Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Кемеровский научный центр СО РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2011)

Материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием

25–26 ноября 2011 г.

Часть 2

Издательство Томского университета

2011

УДК 519

ББК 22.17

И74

И74 Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): Материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (25–26 ноября 2011 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч. 2. – 206 с.

ISBN 978-5-7511-2034-4

В часть 2 вошли материалы секций «Экономико-математическое моделирование», «Математические методы и модели в науке и технике» и «Вычислительные технологии и программирование».

УДК 519

ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-06076-г)

ISBN 978-5-7511-2034-4

и

$$P = 73{,}16 \cdot 0{,}500403 - 74{,}78 \cdot e^{-0{,}0645 \cdot 0{,}25} \cdot 0{,}4572 = 2{,}97\,.$$

Таким образом, с целью страхования фондового портфеля можно покупать не сами акции, а опционы на них. Если наши ожидания оправдываются, то мы реализуем наше право на покупку акций, если же нет, то наши потери ограничатся суммой уплаченной премии.

Литература

1. *Шведов А.С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М.: ГУ ВШЭ, 1999. 144 с.

2. *Лякин А.Н., Лапинскас А.А.* Рынок ценных бумаг. СПб.: Поиск, 2001. 266 с.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СТРАТЕГИЕЙ ПОСТАВКИ ТОВАРА В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧНОСТИ СПРОСА

В.В. Поддубный, О.В. Романович

Томский государственный университет

1. Постановка задачи

В работе [1] инерционный рынок одного товара рассматривался как самоуправляемая динамическая система при сбалансированной стратегии поставки товара на рынок. В работе [2] получено точное решение задачи оптимального управления поставкой товара на рынок одного товара при детерминированном спросе на товар в условиях запаздывания поставки. Было показано, что оптимальная стратегия поставки товара на рынок может быть реализована с помощью детерминированной математической модели, позволяющей точно прогнозировать состояние рынка вперёд на время запаздывания. В настоящей работе исследуется влияние флуктуаций покупательского спроса на переменные, описывающие функционирование рынка в условиях запаздывания поставки товара на рынок при той же детерминированной (но уже не оптимальной) стратегии поставки товара.

Рассмотрим модель рынка одного товара, функционирующую в дискретном времени $t \in N = \{0,1,2,...\}$. Пусть $P(t)$ – цена товара в момент времени t; $Q^O(t)$ – остаток товара на рынке; $Q^Z(t-\tau)$ – объём товара, заказываемого в момент времени $t-\tau$ для поставки на рынок в момент t (стратегия поставок). Пусть в момент t дискретного времени спрос $Q^D(t)$ на товар при цене $P(t)$ имеет вид простейшей линейной зависимости с аддитивным членом $\xi(t)$, характеризующим случайные флуктуации спроса:

$$Q^D(t) = Q_m - aP(t) + \xi(t), \tag{1}$$

где $Q_m > 0$ и $a > 0$ – заданные константы.

В простейшем случае $\xi(t)$ – стационарный некоррелированный случайный процесс с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ. Распределение флуктуаций спроса $\xi(t)$ должно быть усечённым, чтобы обеспечивалась неотрицательность спроса. Неотрицательность спроса обеспечивает также нелинейная рестриктивная зависимость спроса от цены при любом значении σ путём усечения спроса:

$$Q^D(t)=\begin{cases} Q_m - aP(t)+\xi(t), & \text{если} \quad Q_m - aP(t)+\xi(t)>0, \\ 0, & \text{если} \quad Q_m - aP(t)+\xi(t)\le 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Ограничимся простейшим случаем, когда ξ(t) – стационарный некоррелированный нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и малым стандартным отклонением ($\sigma << Q_m$), обеспечивающим пренебрежимо малую вероятность отрицательных значений спроса.

Пусть $Q(t)$ – объём товара, предлагаемого к продаже в момент времени t. Представим $Q(t)$ в виде суммы остатка товара в объеме $Q^O(t)$ от продаж на предыдущем интервале дискретного времени (перешедшего на рынок в момент t) и товара в объеме $Q^Z(t-\tau)$, заказанного продавцом в момент времени $t-\tau$ (с учётом запаздывания поставки) для поставки его на рынок к моменту времени t:

$$Q(t)=Q^O(t)+Q^Z(t-\tau).$$

Объём продаж $Q^S(t)$ на интервале t дискретного времени равен, очевидно,

$$Q^S(t)=\min\left(Q^D(t), Q^O(t)+Q^Z(t-\tau)\right). \qquad (3)$$

Остатки товара удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Q^O(t+1)=Q^O(t)+Q^Z(t-\tau)-Q^S(t). \qquad (4)$$

Естественно считать целевой функцией $J(t)$ рынка в каждый момент (на каждом дискретном интервале) времени t прибыль продавца, равную разности между выручкой от продажи товара и затратами на его приобретение и хранение. Если P_1 – цена закупки товара (на оптовом рынке или у производителя), P_2 – цена хранения единицы товара, не проданного на предыдущем интервале дискретного времени, то прибыль продавца в момент времени t составит величину

$$J(t)=Q^S(t)P(t)-Q^Z(t)P_1-Q^O(t)P_2-\frac{R}{2}\left(P(t)-P(t-1)\right)^2. \qquad (5)$$

Последнее слагаемое (с коэффициентом $R > 0$) выражает «штрафные санкции» за изменение цены товара и определяет инерционность рынка – за резкое повышение цены могут последовать санкции законодательного характера, за резкое снижение цены – «санкции» конкурентов, выражающиеся в нанесении ущерба продавцу в размере, эквивалентном этой штрафной функции.

Возникают два вопроса:

1) какое значение примет цена товара $P(t)$ в момент времени t, если на предыдущем шаге $t-1$ она равнялась $P(t-1)$, и

2) какую величину $Q^Z(t-\tau)$ дополнительной поставки товара на рынок должен произвести продавец, чтобы прибыль продавца при заданной линии спроса на t-м интервале дискретного времени была максимальной:

$$J(t)\Rightarrow \sup_{P(t),\,Q^Z(t-\tau)}. \qquad (6)$$

При решении этой задачи должны выполняться ограничения на величину возможной цены товара $P(t)$:

$$P_1 < P_{\min} < P(t) < P_{\max}(t) = (Q_m + \xi(t)) / a$$

и на величину дополнительного заказа товара $Q^Z(t-\tau) \geq 0$.

2. Стохастическая и детерминированная модели. Оптимальная цена товара и «оптимальная» поставка товара

Поставленная задача (6) в отсутствие флуктуаций спроса $\xi(t)$ была решена в работе [2]. При наличии флуктуаций спроса $\xi(t)$ схема решения остаётся той же: сначала находится оптимальная (обеспечивающая максимум прибыли продавца (5)) цена $P(t)$ товара при фиксированном значении объёма предложения $Q(t)$ (следовательно, при фиксированном объёме заказа $Q^Z(t-\tau)$):

$$J(t) \Rightarrow \max_{P(t)|Q(t)},$$

а затем – оптимальное значение объёма товара на рынке $Q(t)$ и заказа $Q^Z(t-\tau)$ товара в зависимости от его остатка $Q^O(t)$ на рынке.

Здесь, однако, имеется важное различие между стохастической и детерминированной задачами оптимизации. В детерминированной задаче в каждый момент дискретного времени t на рынок поступает оптимальный объём $Q^Z(t-\tau)$ товара, заказанного за τ шагов до этого момента времени в условиях полной предсказуемости поведения рынка в течение этих шагов. В стохастической задаче рынок идёт по стохастической траектории, и предсказать точно будущий спрос на товар и найти точное значение оптимального объёма $Q^Z(t-\tau)$ поставки товара на рынок в момент $t-\tau$ невозможно (будущие значения флуктуаций спроса $\xi(t)$ ещё не известны). Поэтому решать стохастическую задачу приходится с использованием двух моделей. Одна модель (стохастическая) является имитационной. Она моделирует стохастическую динамику рынка при известном на каждом шаге t объёме поставки $Q^Z(t-\tau)$. Другая модель (детерминированная) запускается на каждом текущем шаге t на τ шагов вперёд с начальными условиями, выражающими состояние стохастической модели в этот момент времени, для предсказания оптимальной детерминированной поставки товара $Q^Z(t-\tau)$, которая и принимается к реализации в имитационной модели (или на настоящем рынке).

При решении как стохастической, так и детерминированной задачи (с учётом её рестриктивности в силу соотношения (3)) следует выделить области, соответствующие дефициту товара на рынке (область 1, в которой $Q(t) < Q^D(t)$), затовариванию рынка (область 2, в которой $Q(t) > Q^D(t)$) и балансу спроса и предложения (область 3, область динамического равновесия, в которой $Q(t) = Q^D(t)$). Рассмотрим соотношения для стохастической модели (в детерминированной модели во всех формулах следует положить $\xi(t) = 0$).

1) **В области товарного дефицита** $Q(t) < Q^D(t)$, и в соответствии с соотношением (3) имеем $Q^S(t) = Q(t)$, так что

$$J(t)=Q(t)P(t)-Q(t)P_1+Q^O(t)(P_1-P_2)-\frac{R}{2}(P(t)-P(t-1))^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)}. \quad (7)$$

Это вогнутая квадратичная функция переменной $P(t)$, достигающая условного максимума при

$$P(t)=P(t-1)+\frac{Q(t)}{R}=P^{(1)}(t). \quad (8)$$

Как видим, $P^{(1)}(t)$ растет с ростом $Q(t)$ по линейному закону. Выражение (8) справедливо не при любом $Q(t)$, а лишь при $Q(t)$, удовлетворяющем условию $Q(t) < Q^D(t)$ принадлежности к области 1. Это условие с учетом (1) и (8) имеет вид

$$Q(t)<Q_m+\xi(t)-aP^{(1)}(t)=Q_m+\xi(t)-aP(t-1)-\frac{a}{R}Q(t),$$

откуда

$$Q(t)<\frac{R(Q_m+\xi(t)-aP(t-1))}{a+R}=Q^{(1)}(t). \quad (9)$$

Таким образом, в области 1 $P(t)$ линейно растёт с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=0}=P(t-1)$$

до значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}=\frac{Q_m+\xi(t)+RP(t-1)}{a+R}=P^{(1)}_{\max}(t),$$

причем условие принадлежности $Q(t)$ к области 1 выражается неравенством (9), то есть $0 < Q(t) < Q^{(1)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(1)}(t)$ в выражение (7) для $J(t)$ имеем:

$$J(t)=\frac{Q(t)^2}{2R}+(P(t-1)-P_1)Q(t)+Q^O(t)(P_1-P_2)=J^{(1)}(t).$$

Дальнейшая оптимизация $J^{(1)}(t)$ по $Q(t)$ производится только в детерминированной модели, не содержащей в течение τ предыдущих шагов флуктуации спроса $\xi(t)$, и нужна для определения оптимального объёма поставки $Q^Z(t-\tau)$.

Как видим, $J^{(1)}(t)$ монотонно растет с ростом $Q(t)$ по линейно-квадратичному закону, достигая максимального значения на границе области при $Q(t) = Q^{(1)}(t)$:

$$J^{(1)}_{\max}(t)=J^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}.$$

Если остаток товара $Q^O(t)$ от продаж предыдущего интервала дискретного времени не превышает величину $Q^{(1)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^Z(t-\tau) = Q^{(1)}(t) - Q^O(t)$ (в частности, $Q^Z(t-\tau) = 0$ при $Q^O(t) = Q^{(1)}(t)$) обеспечивает максимум прибыли. Иначе, при $Q^O(t) > Q^{(1)}(t)$, следует искать решение задачи оптимизации прибыли в областях 2 или 3.

2) **В области затоваривания рынка** $Q(t) > Q^D(t)$, и в соответствии с выражением (3) имеем $Q^S(t) = Q^D(t)$, так что с учетом (1):

$$J(t)=(Q_m+\xi(t)-aP(t))P(t)-Q(t)P_1+Q^O(t)(P_1-P_2)-$$

$$-\frac{R}{2}\left(P(t)-P(t-1)\right)^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)}. \qquad (10)$$

Это вогнутая квадратичная функция переменной $P(t)$ с точкой максимума

$$P(t)=\frac{Q_m+\xi(t)+RP(t-1)}{2a+R}=P^{(2)}(t). \qquad (11)$$

Как видим, $P^{(2)}(t)$ не зависит от $Q(t)$ (остаётся постоянной при любом $Q(t)$ в этой области). Выражение (11) справедливо лишь при условии, что $Q(t) > Q^D(t)$, то есть при условии

$$Q(t)>Q_m+\xi(t)-aP^{(2)}(t)=\frac{(a+R)(Q_m+\xi(t))-aRP(t-1)}{2a+R},$$

откуда

$$Q(t)>\frac{R(Q_m+\xi(t)-aP(t-1))+aQ_m+\xi(t)}{2a+R}=Q^{(2)}(t). \qquad (12)$$

Последнее неравенство определяет условие принадлежности $Q(t)$ к области 2. Нетрудно показать, что $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$. В области 2 $Q(t) > Q^{(2)}(t)$. После подстановки в $J(t)$ $P(t) = P^{(2)}(t)$, не зависящего от $Q(t)$, имеем

$$J(t)=\left(Q_m+\xi(t)-aP^{(2)}(t)\right)P^{(2)}(t)-Q(t)P_1+Q^o(t)(P_1-P_2)-$$
$$-\frac{R}{2}\left(P^{(2)}(t)-P(t-1)\right)^2=J^{(2)}(t).$$

Дальнейшая оптимизация $J^{(2)}(t)$ по $Q(t)$ производится только в детерминированной модели, не содержащей в течение τ предыдущих шагов флуктуации спроса $\xi(t)$, и нужна для определения оптимального объёма поставки $Q^Z(t-\tau)$.

Как видим, $J^{(2)}(t)$ монотонно убывает с ростом $Q(t)$ по линейному закону, так что достигает в этой области наибольшего значения при $Q(t) = Q^{(2)}(t)$:

$$J^{(2)}_{max}(t)=J^{(2)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)}.$$

Если $Q^O(t) < Q^{(2)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^Z(t-\tau) = Q^{(2)}(t) - Q^O(t)$ обеспечивают получение этого максимума прибыли. Если же $Q^O(t) > Q^{(2)}(t)$, то $Q^Z(t-\tau) = 0$, и достигается лишь значение прибыли $J^{(2)}(t)\big|_{Q(t)=Q^O(t)}< J^{(2)}_{max}(t)$.

3) **В области баланса спроса и предложения** (то есть в области **динамического равновесия** рынка) $Q(t) = Q^D(t)$, и в соответствии с выражением (3) имеем, как и в области 2, объём продаж, равный спросу, то есть $Q^S(t) = Q^D(t)$, и прибыль $J(t)$ в виде (10). Но $Q(t) = Q_m + \xi(t) - aP(t)$, откуда

$$P(t)=\frac{Q_m+\xi(t)-Q(t)}{a}=P^{(3)}(t). \qquad (13)$$

Границами области 3 по $Q(t)$ являются точки $Q^{(1)}(t)$ и $Q^{(2)}(t)$:

$$Q^{(1)}(t)\le Q(t)\le Q^{(2)}(t).$$

Как видим из (13), в этой области $P^{(3)}(t)$ линейно убывает с ростом $Q(t)$ от

$$P^{(3)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}=\frac{Q_m+RP(t-1)}{a+R}=P^{(1)}_{max}(t)$$

до

$$P^{(3)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{Q_m + \xi(t) + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t).$$

После подстановки $P(t) = P^{(3)}(t)$ в $J(t)$ для этой области, имеем:

$$J(t) = Q(t)\frac{Q_m + \xi(t) - Q(t)}{a} - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) -$$

$$-\frac{R}{2}\left(\frac{Q_m + \xi(t) - Q(t)}{a} - P(t-1)\right)^2 = J^{(3)}(t).$$

Дальнейшая оптимизация $J^{(3)}(t)$ по $Q(t)$ производится только в детерминированной модели, не содержащей в течение τ предыдущих шагов флуктуации спроса $\xi(t)$, и нужна для определения оптимального объёма поставки $Q^Z(t-\tau)$. $J^{(3)}(t)$ – вогнутая линейно-квадратичная функция переменной $Q(t)$. В точке

$$Q(t) = \frac{R(Q_m + \xi(t) - aP(t-1)) + a(Q_m + \xi(t) - aP_1)}{2a+R} = Q^{(3)}(t)$$

прибыль $J^{(3)}(t)$ достигает максимального значения. Нетрудно показать [2], что $Q^{(1)}(t) < Q^{(3)}(t) < Q^{(2)}(t)$, то есть точка максимума $Q^{(3)}(t)$ лежит в области 3. Максимальное значение прибыли в области 3 (при $Q^O(t) < Q^{(3)}(t)$) равно:

$$J^{(3)}_{max}(t) = J^{(3)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}.$$

Это значение является и глобально максимальным, потенциально возможным при $Q^O(t) \le Q^{(3)}(t)$. Если же $Q^{(3)}(t) < Q^O(t) \le Q^{(2)}(t)$, то глобально максимальное значение прибыли не может быть достигнуто, и достигается только условно-максимальное значение (при фиксированном $Q^O(t)$) внутри области 3, лежащее между $J^{(3)}_{\max}(t)$ и $J^{(2)}(t)$.

3. Пример моделирования стохастической динамики рынка

В качестве примера приведём результат моделирования ситуации, когда сначала рынок находится в состоянии равновесия, а в некоторый момент времени $t = 0$ выводится из равновесия (цена на товар резко увеличивается). Расчёты проводились при $R = 50$, $Q_m = 4$, $a = 0.4$, $T = 300$, $P_0 = 7$, $P_1 = 3$, $P_2 = 0.1$, $P_{\min} = P_1 + P_2$, $P_{\max} = Q_m / a$, $P^* = 6.5$, $Q_0 = 0$, $\tau = 10$, $\sigma = 0,01$. Стохастическая динамика цены и заказа изображена на рис. 1–2.

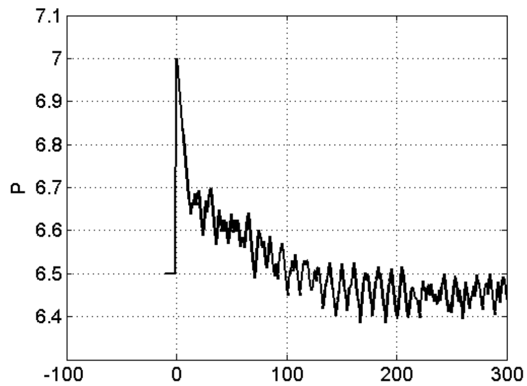

Рис. 1. Динамика цены товара

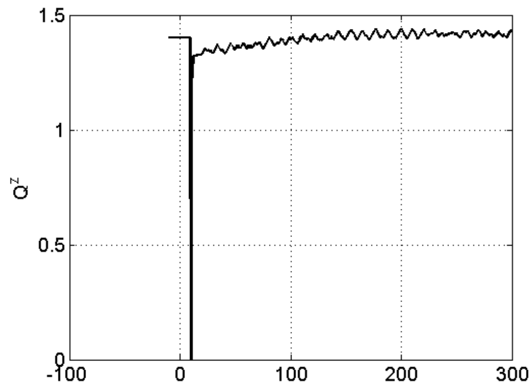

Рис. 2. Стратегия заказа товара

Литература

1. *Поддубный В.В., Романович О.В.* Рынок как самоуправляемая инерционная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставок товара // Вестник ТГУ. УВТИ. 2009. № 4 (9). С. 5–16.

2. *Поддубный В.В., Романович О.В.* Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система // Труды X Международной ФАМЭТ 2011 конференции / Под ред. О.Ю. Воробьева. Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2011. С. 318–323.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ И НЕИЗВЕСТНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

М. Ю. Приступа, В. И. Смагин

Томский государственный университет

Для решения задачи управления с запаздыванием по управлению используется метод, который позволяет осуществить синтез управлений без расширения пространства состояний [1]. В настоящей работе рассмотрен объект, в который включено аддитивное неизвестное возмущение с постоянной составляющей:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_{t-h} + Ir + w_t,\ x_{t=0} = x_0, \tag{1}$$

$$\psi_t = Hx_t + v_t, \tag{2}$$

$$y_t = Gx_t, \tag{3}$$

где $x_t \in R^n$ – состояние объекта, $u_t \in R^m$ – управление, $y_t \in R^p$ – выход, $\psi_t \in R^l$ – наблюдения, $r \in R^s$ – неизвестная постоянная составляющая, h – величина запаздывания, A, B, I, H, D – матрицы соответствующих размерностей.

Предполагается, что случайные возмущения w_t и шумы измерения v_t не коррелированы между собой и подчиняются гауссовскому распределению с нулевым средним и с соответствующими ковариациями $M\{w_t w_k^{\mathrm{T}}\} = W\delta_{t,k}$, $M\{v_t v_k^{\mathrm{T}}\} = V\delta_{t,k}$ (здесь $\delta_{t,k}$ – символ Кронекера).

Считается, что объект функционирует в условиях ограничений на векторы состояния и управления, заданных в виде

$$a_1 \le S_1 x_t \le a_2,\ \varphi_1(x_t) \le S_2 u_t \le \varphi_2(x_t), \tag{4}$$

где S_1 и S_2 – структурные матрицы, состоящие из нулей и единиц, определяющие компоненты векторов x_t и u_t, на которые накладываются ограничения; a_1, a_2, $\varphi_1(x_t)$ и $\varphi_2(x_t)$ – заданные постоянные векторы и вектор-функции.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям ψ_t определить стратегию управления, при которой вектор выхода системы y_t будет близок к заданному вектору $\bar{y}_t$ с учетом ограничений (4).

Оценки неизвестного вектора r определяются с помощью фильтра Калмана.