

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики —  
процессов управления



***ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
И УСТОЙЧИВОСТЬ***

**ТРУДЫ XLII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ**

**Санкт-Петербург  
4–7 апреля 2011 года**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО,  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 517.51:517.9:519.71

ББК 22.1

П84

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Л. Харитонов* (С.-Петербург. гос. ун-т),  
д-р техн. наук, проф. *Ф. М. Кулаков* (С.-Петербургский институт  
информатики и автоматизации РАН)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
факультета прикладной математики – процессов управления  
Санкт-Петербургского государственного университета*

**Процессы управления и устойчивость:** Труды 42-й междуна-  
П84 родной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред.  
А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. – СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос.  
ун-та, 2011. – 588 с.  
ISBN 978-5-288-05197-5

В сборник включены работы студентов, аспирантов и сотрудников факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ и других высших учебных заведений, в том числе зарубежных, по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, информационным и компьютерным технологиям, теории управления социально-экономическими системами.

Все работы докладывались на ежегодной 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (4–7 апреля 2011 года).

Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.1

ISBN 978-5-288-05197-5

© Авторы сборника, 2011  
© Факультет ПМ – ПУ  
С.-Петербургского государственного университета

Михеев П.А.

Томский государственный университет

## Индивидуальное быстроедействие абонента беспроводной ЛВС стандарта 802.11

*Рекомендовано к публикации профессором Сущенко С.П.*

**Введение.** Рассмотрим беспроводную локальную вычислительную сеть (ЛВС), основывающуюся на стандарте 802.11 [1]. Протокол, обеспечивающий работоспособность беспроводных ЛВС в распределенном режиме доступа (DCF) [1, 2], использует механизм доступа к среде, который называется «множественный доступ с контролем несущей и предотвращением коллизий» (*carrier sense multiple access with collision avoidance, CSMA/CA*). Данный механизм основан на том, что передающая станция проверяет, присутствует ли в среде сигнал несущей, и, прежде чем начать отправку кадра, ожидает освобождения среды передачи данных. Беспроводные станции стандарта 802.11, в отличие от проводных Ethernet, не способны обнаруживать коллизии в среде передачи данных [3, 4]. В силу этого обнаружение коллизий и бесконфликтных передач протокольных блоков данных основано на механизме тайм-аутов и алгоритме положительной решающей обратной связи.

Вкратце цикл передачи кадра данных от станции-отправителя к станции-получателю выглядит следующим образом. Прежде всего, станция-отправитель прослушивает среду для определения ее занятости. Далее по истечении межкадрового интервала запускается алгоритм случайной задержки для выбора номера слота, в котором можно начать передачу данных. Номер слота равновероятно выбирается из промежутка  $[0, 2^{N_0+N} - 1]$ , где  $N_0$  – значение, определяющее начальный размер конкурентного окна, а  $N$  – номер повторной передачи. Номер выбранного слота присваивается значению таймера отсрочки  $t_0$ , после чего начинают отсчитываться слотовые интервалы. В конце каждого слотового интервала таймер отсрочки уменьшается на единицу, при этом прослушивается среда. Как только фиксируется занятость среды, таймер отсрочки замораживается (останавливается) до тех пор, пока не освободится среда передачи данных. После освобождения среды таймер запускается со значения, зафиксированного непосредственно перед замораживанием. По истечении

таймера отсрочки ( $t_o = 0$ ) станция-отправитель начинает передачу кадра данных. По окончании передачи отправитель ждет квитанции в течении времени  $t_{out}$ , по истечении которого считается, что была коллизия и станции, попавшие в коллизию, увеличивают значение  $N$  на единицу, а действия, направленные на передачу данных, повторяются.

**Математическое моделирование.** Рассмотрим функционирование беспроводной локальной сети до первой безошибочной передачи кадра и получения квитанции об успешной доставке данных рассматриваемым абонентом. Исходя из этого, найдем основные операционные характеристики системы. Предположим, что в беспроводной ЛВС имеется  $K$  станций – источников данных. Считаем, что все источники независимы, равноправны, всегда имеют кадры данных для отправки, а все интервальные промежутки выражены в слотовых интервалах  $t_c$ .

Пусть все станции обмениваются кадрами одинакового размера. Тогда согласно последовательности протокольных действий элементарный цикл отправки кадра получателю определится размером межкадрового промежутка  $t_m$ , периодом случайной отсрочки  $t_o$ , длительностью «заморозки» таймера случайной отсрочки  $t_z$ , временем передачи информационного кадра  $t_k$ , а также величиной таймаута ожидания положительной квитанции  $t_{out}$ , которая складывается из короткого межкадрового промежутка и времени передачи положительной квитанции. Следует отметить, что среди указанных компонент цикла времена  $t_o$  и  $t_z$  являются функциями номера повторной передачи.

Среднее время передачи кадра  $T(K)$  складывается из взвешенной суммы средних времен ожидания неудачных отправок и времени, затраченном на успешную передачу. Поскольку при неудачных передачах кадра получатель не отправляет подтверждений, то среднее время определится соотношением

$$T(K) = t_m + t_k + t_{out} + \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ N(t_m + t_k + t_{out}) + \sum_{n=0}^{N-1} t(n, K) + \tau(N, K) \right\} f(N, K). \quad (1)$$

Здесь  $t(N, K)$  и  $\tau(N, K)$  – средние условные времена до неудачной

и успешной  $N$ -ой повторной попытки отправить кадр рассматриваемым абонентом, а  $f(N, K)$  – функция вероятностей продолжительности конкуренции между абонентами за эфир, которая определяется вероятностью успешной передачи кадра на  $N$ -ом повторном шаге после  $(N - 1)$ -ой неудачной повторной попытки послать отправленные:  $f(N, K) = P(N, K) \prod_{n=0}^{N-1} \pi(n, K)$ , где  $P(N, K)$  – условная вероятность успешной передачи кадра данных, рассматриваемым абонентом после  $(N - 1)$ -ой конфликтной передачи в сети из  $K$  станций, а  $\pi(N, K)$  – условная вероятность неудачи на  $N$ -ом повторном шаге. Для этих вероятностей выполняется следующее соотношение  $\pi(N, K) = 1 - P(N, K)$ .

**Беспроводная ЛВС с  $K = 2$  станциями.** Рассмотрим случай с  $K = 2$  беспроводными станциями локальной вычислительной сети. Вероятность выбора  $i$ -го слота для передачи данных на  $n$ -ой повторной передаче рассматриваемым абонентом обозначим  $p_n(i)$ , а вероятность выбора  $i$ -го слота для передачи данных на  $n$ -ой повторной передаче соперничающей станцией обозначим через  $f_n(i)$ . Тогда условная вероятность возникновения конфликта на  $n$ -ой повторной передаче для рассматриваемого абонента будет

$$\pi(0, 2) = p_0(0)f_0(0) + \sum_{i=1}^{2^{N_0}-1} p_0(i)Q_i; \quad (2)$$

$$\pi(n, 2) = \sum_{k=1}^n \frac{E_k(n)}{\pi(n-1, 2)} \left\{ \sum_{i=0}^{2^{N_0+k}-1} p_n(i)f_k(i) + \sum_{i=1}^{2^{N_0+k}-1} p_n(i) \sum_{j=0}^{i-1} f_k(j)L_{i-j} + \sum_{i=2^{N_0+k}}^{2^{N_0+n}-1} p_n(i) \sum_{j=0}^{2^{N_0+k}-1} f_k(j)L_{i-j} \right\}, \quad n > 0,$$

где  $L_k = Q_k = \sum_{j=0}^{\infty} f_0^j(0) \sum_{i=0}^{k-1} f_0(k-i)Q_i$ , для  $k = \overline{1, 2^{N_0}-1}$ ,  $Q_0 = 1$ , а при  $k = \overline{2^{N_0}, 2^{N_0+n}-1}$  имеет следующий рекуррентный вид:

$$L_k = \sum_{j=0}^{\infty} f_0^j(0) \sum_{i=1}^{2^{N_0}-1} f_0(i)L_{k-i}. \quad (3)$$

Элементы  $L_k$  это по сути различные наборы таких вариантов попадания в конфликт рассматриваемой и соперничающей станций,

при которых соперничающая станция успевает один или несколько раз бесконфликтно передать данные, пока рассматриваемый абонент дожидается своей  $n$ -ой повторной передачи. Коэффициенты  $E_m(n)$  являются вероятностями того, что на  $n$ -ой повторной передаче рассматриваемого абонента у соперника это будет  $m$ -ая повторная передача, и они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_1(1) &= p_0(0)f_0(0) + \sum_{i=1}^{2^{N_0}-1} p_0(i)Q_i; \\
 E_1(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{E_k(n-1)}{\sum_{i=1}^{n-1} E_i(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^{2^{N_0+k}-1} p_{n-1}(i) \sum_{j=0}^{i-1} f_k(j)L_{i-j} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i=2^{N_0+k}}^{2^{N_0+n-1}-1} p_{n-1}(i) \sum_{j=0}^{2^{N_0+k}-1} f_k(j)L_{i-j} \right] \right\}, \quad n > 1; \quad (4) \\
 E_m(n) &= \sum_{i=1}^{2^{N_0+m-1}-1} p_{n-1}(i)f_{m-1}(i), \quad n > 1, \quad m = \overline{2, n}.
 \end{aligned}$$

Среднее условное время до неудачной  $n$ -ой попытки передачи данных  $t(n, 2)$  складывается из среднего количества слотов до начала передачи и среднего количества заморозок из-за передачи данных соперничающей станцией  $N_s(n)$  и  $Z_t(n)$  соответственно.

$$t(n, 2) = N_s(n) + Z_t(n)[t_k + t_{out} + t_m], \quad (5)$$

где  $N_s(n) = \sum_{i=0}^{2^{N_0+n}-1} ip_n(i)$ , а  $Z_t(n) = \sum_{i=1}^{2^{N_0}-1} p_0(i)M_i$ , при  $n = 0$  и

$$\begin{aligned}
 Z_t(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k(n)}{\pi(n-1, 2)} \left\{ \sum_{i=1}^{2^{N_0+k}-1} p_n(i) \sum_{j=0}^{i-1} f_k(j)M_{i-j} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=2^{N_0+k}}^{2^{N_0+n}-1} p_n(i) \sum_{j=0}^{2^{N_0+k}-1} f_k(j)M_{i-j} \right\}, \quad \text{при } n > 0. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Элементы  $M_k$  здесь собственно и показывают, сколько в среднем заморозок вынужден будет сделать рассматриваемый абонент, если на

$n$ -ой повторной передаче он выберет  $i$ -ый слот, когда как соперничающая станция выберет  $j$ -ый слот (предшествующий  $i$ -му).

$$M_k = f_0(k) \sum_{i=0}^{\infty} i f_0^i(0) + \sum_{m=1}^{k-1} f_0(m) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1 + M_{k-m}) f_0^i(0), \quad n = 0;$$

$$M_k = f_0(k) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) f_0^i(0) + \sum_{m=1}^{k-1} f_0(m) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1 + M_{k-m}) f_0^i(0),$$

$$n > 0, \quad k = \overline{1, 2^{N_0} - 1};$$

$$M_k = \sum_{m=1}^{2^{N_0}-1} f_0(m) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1 + M_{k-m}) f_0^i(0), \quad n > 0, \quad k = \overline{2^{N_0}, 2^{N_0+n} - 1}.$$

Среднее условное время до успешной передачи на  $n$ -ой повторной попытке передачи данных  $\tau(n, 2)$  получается по аналогии с (5) и также складывается из среднего количества слотов до передачи и среднего количества заморозок из-за передачи данных соперничающей станцией  $N_s(n)$  и  $Z_\tau(n)$ :

$$\tau(n, 2) = N_s(n) + Z_\tau(n)[t_k + t_{out} + t_m].$$

Среднее количество заморозок  $Z_\tau(n)$  имеет схожий вид с  $Z_t(n)$  (6), в запись которого входят элементы  $V_k$ , схожие с элементами  $M_k$ .

**Обсуждение полученных результатов.** Уже на этапе формализации этой задачи стало понятно, что получить аналитическое решение будет крайне непросто. Рекуррентные зависимости, такие как (3), (4), а также имеющиеся в записях элементов  $M_k$  и  $V_k$ , не позволяют с легкостью получить аналитический вид.

Пока что абсолютно четкий аналитический вид удалось получить для вероятности возникновения конфликта на самой первой передаче (нулевая повторная) (2):

$$\pi(0, 2) = \frac{2^{N_0} 2^{N_0} - (2^{N_0} - 1)^{2^{N_0}}}{2^{2N_0} (2^{N_0} - 1)^{2^{N_0}-1}}.$$

Численные исследования среднего времени передачи кадра абонентом показывают, что функция (1) имеет ярко выраженный минимум по координате  $N_0$  (рис. 1), определяющей начальный размер

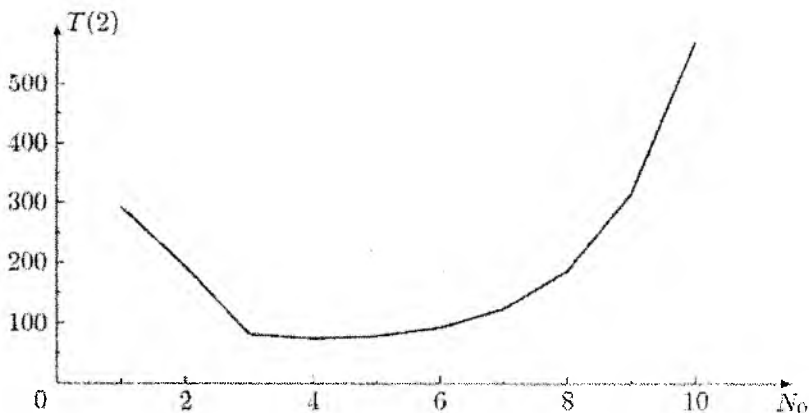


Рис. 1. Зависимость среднего времени передачи кадра  $T(K)$  (1) от степени начальной ширины окна  $N_0$  для двух абонентов сети ( $K = 2$ )

конкурентного окна и, как следствие, степень рассеяния станций по длительностям отсрочки перед началом процедуры соперничества.

Кроме того, уже на этапе формализации задачи стал очевиден эффект захвата среды передачи данных одним из абонентов, о котором упоминается в [4]. Особенно сильно этот эффект проявляется при малых значениях  $N_0$ .

## Литература

1. IEEE Std 802.11 – 2007, Revision of IEEE Std 802.11 – 1999. Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. IEEE Computer Society, 2007. 1184 p.
2. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети. СПб.: Питер, 2006. 958 с.
3. Новиков Ю.В., Кондратенко С.В. Локальные сети: Архитектура, алгоритмы, проектирование. М.: ЭКОМ, 2000. 312 с.
4. Вишневикий В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005. 592 с.