МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2012 **№ 2(19)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497
от 27 сентября 2007 г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8605). С 2010 г. журнал входит в Перечень ВАК. Журнал выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России».

В журнале «Вестник ТГУ. УВТиИ» публикуются результаты теоретических и прикладных исследований вузов, научно-исследовательских, проектных и производственных организаций в области управления, вычислительной техники и информатики в технических, экономических и социальных системах.

Тематика публикаций журнала:

- УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
- МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
- ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ
- ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ
- ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ
- ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Правила оформления статей приведены на сайте: **http://vestnik.tsu.ru/informatics/**

Адрес редакции:
634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 201
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru
Контактный тел./факс: (3822) 529-599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 05.06.2012.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10,0. Уч.-изд. л. 11,2. Тираж 300 экз. Заказ № 27.

УДК 519.21

М.А. Леонова, Л.А. Нежельская

ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ

Рассматривается обобщенный асинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок (событий), функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания. Приводятся аналитические результаты по нахождению условной и безусловной вероятности ошибочного решения при оптимальном оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий.

Ключевые слова: *обобщенный асинхронный поток событий*, *состояние потока*, *апостериорная вероятность состояния*, *оценка состояния*, *вероятность ошибки вынесения решения.*

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], в которой рассматривается задача оценки состояний обобщенного асинхронного потока событий. Последний является достаточно адекватной математической моделью информационных потоков заявок (событий), функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО) [2], и относится к классу так называемых дважды стохастических потоков событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [1, 3, 4]. Вследствие этого в настоящей статье не акцентируется внимание на классификации дважды стохастических потоков событий и задачах, возникающих при их исследовании.

В [1] решена задача оптимальной оценки состояний (задача фильтрации интенсивности потока) обобщенного асинхронного потока событий по наблюдениям за потоком в течение конечного интервала времени. В качестве решающего правила в [1] используется критерий максимума апостериорной вероятности, обеспечивающий минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения о том или ином состоянии обобщенного асинхронного потока [5]. Путем имитационного моделирования в [1] найдены (для определенного набора параметров) оценки безусловной вероятности ошибки вынесения решения. В связи с этим представляет интерес получить аналитические результаты, связанные с нахождением условной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения. Этому вопросу и посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи

Рассматривается асинхронный дважды стохастический поток с инициированием дополнительных событий (далее обобщенный асинхронный поток или просто поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1,2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии распределена по экспоненцильному закону с параметром α_i, $i = 1,2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$ дополнительное событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q $(0 \le q \le 1)$ дополнительное событие в первом состоянии. Очевидно, что в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – марковский процесс. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2,\ldots$ – моменты наступления событий; $t_2, t_6,\ldots$ – моменты инициирования дополнительных событий; t_2 – момент инициирования с вероятностью p дополнительного события во втором состоянии; t_6 – момент инициирования с вероятностью q дополнительного события в первом состоянии.

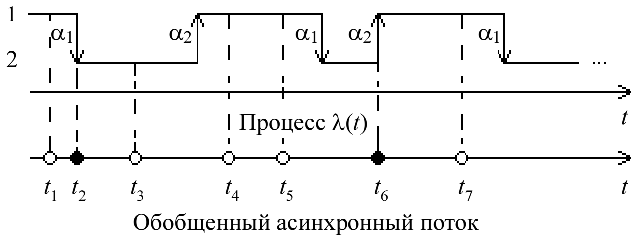

Рис. 1. Формирование обобщенного асинхронного потока

Если $p=q=0$, то имеет место обычный асинхронный поток событий [6]. Так как процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2,\ldots$, то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений и определить возникающую при этом безусловную (или условную) вероятность ошибки вынесения решения.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0=0$. Пусть $\omega(\lambda_i| t_1,\ldots, t_m,t)$ – апостериорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t)= \lambda_i$, $i=1,2$ (m – количество наблюденных событий за время t), при этом $\sum_{i=1}^{2}\omega(\lambda_i\,|t_1,\ldots,t_m,t)=1$. Вынесение решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ (или потока) производится по критерию максимума апостериорной вероятности: если $\omega(\lambda_1| t_1,\ldots, t_m,t) \ge \omega(\lambda_2| t_1,\ldots, t_m,t)$ $(\omega(\lambda_1| t_1,\ldots, t_m,t) \ge 1/2)$, то оценка состояния процесса $\lambda(t)$ есть $\hat{\lambda}(t)=\lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t)=\lambda_2$.

2. Вероятность ошибочного решения о состоянии обобщенного асинхронного потока в общем случае

Пусть полуинтервал наблюдения за обобщенным асинхронным потоком событий есть $(t_0, t]$. Момент времени t зафиксирован, то есть длина полуинтервала наблюдения есть $t–t_0$. В силу того, что моменты наступления событий $t_1, \ldots, t_i$ $(t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t)$, попавшие в полуинтервал наблюдения $(t_0, t]$, случайны, то случайна и разность $t–t_i$. Момент вынесения решения t, таким образом, лежит между моментами времени t_i и t_{i+1} $(t_i<t<t_{i+1})$, при этом момент времени t_{i+1} может быть сколь угодно большим (разность $t_{i+1}– t$ также случайна). Итак, вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ привязано к интервалу между двумя соседними временными моментами наступления событий (t_i, t_{i+1}). Сам момент вынесения решения t можно трактовать как некоторую точку, случайным образом «падающую» на ось времени Ot, никак не связанную с потоком событий. Вследствие этого точка t может попасть в любой интервал между соседними событиями обобщенного асинхронного потока. При этом начало наблюдений, т.е. точка t_0, однозначно определяется на оси времени Ot. Момент начала наблюдений t_0 можно положить равным нулю $(t_0=0)$.

Обозначим $\tau_i = t - t_i$, где i – произвольное неотрицательное целое число. Следующее событие потока наступает в момент времени t_{i+1} $(t_{i+1}> t_i)$. Тогда τ_i ограничено снизу нулем, сверху τ_i может быть в принципе неограниченным, т.е. $\tau_i \geq 0$. Обозначим $\omega(\lambda_1|t)$ – апостериорная вероятность того, что в момент вынесения решения t процесс $\lambda(t)$ принял значение λ_1 $(\lambda(t) = \lambda_1)$, т.е. обобщенный асинхронный поток в момент времени t находится в первом состоянии $(\omega(\lambda_2|t) = 1 - \omega(\lambda_1|t))$, при этом $t_i \leq t < t_{i+1}$. С учетом введенного обозначения $\omega(\lambda_1|t) = \omega(\lambda_1|\ t_i + \tau_i)$, $\tau_i >0$. В момент $t=t_i$ имеем $\omega(\lambda_1|t=t_i) = \omega(\lambda_1|\ t_i+0)$. Так как τ_i привязано к моменту времени t_i наступления i-го события, то для простоты обозначим $\omega(\lambda_1|\ t_i+ \tau_i) = \omega(\lambda_1|\tau_i)$, $\tau_i \geq 0$.

Остановимся на алгоритме принятия решения. Процесс $\lambda(\tau_i)$, $\tau_i \geq 0$, является ненаблюдаемым. На интервале $(0, \tau_i)$ он может переходить из состояния в состояние в случайные моменты варемени. Вследствие этого в момент τ_i вынесения решения процесс $\lambda(\tau_i)$ может принять либо значение λ_1 $(\lambda(\tau_i) = \lambda_1)$, либо значение λ_2 $(\lambda(\tau_i) = \lambda_2)$. Тогда оценка $\hat{\lambda}(\tau_i)$ значения процесса $\lambda(\tau_i)$ в момент времени τ_i (получаемая по критерию максимума апостериорной вероятности) также может принимать либо значение λ_1 $(\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1)$, либо значение λ_2 $(\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2)$. При этом возможны следующие варианты: 1) если в момент времени τ_i значение процесса $\lambda(\tau_i) = \lambda_1$, то правильное решение $(\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1)$ будет приниматься, если $\omega(\lambda_1|\ \tau_i) \geq \omega(\lambda_2|\ \tau_i)$; если же $\omega(\lambda_1|\ \tau_i)<\omega(\lambda_2|\ \tau_i)$, то будет приниматься ошибочное решение (совершаться ошибка): $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$; 2) если в момент времени τ_i значение процесса $\lambda(\tau_i)= \lambda_2$, то правильное решение $(\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2)$ будет приниматься, если $\omega(\lambda_1|\tau_i)<\omega(\lambda_2|\tau_i)$; если же $\omega(\lambda_1|\tau_i)\geq\omega(\lambda_2|\tau_i)$, то будет приниматься ошибочное решение (совершаться ошибка): $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$.

Обозначим $\omega(\lambda(\tau_i), \tau_i)$ – распределение вероятностей значений двумерной смешанной случайной величины $(\lambda(\tau_i), \tau_i)$, здесь $\lambda(\tau_i)$ – значение дискретной случайной величины $(\lambda(\tau_i)= \lambda_j, j=1,2)$, τ_i – значение непрерывной случайной величины

($\tau_i \geq 0$). Тогда уравнение $\omega(\lambda(\tau_i) = \lambda_1, \tau_i) = \omega(\lambda(\tau_i) = \lambda_2, \tau_i)$ определяет границу τ_i^0 критической области, в которой отклоняется гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$, а принимается гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$ (либо, наоборот, отклоняется гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$, а принимается гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$). Сам корень данного уравнения (если он существует и единственен) может быть меньше нуля ($\tau_i^0<0$), равен нулю ($\tau_i^0=0$) и может быть больше нуля ($\tau_i^0 > 0$). Кроме того, возможны ситуации, когда данное уравнение определяет некоторое множество корней либо корней не имеет (корни не существуют). Расписывая в данном уравнении $\omega(\lambda(\tau_i) = \lambda_j, \tau_i)$, $j = 1,2$, через безусловную плотность $\omega(\tau_i)$ и апостериорную вероятность $\omega(\lambda(\tau_i) = \lambda_j|\tau_i) = \omega(\lambda_j|\tau_i)$, приходим к следующему виду уравнения для границы τ_i^0 критической области:

$$\omega(\lambda_1|\tau_i) = \omega(\lambda_2|\tau_i) \ (\omega(\lambda_1|\tau_i)=1/2),\ i=1,2,\dots . \tag{1}$$

Тогда, если $\omega(\lambda_1|\tau_i) \geq \omega(\lambda_2|\tau_i)$, то апостериорную вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ можно трактовать как условную вероятность вынесения правильного решения: $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$ при условии, что вынесение решения произведено в момент времени τ_i ($\tau_i \geq 0$). Апостериорную же вероятность $\omega(\lambda_2|\ \tau_i)$ при этом можно трактовать как условную вероятность вынесения ошибочного решения (трактовать как условную вероятность ошибки): решение выносится в пользу $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$, хотя на самом деле имеет место $\lambda(\tau_i) = \lambda_2$.

В [1] сформулирован алгоритм расчета апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\tau_i)$. При этом поведение апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ между соседними наблюдавшимися событиями обобщенного асинхронного потока определяется выражением

$$\omega(\lambda_1\,|\tau_i) = \frac{\omega_1\left[\omega_2 - \omega(\lambda_1\,|\,t_i+0)\right] - \omega_2\left[\omega_1 - \omega(\lambda_1\,|\,t_i+0)\right]e^{-a(\omega_2-\omega_1)\tau_i}}{\omega_2 - \omega(\lambda_1\,|\,t_i+0) - \left[\omega_1 - \omega(\lambda_1\,|\,t_i+0)\right]e^{-a(\omega_2-\omega_1)\tau_i}},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2a}\left[\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + (1-2q)\alpha_2 - \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2a}\left[\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + (1-2q)\alpha_2 + \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right], \tag{2}$$

где $\tau_i = t - t_i \geq 0$, $i=0,1,\dots$; $a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \neq 0$, при этом $0 \leq \omega_1 < 1$, $\omega_2 \geq 1$ для $a > 0$; $0 < \omega_1 \leq 1$, $\omega_2 \leq 0$ для $a < 0$.

В момент времени $\tau_i = t - t_i = 0$ (т.е. тогда, когда момент вынесения решения t совпадает с моментом t_i наступления события) апостериорная вероятность (2) претерпевает разрыв 1-го рода ($i=1,2,\dots$), поэтому в момент времени $\tau_i = 0$ имеет место формула пересчета

$$\omega(\lambda_1\,|t_i+0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2)\omega(\lambda_1\,|t_i-0)}{\lambda_2 + q\alpha_2 + a\omega(\lambda_1\,|t_i-0)},\quad i = 1,2,\dots, \tag{3}$$

где выражение для a определено в (2); $\omega(\lambda_1|t_i - 0)$ вычисляется по формуле (2), в которой, во-первых, вместо τ_i нужно подставить τ_{i-1} и, во-вторых, вычисления производить для $\tau_{i-1} = t_i - t_{i-1}$, $i=1,2,\dots$. Последнее реализует вычисление предела слева апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\tau_{i-1})$ в момент времени t_i (в момент наступления события). В качестве начального значения $\omega(\lambda_1|t_0+0) = \omega(\lambda_1|t_0=0)$ в (2) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$: $\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$, которая находится из уравнений $\alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2 = 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$ [7].

Изучим поведение апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ как функции τ_i ($\tau_i \geq 0$). Производная фнкции (2) по τ_i примет вид

$$\frac{d\omega(\lambda_1|\tau_i)}{d\tau_i} = \frac{a(\omega_2-\omega_1)^2[\omega_1-\omega(\lambda_1|t_i+0)][\omega_2-\omega(\lambda_1|t_i+0)]e^{-a(\omega_2-\omega_1)\tau_i}}{\left[\omega_2-\omega(\lambda_1|t_i+0)-(\omega_1-\omega(\lambda_1|t_i+0))e^{-a(\omega_2-\omega_1)\tau_i}\right]^2}, \qquad (4)$$

где $\tau_i \geq 0$, апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|t_i+0)$ определена в (3), i=1,2,… . Рассмотрим поведение производной (4) в зависимости от τ_i ($\tau_i \geq 0$). Из (2) вытекает: $\lim \omega(\lambda_1|\tau_i) = \omega_1$ при $\tau_i \to \infty$. При этом знак производной (4) (для $a>0$ либо для $a<0$) определяется знаком $\omega_1 - \omega(\lambda_1|t_i+0)$: 1) если $0 \leq \omega(\lambda_1|t_i+0) < \omega_1$, то $d\omega(\lambda_1|\tau_i)/d\tau_i > 0$ и апостериорная вероятность (2) является возрастающей функцией переменной τ_i, стремящейся к ω_1 снизу при $\tau_i \to \infty$; 2) если $1 \geq \omega(\lambda_1|t_i+0) > \omega_1$, то $d\omega(\lambda_1|\tau_i)/d\tau_i < 0$ и апостериорная вероятность (2) является убывающей функцией переменной τ_i, стремящейся к ω_1 сверху при $\tau_i \to \infty$; 3) если $\omega(\lambda_1|t_i+0) = \omega_1$, то $\omega(\lambda_1|\tau_i) = \omega_1$ для $\tau_i \geq 0$. Тогда уравнение (1) имеет либо единственный корень τ_i^0 ($\tau_i^0<0$ или $\tau_i^0 \geq 0$), либо корень τ_i^0 не существует. Подставляя (2) в (1) и решая полученное уравнение относительно τ_i, находим

$$\tau_i^0 = \frac{1}{a(\omega_2-\omega_1)}\ln\frac{[\omega_2-(1/2)][\omega_1-\omega(\lambda_1|t_i+0)]}{[\omega_1-(1/2)][\omega_2-\omega(\lambda_1|t_i+0)]}, \quad i=0,1,\ldots . \qquad (5)$$

Выражение (5) определяет границу критической области τ_i^0, и в зависимости от соотношения величин ω_1 и $\omega(\lambda_1|t_i+0)$ возможны различные варианты положения τ_i^0 на временной оси:

1) если $1/2 \leq \omega_1 < \omega(\lambda_1|t_i+0)$ либо $1/2 < \omega_1 \leq \omega(\lambda_1|t_i+0)$, то корень τ_i^0 не существует; при этом условная вероятность ошибки, обозначим ее здесь и далее $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$, определится в виде

$$P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = 1 - \omega(\lambda_1|\tau_i), \ \tau_i \geq 0; \qquad (6)$$

2) если $1/2 < \omega(\lambda_1|t_i+0) < \omega_1$, то $\tau_i^0 < 0$ и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определится выражением (6);

3) если $\omega(\lambda_1|t_i+0) \leq 1/2 < \omega_1$, то $\tau_i^0 \geq 0$; при этом

$$P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = \begin{cases} \omega(\lambda_1|\tau_i), \ 0 \leq \tau_i < \tau_i^0; \\ 1-\omega(\lambda_1|\tau_i), \ \tau_i \geq \tau_i^0; \end{cases} \qquad (7)$$

4) если $\omega_1 = 1/2$, $\omega_1 > \omega(\lambda_1|t_i+0)$, то τ_i^0 не существует; при этом

$$P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = \omega(\lambda_1|\tau_i), \ \tau_i \geq 0; \qquad (8)$$

5) если $1/2 \geq \omega_1 > \omega(\lambda_1|t_i+0)$ либо $1/2 > \omega_1 \geq \omega(\lambda_1|t_i+0)$, то корень τ_i^0 не существует и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определяется выражением (8);

6) если $1/2 > \omega(\lambda_1|t_i+0) > \omega_1$, то $\tau_i^0 < 0$ и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определяется выражением (8);

7) если $\omega(\lambda_1|t_i+0) \geq 1/2 > \omega_1$, то $\tau_i^0 \geq 0$; при этом

$$P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = \begin{cases} 1-\omega(\lambda_1|\tau_i), \ 0 \leq \tau_i \leq \tau_i^0; \\ 1-\omega(\lambda_1|\tau_i), \ \tau_i > \tau_i^0; \end{cases} \qquad (9)$$

8) если $\omega_1 = \omega(\lambda_1|t_i+0) = 1/2$, то τ_i^0 не существует и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = 1/2$; для данного варианта $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ является безусловной вероятностью ошибки.

Формулы (2), (3), (5) – (9) позволяют сформировать алгоритм расчета условной вероятности вынесения ошибочного решения $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ в любой момент времени $\tau_i^0 \geq 0$, $i = 0, 1,\ldots$:

1) в момент времени $t_0=0$ задается $\omega(\lambda_1|t_0+0)=\omega(\lambda_1|t_0=0)=\pi_1$;

2) по формуле (5) для $i=0$ рассчитывается τ_i^0, тем самым устанавливается положение границы критической области на временной оси;

3) находится один из восьми возможных вариантов соотношения величин ω_1 и $\omega(\lambda_1|t_i+0)$;

4) для найденного варианта рассчитывается (с использованием формулы (2)) вероятность $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_0)$ в любой момент времени τ_i $(0\leq \tau_i^0 < t_{i+1} - t_i)$; при этом для третьего варианта (формула (7)) и седьмого варианта (формула (9)) может выполняться либо $0\leq \tau_i^0 < t_{i+1} - t_i$, либо $\tau_i^0 > t_{i+1} - t_i$;

5) по формуле (2) рассчитывается вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ в момент времени $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, т.е. $\omega(\lambda_1|t_{i+1}-0)$; затем по формуле (3) производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_{i+1}, т.е. находится $\omega(\lambda_1|t_{i+1}+0)$; i увеличивается на единицу и алгоритм переходит на шаг 2) и т.д.

Сделаем важное замечание. В силу формулы пересчета (3) значение $\omega(\lambda_1|t_i+0)$ зависит от всех моментов $t_1,\ldots, t_i$ наступления событий в потоке, т.е. вся предыдущая информация сосредоточена в вероятности $\omega(\lambda_1|t_i+0)$. Вследствие этого для определения безусловной вероятности ошибки необходимо усреднить условную вероятность ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ по моментам наступления событий $t_1,\ldots, t_i$. Однако найти функцию распределения вероятностей моментов $t_1,\ldots, t_i$ наступления событий в обобщенном асинхронном потоке в явном виде представляется затруднительным или, вообще, невозможным. Как будет видно ниже, определить безусловную вероятность ошибки возможно только для некоторых частных и особых случаев.

3. Частные случаи

Представляет интерес рассмотреть частные случаи соотношения параметров λ_i, α_i , $i=1,2, p, q$.

1. $\lambda_1+q\alpha_1 = \lambda_2+p\alpha_2$, $p \neq q$. Тогда $\omega_1 = \pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$, $\omega_2 = (1 - q)/(p - q)$, $a = (\alpha_1+\alpha_2)(p - q) \neq 0$. Так как $\omega(\lambda_1|t_0+0) = \pi_1$, то из (2) следует, что $\omega(\lambda_1| \tau_0) = \pi_1$ для $0 \leq \tau_0 < t_1 - t_0$, т.е. $\omega(\lambda_1|t_1 -0) = \pi_1$. Тогда из (3) вытекает, что $\omega(\lambda_1|t_1+0) = \pi_1$ и т.д. Таким образом, имеем $\omega(\lambda_1|\tau_i)=\pi_1$, $\tau_i \geq 0$, $i=0,1,\ldots$. Последнее говорит о том, что при таком соотношении параметров информация о моментах наступления событий $t_1,\ldots, t_m$ не оказывает влияния на апостериорную вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$, т.е. в конечном итоге не влияет на качество оценивания состояний процесса $\lambda(t)$. Решение о том или ином состоянии обобщенного асихронного потока выносится на основании априорных данных. При этом вероятность $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = \pi_2$, если $\pi_1 \geq \pi_2$, либо $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i) = \pi_1$, если $\pi_1 < \pi_2$, $i = 0,1,\ldots$, т.е. в данном частном случае $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ является безусловной вероятностью ошибочного решения.

2. Подкоренное выражение в (2) равно нулю:

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 (1 - p)(1 - q) = 0.$$

Данная ситуация возможна в двух случаях:

2.1. p=1, 0≤ q <1, $\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда a = (1–q) α_2 > 0, $\omega_1 = \omega_2 = 1$. При этом [1]

$$\omega(\lambda_1 | \tau_i) = \frac{\omega(\lambda_1 | t_i + 0) + (1-q)\alpha_2 [1 - \omega(\lambda_1 | t_i + 0)]\tau_i}{1 + (1-q)\alpha_2 [1 - \omega(\lambda_1 | t_i + 0)]\tau_i}, \quad \tau_i \ge 0, i = 0,1,\dots;$$

$$\omega(\lambda_1 | t_i + 0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2)\omega(\lambda_1 | t_i - 0)}{\lambda_2 + q\alpha_2 + (1-q)\alpha_2\omega(\lambda_1 | t_i - 0)}, \ i = 1,2,\dots. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (1), находим границу критической области

$$\tau_i^0 = \frac{2[(1/2) - \omega(\lambda_1 | t_i + 0)]}{(1-q)\alpha_2 [1 - \omega(\lambda_1 | t_i + 0)]}, \quad i = 0,1,\dots.$$

Тогда, если $\omega(\lambda_1|t_i+0) > 1/2$, то $\tau_i^0<0$ и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определяется формулой (6); если $\omega(\lambda_1|t_i+0) \le 1/2$, то $\tau_i^0 \ge 0$ и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определяется формулой (7).

2.2. q=1, 0≤ p <1, $\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда a = – (1–p) α_1 < 0, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. При этом [1]

$$\omega(\lambda_1 | \tau_i) = \frac{\omega(\lambda_1 | t_i + 0)}{1 + (1-p)\alpha_1\omega(\lambda_1 | t_i + 0)\tau_i}, \quad \tau_i \ge 0, i = 0,1,\dots;$$

$$\omega(\lambda_1 | t_i + 0) = \frac{\alpha_2 + (\lambda_1 - \alpha_2)\omega(\lambda_1 | t_i - 0)}{\lambda_2 + \alpha_2 - (1-p)\alpha_1\omega(\lambda_1 | t_i - 0)}, \ i = 1,2,\dots. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (1), находим границу критической области

$$\tau_i^0 = \frac{2[\omega(\lambda_1 | t_i + 0) - (1/2)]}{(1-p)\alpha_1\omega(\lambda_1 | t_i + 0)}, \quad i = 0,1,\dots.$$

Тогда, если $\omega(\lambda_1|t_i+0) < 1/2$, то $\tau_i^0<0$ и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определяется формулой (8); если $\omega(\lambda_1|t_i+0) \ge 1/2$, то $\tau_i^0 \ge 0$ и $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ определяется формулой (9).

3. $\lambda_1 + p\alpha_1 = \lambda_2 + q\alpha_2$, 0≤ p ≤1, 0< q ≤ 1, $p \ne q$. Тогда a=0 и в (2) имеет место деление на ноль (вариант 0≤ p ≤1, q=0 не реализуем, так как в этой ситуации имеем $\lambda_2 > \lambda_1$, что противоречит постановке задачи). При этом [1]

$$\omega(\lambda_1 | \tau_i) = \omega + [\omega(\lambda_1 | t_i + 0) - \omega]e^{-\beta\tau_i}, \quad \tau_i \ge 0, i = 0,1,\dots; \quad (12)$$

$$\omega(\lambda_1 | t_i + 0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2)\omega(\lambda_1 | t_i - 0)}{\lambda_2 + q\alpha_2}, \ i = 1,2,\dots, \quad (13)$$

где $\beta = (1-p)\alpha_1 + (1-q)\alpha_2$, $\omega = (1-q)\alpha_2/\beta$. Подставляя (12) в (1), находим границу критической области

$$\tau_i^0 = (1/\beta)\ln\frac{\omega - \omega(\lambda_1 | t_i + 0)}{\omega - 1/2}, \ i = 0,1,\dots.$$

В данном случае условная вероятность ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ по-прежнему зависит от соотношения величин ω и $\omega(\lambda_1|t_i+0)$ и полностью совпадает с вариантами 1) – 8) для общего случая (в выражениях (6) – (9) вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ определяется формулой (12)).

4. $\lambda_1 + p\alpha_1 = \lambda_2 + q\alpha_2$, $p=q$, 0< q ≤ 1. Тогда a=0 и формула (12) примет вид

$$\omega(\lambda_1 | \tau_i) = \pi_1 + [\omega(\lambda_1 | t_i + 0) - \pi_1]e^{-(1-q)(\alpha_1+\alpha_2)\tau_i}, \quad \tau_i \ge 0, i = 0,1,\dots. \quad (14)$$

Формула пересчета сохранится в виде (13). Так как $\omega(\lambda_1|t_0+0)=\pi_1$, то из (14) следует, что $\omega(\lambda_1|\ \tau_0)=\pi_1$ для $0\le \tau_0 < t_1-t_0$, т.е. $\omega(\lambda_1|t_1-0)=\pi_1$. Тогда из (13) вытекает, что $\omega(\lambda_1|\tau_i)=\pi_1$, $\tau_i \ge 0$, i=0,1,… . Получили результат, идентичный результату частного случая 1.

Алгоритмы расчета условной вероятности ошибки аналогичны алгоритму расчета вероятности $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ для общего случая.

4. Особые случаи

Рассмотрим особые случаи соотношения параметров λ_i , α_i , i=1,2, p, q, для которых возможно вычисление безусловной вероятности ошибки.

1. $\lambda_1\lambda_2=pq\alpha_1\alpha_2$, $0< p \le 1$, $0< q \le 1$, $\lambda_2\ne 0$, $\lambda_1\ne q\alpha_1$. Последнее ограничение вытекает из того, что отмеченная связь параметров (здесь и далее $\lambda_2=pq\alpha_1\alpha_2/\lambda_1$) влечет за собой равенство $a=(1/\lambda_1)(\lambda_1-q\alpha_2)(\lambda_1+p\alpha_1)$. Тогда $a\ne 0$, если $\lambda_1\ne q\alpha_2$. Для расчета апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ справедлива формула (2). Формула пересчета (3) при этом приобретает вид

$$\omega(\lambda_1\,|t_i+0)=\tilde{\pi}_1=\lambda_1\big/(\lambda_1+p\alpha_1),\ \ i=1,2,\ldots . \tag{15}$$

В (15) $\tilde{\pi}_1$ – апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t_i+0 находится в первом состоянии при условии, что в момент времени t_i, i=1,2,…, наступило событие обобщенного асинхронного потока [1]. Из (15) вытекает, что апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ не зависит от предыстории, т.е. обобщенный асинхронный поток событий в данном случае является рекуррентным потоком. Формула (2) при этом выписывается в виде

$$\omega(\lambda_1\,|\tau)=\frac{\omega_1\left(\omega_2-\tilde{\pi}_1\right)-\omega_2\left(\omega_1-\tilde{\pi}_1\right)e^{-a(\omega_2-\omega_1)\tau}}{\omega_2-\tilde{\pi}_1-\left(\omega_1-\tilde{\pi}_1\right)e^{-a(\omega_2-\omega_1)\tau}},\qquad \tau\ge 0. \tag{16}$$

Здесь величины ω_1 и ω_2 определены в (2). Подставляя (16) в (1), находим границу критической области τ^0 для любого интервала $(t_i,\ t_{i+1})$, i=0,1,… , в виде

$$\tau^0=\frac{1}{c}\ln\frac{(\omega_2-1/2)(\omega_1-\tilde{\pi}_1)}{(\omega_1-1/2)(\omega_2-\tilde{\pi}_1)}, \tag{17}$$

где $c=\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}$. Из (17) следует идентичность вариантов положения τ^0 на временной оси с вариантами 1) – 8) для общего случая, в которых $\omega(\lambda_1|t_i+0)$ нужно заменить на $\tilde{\pi}_1$. При этом в формулах (6) – (9) условная вероятность ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ заменяется на условную вероятность ошибки $P_0(\tau)$, а апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ – на апостериорную вероятность $\omega(\lambda_1|\tau)$.

Для нахождения безусловной вероятности ошибки P_0 необходимо знать плотность вероятностей длительности интервала (t_i , t_{i+1}), i=0,1,… , которому принадлежит момент вынесения решения t. В силу того, что момент вынесения решения есть некоторая точка, случайным образом падающая на ось времени, то тогда плотность вероятностей $\omega(\tau)$ длительности интервала (t_i , t_{i+1}), i = 0,1,… , в который попала точка t, для рекуррентных потоков определяется в виде [8]

$$\omega(\tau)=\tau p(\tau)\big/E(\tau),\quad E(\tau)=\int_0^\infty \tau p(\tau)d\tau\,, \tag{18}$$

где $p(\tau)$ – плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями рекуррентного обобщенного асинхронного потока событий. Можно показать, что

$$p(\tau)=\gamma z_1 e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2 e^{-z_2\tau}, \quad \tau\geq 0,$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right],$$

$$\gamma=(z_2-\lambda_1-\lambda_2)(z_2-z_1)^{-1}. \quad (19)$$

Тогда, подставляя (19) в (18), находим

$$\omega(\tau)=A_1\tau e^{-z_1\tau}+A_2\tau e^{-z_2\tau}, \quad \tau\geq 0,$$

$$A_1=\frac{z_1^2 z_2(z_2-\lambda_1-\lambda_2)}{c(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad A_2=\frac{z_1 z_2^2(\lambda_1+\lambda_2-z_1)}{c(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad (20)$$

где z_1, z_2 определены в (19); c – в (17).

Учитывая (2) и (20), получаем выражения безусловных вероятностей ошибок P_0 для различных вариантов соотношения величин величин ω_1 и $\tilde{\pi}_1$:

1) если $1/2\leq\omega_1<\tilde{\pi}_1$ либо $1/2<\omega_1\leq\tilde{\pi}_1$, то τ^0 не существует и

$$P_0=1-\int_0^\infty\omega(\tau)\omega(\lambda_1\,|\,\tau)d\tau=$$

$$=1-D_1\int_0^\infty\frac{\tau e^{-z_1\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau-D_2\int_0^\infty\frac{\tau e^{-z_2\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau+b_1A_2\int_0^\infty\frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau, \quad (21)$$

где $D_1=\omega_1A_1,\quad D_2=\omega_1A_2-b_1A_1;$

$b_1=\omega_2(\omega_1-\tilde{\pi}_1)/(\omega_2-\tilde{\pi}_1),\quad b_2=(\omega_1-\tilde{\pi}_1)/(\omega_2-\tilde{\pi}_1);$

2) если $1/2<\tilde{\pi}_1<\omega_1$, то $\tau^0<0$ и P_0 определяется выражением (21);

3) если $\tilde{\pi}_1\leq 1/2<\omega_1$, то $\tau^0\geq 0$; при этом

$$P_0=\int_0^{\tau^0}\omega(\tau)\omega(\lambda_1\,|\,\tau)d\tau+\int_{\tau^0}^\infty\omega(\tau)\left[1-\omega(\lambda_1\,|\,\tau)\right]d\tau=$$

$$=B_1\left(\frac{1}{z_1}+\tau^0\right)e^{-z_1\tau^0}+B_2\left(\frac{1}{z_2}+\tau^0\right)e^{-z_2\tau^0}+\sum_{i=1}^{2}D_i\left[\int_0^{\tau^0}\frac{\tau e^{-z_i\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau-\int_{\tau^0}^\infty\frac{\tau e^{-z_i\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau\right]-$$

$$-b_1A_2\left[\int_0^{\tau^0}\frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau-\int_{\tau^0}^\infty\frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau\right], \quad (22)$$

где $B_1=A_1/z_1$, $B_2=A_2/z_2$; τ^0 определяется формулой (17);

4) если $\omega_1=1/2$, $\omega_1>\tilde{\pi}_1$, то τ^0 не существует; при этом

$$P_0=\int_0^\infty\omega(\tau)\omega(\lambda_1\,|\,\tau)d\tau=D_1\int_0^\infty\frac{\tau e^{-z_1\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau+D_2\int_0^\infty\frac{\tau e^{-z_2\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau-b_1A_2\int_0^\infty\frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau; \quad (23)$$

5) если $1/2\geq\omega_1>\tilde{\pi}_1$ либо $1/2>\omega_1\geq\tilde{\pi}_1$, то τ^0 не существует и P_0 определяется выражением (23);

6) если $1/2 > \tilde{\pi}_1 > \omega_1$, то $\tau^0 < 0$ и P_0 определяется выражением (23);

7) если $\tilde{\pi}_1 \geq 1/2 > \omega_1$, то $\tau^0 \geq 0$; при этом

$$P_0 = \int_0^{\tau^0} \omega(\tau)[1-\omega(\lambda_1 \mid \tau)]d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} \omega(\tau)\omega(\lambda_1 \mid \tau)d\tau =$$

$$= 1 - B_1\left(\frac{1}{z_1}+\tau^0\right)e^{-z_1\tau^0} - B_2\left(\frac{1}{z_2}+\tau^0\right)e^{-z_2\tau^0} - \sum_{i=1}^{2} D_i\left[\int_0^{\tau^0}\frac{\tau e^{-z_i\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty}\frac{\tau e^{-z_i\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau\right] +$$

$$+ b_1A_2\left[\int_0^{\tau^0}\frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty}\frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau\right], \tag{24}$$

где τ^0 определяется формулой (17);

8) если $\omega_1 = \tilde{\pi}_1 = 1/2$, то τ^0 не существует и $P_0 = 1/2$.

Интегралы, входящие в (21) – (24), могут быть вычислены только численно.

2. $\lambda_1 + p\alpha_1 = \lambda_2 + q\alpha_2$, $\lambda_1 = q\alpha_2$, $\lambda_2 = p\alpha_1$, $p \neq q$, $0 \leq p \leq 1$, $0 < q \leq 1$. Тогда $a=0$ и в рамках третьего частного случая (раздел 3) и формулы пересчета (13) следует, что

$$\omega(\lambda_1 \mid t_i + 0) = \tilde{\pi}_1 = q\alpha_2 / (p\alpha_1 + q\alpha_2), \; i = 1,2,\ldots . \tag{25}$$

Из (25) вытекает (аналогично первому особому случаю), что апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|\tau_i)$ не зависит от предыстории и для данного соотношения параметров обобщенный асинхронный поток событий является рекуррентным потоком. Формула (12) при этом приобретает вид

$$\omega(\lambda_1 \mid \tau) = \omega + (\tilde{\pi}_1 - \omega)e^{-\beta\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{26}$$

Здесь величины ω, β определены в (12). Подставляя (26) в (1), находим границу критической области τ^0 для любого интервала (t_i, t_{i+1}), $i=0,1,\ldots$, в виде

$$\tau^0 = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\omega - \tilde{\pi}_1}{\omega - 1/2} \quad \left(\tau^0 = \frac{1}{\beta}\ln\frac{2\alpha_1\alpha_2(q-p)}{(p\alpha_1+q\alpha_2)[(1-p)\alpha_1-(1-q)\alpha_2]}\right). \tag{27}$$

Из (27) следуют варианты положения τ^0 на временной оси, аналогичные вариантам 1) – 7) для первого особого случая. При этом можно показать, что плотность вероятностей $p(\tau)$ (аналогичная плотности, определяемой выражением (19)) выпишется в виде

$$p(\tau) = (p\alpha_1 + q\alpha_2)e^{-(p\alpha_1+q\alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (18), находим

$$\omega(\tau) = (p\alpha_1 + q\alpha_2)^2\, \tau e^{-(p\alpha_1+q\alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{29}$$

Учитывая (26), (29), получаем выражения безусловных вероятностей ошибок P_0 для различных вариантов соотношения величин ω и $\tilde{\pi}_1$:

1) если $1/2 \leq \omega < \tilde{\pi}_1$, то τ^0 не существует и

$$P_0 = 1 - \omega - \left(\frac{p\alpha_1 + q\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2(\tilde{\pi}_1 - \omega); \tag{30}$$

2) если $1/2 < \tilde{\pi}_1 < \omega$, то $\tau^0 < 0$ и P_0 определяется выражением (30);

3) если $\tilde{\pi}_1 \le 1/2 < \omega$, то $\tau^0 \ge 0$; при этом

$$P_0 = \omega + (1-2\omega)\left[1+(p\alpha_1+q\alpha_2)\tau^0\right]\left(\frac{\omega-1/2}{\omega-\tilde{\pi}_1}\right)^{\frac{p\alpha_1+q\alpha_2}{\beta}} +$$

$$+\left(\frac{p\alpha_1+q\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2(\tilde{\pi}_1-\omega)\left[1-2\left(1+(\alpha_1+\alpha_2)\tau^0\right)\left(\frac{\omega-1/2}{\omega-\tilde{\pi}_1}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta}}\right], \qquad (31)$$

где τ^0 определяется формулой (27);

4) если ω=1/2, $\omega > \tilde{\pi}_1$, то τ^0 не существует; при этом

$$P_0 = \omega + \left(\frac{p\alpha_1+q\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2(\tilde{\pi}_1-\omega); \qquad (32)$$

5) если $1/2 \ge \omega > \tilde{\pi}_1$, то τ^0 не существует и P_0 определяется выражением (32);

6) если $1/2 > \tilde{\pi}_1 > \omega$, то $\tau^0 < 0$ и P_0 определяется выражением (32);

7) если $\tilde{\pi}_1 \ge 1/2 > \omega$, то $\tau^0 \ge 0$; при этом

$$P_0 = 1-\omega-(1-2\omega)\left[1+(p\alpha_1+q\alpha_2)\tau^0\right]\left(\frac{\omega-1/2}{\omega-\tilde{\pi}_1}\right)^{\frac{p\alpha_1+q\alpha_2}{\beta}} -$$

$$-\left(\frac{p\alpha_1+q\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2(\tilde{\pi}_1-\omega)\left[1-2\left(1+(\alpha_1+\alpha_2)\tau^0\right)\left(\frac{\omega-1/2}{\omega-\tilde{\pi}_1}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta}}\right], \qquad (33)$$

где τ^0 определяется формулой (27);

5. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления условной вероятности ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ для общего случая, а также для частных и особых случаев. Программа расчета реализована на языке программирования *C*++ в среде Builder 6. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование обобщенного асинхронного потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Второй этап расчета – непосредственное вычисление условной вероятности ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ по формулам (6) – (9). Расчеты произведены для общего случая и для следующих значений параметров : λ_1=2, λ_2=1, α_1=0,01, α_2=0,02, p=0,1, q=0,9 и времени моделирования T=100 ед. времени. В качестве иллюстрации на рис.2 приведена траектория (верхняя часть рис. 2) случайного процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования (истинное поведение ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$), где 1, 2 – состояния процесса $\lambda(t)$, и траектория (нижняя часть рис. 2) оценки $\hat{\lambda}(t)$, полученной по критерию максимума апостериорной вероятности, где 1, 2 – состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом Δt=0,05. На рис.2 штриховкой на оси времени обозначены временные промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса

$\lambda(t)$ (области ошибочных решений). На рис. 3 приведена траектория поведения апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\tau_i)$, i=0,1,…., соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности моментов наступления событий $t_1, t_2,\ldots$. На рис. 4 приведена траектория условной вероятности ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$, i=0,1,…, соответствующая той же последовательности моментов наступления событий.

Таким образом, предложенный алгоритм осуществляет оценку состояний процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t и одновременно в этот же момент времени вычисляет условную вероятность сделанной при вынесении решения ошибки.

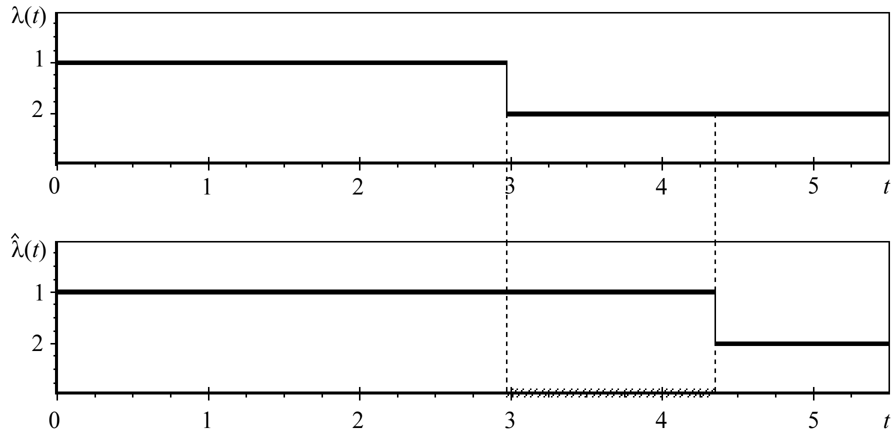

Рис. 2. Траектории процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

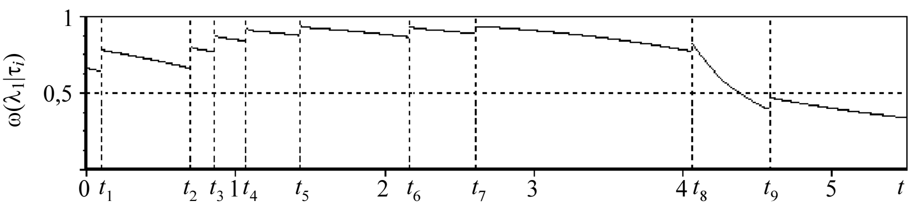

Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|t)$

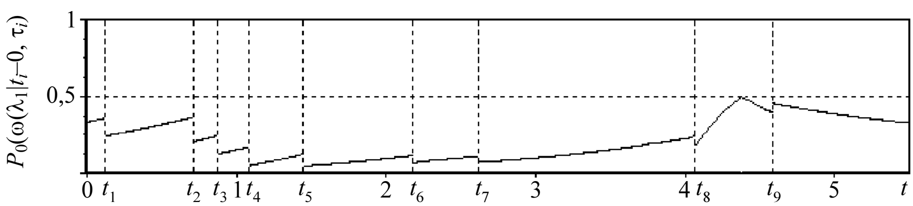

Рис. 4. Траектория условной вероятности ошибки $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$, i=0,1,….

Для особых случаев (раздел 4) получены графики безусловной вероятности ошибки P_0. На рис. 5 приведены графики безусловной вероятности ошибки P_0 для первого особого случая. Алгоритм расчета выглядит следующим образом: 1) задается α_1; 2) вычисляется ω_1 и $\tilde{\pi}_1$; 3) определяется один из восьми возможных вариантов 1) – 8) и вычисляется P_0 для этого варианта; 4) α_1 заменяется на $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$; 5) алгоритм переходит на шаг 1 и т.д. Графики рассчитаны для следующих значений параметров: $\lambda_2 = 0{,}05$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $p = 1$, $q = 0{,}5$. Параметр α_1 изменяется по оси абсцисс от 0,01 до 2 с шагом $\Delta\alpha_1$=0,001 для различных значений λ_1 = 0,5; 1; 1,5 (на рис. 5 каждому значению λ_1 соответствует отдельная кривая).

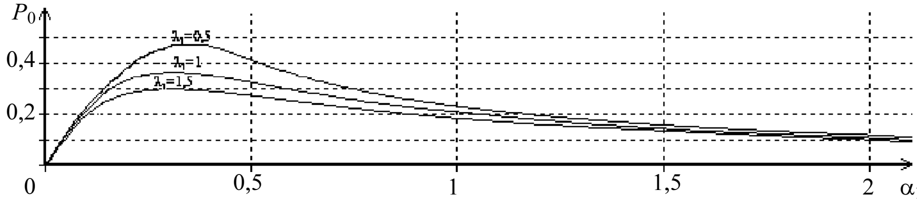

Рис. 5. Графики безусловной вероятности ошибки P_0 для первого особого случая

На рис. 6 приведены графики безусловной вероятности ошибки P_0 для второго особого случая. Алгоритм расчета аналогичен алгоритму для первого особого случая. Графики рассчитаны для следующих значений параметров: λ_2=0,009, α_2=0,1, p=0,9, q=1. Параметр α_1 изменяется по оси абсцисс от 0,01 до 2 с шагом $\Delta\alpha_1$=0,001 для различных значений λ_1 = 0,1; 0,6; 1,1 (на рис. 6 каждому значению λ_1 соответствует отдельная кривая).

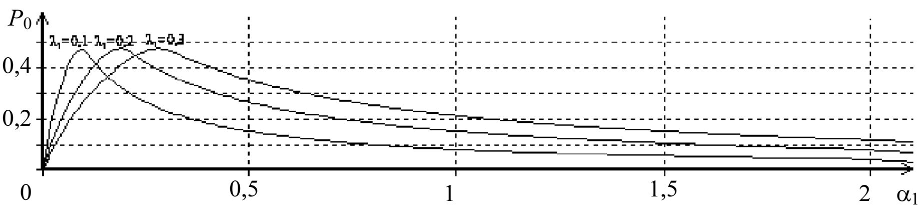

Рис. 6. Графики безусловной вероятности ошибки P_0 для второго особого случая

5. Заключение

Предложенный алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного асинхронного потока событий осуществляет оценку состояний по результатам текущих наблюдений за потоком. Параллельно с этим в момент оценки состояния потока вычисляется условная вероятность ошибки вынесения решения.

Для особых случаев, когда поток событий является рекуррентным, выражения безусловной вероятности ошибки выписаны в явном виде. Последнее позволяет до начала наблюдений определить, при заданном наборе параметров, значение безусловной вероятности ошибки, не привлекая методов имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М.*, *Леонова М.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33–47.
2. *Дудин А.Н.*, *Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.

3. *Горцев А.М., Зуевич В.Л.* Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44–65.
4. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66 –81.
5. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
6. *Васильева Л.А, Горцев А.М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69–79.
7. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер.: Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
8. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.

Леонова Мария Алексеевна
Нежельская Людмила Алексеевна
Томский государственный университет
E-mail: mleonova86@mail.ru; nla@fpmk.tsu.ru Поступила в редакцию 12 января 2012 г.

Leonova Maria A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University). **The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events.**

Keywords: generalized asynchronous flow of events, flow state, posterior probability of state, state estimation, the probability of wrong decision.

Generalized asynchronous flow of events which intensity is piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two states λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i, i=1,2. Transition from the first state of process $\lambda(t)$ into the second one (from the second state into the first one) is carried out at any moment of time. The sojourn time in the i-th state is exponentially distributed with parameter α_i, i=1,2. The process of transition $\lambda(t)$ from the first state into the second one initiates with probability p ($0 \le p \le 1$) extra event in the second state. Also the process of transition $\lambda(t)$ from the second state into the first one initiates with probability вероятностью q ($0 \le q \le 1$) extra event in the second state.

We solve the problem of finding the unconditional (or conditional) probability of error decision. The algorithm for calculating the conditional probability of wrong decisions $P_0(\omega(\lambda_1|t_i+0), \tau_i)$ at any time $\tau_i \ge 0$, i=0,1,… (general case) is proposed. For the particular and special cases of relations between flow parameters the unconditional probability of wrong decision is found.