

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2012

№ 1(17)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бухтяк М.С., канд. физ.-мат. наук, доц.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Лейцин В.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

УДК 515.12

С.П. Гулько, В.Р. Лазарев, Т.Е. Хмылева

О ВЗАИМНОЙ «ОРТОГОНАЛЬНОСТИ» КЛАССОВ ПРОСТРАНСТВ $C_p(X)$ И $L_p(Y)$

В статье доказывается, что для бесконечномерных пространств $C_p(X)$, $L_p(Y)$ или нормированного пространства E никакое из этих трех пространств нельзя линейно гомеоморфно вложить в другое в качестве дополняемого подпространства.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, линейное гомеоморфное вложение, дополняемое подпространство.

Для вполне регулярного топологического пространства X символом $C_p(X)$ обозначаем пространство непрерывных функций из X в \mathbb{R} с топологией поточечной сходимости. Через $L_p(X)$ обозначается топологическое сопряжённое к $C_p(X)$, т.е. совокупность всех линейных непрерывных функционалов, также наделенная топологией поточечной сходимости. Известно [1], что сопряженным к $L_p(X)$ является $C_p(X)$. В данной статье мы даем отрицательный ответ на следующие вопросы (в случае бесконечности пространства X):

1. Можно ли пространство вида $C_p(X)$ вложить в $L_p(Y)$ для некоторого Y в качестве дополняемого подпространства?
2. Можно ли пространство вида $L_p(X)$ вложить в $C_p(Y)$ для некоторого Y в качестве дополняемого подпространства?

Напомним, что для топологического векторного пространства E подпространство L называется дополняемым, если существует линейная непрерывная проекция E на L .

Очевидна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть X – вполне регулярно и бесконечно. Тогда существует последовательность ненулевых функций e_n , $n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C_p(X)$ с дизъюнктными носителями.

Лемма 2. Пусть $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – линейно независимая система в $L_p(Y)$. Тогда найдётся подсистема $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ и функция $x_0 \in C_p(Y)$, для которой $f_{n_k}(x_0) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Введём вначале некоторые обозначения. Носитель функционала f_n обозначим через A_n . Для $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим $B_m = \bigcup \{A_{n_k} : k \leq m\}$ и $D_m = B_m \setminus B_{m-1}$. Наконец, для конечного множества $F \subset Y$ и точки $y \in F$, пусть $x(y, F) \in C_p(Y, [0, 1])$, $x(y, F)(y) = 1$, $x(y, F)(y') = 0$ при всех $y' \in F$, $y' \neq y$.

В силу линейной независимости системы $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, найдётся подсистема $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, для которой все разности D_k не пусты. Методом математической

индукции построим последовательности функций $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_p(Y)$, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_p(Y)$, $S_k = x_1 + \varepsilon_2 \frac{x_2}{2} + \dots + \varepsilon_k \frac{x_k}{2^{k-1}}$, где все $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, со следующими свойствами:

- (а) $f_{n_k}(S_k) \neq 0$,
- (б) $f_{n_k}(x_m) = 0$ при $m > k$.

Выберем произвольную точку $y_1 \in B_1$ и положим $S_1 = x_1 = x(y_1, B_1)$. Далее, выберем произвольную точку $y_2 \in D_2$ и положим $x_2 = x(y_2, B_2)$, $S_2 = x_1 + \varepsilon_2 \cdot \frac{x_2}{2}$. Здесь $\varepsilon_2 = 0$, если $f_{n_2}(x_1) \neq 0$, и $\varepsilon_2 = 1$, если $f_{n_2}(x_1) = 0$. Тогда $f_{n_1}(x_1) = f_{n_1}(S_1) \neq 0$. Так как $f_{n_2}(x_2) \neq 0$, то, по построению, $f_{n_2}(S_2) \neq 0$. Кроме того, $f_{n_1}(x_2) = 0$. Таким образом, для x_1, x_2, S_1, S_2 выполнены условия (а) и (б).

Предположим, что уже выбраны x_1, \dots, x_k и построены S_1, \dots, S_k так, что выполнены условия (а) и (б).

Выберем какую-нибудь точку $y_{k+1} \in D_{k+1}$ и положим $x_{k+1} = x(y_{k+1}, B_{k+1})$, а также $S_{k+1} = S_k + \varepsilon_{k+1} \cdot \frac{x_{k+1}}{2^k}$, где $\varepsilon_{k+1} = 0$, если $f_{n_{k+1}}(S_k) \neq 0$, и $\varepsilon_{k+1} = 1$, если $f_{n_{k+1}}(S_k) = 0$. Тогда получим, что $f_{n_i}(x_{k+1}) = 0$ при $i \leq k$, и $f_{n_{k+1}}(S_{k+1}) \neq 0$. То есть условия (а) и (б) выполнены для $x_1, \dots, x_{k+1}, S_1, \dots, S_{k+1}$.

Итак, требуемые последовательности построены.

Положим теперь $x_0 = x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k \cdot \frac{x_k}{2^{k-1}}$. Очевидно, данный ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на Y . Поэтому функция x_0 непрерывна. Заметим, что $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$.

Пусть теперь $m \in \mathbb{N}$ произвольно, $k > m$. Тогда $f_{n_m}(S_k) = f_{n_m}(S_m)$ в силу условия (б). Так как функционал f_{n_m} непрерывен, то $f_{n_m}(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_m}(S_k) = f_{n_m}(S_m) \neq 0$ по пункту (а). ■

Теорема 3. Если X вполне регулярно и бесконечно, то не существует линейной непрерывной инъекции $C_p(X)$ в $L_p(Y)$.

Доказательство. Пусть, напротив, существует линейная непрерывная инъекция $T : C_p(X) \rightarrow L_p(Y)$. Обозначим $f_n = T(e_n)$, где функции e_n имеют дизъюнктные носители, как в лемме 1. Тогда система $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ линейно независима. По лемме 2, выберем в ней подсистему $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, а также функцию $x_0 \in C_p(Y)$, для которой $f_{n_k}(x_0) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся скаляры a_k , такие, что $a_k \cdot f_{n_k}(x_0) = 1$ для каждого k . Но тогда последовательность $(a_k e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset C_p(X)$

сходится к нулю, а её образ $(a_k f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset L_p(Y)$ при операторе T к нулю не сходится, что противоречит непрерывности отображения T . ■

Следствие 4. Если X вполне регулярно и бесконечно, то пространство $C_p(X)$ нельзя линейно гомеоморфно вложить в $L_p(Y)$ ни для какого пространства Y .

Следствие 5. Если X вполне регулярно и бесконечно, то пространство $L_p(X)$ не является линейно гомеоморфным дополняемому подпространству какого-либо пространства $C_p(Y)$.

Доказательство. Пусть, напротив, $T: L_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ – линейное гомеоморфное вложение, $P: C_p(Y) \rightarrow T(L_p(X)) \subset C_p(Y)$ – проектор. Тогда композиция $T^{-1} \circ P: C_p(Y) \rightarrow L_p(X)$ – линейная непрерывная сюръекция. Тогда, как хорошо известно, сопряжённое отображение $(T^{-1} \circ P)^*: (L_p(X))^* \rightarrow (C_p(Y))^*$ – линейная непрерывная инъекция. Но $(L_p(X))^*$ канонически изоморфно $C_p(X)$, а $(C_p(Y))^*$ канонически изоморфно $L_p(Y)$. Получили противоречие с теоремой 3. ■

Хорошо известно, что пространство $L_p(X)$ естественным образом вкладывается линейно гомеоморфно в пространство $C_p C_p(X)$ (см. [1]).

Следствие 6. Для бесконечного вполне регулярного пространства X пространство $L_p(X)$ не дополняемо в пространстве $C_p C_p(X)$.

Для любого X определим следующий естественный линейный непрерывный оператор: $S: L_p(C_p(X)) \rightarrow C_p(X)$ по формуле

$$S(a_1 \cdot y_1 + \dots + a_n \cdot y_n)(x) = a_1 \cdot y_1(x) + \dots + a_n \cdot y_n(x).$$

«Дуальной формулировкой» следствия 6 является следующее утверждение.

Следствие 7. Не существует линейного непрерывного сечения для оператора S , то есть такого оператора $T: C_p(X) \rightarrow L_p(C_p(X))$, что $S \circ T$ является тождественным оператором на $C_p(X)$.

Доказательство. Если $S \circ T$ является тождественным оператором на $C_p(X)$, то оператор T – линейная непрерывная инъекция $C_p(X)$ в $L_p(Y)$ при $Y = C_p(X)$. Это противоречит теореме 3. ■

Для случая банаховых пространств хорошо известна следующая нерешенная проблема: верно ли, что всякое дополняемое подпространство пространства вида $C(K)$ линейно гомеоморфно некоторому пространству $C(L)$? Для случая C_p -теории можно сформулировать аналогичную проблему.

Проблема 1. Верно ли, что дополняемое подпространство в $C_p(X)$ изоморфно некоторому $C_p(Y)$?

Поскольку пространства $C_p(X)$ и $L_p(X)$ взаимно сопряжены друг с другом, то эта проблема является эквивалентной следующей проблеме.

Проблема 2. Верно ли, что дополняемое подпространство в $L_p(X)$ изоморфно некоторому $L_p(Y)$?

Наконец, рассмотрим вопрос об «ортогональности» класса бесконечномерных нормированных пространств и пространств вида $C_p(X)$ или $L_p(X)$.

Ясно, что для бесконечного вполне регулярного пространства X , пространства $C_p(X)$ или $L_p(X)$ не могут быть линейно гомеоморфно вложены ни в какое нормированное пространство. В самом деле, любая окрестность нуля в $C_p(X)$ или $L_p(X)$ содержит нетривиальное одномерное векторное подпространство. С другой стороны, в нормированном пространстве шары не содержат таких подпространств.

Теорема 8. Бесконечномерное нормированное пространство E нельзя линейно гомеоморфно вложить ни в какое $C_p(X)$ или $L_p(X)$.

Доказательство. Любая окрестность нуля в $C_p(X)$ или $L_p(X)$ содержит векторное подпространство конечной коразмерности. Следовательно, E тоже должно иметь такие окрестности, что невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.

Статья поступила 25.12.2011 г.

Gul'ko S.P., Lazarev V.R., Khmyleva T.E. ON MUTUAL "ORTHOGONALITY" OF CLASSES OF THE SPACES $C_p(X)$ AND $L_p(Y)$. In this article, it is proved that none of the infinite-dimensional spaces $C_p(X)$, $L_p(Y)$, or a normed space E can be embedded as a complementable subspace into another by a linear homeomorphism.

Keywords: space of continuous functions, linear homeomorphic embedding, complementable subspace.

GULKO Sergey Porfiryevich (Tomsk State University)
E-mail: gulko@math.tsu.ru

LAZAREV Vadim Remirovich (Tomsk State University)
E-mail: lazarev@math.tsu.ru

KHMYLEVA Tatyana Evgenievna (Tomsk State University)