На правах рукописи

Лазарев Вадим Ремирович

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Томск - 2012

Работа выполнена на кафедре теории функций
ФГБОУВПО «НИ Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Гулько Сергей Порфирьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Пестов Герман Гаврилович

кандидат физико-математических наук,
доцент
Арбит Александр Владимирович

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН (г. Екатеринбург)

Защита диссертации состоится 23 марта 2012г., в 14:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при ФГБОУВПО «НИ Томский государственный университет» по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36, корпус 2, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГБОУВПО «НИ Томский государственный университет» по адресу: Томск, пр. Ленина, 34а,
Автореферат разослан 21 февраля 2012г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

А. Н. Малютина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основным объектом внимания в предлагаемой диссертации выступают нелинейные непрерывные функционалы (то есть вещественнозначные отображения), заданные на пространстве $C_p(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, определённых на некотором тихоновском пространстве X. Знаменитая теорема Нагаты [21] гласит, что если топологические кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны, то тихоновские пространства X и Y гомеоморфны. То есть, они имеют полностью совпадающие наборы топологических свойств. Однако, если ослабить требование до линейной гомеоморфности ТВП $C_p(X)$ и $C_p(Y)$, то, как известно [3], некоторые важнейшие топологические свойства X и Y могут различаться. Таковы, например, первая и вторая аксиомы счётности или свойство Фреше – Урысона. Ясно, что по мере ослабления условий на гомеоморфизм между $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ сужается и круг топологических свойств, гарантированно совпадающих у пространств X и Y. Свойство σ-компактности сохраняется при любых гомеоморфизмах пространств функций, чего нельзя сказать о компактности, как доказали С. П. Гулько и Т. Е. Хмылёва [6]. Однако, В. В. Успенский [12] установил, что компактность сохраняется при равномерном гомеоморфизме пространств функций.

Таким образом, относительно некоторых топологических свойств можно поставить вопрос: при каких типах гомеоморфизмов пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ эти свойства будут общими для X и для Y? Двойственным образом, если между $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ есть гомеоморфизм с тем или иным дополнительным условием (линейный, равномерный и т. п.), то какие свойства пространств X и Y будут для них общими?

Для пространства $C_p(X)$, как для ТВП, естественным образом определено сопряжённое к нему пространство $L_p(X)$ всех линейных непрерывных вещественных функционалов на $C_p(X)$. Нетрудно установить [3], что оно является замкнутым векторным подпространством в пространстве $C_pC_p(X)$ всевозможных непрерывных функционалов. Однако, никем не ставился и не изучался вопрос, является ли $L_p(X)$ дополняемым в $C_pC_p(X)$, либо в каких-то подпространствах в $C_pC_p(X)$.

Пространство $L_p(X)$ хорошо изучено [3] и является испытанным инструментом исследований. А именно, наличие непрерывного линейного отображения из $C_p(X)$ в $C_p(Y)$ влечёт наличие сопряжённого (линейного) отображения из $L_p(Y)$ в $L_p(X)$, которые содержат, соответственно, Y и X (как замкнутые подпространства). Линейный гомеоморфизм между $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ равносилен линейному гомеоморфизму между $L_p(Y)$ и $L_p(X)$. В этом случае говорят, что пространства X и Y l-эквивалентны. Решающее обстоятельство состоит в том, что с каждым линейным непрерывным функционалом из $L_p(X)$ однозначно связано конечное множество из X – носитель этого функционала. Если каждой точке из Y поставить в соответствие носитель её образа при сопряжённом отображении, получится конечнозначное отображение Y в X. Это позволяет обнаруживать связи между топологическими свойствами X и Y. В начале 80-х годов XX века в нескольких статьях [2, 9, 7, 10] было доказано, при различных дополнительных предположениях на пространства X и Y, что из их l-эквивалентности следует равенство размерностей $\dim X = \dim Y$. В 1982-м году В.Г. Пестов, применив отображение носителей линейных функционалов, доказал то же утверждение для произвольных тихоновских пространств X и Y [11]. Позднее, в 1998-м году, Н.В. Величко, оттолкнувшись от этой идеи и усовершенствовав понятие носителя, показал, что свойство Линделёфа одного из l-эквивалентных пространств X, Y равносильно свойству Линделёфа другого [22]. В 2001-м году А. Бузиад (A. Bouziad) обобщил эту теорему на произвольное число Линделёфа [16].

В то же время, применения пространств нелинейных функционалов для изучения соотношения свойств X и Y , имеющих нелинейно гомеоморфные пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$, пока весьма немногочисленны. Они касаются случая равномерно гомеоморфных пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$. С.П. Гулько рассматривал равномерно непрерывные функционалы и связанные с ними конечные подмножества, наделённые некоторыми чертами носителя. Ему удалось распространить теорему В.Г. Пестова о совпадении размерностей на случай равномерно гомеоморфных пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ [5]. А.В. Арбит также использовал технологии, связанные с носителями равномерно непрерывных функционалов, пытаясь перенести результат Бузиада на случай равномерного гомеоморфизма пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$. Введённые им носители равномерно непрерывных функционалов в общем случае счётны. В статье А.В. Арбита [15], вышедшей в 2011-м году, доказывается, что если оба пространства X и Y имеют число Линделёфа не меньшее континуума, и $C_p(X)$ равномерно гомеоморфно $C_p(Y)$, то числа Линделёфа пространств X и Y одинаковы.

Кольцо многочленов, аналогичное введённому в нашей работе кольцу $R_p(X)$ в явном виде появлялось только в статье [13].

Таким образом, по крайней мере для таких топологических свойств, как компактность, размерность dim и число Линделёфа, остаётся актуальным следующий вопрос: каков наиболее широкий класс гомеоморфизмов пространств функций $C_p(X)$ и $C_p(Y)$, сохраняющих эти свойства у пространств X и Y?

В предлагаемой диссертации нелинейные непрерывные функционалы (то есть вещественнозначные отображения), заданные на пространстве $C_p(X)$, выступают основным объектом исследования.

Цель работы:

• Найти и изучить возможно более широкие подпространства нелинейных непрерывных функционалов на $C_p(X)$, элементы которых имеют конечные носители.

• Изучить вопрос о дополняемости пространства $L_p(X)$ линейных непрерывных функционалов в пространстве $C_pC_p(X)$ и в подпространствах нелинейных непрерывных функционалов.

• Применить свойство существования конечного носителя у элементов во введённых подпространствах нелинейных непрерывных функционалов к выделению различных типов гомеоморфизмов пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ и к исследованию сохраняемых этими гомеоморфизмами свойств пространств X и Y.

Научная новизна и практическая ценность. Основные результаты настоящей диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации следующие:

• Введены в рассмотрение несколько пространств нелинейных непрерывных функционалов на $C_p(X)$, обладающих свойством конечного носителя элементов.

• Доказано, что соответствующее отображение носителя является полунепрерывным снизу, а в одном случае – полунепрерывным сверху.

• Доказано, что введённые пространства нелинейных непрерывных функционалов всюду плотны в $C_p^0C_p(X)$.

- Установлена недополняемость пространства $L_p(X)$ в пространстве $C_pC_p(X)$ для бесконечного X.

- Указан новый способ образования классов гомеоморфизмов пространств непрерывных функций.

- Выделены отличные от равномерных гомеоморфизмов классы гомеоморфизмов пространств непрерывных функций, сохраняющие размерность dim, число Линделёфа и компактность.

Результаты работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы при изучении топологических свойств пространств непрерывных функций.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.), Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 22-25 сентября 2008 г.), на заседаниях научного семинара кафедры теории функций Томского государственного университета.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из раздела обозначений и терминов, введения, трёх глав и списка литературы. Первая глава состоит из четырёх параграфов, вторая и третья главы состоят из трёх параграфов. Параграфы в работе имеют сквозную нумерацию. Работа изложена на 66 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность предпринятого в диссертации научного исследования и даётся краткий обзор содержания работы.

Первая глава (§§1 – 4) отведена для систематического изложения полученных автором результатов о пространствах нелинейных непрерывных функционалов. В §1 вводится понятие одночлена и многочлена на $C_p(X)$, определяется пространство одночленов $D_p(X)$, пространство многочленов $R_p(X)$, и два его подпространства: пространство $S_p(X)$, элементы которого мы называем простыми многочленами и пространство $M_p(X)$, элементы которого мы называем полными многочленами.

Определение 1.1. Функционал $d{:}C_p(X)\to\mathbb{R}$ вида $d = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, действующий по правилу $d(\varphi) = \left(\varphi\left(x_1\right)\right)^{n_1} \cdot \ldots \cdot \left(\varphi\left(x_k\right)\right)^{n_k}$, где $x_i \in X$, $n_i \in \mathbb{N}$ при всех i от 1 до k, назовём одночленом. Натуральное число $n(d)=n_1+\ldots+n_k$ будем называть степенью одночлена d. Конечное множество $K(d)=\{x_1,\ldots,x_k\}$ назовём носителем одночлена d. Множество всех одночленов обозначим через $D_p(X)$.

Определение 1.2. Всякий функционал $p{:}C_p(X) \to \mathbb{R}$**,** заданный правилом $p(\varphi) = \lambda_1 d_1(\varphi) + \ldots + \lambda_m d_m(\varphi)$, где λ_1, ..., λ_m – вещественные числа, а d_1, ..., d_m – одночлены, будем называть многочленом. Множество $K(p)=K\left(d_1\right)\cup\ldots\cup K\left(d_m\right)$ назовём носителем многочлена p. Множество всех многочленов обозначим через $R_p(X)$.

Теперь во множестве $R_p(X)$ выделим два подмножества.

Определение 1.3. Пусть $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$. Полиномами, или полными многочленами с носителем $K(p)=\{x_1,\ldots,x_n\}$ будем называть многочлены вида $p = \sum\left\{b_d \cdot d : d \in D_p(X), K(d) \subset \{x_1,\ldots,x_n\}, n(d) \in \{s_1,\ldots,s_m\}\right\}$, где все числа $b_d \neq 0$, $\{s_1,\ldots,s_m\}\subset\mathbb{N}$. Множество всех полиномов обозначим символом $M_p(X)$.

Определение 1.4. Многочлен p назовём простым, если он представим в виде $p=u\circ\xi$, где $\xi\in L_p(X)$, а $u:\square\to\square$ – числовой многочлен со свойством $u(0)=0$. Множество простых многочленов будем обозначать символом $S_p(X)$.

Предложение 1.5. Справедливы следующие соотношения: (а) $D_p(X)\cap L_p(X)=X$, (б) $L_p(X)\text{Ш}S_p(X)\text{Ш}M_p(X)\text{Ш}R_p(X)$, (в) $D_p(X)\text{Ш}R_p(X)$.

В §2 свойство многочленов иметь конечный носитель берётся за определение и таким образом вводится в рассмотрение пространство $\tilde{L}_p(X)$, а также его подпространство $L_p^0(X)$.

Определение 2.1. Пусть $f\in C_p^0C_p(X)$, $K\subset X$ – конечно. Если (i) $\forall\varepsilon>0,\forall\varphi\in C_p(X)$ $\exists\delta>0$ такое, что $f(W(\varphi,K,\delta))\subset(f(\varphi)-\varepsilon, f(\varphi)+\varepsilon)$, и (ii) $\forall K'\subset K$, $K'\neq K$, $\exists\varepsilon>0, \exists\varphi\in C_p(X)$, такие, что $\forall\delta>0$ $f(W(\varphi,K',\delta))\not\subset(f(\varphi)-\varepsilon, f(\varphi)+\varepsilon)$, то назовём функционал f функционалом с конечным носителем K, а само множество $K=K(f)$ – носителем функционала f. Множество всех функционалов с конечным носителем будем обозначать $\tilde{L}_p(X)$.

Определение 2.2. Скажем, что функционал $f\in C_p^0C_p(X)$ принадлежит пространству $L_p^0(X)$, если существует конечное множество $K\subset X$ такое, что выполнено (i), а также условие

(iii) $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\forall x\in K$ существует окрестность U_x точки x такая, что для всякой более узкой окрестности U этой точки $\exists\psi\in C_p(X)$, для которой $|f(\psi)|>\varepsilon$ несмотря на то, что $|\psi|(X\setminus U)=0$.

Одним из главных результатов §2 является теорема о единственности носителя

Теорема 2.10. Каждый функционал из $\tilde{L}_p(X)$ имеет единственный носитель.

Ключевое значение для дальнейших исследований имеет следующая лемма.

Лемма 2.11. Пусть $f \in \tilde{L}_p(X)$, $|K(f)| = k$, $\{U_1, \ldots, U_k\}$ – произвольная дизъюнктная система (открытых) окрестностей точек $x_1, \ldots, x_k$ из $K(f)$. Тогда у точки f найдется окрестность V, целиком состоящая из точек g, для которых $K(g) \cap U_i \neq \varnothing$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Из леммы 2.11 выводятся важнейшие следствия – теоремы 2.12 и 2.15 – применяемые в третьей главе.

Теорема 2.12. Отображение носителя $K : \tilde{L}_p(X) \to X$ полунепрерывно снизу.

Теорема 2.15. Отображение $K : D_p(X) \to X$ полунепрерывно сверху.

В §3 получен ещё один важный результат, а именно, теорема 3.2.

Теорема 3.2. $S_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$.

В §4 обсуждается алгебраическая структура рассматриваемых пространств нелинейных функционалов. Нетрудно видеть, что $R_p(X)$ – это векторное пространство и кольцо. Мы доказываем (предложение 4.3), что теми же свойствами обладает и $\tilde{L}_p(X)$. Пространство же $L_p^0(X)$ кольцом не является, но обладает векторной структурой (предложение 4.4).

Предложение 4.3. $\tilde{L}_p(X)$ есть векторное подпространство и подкольцо в $C_p^0 C_p(X)$ (то есть подалгебра) относительно обычных операций сложения, умножения функций и умножения функции на число.

Предложение 4.4. $L_p^0(X)$ есть векторное подпространство в $C_p^0 C_p(X)$.

Вторая глава работы (§§5 – 7) посвящена изучению вопроса о том, дополняемо ли пространство линейных непрерывных функционалов на $C_p(X)$ в пространстве всех непрерывных функционалов на $C_p(X)$ (то есть $L_p(X)$ в $C_pC_p(X)$). В §5 доказана весьма общая теорема 5.3, гласящая, что при бесконечном X не существует линейной непрерывной инъекции пространства $C_p(X)$ в пространство $L_p(Y)$ для любого Y. Переходя к сопряжённым пространствам, мы показываем (следствие 5.5), что не существует линейного непрерывного проектора $C_p(Y)$ на $L_p(X)$. Применяя это следствие при $Y = C_p(X)$, получаем отрицательный ответ на поставленный вопрос (следствие 5.6).

§6 и §7 посвящены установлению более слабых аналогов свойства дополняемости $L_p(X)$ в специальных подпространствах нелинейных функционалов при дополнительных предположениях относительно X. В §6 конструируется линейный (но не непрерывный) проектор пространства $\tilde{L}_p(X)$ на $L_p(X)$ для произвольного пространства X. Конструкция проектора такова.

Каждому конечному подмножеству $K \subset X$ сопоставим некоторое фиксированное дизъюнктное семейство $\gamma(K)$ открытых окрестностей точек из K, а также конечный набор $\{e(x,K) / x \in K\} \subset C_p(X,[0,1])$, где $e(x,K)(x) = 1$, $e(x,K)(x') = 0$, при $x' \notin O(x) \in \gamma(K)$. Теперь для всякого $f \in \tilde{L}_p(X)$ положим $P(f) = \sum\limits_{x \in K(f)} f(e(x,K(f))) \cdot x$.

Предложение 6.2. Определенное выше отображение P – проектор $\tilde{L}_p(X)$ на $L_p(X)$.

Предложение 6.3. Если пространство X счётно, то проектор $P:\tilde{L}_p(X)\to L_p(X)$ – отображение первого класса Бэра.

В §7 мы предполагаем, что пространство X σ-компактно. Основной результат §7 – теорема 7.6 – утверждает, что существует отображение Φ (всюду плотного в $C_p^0C_p(X)$ и σ-компактного) пространства $S_p^0(X)=\cup\{M_n:n\in\mathbb{N}\}$, где все M_n компактны, на его подпространство $L_p(X)$ с такими свойствами:

1) Φ тождественно на $L_p(X)$;

2) Сужение Φ на каждое M_n – ретракция.

В третьей главе (§§8 – 10) результаты о пространствах нелинейных непрерывных функционалов, полученные в первой главе, применяются для изучения отношения t-эквивалентности тихоновских пространств.

В §8 мы предлагаем общий способ выделения различных типов гомеоморфизмов $h:C_p(X)\to C_p(Y)$. Для этого нами вводится понятие (E, F)-гомеоморфизма (или гомеоморфизма типа (E, F)) пространств функций $C_p(X)$, $C_p(Y)$. Это такой гомеоморфизм $h:C_p(X)\to C_p(Y)$, двойственный к которому отображает подпространство $Y\subset C_p^0C_p(Y)$ в подпространство $E\subset C_p^0C_p(X)$ и, симметрично, обратный к двойственному гомеоморфизм отображает подпространство $X\subset C_p^0C_p(X)$ в подпространство $F\subset C_p^0C_p(Y)$. Главный результат параграфа гласит, что ранее известные типы гомеоморфизмов пространств функций – это (E, F)-гомеоморфизмы.

Теорема 8.2. Пусть некоторый гомеоморфизм $h{:}C_p(X)\to C_p(Y)$ имеет тип $(E;F)$. Тогда: (а) $E = X$ и $F = Y$ если и только если $X \sim Y$,

(б) $E = L_p(X)$ и $F = L_p(Y)$ если и только если $X \overset{l}{\sim} Y$,

(в) $E = U_p(X)$ и $F = U_p(Y)$ если и только если $X \overset{u}{\sim} Y$,

(г) $E = C_p^0 C_p(X)$ и $F = C_p^0 C_p(Y)$ если и только если $X \overset{t}{\sim} Y$.

В §9 рассматриваются два конкретных примера гомеоморфизмов типа (E, F), оказавшихся интересными с прикладной точки зрения. Теорема 8.7 из §8 показывает новизну этих примеров по сравнению с равномерными гомеоморфизмами. Главные результаты §9 (и одни из главных во всей диссертации) таковы.

Теорема 9.6. Если X, Y – пространства со счётной базой, а $h{:}C_p(X)\to C_p(Y)$ – гомеоморфизм типа $(M_p(X)\,;\, M_p(Y))$, то $\dim X = \dim Y$.

Теорема 9.8. Если $h{:}C_p(X)\to C_p(Y)$ – гомеоморфизм типа $(D_p(X)\,;\, D_p(Y))$, то $l(X) = l(Y)$. Если X компактно, то и Y компактно.

В §10 главным объектом является пространство всех многочленов $R_p(X)$. Основной результат §10 – теорема 10.2.

Теорема 10.2. Если топологические кольца $R_p(X)$, $R_p(Y)$ топологически изоморфны, то пространства $C_p(X)$, $C_p(Y)$ гомеоморфны.

Доказательство этой теоремы опирается на предложение 10.1.

Предложение 10.1. Каждая непрерывная вещественная функция $f : X \to \mathbb{R}$ однозначно продолжается до непрерывной линейной мультипликативной функции $Ef : R_p(X) \to \mathbb{R}$.

Фактически, мы получаем ещё один частный случай t-эквивалентности – r-эквивалентность. Можно назвать пространства X и Y r-эквивалентными, если их пространства многочленов $R_p(X)$, $R_p(Y)$ топологически изоморфны как топологические кольца.

В заключение §10 приводятся некоторые результаты о связях топологических свойств пространств X и $R_p(X)$. Например,

Предложение 10.3. Пусть P – класс топологических пространств, содержащий вещественную прямую □ и замкнутый относительно следующих операций:

1) переход к образу элемента класса P при непрерывном отображении;

2) объединение счётного семейства элементов класса P;

3) декартово произведение конечного числа элементов класса P.

Тогда, если X принадлежит P , то и $R_p(X)$ принадлежит P.

Следствие 10.4. Пусть пространство X обладает одним из следующих свойств:

1) X σ-компактно;

2) X линделёфово Σ-пространство;

3) X^n линделёфово для каждого натурального n;

4) X сепарабельно.

Тогда и пространство $R_p(X)$ обладает тем же свойством.

Литература

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973.

2. Архангельский А.В. Принцип τ-аппроксимации и признак равенства размерности бикомпактов // ДАН СССР. 1980, Т. 252. №4. С. 777 – 780.

3. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

4. Граев М.И. Свободные топологические группы // Известия АН Сер. матем. 1948, №12. С.279 – 324.

5. Гулько С.П. О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова. АН СССР. 1992. Т. 193. С. 82 – 88.

6. Гулько С.П., Хмылёва Т.Е. Компактность не сохраняется отношением t-эквивалентности // Мат. заметки. 1986, Т. 39, №6. С. 895 – 903.

7. Замбахидзе Л.Г. О соотношениях между размерностными и кардинальнозначными функциями пространств, погружаемых в пространства специального типа // Сообщения АН Грузинской ССР. 1980, Т. 100, №3 С. 557 – 560.

8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.

9. Павловский Д.С. О пространствах непрерывных функций // ДАН СССР. 1980, Т. 253 №1 С. 38 – 41.

10. Павловский Д.С. О пространствах, имеющих линейно гомеоморфные пространства непрерывных функций в топологии поточечной сходимости // УМН. 1982, Т. 37, №2. С. 185 – 186.

11. Пестов В.Г. Совпадение размерностей dim l-эквивалентных топологических пространств // ДАН СССР. 1982, Т. 266, №3. С. 553 – 556.

12. Успенский В.В. Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций // УМН. 1982, Т. 37, №4. С. 183 – 184.

13. Ткачук В.В. Наименьшее подкольцо кольца $C_p(C_p(X))$, содержащее $X\cup\{1\}$, всюду плотно в $C_p(C_p(X))$ // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 1987, №1. С. 20 – 22.

14. Энгелькинг Р. Общая топология (Пер. с англ.). М.: Мир, 1986.

15. Arbit A.V. The Lindelöf number greater then continuum is *u*-invariant // Serdica Math. J. 2011, №37. P. 143 – 162.

16. Bouziad A. Le degré de Lindelöf est *l*-invariant // Proc. Amer. Math. Soc. 2001, V. 129, №3. P. 913 – 919.

17. Jan van Mill. The Infinite-Dimensional Topology of Functional Spaces. – ELSEVIER Amsterdam – Boston – London etc., 2002.

18. Okunev O. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // Topol. and its Appl. 1997, Vol 80. P. 177 – 188.

19. Okunev O. Tightness of compact spaces is preserved by the relation // Comment. Math. Univ. Carolinae. 2002, V. 43, №2. P. 335 – 342.

20. Tkachuk V.V. A C_p-Theory Problem Book. – Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

21. Nagata J. On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces // Osaka Math. J. 1949, V.1, №2. P.166 – 181.

22. Velichko N.V. The Lindelöf property is *l*-invariant // Topol. and its Appl. 1998, V. 89. P. 277 – 283.

Работы автора по теме диссертации

23. Лазарев В.Р. Один пример всюду плотного множества многочленов в $C_pC_p(X)$ // Международная конференция по математике и механике. Избранные доклады – Томск, 2003. С. 55 – 59.

24. Лазарев В.Р. О пространстве функционалов с конечным носителем // Бюллетень оперативной научной информации журнала "Вестник ТГУ", № 54. – Томск, 2005. С. 80 – 87

25. Лазарев В.Р. О модификации понятия функционала с конечным носителем // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 298. С. 119 – 120.

26. Лазарев В.Р. О полиномиальных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 28 – 32.

27. Лазарев В.Р. О некоторых аналогах *t*-эквивалентности // Всероссийская конференция по математике и механике (Томск, 22 – 25 сентября 2008 г.). Тезисы докладов. Томск: ТГУ, 2008. С. 101.

28. Лазарев В.Р. О некоторых отношениях эквивалентности на классе тихоновских пространств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 3. С. 5 – 10.

29. Лазарев В.Р. О некоторых топологических свойствах кольца многочленов в $C_pC_p(X)$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1. С. 34 –38.

30. Гулько С.П., Лазарев В.Р., Хмылёва Т.Е. О взаимной «ортогональности» классов пространств $C_p(X)$ и $L_p(Y)$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1. С. 15 – 19.