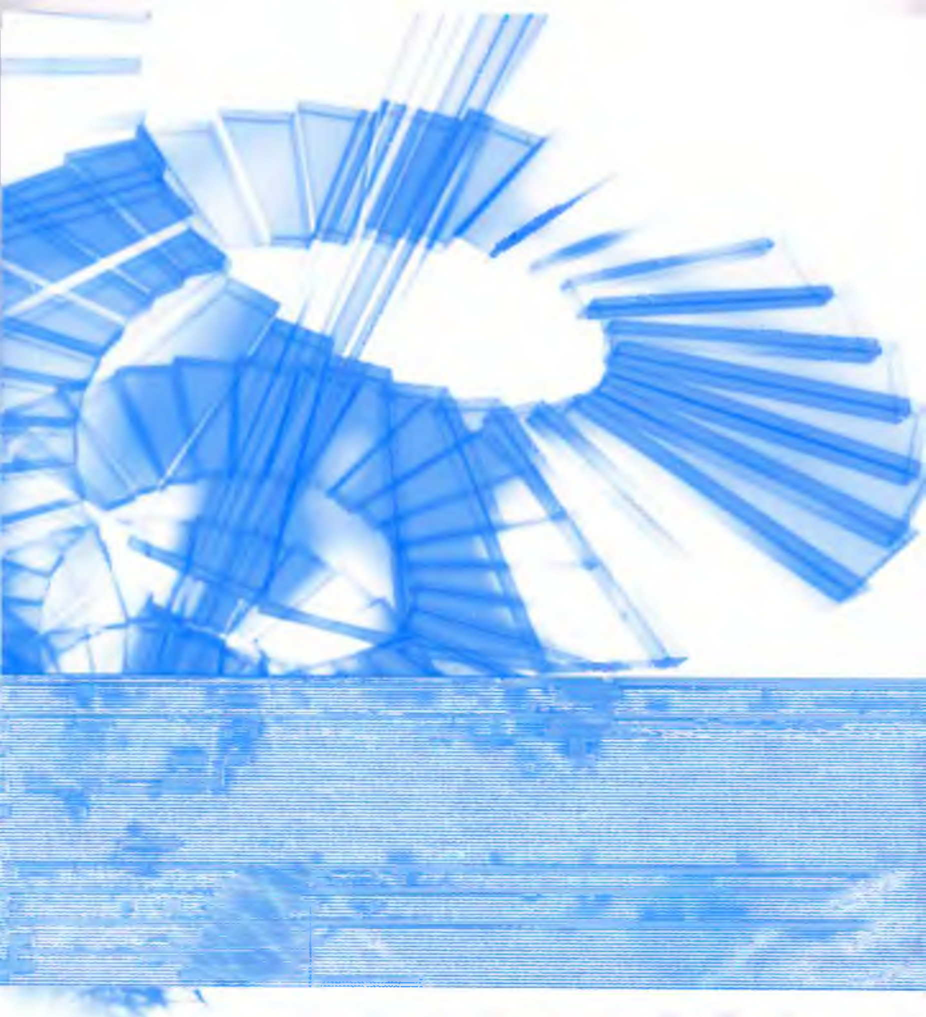

ИТММ · 2010

«ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

ЧАСТЬ 1

Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Кемеровский научный центр СО РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2010)

Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием

19–20 ноября 2010 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2010

УДК 519
ББК 22.17
И74

Информационные технологии и математическое моделирование

И74 (ИТММ-2010): Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (19–20 ноября 2010 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – 172 с.

ISBN 978–5–7511–1948–5

В часть 1 вошли материалы секций «Вероятностные методы и модели», и «Экономико-математические модели».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10–07–06095-г)

ISBN 978–5–7511–1948–5

нате N_0, определяющей начальный размер конкурентного окна и, как следствие, степень рассеяния станций по длительностям отсрочки перед началом процедуры соперничества.

Литература

1. Рошан П., Лиэри Д. Основы построения беспроводных локальных сетей стандарта 802.11. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 304 с.
2. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети. – СПб.: Питер, 2006. – 958 с.
3. Новиков Ю. В., Кондратенко С. В. Локальные сети: Архитектура, алгоритмы, проектирование. – М.: ЭКОМ, 2000. – 312 с.
4. Вишневский В. М., Ляхов А. И., Портной С. Л., Шахнович И. В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.

О БЫСТРОДЕЙСТВИИ СЕРВЕРНОГО СОЕДИНЕНИЯ КОММУТИРУЕМОЙ ЛВС

П. А. Михеев, С. П. Сущенко
Томский государственный университет

Введение. Наиболее массовые технологии построения современных локальных вычислительных сетей (ЛВС) основаны на методе случайного множественного доступа к разделяемой множеством абонентов среде передачи данных [1]. Данный метод обеспечивает простую топологию сети, однако при высоких нагрузках и большом числе абонентов операционные характеристики сети значительно ухудшаются [2]. Для повышения реального быстродействия ЛВС используется метод логической структуризации сети, основанный на сегментировании ее с помощью технологии коммутируемого доступа [1]. Кроме повышения производительности ЛВС, логическая структуризация с помощью коммутаторов упрощает управление сетью, увеличивает ее гибкость и повышает безопасность работы с прикладными данными в различных сегментах сети. Характерно применение коммутационных устройств в качестве концентратора, аккумулирующего трафик от настольных систем к файл-серверам, серверам баз данных и серверам приложений. В задачах синтеза структуры и параметров локальных сетей передачи данных важнейшим является сбалансированный выбор быстродействия каналов к прикладным серверным системам общего назначения, числа абонентов, подключаемых к таким приложениям, и технических параметров коммутационных устройств связи [1]. Математические модели локальной сети, мультиплексирующей абонентские потоки к сервисным службам, позволяют проводить анализ влияния параметров клиентского трафика на пропускную способность агрегирующих портов коммутатора с ограниченной памятью, расчет объема буферной памяти и исследование стратегий обеспечения качества сервиса, предоставляемого сетевыми службами.

Модель ЛВС с мультиплексированием трафика. Рассмотрим фрагмент локальной компьютерной сети, включающий M клиентов, подключенных к серверу через сетевой коммутатор. Считаем, что к M однородным по скорости портам коммутатора подключены абоненты, порождающие поток кадров равной длины к серверной платформе, подсоединенной к коммутатору через $M+1$-й порт с быстродействием, в $S \geq 1$ раз превышающим быстродействие абонентских портов. Считаем, что сетевые соединения абсолютно надежны, все клиентские источники данных независимы и работают синхронно с периодом t. Длительность этого периода определяется быстродействием портов для подключения абонентов и накладными расходами, связанными с коммутацией кадров между портами. Тогда за время полного цикла передачи кадра t по абонентским портам в серверный порт может быть отправлено $0 \leq i \leq S$ кадров. Будем считать, кроме того, что коммутатор работает в режиме полной промежуточной буферизации, и кадр, поступивший в коммутатор в текущем цикле t, начнет передаваться по выходному (серверному) порту только в следующем цикле. Будем полагать, что на абонентских портах информационные кадры возникают в каждый период t с вероятностями $B_m, m=\overline{1,M}$. Предположим также, что для хранения кадров в выходной очереди коммутатора к серверному порту выделен пул буферной памяти объема $K \geq M$. Тогда поведение рассматриваемого сетевого фрагмента представимо в виде Марковской системы массового обслуживания (СМО) с дискретным временем, конечным накопителем, неординарным входящим потоком и одним прибором с детерминированным групповым обслуживанием заявок [3]. Неординарный входящий поток СМО определяется вероятностями появления кадров в абонентских портах $B_m, m=\overline{1,M}$, а число обслуженных заявок – быстродействием серверного порта S. Динамика очереди к выходному каналу связи данной СМО описывается цепью Маркова. Множество возможных состояний цепи Маркова определяется размерами буферной памяти. Важнейшей характеристикой СМО ограниченной емкости является объем пропущенного (обслуженного) потока или загрузка. В рассматриваемом случае данная операционная характеристика определяется как доля быстродействия серверного соединения, достигаемая в условиях агрегирования трафика от M клиентов:

$$Z\left(K,S,M,\overline{B}\right)=\sum_{k=1}^{S} kP_k + S\sum_{k=S+1}^{K} P_k, \qquad (1)$$

где $\overline{B}=\{B_1,...,B_M\}$ – вектор значений вероятностей $B_m, m=\overline{1,M}$, P_k – вероятности состояний цепи Маркова. В случае равенства вероятностей появления абонентских кадров в портах коммутатора $B_m=B, m=\overline{1,M}$ объем обслуженного потока будем обозначать как $Z(K,S,M,B)$.

ЛВС с однородными вероятностями порождения клиентских кадров. Начнем рассмотрение со случая, когда трафик от всех абонентов имеет одинаковые вероятности появления пакетов во входных портах $B_m=B, m=\overline{1,M}$. Тогда переходные вероятности π_{ij} цепи Маркова, описывающей функционирование СМО, при $K \geq M \geq S \geq 1$ определяются следующими зависимостями:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \binom{M}{j} B^j (1-B)^{M-j}, i = \overline{0,S}, 0 \leq j \leq M; \\ \binom{M}{S+j-i} B^{S+j-i} (1-B)^{M-S+i-j}, i = \overline{S+1,K}, i-S \leq j \leq i+M-S, j < K; \\ \sum_{g=K+S-i}^{M} \binom{M}{g} B^g (1-B)^{M-g}, i = \overline{K+S-M,K}, j = K. \end{cases} \quad (2)$$

Проанализируем работу локальной сети при различных значениях параметров коммутатора. Начнем анализ со случая равенства числа источников информационных потоков (портов) и быстродействия серверного соединения $M = S$. В этом случае из определения переходных вероятностей (2) нетрудно видеть, что при $K \geq M$ достижимыми являются только состояния с номерами $i = \overline{0,M}$. Тогда решение системы уравнений локального равновесия (2) принимает следующий вид:

$$P_k = \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}, k = \overline{0,M}.$$

Пропущенный поток при этом согласно (1) прямо пропорционален числу источников (быстродействию серверного соединения) и интенсивности клиентского трафика: $Z(K,S,M,B) = MB$. Рассмотрим поведение коммутатора при числе агрегируемых информационных потоков, большем производительности серверного соединения $M>S$. Пусть $S=K$. Тогда вероятности состояний определятся зависимостями

$$P_k = \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}, k = \overline{0,K-1}, \; P_K = \sum_{k=M-S}^{M} \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}.$$

Операционный параметр $Z(K,S,M,B)$ определится выражением

$$Z(S,S,M,B) = M \sum_{k=1}^{S-1} \binom{M-1}{k-1} B^k (1-B)^{M-k} + S \sum_{k=M-S}^{M} \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}.$$

Для $S = 1$, $M = 2$ и $K \geq M$ вероятности состояний задаются соотношениями

$$P_1 = P_0 \frac{B(2-B)}{(1-B)^2}; P_k = P_0 \frac{B^{2(k-1)}}{(1-B)^{2k}}, k = \overline{2,K}; \; P_0 = \frac{(1-B)^{2K}(1-2B)}{(1-B)^{2K} - B^{2K}}.$$

Пропущенный поток при этом составит: $Z(K,1,2,B) = \dfrac{2B(1-B)^{2K} - B^{2K}}{(1-B)^{2K} - B^{2K}}$.

Из полученных соотношений нетрудно видеть, что индекс производительности

$Z(K,S,M,B)$ имеет монотонную зависимость от числа абонентов, параметров клиентского трафика и портов коммутатора.

ЛВС с неоднородными вероятностями порождения клиентских кадров. Начнем рассмотрение со случая двух клиентских потоков (M=2), мультиплексируемых в серверное соединение с быстродействием S=2. Для дискретной цепи Маркова, описывающей функционирование рассматриваемого фрагмента, достижимыми будут состояния с номерами $k=\overline{0,2}$. Для финальных вероятностей состояний такой цепи Маркова справедливо: $P_0=(1-B_1)(1-B_2); P_1=B_1+B_2-2B_1B_2; P_2=B_1B_2$. Пропущенный поток при этом определится суммой клиентских потоков: $Z(K,2,2,\vec{B})=B_1+B_2$. В случае произвольных значений параметров фрагмента, удовлетворяющих условию M=S, вероятности состояний цепи Маркова образуют полиномиальные элементы: $P_k=L_k$, где

$$L_k=\sum_{j_1=1}^{M-k+1}B_{j_1}\sum_{j_2=j_1+1}^{M-k+2}B_{j_2}\dots\sum_{j_k=j_{k-1}+1}^{M}B_{j_k}\prod_{l=1,l\neq\{j_n,n=\overline{1,k}\}}^{M}(1-B_l), k=\overline{0,M}, \quad (3)$$

а пропущенный поток (1) равен сумме вероятностей появления кадров в клиентских портах коммутатора $Z(K,S,M,\vec{B})=\sum_{k=1}^{M}B_k$. Отсюда следует, что объем пропущенного потока при M=S инвариантен к емкости буферного накопителя, превышающей число клиентских портов ($B>M$).

Рассмотрим локальную сеть с тремя клиентскими потоками (M=3), буферным накопителем коммутатора $K\geq M$ и скоростью серверного соединения S=2. Система уравнений равновесия с учетом введенных для L_k обозначений (3), принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
&P_0(1-L_0)=P_1L_0+P_2L_0;\\
&P_1(1-L_1)=(P_0+P_2)L_1+P_3L_0;\\
&P_2(1-L_2)=(P_0+P_1)L_2+P_3L_1+P_4L_0;\\
&P_3(1-L_2)=(P_0+P_1+P_2)L_3+P_4L_1+P_5L_0;\\
&P_k(1-L_2)=P_{k-1}L_3+P_{k+1}L_1+P_{k+2}L_0, k=\overline{4,K-2};\\
&P_{K-1}(1-L_2)=P_{K-2}L_3+P_KL_1;\\
&P_K(1-L_2-L_3)=P_{K-1}L_3.
\end{aligned} \quad (4)$$

Для объема буферной памяти K=3 решение системы (4) имеет вид

$$P_0=\frac{L_0(L_1+L_0)}{1-L_2}; P_1=\frac{L_1(L_1+L_0)+L_0L_3}{1-L_2}; P_2=\frac{L_2(L_1+L_0)+L_1L_3}{1-L_2}; P_3=\frac{L_3}{1-L_2}.$$

Для пропущенного потока в этом случае согласно (1) получаем следующую зависимость: $Z(3,2,3,\vec{B})=\frac{(L_1+L_0)(L_1+2L_2)+L_3(2+2L_1+L_0)}{1-L_2}$.

При однородных клиентских потоках $B_m = B, m = \overline{1,3}$ данное соотношение упрощается: $Z(3,2,3,B) = \frac{3B - 9B^3 + 9B^4 - B^6}{1 - 3B^2 + 3B^3}$. Для буферного накопителя емкости K=4 сетевого фрагмента с параметрами S=2, M=3 решение системы уравнений равновесия (4) преобразуются к виду

$$P_0 = \frac{L_0\left[\left(L_0 + L_1\right)^2 + L_0 L_3\right]}{\left(1 - L_2\right)^2 - L_1 L_3}; P_1 = \frac{L_1\left(L_0 + L_1\right)^2 + (L_0 + 2L_1)L_0 L_3}{\left(1 - L_2\right)^2 - L_1 L_3};$$

$$P_2 = \frac{L_2\left(L_0 + L_1\right)^2 + [L_0(1 - L_0) + L_1^2]L_3}{\left(1 - L_2\right)^2 - L_1 L_3}; P_3 = \frac{(L_1 + L_0)L_3}{\left(1 - L_2\right)^2 - L_1 L_3}; P_4 = \frac{L_3^2}{\left(1 - L_2\right)^2 - L_1 L_3}.$$

Пропущенный поток в этом случае задается следующим выражением:

$$Z\left(4,2,3,\overline{B}\right) = \frac{\left(L_1 + L_0\right)^2\left(L_1 + 2L_2\right) + L_3\left(2L_1^2 + 2L_1 + 2L_1 L_0 + 4L_0 - L_0^2 + 2L_3\right)}{\left(1 - L_2\right)^2 - L_1 L_3}.$$

При одинаковых вероятностях $B_m = B, m = \overline{1,3}$ данная зависимость упрощается до соотношения

$$Z(4,2,3,B) = \frac{3B - 18B^3 + 18B^4 + 18B^5 - 36B^6 + 18B^7 - B^9}{1 - 6B^2 + 6B^3 + 6B^4 - 12B^5 + 6B^6}.$$

С дальнейшим увеличением значений параметров коммутатора S, M и K сложность аналитических выражений стремительно нарастает.

Обсуждение численных результатов. Численные исследования полученных соотношений показывают, что при равновероятном появлении информационных кадров в портах коммутатора функция пропущенного потока от объема трафика отдельного клиента B имеет вид кривой с насыщением. Сходная зависимость имеет место и от быстродействия серверного соединения и объема буферного накопителя коммутатора. Показано, что с ростом числа абонентов M насыщение пропущенного потока до предельного уровня происходит при более низкой интенсивности клиентского трафика B. Численный анализ свидетельствует о том, что при существенно неоднородной структуре клиентского трафика загрузка серверного соединения повышается по сравнению с равновероятным поступлением кадров от клиентских портов коммутатора. Минимум загрузки достигается для одинаковых интенсивностей абонентских потоков ($B_m = B, m = \overline{1,M}$). Наибольшее различие имеет место в окрестности условия равенства общего объема абонентского трафика и быстродействия серверного соединения. Вместе с тем с увеличением емкости буферной памяти коммутатора K различие в загрузке серверного соединения для различных наборов B_m значительно ослабляется. Из анализа функции загрузки следует, что пропущенный поток мажорируется ломаной прямой:

$$Z^*(K,S,M,\vec{B}) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{M} B_m, \sum_{m=1}^{M} B_m \le S; \\ S, \sum_{m=1}^{M} B_m > S. \end{cases} \quad (5)$$

В наибольшей мере реальная кривая отстоит от мажоранты при $\sum_{m=1}^{M} B_m = S$, однако с ростом емкости буферного накопителя K расстояние между значениями $Z\left(K,S,M,\vec{B}\right)$ и $Z^*\left(K,S,M,\vec{B}\right)$ быстро сокращается и при $K \ge 3M$ для практических расчетов вместо (1) можно использовать мажоранту (5).

Литература

1. Олифер В. Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети. – СПб.: Питер, 2006. – 958 с.
2. Кустов Н. Т., Сущенко С. П. О пропускной способности метода случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 1. – С. 91–102.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ НА ВЫПЛАТУ СТРАХОВЫХ СУММ

А. А. Назаров, Д. Д. Даммер

Томский государственный университет

Математическим моделям экономических систем и их исследованию в последнее время уделяется достаточно большое внимание. В стороне не остаются и модели актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. Так, в работе [2] исследуется классическая модель страховой компании, в [1, 2] рассматривается модель с ограниченным страховым полем и расходами на рекламу, в [3] – модель с неявной рекламой, когда интенсивность потока входящих рисков зависит от уже застраховавшихся в компании рисков. В этих работах находятся характеристики капитала, числа застрахованных рисков, а также вероятность разорения или выживания компании. В данной же работе исследуется такая характеристика, как суммарное число требований на выплату страховых сумм всеми застрахованными в компании рисками.

Рассмотрим модель страховой компании с неограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. Пусть в компанию поступают риски, образуя простейший поток событий интенсивности λ. Каждый риск, находящийся в компании, на протяжении всего срока действия договора страхования независимо от других рисков генерирует с интенсивностью γ требования на выплату страховых сумм. Естественно считать, что требование риска на выпла-