), а описанию и изучению свойств выходящих потоков уделялось недостаточно внимания, хотя на практике часто необходимо знание характеристик таких потоков. С одной стороны, если рассматривать систему с неограниченным числом приборов как модель, например, экономической системы (страховой, банковской), то информация о выходящем потоке дает возможность прогнозировать число обслуженных клиентов. С другой стороны, обслуженные одной системой заявки могут образовывать входящий поток для другой, что происходит в СеМО. Поэтому исследование выходящих потоков актуально и для развития теории СеМО, история которой начинается с работы Дж. Джексона [7]. Но первые результаты не использовались до тех пор, пока в 1971 г.

Ф.Р. Мур [8] не обнаружил, что замкнутые сети адекватно описывают вычислительные системы со многими ресурсами. С этого момента теория сетей бурно развивается (см., например, [9, 10]).

На настоящий момент выходящие потоки систем массового обслуживания остаются малоизученными, что вызвано отсутствием общих подходов к их изучению, а результаты в этой области получены только для некоторых простейших систем. Первые попытки исследования выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны во второй половине XX в. такими учеными, как П. Берк [11], Е. Рейч [12], П. Финч [13]. В [14] были получены асимптотические распределения вероятностей числа обслуженных заявок некоторых систем с ограничениями. С помощью полумарковских процессов в [15] получены условия рекуррентности выходящих потоков однолинейных систем массового обслуживания. Изучение свойств выходящих потоков продолжается и в настоящее время. В [16] было найдено распределение числа заявок, обслуженных за период занятости в стационарной системе Geom | Geom | 1 с дискретным временем. Анализу выходящих потоков в системах с циклическим обслуживанием посвящены работы исследователей из школы Нижегородского государственного университета (М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова) [17–19]. Также отметим работу американского ученого Д. Грина [20], в которой исследуется выходящий поток однолинейной системы с коррелированным входящим потоком.

Для систем с неограниченным числом приборов, на вход которых поступает простейший поток, было показано [21], что выходящий поток также является простейшим. Этот результат был получен еще в 1963 г., а в настоящее время для более адекватного описания реальных систем необходимо использовать более сложные модели входящих потоков.

Широким классом потоков с зависимыми длинами интервалов между моментами наступления событий является класс MAP-потоков (Markovian Arrival Process). Его понятие впервые было введено М. Ньютсом [22], а затем уточнено Д. Луконтони в работе [23], которая также содержит первые исследования основных характеристик MAP-потоков. В русскоязычной литературе определения таких потоков даны в книгах Б.В. Гнеденко [1], А.Н. Дудина [24], А.А. Назарова [25]. В [4] MAP-поток исследуется методом асимптотического анализа.

В данной работе исследуется выходящий поток системы с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MAP-поток. В случае экспоненциального времени обслуживания задача исследования немарковского процесса, определяющего число обслуженных заявок, решается введением дополнительных переменных таким образом, чтобы случайный процесс в расширенном фазовом пространстве становился марковским, что в [26] называют “внешним” марковизированием. А при произвольной функции распределения времени обслуживания для решения этой проблемы в настоящей работе предлагается метод просеянного потока для исследования числа заявок, закончивших обслуживание в системе. Данный метод сводит исследование выходящего потока к исследованию так называемого просеянного потока, который является марковизируемым и нестационарным.

Предлагаемые модели исследуются методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания. В результате получено асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, закончивших обслуживание за некоторый промежуток времени.

2. Математическая модель

Перед описанием математической модели рассматриваемой системы дадим определение MAP-потока.

Случайный поток однородных событий будем определять в виде случайного процесса $r(t)$ – числа событий рассматриваемого потока, наступивших за время t.

Пусть эргодическая цепь Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний задана матрицей инфинитезимальных характеристик Q с элементами $q_{\upsilon k}$. Также задан набор неотрицательных чисел λ_k и вероятности $d_{\upsilon k}$, причем $d_{kk} = 0$, которые целесообразно определять матрицей $D = [d_{\upsilon k}]$ и диагональной матрицей Λ с элементами λ_k на главной диагонали.

Случайный поток однородных событий будем называть [25] MAP-потоком, управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$, если выполняются равенства:

$$\begin{aligned}
&P\left\{r(t+\Delta t) = r+1|r(t) = r,\ k(t) = k\right\} = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t),\\
&P\left\{r(t+\Delta t) > r+1|r(t) = r,\ k(t) = k_1\right\} = o(\Delta t),\\
&P\left\{r(t+\Delta t) = r+1,\ k(t+\Delta t) = k|r(t) = r,\ k(t) = \nu\right\} = d_{\nu k} q_{\nu k} \Delta t + o(\Delta t),\\
&P\left\{r(t+\Delta t) = r,\ k(t+\Delta t) = k|r(t) = r,\ k(t) = \nu\right\} = \left(1 - d_{\nu k}\right) q_{\nu k} \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Заметим, что пока управляющая цепь Маркова $k(t)$ находится в некотором состоянии υ, события в MAP-потоке наступают, как в простейшем потоке с параметром λ_υ. Кроме событий на интервалах постоянства состояний управляющей цепи, могут наступать события при переходах цепи из одного состояния в другое. Если управляющая цепь Маркова переходит из состояния υ в некоторое состояние k, событие в MAP-потоке наступает с вероятностью $d_{\upsilon k}$, а с вероятностью $1 - d_{\upsilon k}$ событие не наступает.

Состояния управляющей цепи Маркова будем называть состояниями MAP-потока.

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MAP-поток заявок. Заявка, пришедшая в систему, занимает любой из свободных приборов, на котором обслуживается в течение случайного времени. Распределение времени обслуживания поступающих заявок будем рассматривать как экспоненциальное с параметром μ, так и произвольное с функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Если использовать символику, предложенную Д. Кендаллом [27], то рассматриваемая система с экспоненциальным временем обслуживания будет обозначаться MAP | M |∞, а с произвольным временем обслуживания – MAP | GI |∞.

В работе выполнено исследование выходящего потока таких систем в условии растущего времени обслуживания, т.е. при условии, что величина

$$b = \int_0^{\infty} (1 - B(x))dx,$$

имеющая смысл среднего значения времени обслуживания, стремится к бесконечности. В случае экспоненциального времени обслуживания $b = 1/\mu$ и $\mu \to 0$.

3. Исследование выходящего потока марковской системы

Сначала рассмотрим выходящий поток системы MAP | M |∞. Будем полагать, что выходящий поток определяется через случайный процесс $m(t)$ – число заявок, закончивших обслуживание в системе за некоторое время t.

Очевидно, что процесс $m(t)$ не является марковским, так как выходящий поток существенно зависит от функционирования системы, в которой он формируется. События в выходящем потоке наступают в зависимости от количества заявок, находящихся на обслуживании. А если система пуста, то и события выходящего потока не формируются.

Поэтому определим случайный процесс $i(t)$ – число заявок, находящихся в системе в момент времени t или, что то же самое, число занятых приборов в момент времени t.

Но при непуассоновском входящем потоке двумерный процесс $\{i(t), m(t)\}$ также не является марковским. Этот процесс можно марковизировать добавлением в рассмотрение управляющей MAP-потоком эргодической цепи Маркова $k(t)$.

Рассмотрим трехмерную цепь Маркова $\{k(t), i(t), m(t)\}$. Для распределения вероятностей

$$P(k, i, m, t) = P\{k(t) = k,\ i(t) = i,\ m(t) = m\}$$

ее значений можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k,i,m,t)}{\partial t} &= \lambda_k\{P(k,i-1,m,t) - P(k,i,m,t)\} + \\ &+ \mu\{(i+1)P(k,i+1,m-1,t) - iP(k,i,m,t)\} + \\ &+ \sum_{\nu} \{P(\nu,i,m,t)\cdot(1-d_{\nu k}) + P(\nu,i-1,m,t)d_{\nu k}\}q_{\nu k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначив функции

$$H(k,z,u,t) = \sum_i e^{jzi} \sum_m e^{jum} P(k,i,m,t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial H(k,z,u,t)}{\partial z} = j\sum_i ie^{jzi}\sum_m e^{jum}P(k,i,m,t),$$

из (1) для функций $H(k,z,u,t)$ получим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\frac{\partial H(k,z,u,t)}{\partial t} = \lambda_k\cdot(e^{jz}-1)H(k,z,u,t) + \\ &+ j\mu\left(1-e^{ju}e^{-jz}\right)\frac{\partial H(k,z,u,t)}{\partial z} + \\ &+ \sum_\nu\left\{(e^{jz}-1)d_{\nu k}q_{\nu k} + q_{\nu k}\right\}H(\nu,z,u,t).\end{aligned}$$

Полученную систему (2) запишем в матричном виде

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial t} + j\mu\left(e^{ju}e^{-jz}-1\right)\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z} = \\ &= H(z,u,t)\left\{Q + (e^{jz}-1)B\right\},\end{aligned}$$

где $H(z,u,t) = \{H(0,z,u,t),\, H(1,z,u,t),\dots\}$, Q – матрица инфинитезимальных характеристик $q_{\upsilon k}$, B – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{\upsilon k}\cdot q_{\upsilon k}$ вне главной диагонали.

Систему дифференциальных уравнений (3) будем называть дифференциально-матричным уравнением. Отметим, что получить аналитическое решение этого уравнения не удается. В данной работе предлагается решать это уравнение методом асимптотического анализа, который будет описан далее.

4. Исследование выходящего потока немарковской системы

Теперь рассмотрим систему MAP | GI |∞. Время обслуживания поступающих заявок случайное с функцией распределения $B(x)$. Случайный процесс $m(t)$ – число заявок, закончивших обслуживание в системе за некоторое время t, не является марковским. А метод марковизации этого процесса, использованный в случае экспоненциального времени обслуживания, не дает результатов.

Для решения этой проблемы был разработан метод просеянного потока для исследования выходящих потоков немарковских систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Этот метод сводит исследование выходящего потока к исследованию так называемого просеянного потока, который удается марковизировать.

Остановимся подробнее на этом методе.

Пусть $T_1 > 0$ и $T > 0$ – некоторые заданные величины, а

$$b = \int\limits_0^\infty (1-B(x))dx$$

– среднее значение времени обслуживания заявки, тогда введем обозначение

$$S(t) = \begin{cases} B(bT_1 + T - t) - B(bT_1 - t), & 0 < t \leqslant bT_1, \\ B(bT_1 + T - t), & bT_1 < t \leqslant bT_1 + T. \end{cases}$$

Здесь $S(t)$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени $t \in [0, bT_1 + T]$, завершит свое обслуживание в момент времени, принадлежащий интервалу $[bT_1, bT_1 + T]$.

Будем полагать, что если событие входящего потока наступает в момент t, то с динамической (зависящей от момента времени t) вероятностью $S(t)$ эта заявка просеивается, т.е. отправляется в просеянный поток, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

Обозначим через $n(t)$ число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, т.е. на интервале $[0, t]$.

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, то число событий просеянного потока к моменту времени $bT_1 + T$ равно числу заявок, закончивших обслуживание на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$, т.е. выполняется равенство

$$n(bT_1 + T) = m(T, bT_1), \tag{4}$$

где $m(T, bT_1)$ – число событий выходящего потока рассматриваемой системы, наступивших на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$.

В силу условия, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, рассматривается переходной режим функционирования системы и нестационарный выходящий поток.

Для исследования стационарного выходящего потока будем полагать, что $T_1 \to \infty$, тогда функционирование системы массового обслуживания определяется финальным распределением и стационарным режимом.

Так как предлагаемый просеянный поток является марковизируемым, то, записав систему дифференциальных уравнений Колмогорова для многомерного распределения вероятностей и решая ее, получим одномерное маргинальное распределение вероятностей для числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t. А затем, применив равенство (4), найдем распределение вероятностей числа событий выходящего потока, наступивших в интервале $[bT_1, bT_1 + T]$ как в переходном режиме функционирования системы массового обслуживания при конечных T_1, так и в стационарном режиме, полагая $T_1 \to \infty$.

Итак, вернемся к исследованию системы $\mathrm{MAP}\,|\,\mathrm{GI}\,|\infty$. Ранее был определен процесс $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t. Очевидно, он не является марковским, так как “просеивается” входящий MAP-поток, наступление событий в котором зависит от состояний управляющей цепи $k(t)$.

Двумерный процесс $\{k(t),\, n(t)\}$ уже является марковским, и для его распределения вероятностей

$$P(k, n, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\}$$

можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t} &= \lambda_k S(t)(P(k,n-1,t) - P(k,n,t)) + \\
&+ \sum_{\nu} \{P(\nu,n,t) + S(t)(P(\nu,n-1,t) - P(\nu,n,t))d_{\nu k}\} q_{\nu k}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Обозначив

$$
H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,t),
$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, из системы (5) получим систему для $H(k,u,t)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} &= \lambda_k (e^{ju} - 1) S(t) H(k,u,t) + \\
&+ \sum_{\nu} H(\nu,u,t)\{1 + S(t)(e^{ju} - 1)d_{\nu k}\} q_{\nu k},
\end{aligned}
$$

которую запишем в матричном виде и будем называть дифференциально-матричным уравнением

$$
\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)[(e^{ju} - 1)S(t)B + Q], \tag{6}
$$

где $H(u,t) = \{H(0,u,t), H(1,u,t), \dots\}$, Q – матрица инфинитезимальных характеристик q_{vk}, B – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{vk} \cdot q_{vk}$ вне главной диагонали.

Полученное уравнение (6) будем решать методом асимптотического анализа.

5. Условие растущего времени обслуживания

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания называют [25] решение уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы, при выполнении некоторого предельного условия.

В данной работе будем рассматривать системы, функционирующие в условии растущего времени обслуживания, т.е. когда среднее время обслуживания каждой заявки стремится к бесконечности. В системе с экспоненциальным временем обслуживания это условие принимает вид $1/\mu \to \infty$, или $\mu \to 0$.

Рассмотрим систему MAP | M | ∞ в условии растущего времени обслуживания. Для этого в уравнении (3) сделаем замены

$$
\mu = \varepsilon, \quad z = \varepsilon x, \quad H(z,u,t) = F(x,u,t,\varepsilon), \tag{7}
$$

для вектор-функции $F(x,u,t,\varepsilon)$ получим дифференциально-матричное уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F(x,u,t,\varepsilon)}{\partial t} + j(e^{ju}e^{-j\varepsilon x} - 1)\frac{\partial F(x,u,t,\varepsilon)}{\partial x} = \\
&= F(x,u,t,\varepsilon)\left\{Q + (e^{j\varepsilon x} - 1)B\right\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Теорема 1. Сумма компонент предельного, при $\varepsilon \to 0$, значения вектор-строки $F(x,u,t)$ решения $F(x,u,t,\varepsilon)$ уравнения (8) имеет вид

$$F(x,u,t)E = \exp\left\{jx\kappa + (e^{ju}-1)\kappa t\right\}, \tag{9}$$

где E – единичный вектор-столбец, величина κ определяется равенством

$$\kappa = RBE, \tag{10}$$

а вектор-строка R определяется системой

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении.

В равенстве (9) полагая $x = 0$, получим асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, закончивших обслуживание за некоторое время t в системе MAP | M |∞ в условии растущего времени обслуживания:

$$\begin{aligned} &M\{e^{jum(t)}\} = H(0,u,t)E = F(0,u,t,\varepsilon)E \approx \\ &\approx F(0,u,t)E = \exp\left\{(e^{ju}-1)\kappa t\right\}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\kappa = RBE$ имеет смысл интенсивности входящего MAP-потока.

Из равенства (12) видно, что выходящий поток системы MAP | M |∞ в условии растущего времени обслуживания является асимптотически простейшим. Заметим, что интенсивность выходящего потока совпадает с интенсивностью входящего. Это весьма закономерный результат, так как рассматриваемая система не теряет пришедших заявок, и все они обслуживаются.

Теперь перейдем к рассмотрению немарковской системы массового обслуживания в условии растущего времени обслуживания.

Будем полагать, что $B(x) = B_1(x/b)$, где $B_1(x)$ – заданная функция распределения случайной величины с единичным математическим ожиданием.

Обозначим $\varepsilon = 1/b$ и в уравнении (6) выполним замены

$$\tau = \varepsilon t, \quad H(u,t) = F(u,\tau,\varepsilon), \quad S(t) = S_1(\tau,\varepsilon), \tag{13}$$

где

$$S_1(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} B_1(T_1-\tau+\varepsilon T) - B_1(T_1-\tau), & 0 < \tau \leqslant T_1 \\ B_1(T_1-\tau+\varepsilon T), & T_1 < \tau \leqslant T_1+\varepsilon T. \end{cases}$$

Тогда для $F(u,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial F(u,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = F(u,\tau,\varepsilon)\left[(e^{ju}-1)S_1(\tau,\varepsilon)B + Q\right]. \tag{14}$$

Лемма. *Предельное, при $\varepsilon \to 0$, значение $F(u,\tau)$ решения $F(u,\tau,\varepsilon)$ уравнения* (14) *имеет вид*

$$F(u,\tau) = R \cdot \exp\left\{\kappa_1 T(e^{ju}-1)[B_1(T_1) - B_1(T_1-\tau)]\right\}, \tag{15}$$

где величина κ определяется равенством (10)*, а вектор-строка R определяется системой* (11).

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Лемма определяет вид асимптотического приближения характеристической функции числа событий, наступивших в просеянном потоке за некоторое время.

Для определения характеристик выходящего потока системы MAP | GI |∞ сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Выходящий поток системы* MAP | GI |∞*, функционирующей в стационарном режиме, в условиях растущего времени обслуживания является простейшим с параметром κ, где κ определяется равенством* (10).

Для доказательства этой теоремы воспользуемся равенством (4), которое показывает, что характеристики выходящего и просеянного потоков в момент времени $bT_1 + T$ совпадают. Используя это равенство и устремляя $T_1 \to \infty$, получим асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, закончивших обслуживание в системе MAP | GI |∞ за время T:

$$Me^{jum(T)} \approx \exp\left\{(e^{ju}-1)\kappa T\right\}.$$

Очевидно, что выходящий поток этой системы в условии растущего времени обслуживания является асимптотически простейшим. Причем интенсивность выходящего потока совпадает с интенсивностью входящего MAP-потока.

6. Численный эксперимент

Для оценки области применимости полученных асимптотических результатов предлагается сравнить их с эмпирическим распределением, найденным с помощью имитационного моделирования.

Пример 1. Сначала зафиксируем параметры входящего MAP-потока следующим образом:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0{,}4 & 1{,}6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при таком наборе параметров рассматриваемый MAP-поток является простейшим с интенсивностью равной 4. Напомним, что для системы с неограниченным числом приборов при простейшем входящем потоке известно [21], что выходящий поток также является простейшим (число событий, наступивших в потоке за некоторый промежуток времени имеет распределение Пуассона), причем интенсивности входящего и выходящего потоков

Таблица 1

b	0,1	1	10	100	1000
Δ	0,0014	0,0017	0,0014	0,0015	0,0014

Таблица 2

b	0,1	1	10	100	1000
Δ	0,041	0,037	0,018	0,011	0,004

совпадают. Моделирование такой системы позволяет определить приемлемое время моделирования и оценить погрешность имитационной модели.

В качестве меры отличия распределений вероятностей предлагается брать расстояние Колмогорова между функциями распределения, которое обозначим через Δ:

$$\Delta = \max_i |F_1(i) - F_2(i)|\,,$$

где $F_1(i)$ и $F_2(i)$ – сравниваемые функции распределения.

Время моделирования будем брать равным 10^6, так как при меньших значениях не достигается желаемая точность порядка 10^{-3}.

Результаты сравнения (для различных значений среднего времени обслуживания b) эмпирического распределения вероятностей, полученного с помощью имитационного моделирования, и распределения Пуассона, найденного методом асимптотического анализа, представлены в табл. 1.

Вполне закономерно, что ошибки незначительно отличаются в зависимости от значения среднего времени обслуживания, так как в рассматриваемом примере асимптотический результат совпадает с допредельным. Заметим, что отклонения Δ не превышают значения 0,002, которое и будем считать погрешностью имитационного моделирования.

Пример 2. Теперь в качестве модели входящего потока рассмотрим MAP-поток, определяемый следующими параметрами:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0{,}4 & 1{,}6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность этого потока равна $RBE = 4{,}996$. Результаты сравнения эмпирических и асимптотических распределений в зависимости от величины среднего значения времени обслуживания представлены в табл. 2.

Отклонение асимптотического распределения от эмпирического при значении среднего времени обслуживания, равного 10, составляет менее 2 %, а при значении 1000 почти совпадает с погрешностью имитационного моделирования.

Аналогичные результаты получены и для других параметров, определяющих входящий MAP-поток.

7. Заключение

В работе исследованы выходящие потоки марковских и немарковских систем с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которых поступает MAP-поток. Для исследования выходящего потока немарковской системы предложен метод просеянного потока, который применим и для систем с отличными от MAP моделями входящего потока (например, рекуррентный и полумарковский).

Показано, что независимо от распределения времени обслуживания выходящий поток рассматриваемых систем в условии растущего времени обслуживания является асимптотически простейшим.

Проведение численных экспериментов показывает допустимость пуассоновской аппроксимации выходящих потоков систем $\mathrm{MAP}\,|\,\mathrm{M}|\infty$ и $\mathrm{MAP}\,|\,\mathrm{GI}|\infty$ при значениях среднего времени обслуживания порядка нескольких десятков и более, если интенсивность входящего потока составляет несколько единиц.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для доказательства умножим справа уравнение (8) на единичный вектор-столбец E и сделаем предельный переход при $\varepsilon \to 0$:

$$\frac{\partial F(x,u,t)}{\partial t}E + j(e^{ju}-1)\frac{\partial F(x,u,t)}{\partial x}E = 0. \tag{П.1}$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$F(x,u,t)E = \varphi\left(t + \frac{jx}{e^{ju}-1}\right),$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция. Для конкретизации вида $\varphi(x)$ необходимо начальное условие. Рассмотрим функцию $F(x,u,t)E$ в нулевой момент времени. Очевидно, что $F(x,u,0)E$ не будет зависеть от u (так как в нулевой момент времени только начинается наблюдение за выходящим потоком и число обслуженных заявок равно нулю):

$$F(x,u,0)E = \Phi(x), \tag{П.2}$$

где $\Phi(x)$ – асимптотическое приближение характеристической функции стационарного распределения числа занятых приборов в рассматриваемой системе в условии растущего времени обслуживания, которое было найдено в [25]:

$$\Phi(x) = e^{jx\kappa}.$$

Здесь величина κ определяется равенством (10) и имеет смысл интенсивности входящего MAP-потока.

Таким образом, можно записать частное решение уравнения (П.1), удовлетворяющее начальному условию (П.2)

$$F(x,u,t)E = \exp\left\{jx\kappa + (e^{ju}-1)\kappa_1 t\right\},$$

которое совпадает с равенством (9), что доказывает теорему 1.

Доказательство леммы. Полагая функцию $B_1(x)$ дважды дифференцируемой, вероятность $S_1(\tau,\varepsilon)$ можно записать в виде

$$S_1(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon T B_1'(T_1-\tau) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), & 0 < \tau \leqslant T_1, \\ \mathrm{O}(\varepsilon^2), & T_1 < \tau \leqslant T_1 + \varepsilon T. \end{cases} \tag{П.3}$$

Если сделать предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в дифференциально-матричном уравнении (14), учитывая равенство (П.3), то получим, что $F(u,\tau)$ является решением системы линейных однородных уравнений

$$F(u,\tau)Q = 0,$$

совпадающей по виду с системой для стационарного распределения R состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$ (11), поэтому $F(u,\tau)$ будет иметь вид

$$F(u,\tau) = R\Phi(u,\tau), \tag{П.4}$$

где $\Phi(u,\tau)$ – скалярная неизвестная функция.

Подставляя полученное выражение (П.4) в уравнение (14) и умножая его справа на единичный вектор E, получим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $\Phi(u,\tau)$:

$$\frac{\partial\Phi(u,\tau)}{\partial\tau} = (e^{ju}-1)\kappa T B'(T_1-\tau)\Phi(u,\tau),$$

решение которого имеет вид

$$\Phi(u,\tau) = \exp\left\{\kappa T(e^{ju}-1)[B_1(T_1) - B_1(T_1-\tau)]\right\}.$$

Учитывая выражение (П.4), получим равенство

$$F(u,\tau) = R\cdot\exp\left\{\kappa T(e^{ju}-1)[B_1(T_1) - B_1(T_1-\tau)]\right\},$$

которое совпадает с равенством (15), что доказывает лемму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005.
2. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Уч. пос. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
3. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.

4. *Лопухова С.В., Назаров А.А.* Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа N-го порядка // Вестн. ТГУ. Сер. Информатика. Кибернетика. Математика. 2006. № 293. С. 110–115.
5. *Назаров А.А., Куликова О.А.* Исследование бесконечнолинейных систем массового обслуживания методом просеянного потока // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети. Матер. Межд. науч. конф. “Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей”. Минск: БГУ, 2005. С. 98–102.
6. *Baum D.* The Infinite Server Queue with Markov Additive Arrivals in Space // Proc. Int. Conf. “Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and Problems of Safety, Insurance and Ruin”. Riga: RAU, 1999. P. 136–142.
7. *Jackson J.R.* Networks of Waiting Lines // Oper. Res. 1957. V. 5. No. 4 P. 518–521.
8. *Moor F.R.* Computational Model of a Closed Queueing Network with Exponential Servers // IBM J. Res. and Dep. 1972. V. 16. No. 6. P. 567–573.
9. *Жожикашвили В.А., Вишневский В.М.* Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988.
10. *Massey W.A., Whitt W.* Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input // Queuing Syst. 1993. No. 13. P. 183–250.
11. *Burke P.J.* The Output of Queueing Systems // Oper. Res. 1956. V. 4. P. 699–704.
12. *Reich E.* Waiting Times When Queues are in Tandem // Ann. Math. Statist. 1957. V. 28. No. 3. P. 768.
13. *Finch P.D.* The Output Process of the Queueing System M | G | 1 // J. Roy. Statist. Soc. 1959. V. 21. No. 2. P. 375–380.
14. *Акулиничев Н.М., Горский Л.К.* Об асимптотических распределениях выходящих потоков некоторых систем массового обслуживания // Кибернетика. 1973. № 1. С. 71–78.
15. *Disney R.L., Farell R.L., de Morais P.R.* Characterization of M | G | 1 Queues with Renewal Departure Processes // Management. Sci. 1973. V. 19. No. 11. P. 1222–1228.
16. *Goswami V.* Distribution of the number of customs served during a busy period in a discrete time Geom | Geom | 1 // Indian J. Pure Appl. Math. 2002. V. 33. No. 9. P. 1405–1508.
17. *Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.* Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Вестн. Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Математика. 2006. Вып. 1 (4). С. 92–102.
18. *Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.* Определение достаточного условия существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Вестн. Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2006. Вып. 3 (32). С. 57–68.
19. *Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.* Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // АиТ. 2008. № 6. С. 96–106.
20. *Bean N.G., D.A. Green, P.G. Taylor* The output process of an MMPP | M | 1 queue // J. Appl. Prob. 1998. No. 35(4). P. 998–1002.
21. *Mirasol N.M.* The output of an M | G|∞ queueing system is Poisson // Oper. Res. 1963. No. 11. P. 282–284.
22. *Neuts M.F.* A versatile Markovian arrival process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.

23. *Lucantoni D.* New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochast. Model. 1991. V. 7. P. 1–46.

24. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000.

25. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.

26. *Кениг Д., Штойян Д.* Методы теории массового обслуживания / Пер. с нем. *под ред. Г.П. Климова.* М.: Радио и связь, 1981.

27. *Kendall D.G.* Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain // Ann. Math. Statis. 1953. V. 24. P. 338–354.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 15.03.2010