МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ВЕСТНИК

ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2012 **№ 2(19)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497
от 27 сентября 2007 г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА»

Горцев А.М., д-р техн. наук, проф. (председатель); Смагин В.И., д-р техн. наук, проф. (зам. председателя); Лопухова С.В., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Агибалов Г.П., д-р техн. наук, проф.; Дмитриев Ю.Г., д-р физ.-мат. наук, проф.; Домбровский В.В., д-р техн. наук, проф.; Змеев О.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Евтушенко Н.В., д-р техн. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Костюк Ю.Л., д-р техн. наук, проф.; Кошкин Г.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Матросова А.Ю., д-р техн. наук, проф.; Назаров А.А., д-р техн. наук, проф.; Параев Ю.И., д-р техн. наук, проф.; Поддубный В.В., д-р техн. наук, проф.; Сущенко С.П., д-р техн. наук, проф.; Тарасенко Ф.П., д-р техн. наук, проф.; Хорошевский В.Г., д-р техн. наук, проф., член-корр. РАН; Enzo Orsingher, Prof., University of Rome (Italy); Paolo Prinetto, Prof., Polytechnic Institute Turine (Italy); Yervant Zorian, PhD, Vice President & Chief Scientist, Virage Logic Corp., Fremont, CA (USA).

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8605). С 2010 г. журнал входит в Перечень ВАК. Журнал выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России».

В журнале «Вестник ТГУ. УВТиИ» публикуются результаты теоретических и прикладных исследований вузов, научно-исследовательских, проектных и производственных организаций в области управления, вычислительной техники и информатики в технических, экономических и социальных системах.

Тематика публикаций журнала:

- УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
- ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ
- ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ
- ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ
- ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Правила оформления статей приведены на сайте: **http://vestnik.tsu.ru/informatics/**

Адрес редакции:
634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 201
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru
Контактный тел./факс: (3822) 529-599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 05.06.2012.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10,0. Уч.-изд. л. 11,2. Тираж 300 экз. Заказ № 27.

УДК 658.512

Ю.И. Параев, Т.И. Грекова, А.В. Рощин

РЕШЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ

Получено аналитическое решение терминальной задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени, связанной с максимизацией непроизводственного потребления и выходом на заданный уровень фондовооружённости. Найдены необходимые условия существования оптимального управления, а также условия, когда это управление включает в себя магистраль.

Ключевые слова: *производственная функция Кобба – Дугласа*, *фондовооружённость труда*, *непроизводственное потребление*, *оптимальное управление*, *магистраль*, *горизонт.*

Рассматривается динамическая задача оптимального управления односекторной экономикой с использованием производственной функции Кобба – Дугласа [1]. Управление заключается в распределение произведённого продукта на накопление (инвестирование) и непроизводственное потребление. Проблема состоит в выборе такого управления, при котором обеспечивается максимум непроизводственного потребления за планируемый конечный период производства и, кроме того, требуется выход на заданный уровень фондовооружённости. Получено полное аналитическое решение задачи. Найдены необходимые условия, т.е. ограничения на период производства, начальную фондовооружённость и параметры задачи, при которых существует оптимальное управление. Работа является продолжением [2], поэтому некоторые промежуточные результаты приводятся без доказательства.

1. Постановка задачи

Предполагается, что состояние экономики характеризуется величинами $k(t)$ – фондовооружённость труда (ФВ) и $c(t)$ – непроизводственное потребление (НП). Изменение этих величин описывается уравнениями [1,2]

$$\dot{k} = uF - \mu k, \quad k(0) = k_0 > 0; \tag{1}$$

$$\dot{c} = \delta c + (1-u)F, \quad c(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mu > 0$ – коэффициент амортизации, $\delta > 0$ – норма дисконтирования, $F(k) = Ak^{\alpha}$ – производительность труда, A – масштаб темпа производства ($A > 0$), α – коэффициент эластичности по основным фондам. Управляющим параметром является коэффициент u, который определяет долю валового продукта, которая идёт на увеличение ФВ. При этом всегда

$$0 \le u \le 1. \tag{3}$$

Предполагается, что планируемый период производства $[0,T]$ задан и конечен. Решение уравнения (2) на этом интервале можно записать в виде

$$c(T) = J[u] = \int_0^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt, \tag{4}$$

т.е. $J[u]$ есть НП на интервале $[0,T]$ при управлении u.

Терминальная задача: в течение заданного интервала времени $[0,T]$ найти такое управление $u(t)$ с учетом (3), при котором функционал (4) максимален и выполняется условие

$$k(T) \geq k_T, \tag{5}$$

где k_T – какое-то заданное значение, называемое *горизонтом*.

Решение уравнения (1) при постоянном u на интервале времени $[t_0, t)$ с начальным условием $k(t_0)=k_0$ имеет вид [2]

$$k^\beta(t) = \frac{uA}{\mu}(1-e^{-\beta\mu(t-t_0)}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu(t-t_0)}, \tag{6}$$

где $\beta = 1-\alpha$. Если $u(t) = 0$, то

$$k(t) = k(t_0)e^{-\mu(t-t_0)}. \tag{7}$$

Поскольку при $u = 1 \quad \lim\limits_{t\to\infty} k^\beta(t) = A/\mu$, то обычно предполагается, что $k(t_0)$ и $k_T < (A/\mu)^{1/\beta}$.

Если значения $k(T) = k_T$ и T заданы, то можно выделить интервал $[N_1, N_2]$ начальных значений k_0, из которых можно попасть в точку $k(T) = k_T$. Нижнюю и верхнюю границы этого интервала можно получить в результате интегрирования уравнения (1) при $u(t) = 1$ и при $u(t) = 0$ соответственно. В результате, согласно (6) и (7), получается

$$N_1^\beta = N_1^\beta(T,k_T) = k_T^\beta e^{\beta\mu T} - \frac{A}{\mu}(e^{\beta\mu T} - 1),\ N_2 = N_2(T,k_T) = k_T e^{\mu T}.$$

При большом T значение N_1 может быть отрицательным, тогда его следует заменить на 0.

Если $N_1 > 0$, то для $k_0 < N_1$ терминальная задача не имеет решения. Если $k_0 \geq N_2$, то при любом управлении выполняется условие (5). При этом максимум функционала (4) достигается при $u(t) = 0$, т.е. весь валовой продукт идет на НП. В этом случае $J[0] = G(k_0;0,T)$, где

$$G(k;t_1,t_2) = Ak^\alpha e^{\delta(T-t_1)}\frac{1-e^{-(\delta+\alpha\mu)(t_2-t_1)}}{\delta+\alpha\mu}.$$

Поэтому далее считаем, что k_0 принадлежит интервалу $[N_1, N_2]$. При этом управление должно содержать отрезки, когда $u(t) > 0$. Можно выделить значение $T_0 = -\frac{1}{\mu\beta}\ln(1-\mu k_T^\beta / A)$, при котором $N_1(T_0,k_T) = 0$. Можно также построить кривые

$$n_1^\beta(t) = \frac{A}{\mu} + \left(N_1^\beta(T,k_T) - \frac{A}{\mu}\right)e^{-\beta\mu t},\ \ n_2(t) = N_2(T,k_T)e^{-\mu t}.$$

При этом всегда $n_1(t) \leq k(t) \leq n_2(t)$.

2. Решение терминальной задачи

Применение принципа максимума Понтрягина приводит к структуре оптимального управления, полученной в [1, 2]. Интервал $[0, T]$ точками t_1 и t_2 $(0 < t_1 < t_2 < T)$ разбивается так, что

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ u_{\text{oc}} & \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \\ u_2 & \text{при} \quad t_2 < t < T. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь величины u_1 и u_2 принимают значения 0 или 1 в зависимости от начального и конечного условий, $u_{\text{oc}} = \dfrac{\mu k}{F} = \dfrac{\alpha\mu}{\mu+\delta} > 0$ – особое управление. Интервал времени $[t_1, t_2]$, в течение которого имеет место особое управление, соответствует участку сбалансированного равновесного состояния экономики, который называется *магистралью.* На этом интервале решение уравнения (1) постоянно и равно $k_{\text{oc}}^{\beta} = \dfrac{\alpha A}{\mu+\delta} > 0.$

Интервал времени $[0, t_1]$ соответствует выходу на магистраль, интервал $[t_1, t_2]$ – движению по магистрали (если она существует), интервал $[t_2, T]$ – заключительному этапу (сходу с магистрали и достижение заданного горизонта). Обозначим длительность этих интервалов как $T_1 = t_1$, $T_2 = t_2 - t_1$, $T_3 = T - t_2$. В соответствие с таким разбиением функционал (4) можно представить в виде суммы

$$J = J_1[0, t_1] + J_{\text{oc}}[t_1, t_2] + J_2[t_2, T], \tag{9}$$

где, в частности,

$$J_{\text{oc}}[t_1, t_2] = A k_{\text{oc}}^{\alpha}(1 - u_{\text{oc}}) \frac{e^{\delta(T-t_1)} - e^{\delta(T-t_2)}}{\delta}.$$

В основном решении предполагается, что магистраль существует. Поэтому момент времени t_1 определяется из условий: $k(0)=k_0$, $k(t_1)=k_{\text{oc}}$, а момент времени t_2 – из условий: $k(t_2)=k_{\text{oc}}$, $k(T)=k_T$.

Возможно также вырожденное решение, когда магистраль не существует. В этом случае оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 < t < t_3, \\ u_2 & \text{при} \quad t_3 < t < T, \end{cases} \tag{10}$$

где t_3 – момент переключения управления, u_1 и u_2 принимают значения 0 или 1 в зависимости от начального и конечного условий.

Дальнейшее решение зависит от значений магистрали k_{oc} и горизонта k_T.

3. Магистраль приходит выше горизонта ($k_T < k_{\text{oc}}$)

Если магистраль существует, то в (8) $u_2 = 0$, длительность интервала времени $[t_2, T]$ равна

$$T_3 = \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{k_{\text{oc}}}{k_T}\right) \geq 0$$

и

$$J_2[t_2, T] = G(k_{\text{oc}}; t_2, T).$$

Кроме того, на этом интервале $k(t) = n_2(t)$, т.е. кривая $n_2(t)$ является *линией переключения.*

Длина интервала $[0, t_1]$ зависит от начального условия и равна

$$t_1 = T_1 = T_1(k_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu\beta}\ln\left(\dfrac{A-\mu k_0^{\beta}}{A-\mu k_{\text{ос}}^{\beta}}\right) & \text{при} \quad k_0 < k_{\text{ос}}, \\ \dfrac{1}{\mu}\ln\left(\dfrac{k_0}{k_{\text{ос}}}\right) & \text{при} \quad k_0 > k_{\text{ос}}. \end{cases} \tag{11}$$

Кроме того,

$$u_1 = u_1(k_0) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k_0 < k_{\text{ос}}, \\ 0 & \text{при} \quad k_0 > k_{\text{ос}}. \end{cases} \quad \text{и} \quad J_1[0,t_1] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k_0 < k_{\text{ос}}, \\ G(k_0;0,T_1) & \text{при} \quad k_0 > k_{\text{ос}}. \end{cases} \tag{12}$$

Типичные решения приведены на рис. 1, *а*. Кривые *1* и *2* соответствуют решению с магистралью.

Необходимым условием существования магистрали является неравенство

$$T_1(k_0) + T_3 \le T. \tag{13}$$

Если $T_0+T_3 \le T$, то магистраль существует для всех k_0 из интервала $[0, N_2]$. Поскольку значение T_3 фиксировано, то равенство $t_1=t_2$ или равенство $T_1(k_0) = T-T_3$ позволяет получить интервал значений k_0, для которых управление содержит магистраль. Этот интервал соответствует неравенству

$$X_1(T-T_3) < k_0 < N_2,$$

где

$$X_1^{\beta}(t) = \frac{A}{\mu} + \left(k_{\text{ос}}^{\beta} - \frac{A}{\mu}\right)e^{\beta\mu t}$$

(см. кривую *3* на рис. 1, *а*). Для значений k_0, которые не попадают в этот интервал, т.е. удовлетворяют неравенству

$$N_1 < k_0 < X_1(T-T_3),$$

имеет место вырожденное решение. При этом в (10) $u_1=1$, $u_2=0$. Момент переключения t_3 определяется из условия $k(t_3) = n_2(t_3)$ и равен

$$t_3 = \frac{1}{\mu\beta}\ln\left(1 + \frac{\mu}{A}(N_2^{\beta} - k_0^{\beta})\right) \ge 0.$$

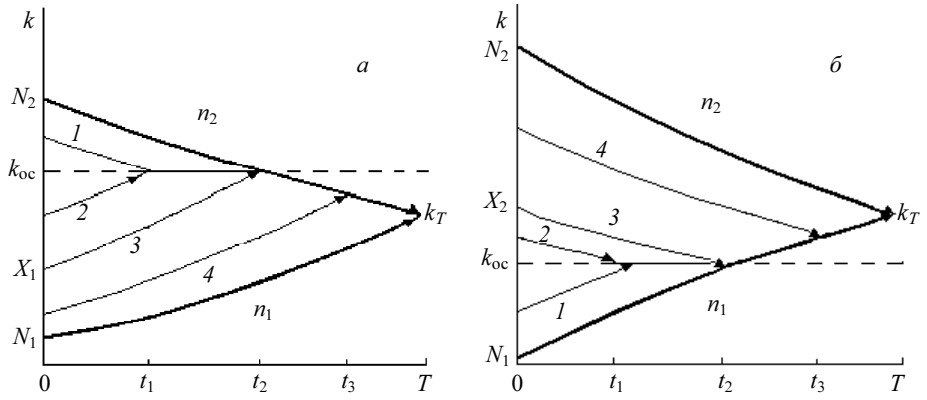

Рис. 1. Решение терминальной задачи: *а* – $k_T < k_{\text{ос}}$; *б* – $k_T > k_{\text{ос}}$

При этом $$k^{\beta}(t_3) = \frac{N_2^{\beta}}{1 + \frac{\mu}{A}(N_2^{\beta} - k_0^{\beta})}$$

(см. кривую *4* на рис. 1, *а*). Кроме того, $J_1[0,t_3]=0$, $J_2[t_3,T]=G(k(t_3);\ t_3,T)$. Области значений $k(0)$ и T, для которых справедливы разные варианты управления, представлены на рис. 2, *а*. Видно, что магистраль существует только для $T>T_3$.

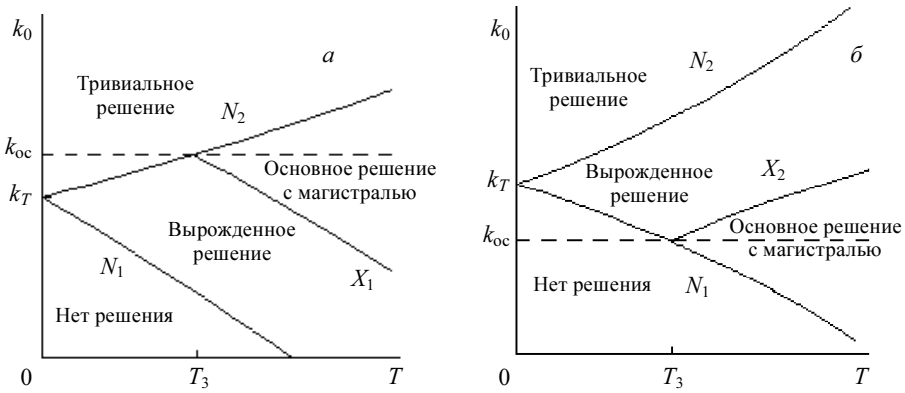

Рис. 2. Области значений k_0 и T для вариантов решения терминальной задачи: *а* – $k_T < k_{\text{ос}}$; *б* – $k_T > k_{\text{ос}}$

4. Магистраль приходит ниже горизонта ($k_{\text{ос}}<k_T$)

Если магистраль существует, то в (8) $u_2=1$, длительность интервала времени $[t_2, T]$ равна

$$T_3 = \frac{1}{\mu\beta}\ln\left(\frac{uA - \mu k_{\text{ос}}^{\beta}}{uA - \mu k_T^{\beta}}\right) \geq 0.$$

$J_2[t_2,T] = 0$ и на этом интервале $k(t) = n_1(t)$, т.е. кривая $n_1(t)$ является *линией переключения*.

Решения на интервале $[0, t_1]$ совпадают с приведенными выше. Типичные решения приведены на рис. 1, *б*. Кривые *1* и *2* соответствуют решению с магистралью.

Необходимым условием существования магистрали является неравенство (13). Поскольку значение T_3 фиксировано, то равенство $T_1(k_0) = T - T_3$ позволяет получить интервал значений k_0, для которых управление содержит магистраль. Этот интервал соответствует неравенству

$$N_1<k_0< X_2(T-T_3),$$

где $X_2(t) = k_{\text{ос}}e^{\mu t}$ (см. кривую *3* на рис. 1, *б*). Для значений k_0, которые не попадают в этот интервал, т.е. удовлетворяют неравенству

$$X_2(T-T_3) < k_0 < N_2,$$

имеет место вырожденное решение. При этом в (10) $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. Момент переключения t_3 определяется из условия $k(t_3) = n_1(t_3)$ и равен

$$t_3 = \frac{1}{\mu\beta}\ln\left(1+\frac{\mu}{A}(k_0^\beta - N_1^\beta)\right) \geq 0.$$

При этом $$k^\beta(t_3) = \frac{k_0^\beta}{1+\frac{\mu}{A}(k_0^\beta - N_1^\beta)};$$

$J_1[0,t_3]=G(k_0; 0,t_3)$, $J_2[t_3,T]=0$ (см. кривую *4* на рис. 1, *б*). Области значений $k(0)$ и T, для которых справедливы разные варианты управления, представлены на рис. 2, *б*. Видно, что магистраль существует только для $T > T_3$.

Заключение

Получено аналитическое решение терминальной задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени, связанной с максимизацией непроизводственного потребления и выходом на заданный уровень фондовооружённости. Можно отметить, что в отличии от общей задачи [2] решение терминальной задачи от коэффициента дисконтирования зависит только величина магистрали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 293 с.
2. *Параев Ю.И.*, *Грекова Т.И.*, *Данилюк Е.Ю.* Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. №4(17). С. 5–15

Параев Юрий Иванович
Грекова Татьяна Ивановна
Рощин Андрей Вадимович
Томский государственный университет
E-mail: paraev@mail.ru; gti@fpmk.tsu.ru;
roschinandrew@mail.ru

Поступила в редакцию 16 января 2012 г.

Paraev Jury I., *Grekova Tatiana I.*, *Roshchin Andrey V.* (Tomsk State University). **The decision of the terminal problem of a one-sector optimal management of the economy.**

Keywords: Cobb-Douglas' production function, investment, non-productive consumption, optimal management, highway, horizont.

The analytical decision of a terminal problem of a one-sector optimal management of the economy on a final interval of time, connected with maximization of non-productive consumption and an achievement of the preassigned level of investment is obtained. There are found necessary conditions of existing of optimal management as well as condition when this management includes a highway.