На правах рукописи

Семенова Инна Анатольевна

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ RQ-СИСТЕМ И СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2012

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный университет» на кафедре теории вероятностей и математической статистики

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты: Змеев Олег Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой программной инженерии ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Ивницкий Виктор Аронович – доктор технических наук, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Автономные системы управления» ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Защита состоится 17 мая 2012 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью организации, просим направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 4 апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук, профессор — Скворцов Алексей Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Математические модели систем массового обслуживания (СМО) широко применяются при решении важных практических задач, возникающих в связи с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления, для задач экономико-математического моделирования.

В качестве математических моделей страховых компаний, кредитно-депозитных организаций, Пенсионного фонда и многих других экономических и социально-экономических систем предлагается рассматривать системы с неограниченным числом приборов. Например, количество возможных договоров между клиентами и кредитно-депозитной организацией практически неограниченно. Сроки, на которые заключаются договоры, имеют весьма широкий спектр продолжительностей, поэтому достаточно адекватно могут моделироваться некоторой случайной величиной с заданной функцией распределения их значений. Поток клиентов, обращающихся в кредитно-депозитную организацию, может быть как пуассоновским, так и коррелированным.

Для построения адекватных моделей массового обслуживания для сетевых систем, необходим учет фактора повторных заявок. Поэтому прибегают к системам с повторными вызовами – RQ-системам (Retrial Queue Systems). Наличие повторных попыток получить обслуживание является неотъемлемой чертой этих систем, игнорирование данного эффекта может привести к значительным погрешностям при принятии инженерных решений.

Первые математические результаты, касающиеся систем с повторными вызовами, были опубликованы в 40-х гг. прошлого века. В монографиях известных специалистов в области теории систем с повторными вызовами Г.И. Фалина, Дж. Темплтона, подчеркнуто, что стандартные модели очередей не в силах описать RQ-системы, так как в них отсутствует эффект повторения, и поэтому они не могут быть применены к решению многих фактически важных проблем. В одной из работ Г.И. Фалина, Дж. Темплтона проведено исследование RQ-системы M|M|1, где найдена гауссовская аппроксимация или асимптотика второго порядка. В тоже время асимптотика второго порядка в ряде случаев не позволяет достичь необходимой точности аппроксимации, поэтому возникает проблема разработки более точной теории, учитывающей асимптотики более высокого порядка порядка.

Исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ. Только в монографии Д.Р. Арталехо приведено более семисот ссылок на издания различного уровня.

Одной из трудных проблем, связанных с построением более адекватных моделей массового обслуживания для реальных систем, является учет фактора коррелированности входящих потоков заявок. Наиболее популярными являются следующие виды коррелированных входящих потоков: MAP-поток (Markovian Arrival Process) и SM-поток (Semi-Markovian).

Подробное описание MAP-потока можно найти в работах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, А.Н. Дудина, А.А. Назарова, Gomez-Corral A., Attahiru Sule Alfa, Chakravarthy S. и др.

Наиболее общей моделью ординарных потоков с непрерывной компонентой является полумарковский поток – SM-поток. СМО с таким входящим потоком интенсивно изучаются в настоящее время такими авторами как Назаров А.А., Дудин А.Н., Клименок В.И., Печинкин А.В., Чаплыгин В.В., Моисеева С.П., Cinlar E., Sengupta B., El-Gohary A. и др.

Исследователи, занимающиеся потоками, также занимались изучением СМО с неограниченным числом приборов, на вход которых поступают коррелированные потоки, применяя главным образом методы численного анализа, которые не всегда позволяют получить точные характеристики. Анализ числа занятых приборов в системах BMAP|GI|∞, COX|GI|∞, можно найти, например, в работах немецких ученых Д. Баума и Л. Броера. А.А. Боровков в одной из своих работ выполнил исследование систем с бесконечным числом каналов обслуживания, где доказываются предельные теоремы для случайных процессов. В работе А.В. Лебедева изучается бесконечнолинейная СМО с групповым числом заявок, одновременно поступающих в систему, и доказывается теорема о максимальном числе заявок в группе. В настоящее время не существует универсального метода исследования немарковских систем с неограниченным числом приборов и непуассоновским входящим потоком, что не позволяет получить точные характеристики, аналитические выражения для вероятностей состояний исследуемых систем.

Целью работы является развитие метода асимптотических семиинвариантов для анализа RQ-систем (без конфликтов) и систем с неограниченным числом приборов с коррелированными входящими потоками в условии большой задержки в ИПВ и растущего времени обслуживания, а также развитие метода просеянного потока для исследования немарковских СМО с неограниченным числом приборов, рекуррентным обслуживанием и коррелированными входящими потоками.

В рамках указанной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Модификация метода асимптотического анализа для исследования RQ-системы MAP|M|1 и ее частных случаев, в условии большой задержки заявки в источнике повторных вызовов, в виде метода асимптотических семиинвариантов с использованием характеристических функций и матричной формы записи.

2. Развитие метода просеянного потока для исследования немарковских систем с неограниченным числом обслуживающих приборов и коррелированными входящими потоками.

3. Модификация метода асимптотического анализа для исследования систем с неограниченным числом обслуживающих приборов и коррелиро-

ванными входящими потоками, в виде метода асимптотических семиинвариантов в условии растущего времени обслуживания заявки на приборе.

4. Разработка численных алгоритмов вычисления допредельного распределения вероятностей состояний RQ-систем и систем с неограниченным числом приборов.

5. Разработка комплекса проблемно-ориентированных программ расчета вероятностных характеристик RQ-систем и систем с неограниченным числом приборов.

Научная новизна:

1. Выполнена модификация метода асимптотического анализа для исследования марковских RQ-систем в виде метода асимптотических семиинвариантов в предельном условии большой задержки заявок в ИПВ. Предложенный метод определяет вид предельной характеристической функции в форме экспоненты с показателем в виде многочлена, коэффициентами которого являются асимптотические семиинварианты соответствующего порядка. Данный метод позволяет последовательно находить аппроксимации допредельного распределения вероятностей состояний системы более чем второго порядка, и отличается возможностью получения семиинвариантов произвольного порядка.

2. Выполнено развитие метода просеянного потока для исследования систем с неограниченным числом приборов, коррелированными входящими потоками широкого класса и рекуррентным обслуживанием. Данный метод позволяет проблему исследования немарковской СМО с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа просеянного нестационарного потока, что позволило выполнить ее исследование асимптотическим методом и найти явные выражения для характеристической функции распределения вероятностей.

3. Выполнена модификация метода асимптотического анализа для исследования систем с неограниченным числом приборов в виде метода асимптотических семиинвариантов в предельном условии растущего времени обслуживания заявки на приборе. Предложенный метод определяет вид предельной характеристической функции в форме экспоненты, с показателем в виде многочлена, коэффициентами которого являются асимптотические семиинварианты соответствующего порядка. Данный метод позволяет последовательно находить аппроксимации допредельного распределения вероятностей состояний системы более второго порядка, и отличается возможностью получения семиинвариантов всё более высокого порядка.

4. Впервые для марковской системы с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком разработан алгоритм последовательного нахождения допредельных моментов произвольного (более чем второго) порядка.

5. С помощью полученных методов доказано, что асимптотические семиинварианты числа занятых приборов в системе с неограниченным числом приборов и коррелированными входящими потоками определяются лишь

семиинвариантами этих потоков и определенными параметрами времени обслуживания, при этом количество семиинвариантов потока и параметров обслуживания совпадает с порядком асимптотики и аппроксимации.

6. Разработаны численные алгоритмы исследования RQ-систем и систем с неограниченным числом приборов, позволяющие находить различные вероятностно-временные характеристики рассматриваемых систем с коррелированными входящими потоками в допредельной ситуации, отличающиеся высокой точностью получаемых результатов.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования RQ-систем в предельном условии растущей задержки заявки в ИПВ.
2. Развитие метода просеянного потока для исследования систем с неограниченным числом приборов, коррелированными входящими потоками широкого класса и рекуррентным обслуживанием.
3. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования систем с неограниченным числом приборов в предельном условии растущего времени облуживания заявки на приборе.
4. Алгоритм последовательного нахождения допредельных моментов произвольного порядка для системы с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком.
5. Теоремы о том, что асимптотические семиинварианты числа занятых приборов в системе с неограниченным числом приборов и коррелированными входящими потоками определяются лишь семиинвариантами этих потоков и определенными параметрами времени обслуживания, количество которых совпадает с порядком асимптотики и аппроксимации.
6. Численные методы и комплекс проблемно-ориентированных программ нахождения вероятностно-временных характеристик рассматриваемых систем.

Методы исследования. Основная часть проведенных исследований носит теоретических характер и основана на применении аппарата теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории матриц, теории дифференциальных уравнений, метода асимптотического анализа. Для исследования RQ-систем использовались методы асимптотических семиинвариантов, методы аппроксимации, численного анализа. Для исследования систем с неограниченным числом приборов в работе применялись методы просеянного потока, методы асимптотических семиинвариантов, численные алгоритмы, имитационное моделирование, результаты которого обрабатывались методами математической статистики.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке методов исследования RQ-систем, применимых для широкого класса таких моделей, определяемых разнообразием класса входящих потоков, а также в разработке методов исследования систем с неограниченным числом обслуживающих приборов, которые позволили доказать то, что асимптотическое распределение вероятностей определяется лишь только асимптотическими семиинвариантами входящего потока и определенными параметрами времени обслуживания, что существенно упрощает исследование данных систем.

Практическая ценность. Результаты, полученные в работе, могут быть применены для анализа важных практических задач. Область приложений рассматриваемых RQ-систем лежит в оценивании производительности и проектировании компьютерных сетей, при создании космических (спутниковых) сетей связи, в которых спутник-ретранслятор исполняет роль центрального узла связи. Системы с неограниченным числом приборов являются математическими моделями страховых компаний, кредитно-депозитных организаций, Пенсионного фонда и многих других экономических и социально-экономических систем, где одной из важных характеристик является количество заключенных договоров.

Достоверность и обоснованность всех полученных в диссертации результатов подтверждается строгим математическим аппаратом исследований с использованием методов теории вероятностей, случайных процессов, теории массового обслуживания, дифференциального и интегрального исчисления.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Постановка изложенных в диссертации задач была сделана научным руководителем аспиранта, д.т.н., проф. А.А. Назаровым. Доказательство и обоснование полученных в диссертации результатов, математические выкладки, численные расчеты выполнены лично автором. В совместных публикациях научному руководителю А.А. Назарову принадлежат постановки задач и указания основных направлений исследований, а основные результаты, выкладки и численные расчеты выполнены диссертантом.

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. VIII–X Международная научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2009–2011 гг.

2. XIV–XV Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2010–2011 гг.

3. VIII Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Томск, 2010.

4. Международная научная конференция «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно–телекоммуникационных сетей». Минск, 2011 г.

5. Российская научная конференция с участием зарубежных исследователей «Моделирование систем информатики». Новосибирск, 2011 г.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Федерального агентства по образованию по проекту № 11803 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

Публикации. По результатам выполненных исследований автором опубликовано 16 печатных работ, в том числе 6 статей, из которых 4 в изданиях, рекомендованных списком ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 108 наименований. Общий объем работы составляет 168 страницы, в том числе основной текст – 153 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования, изложена его научная новизна, раскрыты теоретическое значение и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание диссертационной работы.

В первой главе проводится исследование марковских RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов в предельном условии большой задержки заявок в источнике повторных вызовов.

В параграфе 1.1 строится математическая модель марковских RQ-систем с входящим MAP-потоком (MAP|M|1), описывается процесс функционирования исследуемых RQ-систем.

Случайный процесс $\{n(t), k(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний RQ-системы MAP|M|1 определяет: состояние прибора $n(t)$, $n(t)=0$, если прибор свободен, и $n(t)=1$, если прибор занят; $k(t)$ – состояние эргодической цепи Маркова управляющей MAP-потоком $\left(k=\overline{1,N}\right)$; $i(t)$ – число заявок в ИПВ.

В параграфе 1.2 для распределения вероятностей $P\{n(t)=n, k(t)=k, i(t)=i\}=P(n,k,i)$ состояний $\{n,k,i\}$ рассматриваемой RQ-системы MAP|M|1 записывается система уравнений Колмогорова в стационарном режиме. Так как MAP-поток является общим потоком для широкого класса потоков однородных событий, в данном параграфе для RQ-систем с простейшим входящим потоком, MMPP-поток и синхронным MAP-потоком (SMAP-поток) также получены системы уравнений Колмогорова.

В параграфе 1.3 для марковского процесса $\{n(t), k(t), i(t)\}$ RQ-системы MAP|M|1 определены характеристические функции $H(n,k,u)=\sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(n,k,i)$, для которых записана система векторно-матричных уравнений

$$\sigma j \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \mathbf{A}(ju) = \mathbf{H}(u)\mathbf{B}(ju), \tag{1}$$

где векторная характеристическая функция $\mathbf{H}(u)$ имеет вид

$$\mathbf{H}(u) = \{H(0,1,u), H(1,1,u), H(0,2,u), H(1,2,u), \ldots, H(0,N,u), H(1,N,u)\},$$

а матрицы $\mathbf{A}(ju)$ и $\mathbf{B}(ju)$ блочного вида являются матрицами коэффициентов системы уравнений Колмогорова относительно характеристических функций $H(n,k,u)$.

Выполнено допредельное исследование RQ-системы с простейшим входящим потоком и найден явный вид характеристической функции $h(u)$

$$h(u) = Me^{jui(t)} = \left[1 - \rho\left(e^{ju} - 1\right)\right]\left(\frac{1-\rho}{1-\rho e^{ju}}\right)^{(\lambda+\sigma)/\sigma}, \ \rho = \lambda/\mu,$$

где λ – интенсивность входящего потока, μ – параметр времени обслуживания заявки на приборе, распределенного по экспоненциальному закону, σ – параметр времени задержки заявок в ИПВ, распределенного по экспоненциальному закону.

Дальнейшее исследование RQ-систем с входящим простейшим потоком, MMPP-потоком и SMAP-потоком показало, что уравнения для характеристических функций всех рассматриваемых RQ-систем имеют одинаковый матричный вид (1), отличающийся лишь видом матриц $\mathbf{A}(ju)$ и $\mathbf{B}(ju)$. Поэтому, предложенный унифицированный подход, позволил свести исследование рассматриваемых RQ-систем с простейшим и коррелированными входящими потоками к решению матричных уравнений одинаковой структуры. Этот результат дает возможность единообразно исследовать различные классы моделей.

В параграфе 1.4 выполнено исследование марковских моделей RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов, при $\sigma \to 0$, где $1/\sigma$ – среднее время задержки заявки в ИПВ.

Для нахождения асимптотики первого порядка вводится обозначение $\sigma = \varepsilon$ и в уравнении (1) выполняются замены: $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w,\varepsilon)$.

Теорема 1.1 *Предельное, при* $\varepsilon \to 0$, *значение* $\mathbf{F}_1(w)$ *решения* $\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)$ *уравнения* $j\dfrac{\partial \mathbf{F}_1(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{A}(j\varepsilon w) = \mathbf{F}_1(w,\varepsilon)\mathbf{B}(j\varepsilon w)$, *удовлетворяющего условию* $\mathbf{F}_1(0,\varepsilon)\mathbf{E} = \mathbf{1}$, *имеет вид* $\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R}\cdot e^{jw\kappa_1}$, *где вектор* $\mathbf{R}$ *является решением системы*

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}_0 + \kappa_1\mathbf{A}_0) = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$\mathbf{RE} = 1, \tag{3}$$

а величина κ_1 *есть решение нелинейного уравнения* $\mathbf{R}(\mathbf{B}_1 + \kappa_1\mathbf{A}_1)\mathbf{E} = 0$, *в котором вектор* $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\kappa_1)$ *зависит от* κ_1 *и является решением системы* (2)-(3).

Для нахождения асимптотики произвольного порядка, выполняются замены $\sigma = \varepsilon^{n+1}$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_{n+1}(u) = \mathbf{F}_{n+1}(w,\varepsilon)$.

Теорема 1.2 *Предельное, при* $\varepsilon \to 0$, *значение* $\mathbf{F}_{n+1}(w)$ *решения* $\mathbf{F}_{n+1}(w,\varepsilon)$ *уравнения*

$$j\varepsilon^n \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{A}(j\varepsilon w) = \mathbf{F}_{n+1}(w,\varepsilon)\left\{\mathbf{B}(j\varepsilon w) + \kappa_1 \mathbf{A}(j\varepsilon w) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(j\varepsilon w)^\nu}{\nu!}\kappa_{\nu+1}\mathbf{A}(j\varepsilon w)\right\},$$

удовлетворяющего условию $\mathbf{F}_{n+1}(0,\varepsilon)\mathbf{E} = 1$, *имеет вид*

$$\mathbf{F}_{n+1}(w) = \mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{(jw)^{n+1}}{(n+1)!}\kappa_{n+1}\right\},$$

где вектор $\mathbf{R}$ *определен в* теореме 1.1, *а величина* κ_{n+1} *определяется равенством*

$$\kappa_{n+1} = -\left\{\mathbf{g}_n(\mathbf{B}_1 + \kappa_1\mathbf{A}_1)\mathbf{E} + \tfrac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1} C_{n+1}^{\nu}\mathbf{f}_\nu\left(\mathbf{B}_{m+1-\nu} + \sum_{k=0}^{n-\nu} C_{n+1-\nu}^{k}\kappa_{k+1}\mathbf{A}_{n+1-\nu-k}\right)\mathbf{E} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{n+1}\mathbf{R}\left(\mathbf{B}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^{k}\kappa_{k+1}\mathbf{A}_{n+1-k}\right)\mathbf{E}\right\} \Big/ \left\{\mathbf{g}(\mathbf{B}_1 + \kappa_1\mathbf{A}_1)\mathbf{E} + \mathbf{R}\mathbf{A}_1\mathbf{E}\right\},$$

в котором векторы $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_n$ *определяются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений*

$$\mathbf{g}(\mathbf{B}_0 + \kappa_1\mathbf{A}_0) + \mathbf{R}\mathbf{A}_0 = 0,$$

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{B}_0 + \kappa_1\mathbf{A}_0) + \sum_{\nu=1}^{n-1} C_n^{\nu}\mathbf{f}_\nu\left(\mathbf{B}_{n-\nu} + \sum_{k=0}^{n-\nu} C_{n-\nu}^{k}\kappa_{k+1}\mathbf{A}_{n-\nu-k}\right) + \mathbf{R}\left(\mathbf{B}_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k}\kappa_{k+1}\mathbf{A}_{n-k}\right) = 0$$

и произвольными дополнительными условиями, определяющими частные решения этих систем из множества всех их решений, а векторы $\mathbf{f}_\nu$ *задаются разложениями* $\mathbf{f}_\nu = \mathbf{g}_\nu + \kappa_{\nu+1}\mathbf{g}$, $\nu = \overline{1, n-1}$.

Определение. Функцию $h_{n+1}(u) = \exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}\frac{\kappa_\nu}{\sigma}\right\}$ будем называть асимптотикой $(n+1)$-го порядка, а величину κ_{n+1}/σ – асимптотическим семиинвариантом $(n+1)$-го порядка.

В параграфе 1.5 предложено численное обращение допредельной характеристической функции $h(u)$ числа заявок в ИПВ, а также асимптотик $h_\nu(u)$ $(\nu = 1,2,3,\ldots)$, аппроксимирующих $h(u)$ для числа заявок в ИПВ, которое определяет допредельное распределение $P(i)$ и все его аппроксимации $P_\nu(i)$. А также сформулирован численный алгоритм, реализованный в главе 4, для вычисления распределения вероятностей состояний RQ-системы MAP|M|1 и ее частных случаев. Найдены расстояния Колмогорова Δ_2 и Δ_3 между допредельными распределениями и его второй и третьей аппроксимациями для различных значений параметра σ. Значения этих расстояний приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

σ	**0,1**	**0,05**	**0,01**	**0,005**
Δ_2	0,1676	0,1298	0,0672	0,0425
Δ_3	0,1449	0,1287	0,0505	0,0304

Полагая приемлемой погрешность аппроксимации равную значению 0,05 расстояния Колмогорова, можно определить область применимости $\sigma \le 0{,}005$ для асимптотики второго порядка и $\sigma \le 0{,}01$ для асимптотики третьего порядка. На рисунке 1.1 показана одна из графических реализаций полученных результатов.

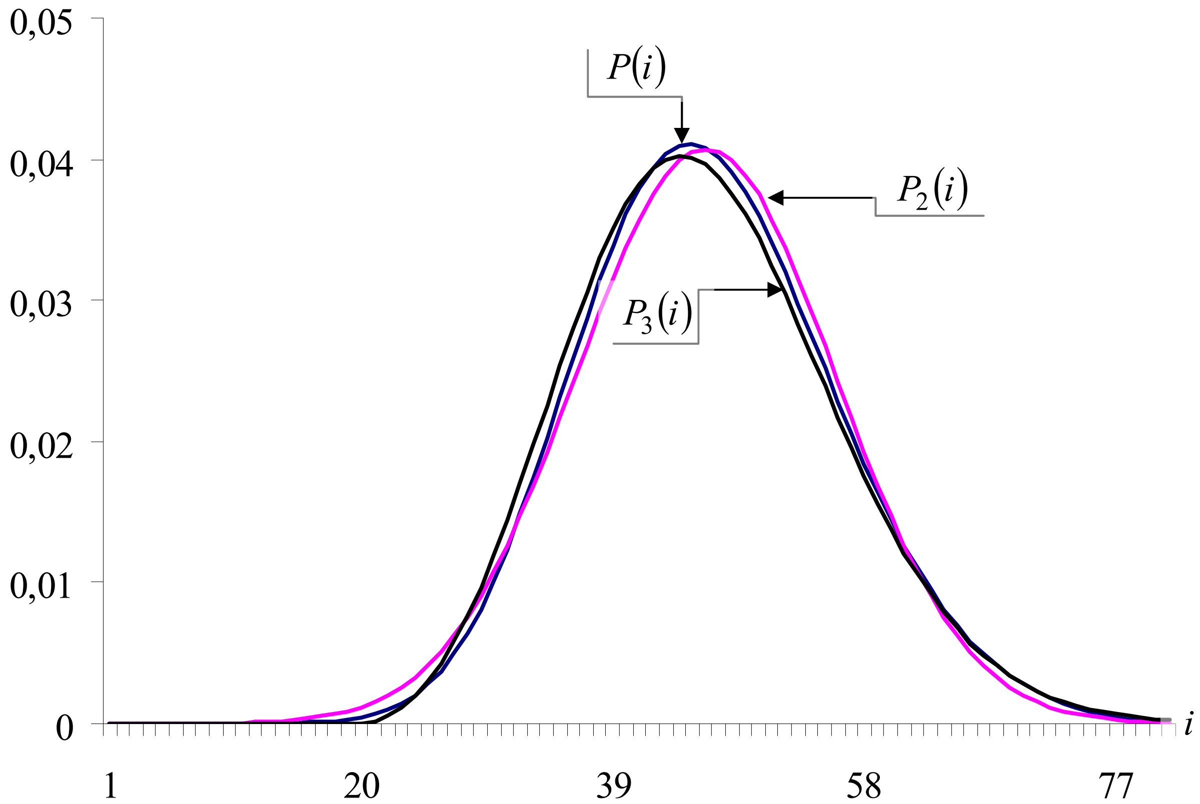

Рис. 1.1. Допредельное и асимптотическое распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\sigma = 0{,}01$

Во второй главе выполнено исследование СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и коррелированными входящими потоками при экспоненциальном обслуживании методом асимптотических семиинвариантов при условии растущего времени обслуживания заявки на приборе.

В параграфе 2.3 система с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком исследуется при помощи метода асимптотических семиинвариантов в предельном условии растущего времени обслуживания, $\mu \to 0$, где $1/\mu$ – среднее время обслуживания.

Для исследуемой системы случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем, где $i(t)$ – число приборов, занятых в системе в момент времени t, а $k(t)$ – эргодическая цепь Маркова управляющая MAP-потоком. Для этого процесса определены характеристические функции $H(k,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k,i)$, и составлена система векторно-матричных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} j\mu\left(e^{-ju} - 1\right)\dfrac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u)\left\{\mathbf{Q} + \left(e^{ju} - 1\right)\mathbf{B}\right\}, \\ \mathbf{H}(0) = \mathbf{R}, \end{cases}$$

где $\mathbf{H}(u) = \{H(1,u), H(2,u), \cdots, H(K,u)\}$, $\mathbf{R}$ – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$, определяемое системой $\begin{cases} \mathbf{RQ} = 0, \\ \mathbf{RE} = 1, \end{cases}$ здесь $\mathbf{E}$ – единичный вектор столбец, $\mathbf{Q}$ – матрица инфинитезимальных характеристик цепи Маркова $k(t)$, матрица $\mathbf{B}$ определяется элементами λ_k – интенсивности наступления событий в потоке, расположенных по главной диагонали и произведением $d_{k_1k_2} \cdot q_{k_1k_2}$ вне главной диагонали, где $d_{k_1k_2}$ – вероятности наступления событий в потоке, причем $d_{kk} = 0$.

Дальнейшее исследование данной системы проводится методом асимптотических семиинвариантов в предельном условии растущего времени обслуживания, которое позволяет определить вид предельной характеристической функции в форме экспоненты, с показателем в виде многочлена, коэффициентами которого являются асимптотические семиинварианты соответствующего порядка.

В параграфе 2.4 марковская система с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком исследуется методом моментов в допредельной ситуации, записывается формула для нахождения скалярного центрального момента произвольного порядка. Выполняется сравнительный анализ асимптотических и допредельных характеристик исследуемой системы.

В параграфе 2.6 марковская система с неограниченным числом приборов и входящим полумарковским потоком (SM-потоком), заданным полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, исследуется при помощи метода асимптотических семиинвариантов в предельном условии растущего времени обслуживания, $\mu \to 0$, где $1/\mu$ – среднее время обслуживания.

Рассматривается трёхмерный случайный процесс $\{s(t), z(t), i(t)\}$, который является марковским с непрерывным временем, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в SM-потоке, а дискретный процесс $s(t)$ определяется следующим образом $s(t) = \xi(n+1)$, если $t_n < t \le t_{n+1}$, где моменты восстановления t_n определяются равенством $t_n = \sum_{i=1}^{n} \tau(i)$, то есть процесс $s(t)$ на интервале $t_n < t \le t_{n+1}$ принимает и сохраняет значение $\xi(n+1)$. Составлена система векторно-матричных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial \mathbf{H}(z,u)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial z}\left(e^{ju}\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}\right) - \mu j\left(e^{-ju} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{H}(z,u)}{\partial u} = 0.$$

Исследование данной системы выполнено методом асимптотических семиинвариантов при выполнении предельного условия растущего времени обслуживания, $\mu \to 0$. Реализация асимптотического метода аналогична системы с входящим MAP-потоком и неограниченным числом приборов.

В параграфе 2.7 проводится численное сравнение асимптотических и допредельных результатов исследуемых СМО с неограниченным числом приборов и коррелированными входящими потоками.

В **третьей главе** выполнено исследование немарковских СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и коррелированными входящими потоками методом просеянного потока и методом асимптотических семиинвариантов при условии растущего времени обслуживания заявок на приборе.

Метод просеянного потока позволяет проблему исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа просеянного нестационарного потока.

Для реализации метода просеянного потока определяется вероятность $S(t)$, которая имеет смысл вероятности того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < t_1$, в момент времени t_1 будет находиться в системе, занимая для своего обслуживания один из приборов системы и формировать событие просеянного потока. Зависимость S от t определяется функцией распределения вероятностей времени обслуживания $S(t) = 1 - B(t_1 - t)$. Не попавшие в просеянный поток заявки, завершат обслуживание и покинут систему до момента t_1.

В некоторый конечный момент времени t_1 число $n(t)$ событий, наступивших в просеянном потоке равно числу занятых приборов в рассматриваемой системе массового обслуживания, то есть $i(t_1) = n(t_1)$.

В параграфе 3.3 для просеянного потока системы с входящим MAP-потоком и рекуррентным обслуживанием (MAP|GI|∞) введена дополнительная переменная $k(t)$ и рассмотрен двумерный процесс $\{k(t), n(t)\}$. Составлена система векторно-матричных дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{Q} + S(t)\left(e^{ju} - 1\right)\mathbf{B}\right\}.$$

В параграфе 3.4 выполнено исследование данной системы методом асимптотических семиинвариантов в условии растущего времени обслуживания, $b \to \infty$, где $b = \int\limits_0^\infty (1 - B(x))\, dx$ – среднее значение времени обслуживания. Получен вид предельной характеристической функции в форме экспоненты, с показателем в виде многочлена, коэффициентами которого являются асимптотические семиинварианты соответствующего порядка.

Асимптотика первого порядка аналогично закону больших чисел определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов и определяется равенством $\kappa_1 = \mathbf{RBE}$.

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении

$$\frac{\partial \mathbf{H}_2(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}_2(u,t)\{\mathbf{Q} + S(t)[(e^{ju} - 1)\mathbf{B} - ju\kappa_1\mathbf{I}]\}$$

выполняются замены $\varepsilon^2 = 1/b$, $t^2\varepsilon = \tau$, $\varepsilon^2 t_0 = \tau_0$, $S(t) = S_1(\tau)$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_2(u,t) = \mathbf{F}_2(w,\tau,\varepsilon)$, и доказываются следующие утверждения:

Теорема 3.1 *Предельное, при* $\varepsilon \to 0$, *значение* $\mathbf{F}_2(w,\tau)$ *решения* $\mathbf{F}_2(w,\tau,\varepsilon)$ *уравнения*

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}_2(w,\tau,\varepsilon)\{\mathbf{Q} + S_1(\tau)[(e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{B} - j\varepsilon w\kappa_1\mathbf{I}]\},$$ *имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(w,\tau) = \mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + 2\kappa_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(z)dz\right]\right\},$$ *где величина* κ_2 *определяется равенством* $\kappa_2 = \mathbf{f}_2\mathbf{BE}$, *а вектор* $\mathbf{f}_2$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{f}_2\mathbf{E} = 0$ *и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений* $\mathbf{f}_2\mathbf{Q} + \mathbf{R}(\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}) = 0$.

Для нахождения асимптотики третьего порядка выполняются замены

$$\varepsilon^3 = 1/b,\ t^3\varepsilon = \tau,\ \varepsilon^3 t_0 = \tau_0,\ S(t) = S_1(\tau),\ u = \varepsilon w,\ \mathbf{H}_3(u,t) = \mathbf{F}_3(w,\tau,\varepsilon).$$

Теорема 3.2 *Предельное, при* $\varepsilon \to 0$, *значение* $\mathbf{F}_3(w,\tau)$ *решения* $\mathbf{F}_3(w,\tau,\varepsilon)$ *уравнения*

$$\varepsilon^3 \frac{\partial \mathbf{F}_3(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} =$$

$$= \mathbf{F}_3(w,\tau,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q} + S_1(\tau)\left[(e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{B} - \kappa_1\left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\mathbf{I}\right] - (j\varepsilon w)^2 S_1^2(\tau)\kappa_2\mathbf{I}\right\}$$

имеет вид

$$\mathbf{F}_3(w,\tau) = \mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jw)^3}{6}\left[\kappa_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + 6\kappa_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(z)dz + 6\kappa_3\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_1^3(z)dz\right]\right\},$$

где величина κ_3 *определяется равенством* $\kappa_3 = \mathbf{f}_3\mathbf{BE}$, *а вектор* $\mathbf{f}_3$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{f}_3\mathbf{E} = 0$ *и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений* $\mathbf{f}_3\mathbf{Q} + \mathbf{f}_2(\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}) - \kappa_2\mathbf{R} = 0$.

Определение. Функцию

$$h_3(u) = \exp\left\{ ju\kappa_1\beta_1 + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1\beta_1 + 2\kappa_2\beta_2\right] + \frac{(ju)^3}{6}\left[\kappa_1\beta_1 + 6\kappa_2\beta_2 + 6\kappa_3\beta_3\right] \right\}$$

будем называть асимптотикой третьего порядка, а величину $\left[\kappa_1\beta_1 + 6\kappa_2\beta_2 + 6\kappa_3\beta_3\right]$ – асимптотическим семиинвариантом третьего порядка, здесь $\beta_\nu = \int\limits_0^\infty (1 - B(x))^\nu dx$ – среднее значение минимума из ν времен обслуживания заявок, $\nu = 1,2,3$.

В **параграфе 3.5** для просеянного потока системы с полумарковским входящим потоком и рекуррентным обслуживанием (SM|GI|∞) были введены дополнительные переменные $s(t)$, $z(t)$ и рассмотрен трехмерный процесс $\{s(t), n(t), z(t)\}$, который является марковским процессом. Для этого процесса определены характеристические функции $H(s,z,u,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(s,z,n,t)$, и составлена система векторно-матричных дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial \mathbf{H}(z,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(z,u,t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0,u,t)}{\partial z}\left\{\mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + \left(e^{ju} - 1\right) S(t)\mathbf{A}(z)\right\}.$$

Исследование данной системы выполнено методом асимптотических семиинвариантов при выполнении предельного условия растущего времени обслуживания, $b \to \infty$. Реализация асимптотического метода аналогична системы с входящим MAP-потоком.

В **параграфе 3.7** проводится сравнение асимптотических семиинвариантов входящего потока и системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Доказаны следующие утверждения

Для системы MAP|GI|∞ (SM|GI|∞) *асимптотическое (в условии растущего времени обслуживания) распределение вероятностей ее состояний определяется лишь только асимптотическими семиинвариантами входящего MAP-потока (SM-потока) и параметрами* β_ν *времени обслуживания.*

На основании проведенных исследований получен важный практический результат о том, что для асимптотического исследования систем с неограниченным числом обслуживающих приборов и коррелированными входящими потоками достаточно знать асимптотические семиинварианты этих потоков и определенные параметры времени обслуживания

$$\mathrm{K}_1 = S_1\beta_1,$$

$$\mathrm{K}_2 = S_1\beta_1 + (S_2 - S_1)\beta_2,$$

$$\mathrm{K}_3 = S_1\beta_1 + 3(S_2 - S_1)\beta_2 + (S_3 - 3S_2 + 2S_1)\beta_3,$$

здесь K_ν – асимптотические семиинварианты системы, а S_ν – асимптотические семиинварианты потока.

В **параграфе 3.8** проводится численное сравнение асимптотических и допредельных результатов исследуемых СМО с неограниченным числом приборов, коррелированными входящими потоками и детерминированным временем обслуживания. Делается вывод о том, что применение метода асимптотического анализа к исследованию данных систем целесообразно при $b \geq 50$, применяя асимптотическую аппроксимацию второго порядка, и уже при $b \geq 10$ для асимптотики третьего порядка.

В **четвертой главе** были предложены численные алгоритмы анализа RQ-систем и систем с неограниченным числом приборов с коррелированными входящими потоками, показана область применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации исследуемых моделей массового обслуживания. А также проведен анализ результатов асимптотических алгоритмов и имитационного моделирования систем с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием.

В **параграфе 4.4** определяется область применимости асимптотических методов исследуемых систем с неограниченным числом приборов в допредельной ситуации. Находится расстояние Колмогорова

$$\Delta_n = \max_{0 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=0}^{m} P_n(i) - \sum_{i=0}^{m} P(i) \right|, \ (n = 2,3),$$

где $P_n(i)$ – функция распределения вероятностей, полученная с помощью асимптотического анализа, а $P(i)$ – эмпирическая функция распределения вероятностей, полученная с помощью имитационного моделирования.

Например, заданы значения параметров: b – средняя продолжительность обслуживания заявок, которая в данном примере распределена равномерно,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

для различных значений b значения Δ_n составили (табл. 4.1).

Таблица 4.1

N \ b	**50**	**100**	**150**	**200**
Δ_2	0,999	0,079	0,046	0,009
Δ_3	0,041	0,038	0,023	0,007

Полагая приемлемой погрешность аппроксимации равную значению 0,04 расстояния Колмогорова, можно сделать вывод о том, что применение метода асимптотического анализа к исследованию систем с неограниченным числом обслуживающих приборов целесообразно при $b \geq 150$, применяя асимптотическую аппроксимацию второго порядка, и уже при $b \geq 50$ для асимптотики третьего порядка. На рисунке 4.1 показана одна из графических реализаций полученных результатов.

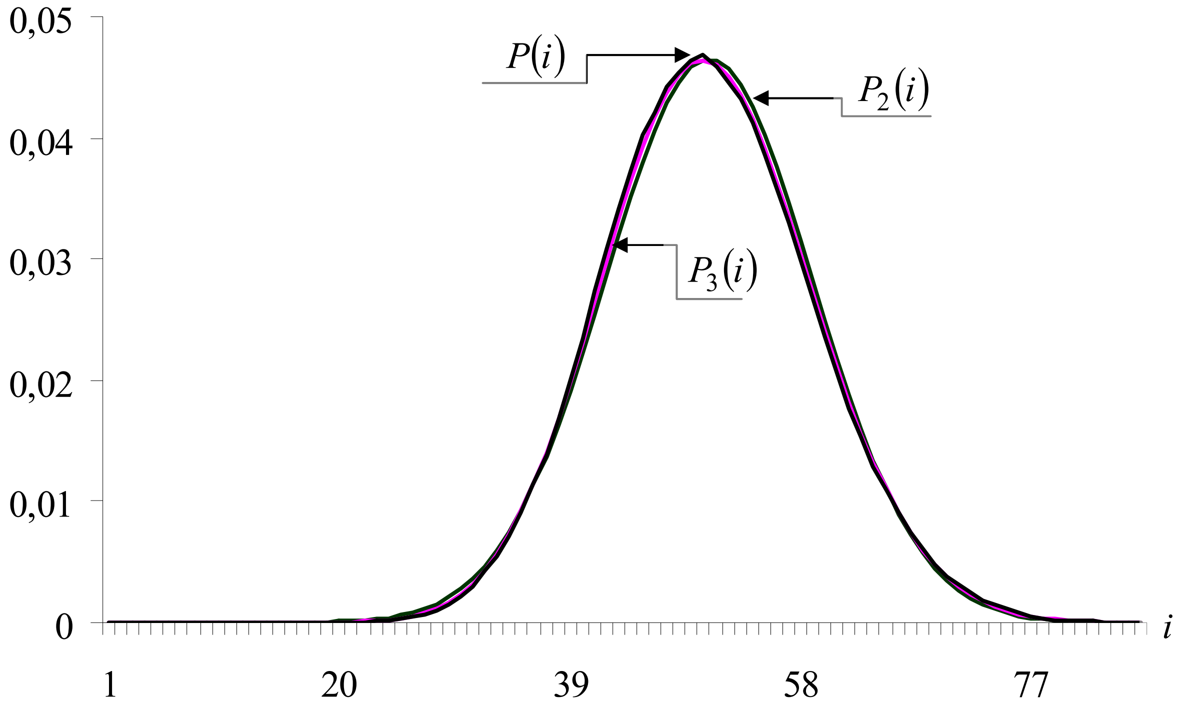

Рис. 4.1. Имитационное и асимптотическое распределения вероятностей числа занятых приборов при $b = 50$

Предложенные в четвертой главе численные алгоритмы, для исследования RQ-систем с коррелированными входящими потоками, и систем с неограниченным числом обслуживающих приборов в допредельных ситуациях, а также численная реализация результатов разработанного метода асимптотических семиинвариантов реализованы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для решения проблемы расчета вероятностных характеристик исследуемых систем.

Разработанный комплекс состоит из следующих приложений:

- *Численный алгоритм вычисления распределения вероятностей состояний RQ-системы* $MAP|M|1$*;*
- *Рекуррентный матричный алгоритм нахождения распределения вероятностей числа занятых приборов в системе* $MAP|M|\infty$*;*
- *Имитационное моделирование СМО с неограниченным числом приборов и статистическая обработка его результатов;*
- *Численные алгоритмы расчета асимптотических семиинвариантов.*

В заключении диссертации приведены основные результаты, которые изложены в пунктах научной новизны, теоретической значимости и практической ценности.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

1. Семенова И.А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов / А.А. Назаров, И.А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3 (12). – С. 85–96.

2. Семенова И.А. Исследование системы MMP|GI|∞ методом просеянного потока / А.А. Назаров, И.А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С. 74–84.

3. Семенова И.А. Сравнение асимптотических и допредельных характеристик системы MAP|M|∞ / А.А. Назаров, И.А. Семенова / Доклады ТУСУР. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 2 (42), ч. 3. – С. 202–209.

4. Семенова И.А. Исследование систем массового обслуживания с повторными вызовами методом асимптотического анализа. / А.А. Назаров, И.А. Семенова // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 104–113.

Публикации в других научных изданиях:

5. Semenova I. Asymptotic analysis of retrial queueing systems / I. Semenova, A. Nazarov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, DOI 10.3103/S8756699011040121. – 2011. Vol. 47, № 4. – P. 406–413.

6. Семенова И.А. Численный метод исследования системы MMP|M|1 с источником повторных вызовов / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009) : материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 13–14 ноября 2009 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч. 1. – С. 68–70.

7. Семенова И.А. Сравнение асимптотических результатов анализа системы M|M|1|ИПВ / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : материалы Международной конференции в Минске 22–25 февраля 2010 г. – Минск : РИВШ,– 2010. – С. 272–277.

8. Семенова И.А. Исследование RQ-системы методом асимптотического анализа / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции. Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 14–15 апреля 2010 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 65–69.

9. Semenova I. The research of RQ-system with input MMP process / I. Semenova, A. Nazarov // The third international conference «Problems of cybernetics and informatics» (PCI'2010). Baku, Azerbaijan, 6–8 September, 2010. – Baku : Elm, 2010. – Vol. 2. – P. 209–213.

10. Семенова И.А. Исследование системы массового обслуживания с входящим MMP-потоком и неограниченным числом обслуживающих приборов / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2010) : материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 19–20 ноября 2010 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 57–62.

11. Семенова И.А. Исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и входящим рекуррентным потоком / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы международной научной конференции «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей». Минск, 31 января – 03 февраля 2011 г. – Минск : РИВШ, 2011. – С. 179–185.

12. Семенова И.А. Исследование системы массового обслуживания с входящим MAP-потоком и неограниченным числом обслуживающих приборов / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Труды X Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий. Красноярск, 23–24 апреля 2011 г. / Сиб. федер. ун-т – Красноярск, 2011. – С. 278–281.

13. Семенова И.А. Исследование немарковской системы массового обслуживания с входящим MMP-потоком и неограниченным числом обслуживающих приборов / Научное творчество молодежи : материалы XV Всероссийской научно-практической конференции. Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 28–29 апреля 2011 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч. 1. – С. 28–31.

14. Семенова И.А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования системы SM|M|∞ / И.А. Семенова, А.А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011) : материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 25–26 ноября 2011 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч. 1. – С. 164–170.

Авторские свидетельства о регистрации электронного ресурса

15. А. с. Вычисление распределения вероятностей состояний RQ-системы MAP|M|1 / И.А. Семенова, А.А. Назаров. – №17615; дата регистрации 22.11.2011.

16. А. с. Рекуррентный матричный алгоритм нахождения распределения вероятностей числа занятых приборов в системе MMP|M|∞ / И.А. Семенова, А.А. Назаров. – №17616; дата регистрации 22.11.2011.

Подписано в печать 02.04.2012 г.
Формат А4/2. Ризография
Печ. л. 0,95. Тираж 120 экз. Заказ № 68
Отпечатано в ООО «Позитив-НБ»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а