

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие

Часть III

Под ред. доктора физико-математических наук,
профессора А.В. Старченко

Издание 2-е, исправленное и дополненное

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям высшего профессионального образования
010101 – «математика» и 010901 – «механика»*

Томск
2011

УДК 519.6
ББК 22.193
М 52

М 52 **Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д.**
Методы приближенных вычислений: Учебное пособие. –
2-е изд., испр. и доп. – Томск: Томский государственный
университет, 2011. – Ч. III. – 184 с.

ISBN 978-5-94621-326-4

В учебном пособии рассматриваются разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Подробно анализируется теория метода сеток на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Исследуется применение теории метода сеток к решению краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Освещены вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости явных и неявных разностных схем. Приводится метод установления для численного решения задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа. Даются методы решения интегральных уравнений, а также примеры задач, которые приводятся к таким уравнениям.

Для студентов математических и инженерных специальностей вузов, аспирантов и научных работников.

УДК 519.6
ББК 22.193

Рецензент –
доктор физико-математических наук, профессор В.А. Вшивков

ISBN 978-5-94621-326-4

© Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д., 2011
© Томский государственный университет, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из пяти глав.

В первой главе рассматриваются разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Подробно изучается теория метода сеток на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Теория метода сеток решения краевых задач для уравнений параболического типа дается во второй главе. В ней на примерах первой и третьей краевых задач изучаются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.

В третьей главе приводится метод установления для численного решения задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа. Исследуется скорость сходимости явного метода установления с применением теории рядов Фурье.

Четвертая глава посвящена разностным методам численного решения уравнений гиперболического типа. На примере волнового уравнения исследуются вопросы аппроксимации и устойчивости разностных схем.

Методы решения интегральных уравнений, а также примеры задач, которые приводят к таким уравнениям, изучаются в пятой главе.

Пособие содержит подробный разбор примеров решения соответствующих задач. В конце каждой главы учебного пособия даются варианты заданий и список цитируемой литературы.

Авторы выражают искреннюю благодарность аспирантам ММФ ТГУ О.С. Осипову и С.А. Проханову за компьютерный набор и правку текста пособия, а также коллективу кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета за поддержку.

1. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

1.1. Типы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Постановка граничных задач

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют широкий круг приложений в математической физике, технике, акустике и других областях знаний. Они описывают более многообразные и сложные процессы, чем обыкновенные дифференциальные уравнения. Для них характерны значительное разнообразие в постановке начальных и граничных задач и большая размерность. Чаще всего получить решение для таких уравнений в явном виде не удастся, а если это возможно для некоторых уравнений, то формула часто оказывается достаточно сложной и требует больших вычислений. Поэтому для решения дифференциальных уравнений в частных производных очень эффективными являются приближенные методы. Среди них можно выделить метод сеток, вариационные методы и метод интегральных соотношений [1].

В данном разделе основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка и методу сеток. Выбор предмета исследования объясняется тем, что на примере таких уравнений легче проследить идеи приближенных методов.

Дадим классификацию линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [1, 2]. Пусть $u(x, y)$ – функция независимых переменных x, y . Предположим, что переменные x, y меняются в некоторой выпуклой области G , ограниченной кусочно-гладким контуром Γ .

Определение 1. Говорят, что в области G задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(x, y)$, если для любой точки (x, y) из области G имеет место соотношение

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + \\ + l(x, y)u_y + g(x, y)u(x, y) = f(x, y),$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $l(x, y)$, $g(x, y)$ – коэффициенты уравнения, $f(x, y)$ – свободный член уравнения. Эти функции известны, и считается, что они определены в замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma$.

Введем величину $\delta(x, y)$ по формуле

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y) \cdot c(x, y). \quad (1.1)$$

Определение 2. Говорят, что в области G уравнение $Lu = f$ имеет эллиптический, гиперболический или параболический тип, если в любой точке (x, y) из G выполняется соответственно

$$\delta(x, y) < 0, \delta(x, y) > 0, \delta(x, y) = 0.$$

В зависимости от типа дифференциального уравнения по-разному ставятся граничные условия, связанные с ним. Задание граничных условий предназначено для того, чтобы из семейства всех функций, удовлетворяющих уравнению $Lu = f$, выделить одну-единственную функцию – решение.

Для уравнений эллиптического типа распространенными являются условия следующих трех видов:

1) *граничные условия первого рода* состоят в задании значений искомой функции на границе Γ области G , т.е.

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(M), \quad (1.2)$$

где $M \in \Gamma$, $\varphi(M)$ – известна;

2) *граничные условия второго рода* заключаются в задании на контуре Γ значений нормальной производной от искомой функции $u(x, y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \varphi_1(M), \quad (1.3)$$

где $M \in \Gamma$, $\varphi_1(M)$ – определена;

3) *граничные условия третьего рода* комбинируют на Γ значения искомого решения и нормальной производной от него, т.е.

$$\left(\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u \right) \Big|_{\Gamma} = \varphi_2(M), \quad (1.4)$$

где $M \in \Gamma$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ – известные функции, такие что $(\alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y))|_{\Gamma} > 0$, $\varphi_2(M)$ – задана.

Задача нахождения решения уравнения $Lu = f$, удовлетворяющего условиям (1.2), (1.3), (1.4), называется соответственно первой, второй или третьей граничной задачей. Для случая первой граничной задачи искомое решение $u(x, y) \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$, для второй граничной задачи – $u(x, y) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, при решении третьей граничной задачи – $u(x, y) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$.

Отметим, что уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы, которые не меняются с течением времени.

Напротив, уравнения гиперболического и параболического типов описывают процессы, меняющиеся с течением времени, т.е. *нестационарные процессы*. Для этого типа уравнений переменную y для удобства обозначим буквой t (время).

Пусть область $\overline{G} = G \cup \Gamma$ будет прямоугольной, т.е.

$$G = \{(x, t), a < x < b, 0 < t < T\},$$

$$\Gamma = \{(x, t); x = a, x = b, t = 0, t = T\}.$$

В силу того что одним из методов решения первой граничной задачи для уравнений эллиптического типа является метод *установления* [1–3], дадим постановку задачи Коши и трех типов краевых условий для уравнения *параболического* типа.

В случае задачи Коши задается условие

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad (1.5)$$

где $a \leq x \leq b$, т.е. требуется в области $\overline{G} = \{(x, t), a \leq x \leq b, T \geq t \geq 0\}$ найти функцию $u(x, y) \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$, удовлетворяющую уравнению параболического типа

$$Lu = f$$

и при $t = 0$ – начальному условию (1.5).

При постановке соответствующей краевой задачи в области \overline{G} искомая функция $u(x, y) \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ удовлетворяет в G уравнению $Lu = f$, при $t = 0$ – начальному условию (1.5) и одному из граничных условий:

а) в случае *1-й краевой задачи*

$$u(a, y) = \varphi_1(t), \quad u(b, y) = \varphi_2(t); \quad (1.6)$$

б) для 2-й краевой задачи

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = g_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=b} = g_2(t); \quad (1.7)$$

в) для третьей краевой задачи

$$\begin{cases} \left(\sigma_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1(t) u \right) \Big|_{x=a} = \gamma_1(t), \\ \left(\tau_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_1(t) u \right) \Big|_{x=b} = \gamma_2(t), \end{cases} \quad (1.8)$$

$u(x, y) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, причем для $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$ выполняются условия

$$|\sigma_0(t)| + |\sigma_1(t)| > 0, \quad |\tau_0(t)| + |\tau_1(t)| > 0.$$

Заметим, что $\psi, \varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2, \gamma_1, \gamma_2$ – известные функции своих аргументов.

Примерами уравнений эллиптического и параболического типов являются соответственно уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

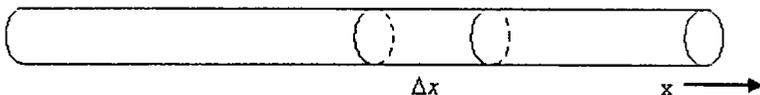
и уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Покажем, как уравнение

$$u_t = a \cdot u_{xx} \quad (1.9)$$

возникает в качестве математической модели распространения тепла в тонком стержне, вытянутом вдоль оси ox [4, с. 215–218].



Пусть стержень полностью теплоизолирован, за исключением концов, и поток тепла распространяется по нему только в направлении ox . Пусть s – площадь поперечного сечения стержня, а $u(x, t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t . Известно, что количество тепла, протекающего в единицу времени через сечение, которое перпендику-

лярно оси стержня, есть $(-k \cdot c \cdot u_x)$, где $k > 0$ – коэффициент теплопроводности. Тогда если градиент температуры $u_x < 0$, т.е. если температура слева выше, чем справа, то в полном соответствии с интуитивными представлениями тепло через это сечение будет течь слева направо. Рассмотрим элемент стержня длины Δx . В единицу времени в этот элемент через сечение x втекает количество тепла, равное величине $(-k c u_x)|_x$, и вытекает через сечение $x + \Delta x$ количество тепла $(-k c u_x)|_{x+\Delta x}$. Другими словами, количество тепла в элементе длины Δx изменяется на величину

$$q = (-k c u_x)|_x - (-k c u_x)|_{x+\Delta x}.$$

Далее, из элементарной физики известно, что количество тепла, которым обладает элемент, пропорционально его массе и температуре и равно $s c \Delta x \rho u$, где s – удельная теплоемкость материала стержня, ρ – плотность стержня, т.е. масса в единице объема. Получаем, что производная по времени от количества тепла в элементе стержня длины Δx равна q , т.е.

$$s c \Delta x \rho u_t = (k c u_x)|_{x+\Delta x} - (k c u_x)|_x. \quad (1.10)$$

Переходя в (1.10) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, будем иметь

$$u_t = \frac{1}{s \cdot \rho} \cdot (k \cdot u_x)_x. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) сводится к (1.9), если k не зависит от x . При этом $a = k / (s \cdot \rho)$.

Для выделения единственного решения уравнения (1.9) необходимо задать некоторые начальные и граничные условия. Рассмотрим их. Допустим, что длина стержня равна 1 и его левый конец находится в точке $x = 0$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известно распределение $\psi(x)$ температуры в стержне, т.е.

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.12)$$

Допустим, что концы стержня поддерживаются при постоянной температуре

$$u(0, t) = \varphi_1, \quad u(1, t) = \varphi_2, \quad (1.13)$$

где φ_1, φ_2 – заданные константы. Соотношения (1.12)–(1.13) есть соответственно начальные и граничные условия. Следовательно, получили следующую физическую формулировку задачи: имеется стержень длины 1, концы которого поддерживаются при постоянных температурах φ_1, φ_2 ,

φ_2 . Начальное распределение $\psi(x)$ температуры вдоль стержня известно. Требуется найти температуру $u(x, t)$ любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$.

Описанная постановка задачи допускает некоторые варианты. Изменяя граничные условия или само уравнение, можно моделировать распределение температуры в неоднородном стержне, когда $\rho = \rho(x)$, $k = k(x)$, $s = s(x)$. Тогда вместо (1.9) получается уравнение с переменными коэффициентами. Если, например, считать, что правый конец стержня изолирован, то поток тепла обратится в нуль и граничные условия (1.13) примут вид

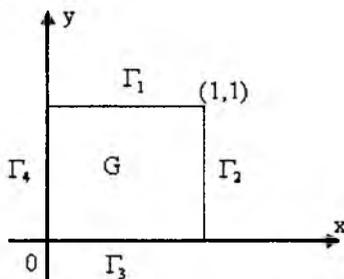
$$u(0, t) = \varphi_1, \quad u_x(1, t) = 0. \quad (1.14)$$

Возможны и другие варианты. Отметим, что уравнение теплопроводности (1.9) служит математической моделью и для целого ряда других физических процессов, например *диффузии* газа.

Вывод уравнения (1.9) распространяется на случаи двух и трех измерений. Так, в двумерном случае вместо (1.9) получается уравнение

$$u_t = a(u_{xx} + u_{yy}), \quad (1.15)$$

где $a = k/(s\rho)$, k , s , ρ не зависят от x , y , t . Уравнение (1.15) можно рассматривать как математическую модель изменения температуры $u(x, y, t)$ в тонкой плоской пластинке. Пусть для определенности пластинка представляет собой единичный квадрат $\bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.



Простейшим видом граничных условий для (1.15) являются условия Дирихле

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y) \quad \text{для } (x, y) \in \Gamma, \quad (1.16)$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, т.е. задание температуры на всех четырех сторонах пластинки. Для уравнения (1.15) начальное условие имеет вид

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y). \quad (1.17)$$

Здесь $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – известные функции.

Из физических соображений ясно, что при граничных условиях (1.16), каково бы ни было начальное распределение температуры (1.17), со временем должно установиться некоторое окончательное стационарное распределение. Оно определяется только граничными условиями (1.16). Во многих задачах определение такого стационарного состояния представляет основной интерес. Поскольку стационарное решение $u(x, y)$ не зависит от времени t , то оно должно удовлетворять уравнению (1.15) при $u_t = 0$, т.е. уравнению Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Уравнение Лапласа является примером эллиптического уравнения.

Таким образом, если в задаче о распределении температуры требуется найти только стационарное решение, то можно его находить двумя способами:

- 1) решать уравнение (1.15) относительно $u = u(x, y, t)$ при условиях (1.16), (1.17) до выхода на стационарный режим;
- 2) определять стационарное решение $u = u(x, y)$ уравнения Лапласа при условиях (1.16).

1.2. Метод сеток

1.2.1. Постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона

В выпуклой области G с гладкой границей Γ определяется функция $u(x, y) \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющая в G уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1.18)$$

а на границе области – условию Дирихле (первому условию)

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (1.19)$$

функции $\varphi(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные функции из пространства $C(\bar{G})$.

1.2.2. Замена дифференциальной задачи разностной

Сетка и сеточные функции. Классификация узлов

Для решения задачи (1.18), (1.19) применим метод сеток. Предположим, что граница области G имеет такой же вид, как в [5, с. 7] (рис. 1.1). Покроем область \bar{G} сеточной областью $\bar{\omega}_h$. Она получается, если проведем прямые

$$x^{(j_1)} = j_1 h_1, \quad j_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad h_1 > 0;$$

$$y^{(j_2)} = j_2 h_2, \quad j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad h_2 > 0.$$

Пересечение указанных прямых дает узлы сетки $(j_1 \cdot h_1, j_2 \cdot h_2)$, $j_1, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на плоскости (x, y) . Из рис. 1.1 видно, что сетка регулярна как по направлению ox , так и oy .

В [5, с. 7] отмечается, что среди узлов сеточной области будут различаться узлы 2 типов: *внутренние* ω_h и *граничные* γ_h , т.е. $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$.

В [5, с. 7] к числу внутренних относят те узлы сетки, которые попали внутрь области G , а к числу граничных принадлежат узлы, являющиеся точками пересечения прямых $x_1^{(j_1)} = j_1 h_1$, $x_2^{(j_2)} = j_2 h_2$; $j_1, j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, с границей Γ .

Заметим, что это не единственный вариант классификации узлов. В данной работе для удобства изложения метода сеток для уравнений эллиптического типа рассмотрим следующую классификацию узлов.

Определение 3. Назовем соответствующий узел сетки *соседним* по отношению к некоторому узлу $(j_1 h_1, j_2 h_2)$, если он отстоит от узла $(j_1 h_1, j_2 h_2)$ на расстоянии шага сетки в направлении соответствующей оси.

Определение 4. Узел $(j_1 h_1, j_2 h_2)$ назовем *внутренним*, если четыре соседних по отношению к нему узла принадлежат \bar{G} .

Узел $(j_1 h_1, j_2 h_2)$ назовем *граничным* узлом сетки, если, по крайней мере, один из соседних с ним узлов не принадлежит \bar{G} .

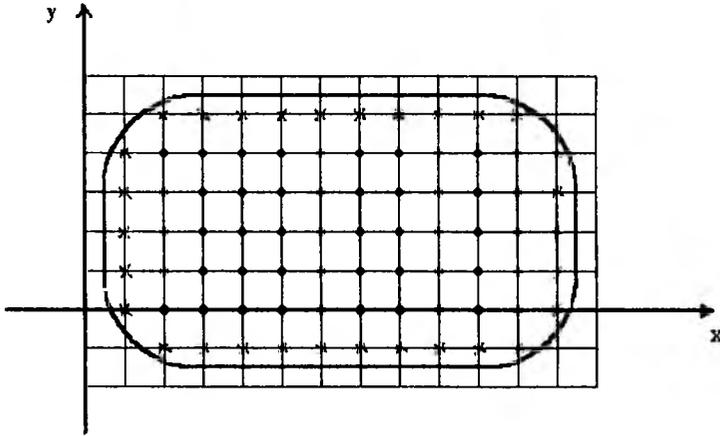


Рис. 1.1

На рис. 1.1 • – внутренние узлы сеточной области, а x – ее граничные узлы.

Заметим, что количество внутренних узлов, расположенных на соответствующих прямых $x^{(j_1)}$, $j_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, или $y^{(j_2)}$, $j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, будет неодинаковым для области, изображенной на рис. 1.1. Поэтому не можем указать, до какого значения меняются j_1 и j_2 .

Если область прямоугольная $\bar{G} = \{(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, то граничные узлы сеточной области γ_h совпадают с соответствующими узлами границы Γ . В этом случае число внутренних узлов ω_h , расположенных на прямых $x^{(j_1)}$, $j_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (или $y^{(j_2)}$, $j_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), будет одинаковым. Поэтому можно определить

$$\omega_h = \left\{ (x_{j_1}, y_{j_2}), x_{j_1} = j_1 h_1, j_1 = 0, \pm 1, \dots, \pm(N_1 - 1), \right.$$

$$\left. h_1 = \frac{b-a}{N_1}, y_{j_2} = j_2 h_2, j_2 = 0, \pm 1, \dots, \pm(N_2 - 1), h_2 = \frac{d-c}{N_2} \right\}.$$

В дальнейшем для области, изображенной на рис. 1.1, будем использовать следующее соглашение: не будем указывать количество внутренних узлов, а просто отметим, что соответствующий узел является внут-

реним. Например, $(j, k) \in \omega_h$. Вернемся к задаче (1.18)–(1.19). Заменяем область G непрерывного изменения аргументов (x, y) дискретным множеством точек $x_j = j \cdot h$, $y_k = k \cdot l$ (для удобства записи переобозначим $j_1 = j$, $j_2 = k$, $h_1 = h$, $h_2 = l$), $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Вместо функции $u(x, y)$ будем рассматривать сеточную функцию $u_{j,k}$, $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

*Разностная схема для внутренних и граничных узлов.
Исследование погрешности аппроксимации*

Выберем произвольный узел $(x_j, y_k) \in \omega_h$ или $(j, k) \in \omega_h$. Запишем уравнение (1.18) в узле (x_j, y_k) :

$$u_{xx}|_{(j,k)} + u_{yy}|_{(j,k)} = f_{j,k}. \quad (1.20)$$

Предположим, что решение задачи Дирихле (1.18)–(1.19) $u(x, y) \in C^4(\bar{G})$. Рассмотрим соседние с узлом (j, k) узлы $(x_j + h, y_k)$, $(x_j - h, y_k)$, $(x_j, y_k + l)$, $(x_j, y_k - l)$ или $(j+1, k)$, $(j-1, k)$, $(j, k+1)$, $(j, k-1)$.

Запишем значение решения $u(x, y)$ задачи (1.18)–(1.19) в указанных соседних точках и применим разложение по формуле Тейлора функции u в окрестности узла (x_j, y_k) :

$$u(x_j \pm h, y_k) = u(x_j, y_k) \pm \frac{h}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_k)} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_j, y_k)} \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{(x_j, y_k)} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_j \pm \theta_1 h, y_k)}, \quad 0 < \theta_1 < 1; \quad (1.21)$$

$$u(x_j, y_k \pm l) = u(x_j, y_k) \pm \frac{l}{1!} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_k)} + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_j, y_k)} \pm \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{(x_j, y_k)} + \frac{l^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_j, y_k \pm \tau_1 l)}, \quad 0 < \tau_1 < 1. \quad (1.22)$$

Из формул (1.21)–(1.22) легко получить так называемые разностные соотношения, аппроксимирующие производные I, II и т.д. порядков.

Из (1.21), если брать соседний узел $(x_j + h, y_k)$, очевидно, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j + h, y_k) - u(x_j, y_k)}{h} - \frac{h}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(\bar{x}, y_k)}, \quad \bar{x} = x_j + \theta_2 h, 0 < \theta_2 < 1.$$

Будем рассматривать в качестве соседнего узел $(x_j - h, y_k)$. Тогда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j, y_k) - u(x_j - h, y_k)}{h} + \frac{h}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_j + \theta_3 h, y_k)}, \quad -1 < \theta_3 < 0.$$

Если в качестве соседних взять узлы $(x_j + h, y_k)$ и $(x_j - h, y_k)$ и вычесть из разложения $u(x_j + h, y_k)$ соответствующее разложение $u(x_j - h, y_k)$, то получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j + h, y_k) - u(x_j - h, y_k)}{2h} + \frac{h^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{(x_j + \theta_4 h, y_k)}, \quad -1 < \theta_4 < 1.$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить из (1.22) формулы для аппроксимации производной $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j, y_k + l) - u(x_j, y_k)}{l} - \frac{l}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(x_j, y_k + \tau_2 l)}, \quad 0 < \tau_2 < 1;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j, y_k) - u(x_j, y_k - l)}{l} + \frac{l}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(x_j, y_k + \tau_3 l)}, \quad -1 < \tau_3 < 0;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j, y_k + l) - u(x_j, y_k - l)}{2l} - \frac{l^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_{(x_j, y_k + \tau_4 l)}, \quad -1 < \tau_4 < 1.$$

Для аппроксимации производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ воспользуемся формулой (1.21). Из нее очевидно следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j + h, y_k) - 2u(x_j, y_k) + u(x_j - h, y_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_j + \theta_5 h, y_k)}, \quad -1 < \theta_5 < 1. \quad (1.23)$$

Из (1.22), соответственно, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_j, y_k)} = \frac{u(x_j, y_k + l) - 2u(x_j, y_k) + u(x_j, y_k - l)}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_j, y_k + \tau_5 l)}, \quad -1 < \tau_5 < 1. \quad (1.24)$$

Подставим в (1.20) формулы (1.23) и (1.24). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j + h, y_k) - 2u(x_j, y_k) + u(x_j - h, y_k)}{h^2} + \\ & + \frac{u(x_j, y_k + l) - 2u(x_j, y_k) + u(x_j, y_k - l)}{l^2} - \\ & - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_j + \theta_5 h, y_k)} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_j, y_k + \tau_5 l)} = f(x_j, y_k), \quad (j, k) \in \omega_h. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из предположения о том, что $u(x, y) \in C^4(\bar{G})$, следует, что $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ и

$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ будут ограничены и соответствующие члены с этими производными в

(1.25) можно записать в виде $O(h^2 + l^2)$. Формула (1.25) представляет собой неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, причем число уравнений совпадает с количеством внутренних узлов сетки.

Если в (1.25) пренебречь членами $O(h^2 + l^2)$, то решением системы (1.25) будет сеточная функция $u_{j,k}$ или разностное решение, которое отличается от решения $u(x_j, y_k)$ задачи (1.18)–(1.19) на величину $O(h^2 + l^2)$.

Итак, для каждого внутреннего узла сетки ω_h можно записать разностную схему вида

$$\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{l^2} = f_{j,k}, (j,k) \in \omega_h. \quad (1.26)$$

Схема имеет шаблон «крест» [6, с. 6] и кроме значений решения во внутренних узлах содержит его значения в граничных узлах γ_h .

Если рассматривается область вида, изображенного на рис. 1.1, то кроме погрешности аппроксимации для внутренних узлов необходимо учитывать погрешность определения функции u в узлах γ_h , которые не попадают на Γ :

$$u|_{(j,k)} \approx \varphi|_{(j',k')}, \quad (1.27)$$

где

$$(j,k) \in \gamma_h, (j',k') \in \Gamma.$$

Если (j,k) совпадает с соответствующим узлом (j',k') , то значение u в узле $(j,k) \in \gamma_h$ определяется точно. Если (j,k) не совпадает с (j',k') , то в качестве узла (j',k') берут ближайший к узлу (j,k) узел в направлении соответствующей оси (рис. 1.2).

В соответствии с ситуацией, изображенной на рис. 1.2, очевидно, что $u|_B \approx \varphi|_M$, где $B \in \gamma_h$, $M \in \Gamma$; или $u|_{B'} \approx \varphi|_{M'}$, где $B' \in \gamma_h$, $M' \in \Gamma$.

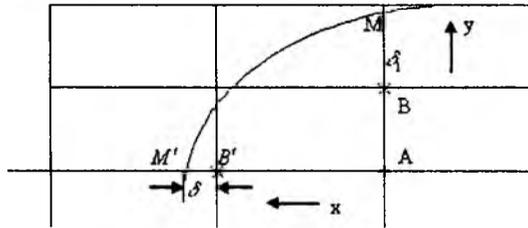


Рис. 1.2

Пусть узел $M = M(x_{j'}, y_{k'})$, тогда $B = B(x_{j'}, y_{k'} - \delta_1)$, где δ_1 – расстояние от узла B до узла M в направлении оси oy . Предположим, что $u(x, y) \in C^1(\bar{G})$. Применим разложение по формуле Тейлора функции $u(B)$ в окрестности узла M . Получим

$$u(x_{j'}, y_{k'} - \delta_1) = u(x_{j'}, y_{k'}) - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{j'}, \bar{y})} \cdot \frac{\delta_1}{1!} \quad (1.28)$$

или

$$u(B) = \varphi(M) - \frac{\delta_1}{1!} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_j, \bar{y})}, \text{ где } \bar{y} = y_k + \tau_\epsilon \cdot l, \quad -1 < \tau_\epsilon < 0. \quad (1.29)$$

Из (1.29) видим, что погрешность, которая получается, когда $u|_B \approx \varphi|_M$, имеет 1-й порядок относительно l , т.к. δ_1 соизмеримо с l . Аналогично можно показать, что погрешность вычисления $u|_B \approx \varphi|_M$ будет $O(h^1)$. Итак, в целом погрешность метода, которая складывается из погрешности для внутренних узлов и погрешности определения значений решения для узлов из γ_h , будет иметь первый порядок относительно h, l , т.е. $O(h+l)$.

Получим формулу Коллатца повышения порядка аппроксимации в граничных узлах. Точность вычисления $u_{j,k}$ при $(j, k) \in \gamma_h$ можно увеличить, если воспользоваться еще одним значением $u(x, y)$ в точке A (внутренний узел на рис. 1.2).

Имеем $M'(x_j, y_k)$, $B'(x_j - \delta, y_k)$, $A'(x_j - h - \delta, y_k)$, где δ – расстояние от узла B' до точки M' . Тогда

$$u(B') = u(x_j - \delta, y_k) = \varphi(M') - \frac{\delta}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M'} + \frac{\delta^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\tilde{M}}, \quad (1.30)$$

где \tilde{M} – некоторая точка между M' и B' ,

$$u(A) = u(x_j - \delta - h, y_k) = \varphi(M') - \frac{(\delta + h)}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M'} + \frac{(\delta + h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\tilde{M}}, \quad (1.31)$$

где \tilde{M} – некоторая точка между точками M' и A .

Исключая из (1.30) $\frac{\partial u}{\partial x}(M')$ с помощью формулы (1.31), получим

$$u(B') = \frac{h \cdot \varphi(M') + \delta \cdot u(A)}{h + \delta} + O(h^2). \quad (1.32)$$

Отбрасывая в (1.32) величину $O(h^2)$, получим разностное граничное условие, аппроксимирующее граничное условие (1.19) в узле $(j, k) \in \gamma_h$ с погрешностью порядка $O(h^2)$:

$$u_{j,k} = \frac{h \cdot \varphi(M') + \delta \cdot u_{j-1,k}}{h + \delta}. \quad (1.33)$$

Формулы (1.27) и (1.33) можно записать для любого узла $(j, k) \in \gamma_h$. Таким образом, если в практических расчетах использовать систему разностных уравнений (1.26), (1.33), то погрешность определения значений решения на сетке $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ будет иметь порядок $O(h^2 + l^2)$.

1.2.3. Исследование корректности постановки разностной задачи

Исследуем, является ли разностная задача (1.26), (1.27) корректно поставленной. Воспользуемся определением корректности из [7, с. 290], введенным по аналогии со случаем дифференциальных уравнений. Предварительно отметим, что разностная задача (1.26), (1.27) может быть записана в компактном виде [5]:

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.34)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} L_h^{(1)} u^{(h)} \\ L_h^{(2)} u^{(h)} \end{cases} \equiv \begin{cases} \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{l^2}, & (j, k) \in \omega_h, \\ u_{j,k}, & (j, k) \in \gamma_h, \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f_{j,k}, & (j, k) \in \omega_h, \\ \varphi_{j,k}, & (j, k) \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.35)$$

Здесь $u^{(h)} \in U_h$, $f^{(h)} \in F_h$, U_h , F_h – пространства сеточных функций решений и правых частей.

Определение 5. Разностная схема (1.34) называется корректно поставленной, если:

1) ее решение существует и единственно при любых правых частях $f^{(h)} \in F_h$;

2) существует постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от h и такая, что при любых $f^{(h)} \in F_h$ справедлива оценка

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq M_1 \cdot \|f^{(h)}\|_{F_h}. \quad (1.36)$$

Свойство 2, означающее непрерывную зависимость, равномерную относительно h , решения разностной задачи от правой части, называется *устойчивостью разностной схемы*.

Итак, согласно определению 5 исследование корректности задачи (1.26), (1.27) предполагает доказательство существования и единственности решения и выполнения неравенства (1.36).

Поскольку разностная схема представляет собой систему разностных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, то решение задачи существует. Однозначная разрешимость разностной задачи следует из теоремы, получившей название «принцип максимума» [1, с. 185]. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема (принцип максимума). Каждое решение разностного уравнения

$$L_h^{(1)} u^{(h)} \Big|_{(j,k)} = 0, \quad (j, k) \in \omega_h,$$

принимает свое наибольшее и наименьшее значение в некоторых точках γ_h .

С доказательством теоремы можно познакомиться в [1, с. 184–185].

Применим теперь принцип максимума к доказательству однозначной разрешимости разностной схемы (1.34), (1.35). Допустим, что разностная задача имеет два решения $u_1^{(h)}$ и $u_2^{(h)}$. Тогда $z^{(h)} = u_1^{(h)} - u_2^{(h)}$ удовлетворяет однородной разностной задаче $L_h z^{(h)} = 0$, в которой $f_{j,k} = 0$, $\phi|_{\gamma_h} = 0$.

Покажем, что $z^{(h)} \equiv 0$. Тогда (1.34), (1.35) будет иметь единственное решение. Если бы $z_h \neq 0$, то тогда свое наибольшее и наименьшее значение z_h по теореме принимала бы на γ_h . Но $z^{(h)} \equiv 0$ на γ_h . Значит, и всюду в $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ будет $z^{(h)} = u_1^{(h)} - u_2^{(h)} \equiv 0$, т.е. разностная задача (1.26), (1.27) однозначно разрешима.

В [1, с. 186–188] показывается, что неравенство (1.36) справедливо, если нормы в пространствах U_h и F_h ввести по правилу

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{\omega_h} |u_{j,k}|, \quad \|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{\omega_h} |f_{j,k}| + \max_{\gamma_h} |\phi_{j,k}|.$$

При этом константа M_1 из (1.36) имеет следующий вид:

$$M_1 = \max \left\{ 1, \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \right\},$$

где a, b определяются при построении мажоранты для сеточной функции $u^{(h)}$ по правилу Гершгорина [1, с. 186–188].

Итак, проведенные выше исследования позволяют сделать вывод о корректности разностной задачи.

1.2.4. О методах решения систем разностных уравнений

Перепишем разностные уравнения (1.26), записанные для внутренних узлов, в виде:

$$A_{j,k}u_{j+1,k} + B_{j,k}u_{j,k} + C_{j,k}u_{j-1,k} + D_{j,k}u_{j,k+1} + E_{j,k}u_{j,k-1} = f_{j,k}, \quad (1.37)$$

где

$$A_{j,k} = \frac{1}{h^2}, \quad B_{j,k} = -\frac{2}{h^2} - \frac{2}{l^2}, \quad C_{j,k} = \frac{1}{h^2}, \quad D_{j,k} = \frac{1}{l^2}, \quad E_{j,k} = \frac{1}{l^2},$$

$(j, k) \in \omega_h$, а затем разрешим (1.37) относительно $u_{j,k}$.

Получим

$$u_{j,k} = \frac{f_{j,k}}{B_{j,k}} - \frac{A_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j+1,k} - \frac{C_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j-1,k} - \frac{D_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j,k+1} - \frac{E_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j,k-1} \quad (1.38)$$

для любого узла $(j, k) \in \omega_h$.

В случае, когда область \bar{G} – прямоугольник, систему разностных уравнений (1.38) можно решать с помощью прямых методов [8], или специально разработанным методом – *методом матричной прогонки* [1, с. 188-191]. Значения решения в узлах $(j, k) \in \gamma_h$ в этом случае определяются из граничных условий Дирихле (1.19).

Если область \bar{G} имеет вид, изображенный на рис. 1.1, то система разностных уравнений (1.38) имеет число уравнений, совпадающее с количеством внутренних узлов, а неизвестных $u_{j,k}$ будет больше. В их число будут входить также значения $u_{j,k}$ для узлов $(j, k) \in \gamma_h$. Чтобы замкнуть систему (1.38), добавляем к ней разностные граничные условия вида (1.27) или (1.33).

Для решения полученной системы разностных уравнений рекомендуется использовать итерационные методы [2, с. 431–434], например метод простой итерации [2, с. 432–433]. Применяя к решению системы разностных уравнений (1.38), (1.33) метод простой итерации, получаем следующие итерационные формулы:

$$u_{j,k}^{(m+1)} = \frac{f_{j,k}}{B_{j,k}} - \frac{A_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j+1,k}^{(m)} - \frac{C_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j-1,k}^{(m)} - \frac{D_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j,k+1}^{(m)} - \frac{E_{j,k}}{B_{j,k}}u_{j,k-1}^{(m)} \quad (1.39)$$

для узла $(j, k) \in \omega_h$ и

$$u_{j,k}^{(m+1)} = \frac{h \cdot \varphi(M') + \delta \cdot u_{j-1,k}^{(m)}}{h + \delta} \quad (1.40)$$

для узла $(j, k) \in \gamma_h$. Здесь $m = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации.

Чтобы осуществить итерационный процесс по формулам (1.39), (1.40), необходимо задать начальные приближения для значений решения во внутренних и граничных узлах. Это можно сделать несколькими способами. Например, в качестве $u_{j,k}^{(0)}$ для узла $(j, k) \in \gamma_h$ возьмем значение $u_{j',k'}$ для узла $(j', k') \in \Gamma$ из граничного условия Дирихле, причем в формуле (1.40) узел (j', k') – граничный узел Γ , ближайший к узлу $(j, k) \in \gamma_h$ в направлении соответствующей оси. Далее для узла $(j, k) \in \omega_h$ можно принять

$$u_{j,k}^{(0)} = \frac{u_{\min} + u_{\max}}{2},$$

где

$$u_{\min} = \min_{j',k' \in \Gamma} u_{j',k'}; \quad u_{\max} = \max_{j',k' \in \Gamma} u_{j',k'},$$

т.е. при задании $u_{j,k}^{(0)}$ в узле $(j, k) \in \omega_h$ должен выполняться принцип максимума (минимума).

После задания $u_{j,k}^{(0)}$ для всех $(j, k) \in \bar{\omega}_h$ по формулам (1.39), (1.40) находим $u_{j,k}^{(1)}$, $(j, k) \in \bar{\omega}_h$, затем определяем $u_{j,k}^{(2)}$ и т.д. Счет продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\max_{(j,k) \in \omega_h} |u_{j,k}^{(m+1)} - u_{j,k}^{(m)}| < \varepsilon$$

и полученное решение не будет удовлетворять разностной схеме. Как показано в [2, с. 431–433], процесс простой итерации, определяемый формулами (1.39), (1.40), сходится при любом начальном приближении. Пример, иллюстрирующий изложенный материал, будет рассмотрен ниже.

1.2.5. Пример решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Проиллюстрируем применение изложенной выше теории на примере.

Пример. Требуется найти функцию $u(x, y) \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.41)$$

для $(x, y) \in G$ и на границе Γ области G условию

$$u(x, y)|_{\Gamma} = x^2 \cdot y^2. \quad (1.42)$$

Здесь область G представляет собой внутренность круга радиуса 4, т.е.

$$G = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < 16\},$$

а граница Γ – окружность радиуса 4, т.е.

$$\Gamma = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 16\}.$$

Решение. Задачу (1.41), (1.42) запишем в операторном виде

$$Lu = f, \quad (1.43)$$

где L – линейный дифференциальный оператор, действующий на функцию u по правилу

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x, y) \in G, \\ u(x, y), & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.44)$$

а правая часть f имеет вид

$$f \equiv \begin{cases} 0, & (x, y) \in G, \\ x^2 y^2, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (1.45)$$

Поставленную задачу (1.41), (1.42) или (1.43)–(1.45) будем решать методом сеток [9]. Для этих целей покроем расчетную область $\bar{G} = G \cup \Gamma$ ортогональной сеткой. Выбирая шаги $h_1 = h_2 = h$ по осям абсцисс и ординат и проводя прямые, параллельные осям координат, получим сетку

$$\bar{\omega}_h = \{(x_j, y_k), x_j = j \cdot h, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, y_k = k \cdot h, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Так как оси координат являются осями симметрии для задачи (1.41)–(1.42), то её решение достаточно найти в области $\bar{G}_1 = G_1 \cup \Gamma_1$, где

$$G_1 = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 < 16\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 16\}.$$

На рис. 1.3 представлена сетка, построенная в \bar{G}_1 для $h = 1$.

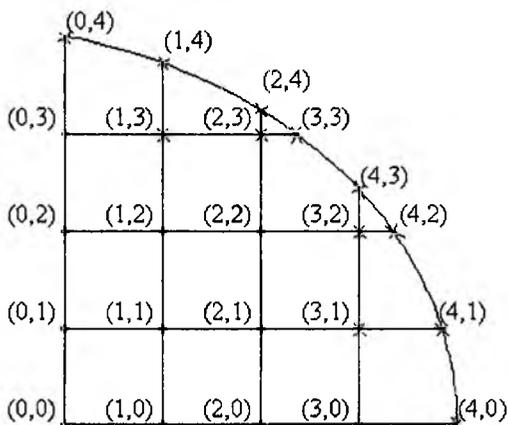


Рис. 1.3

Точки пересечения линий сетки между собой и с границей называем узлами сетки. Узлы, попавшие на границу и отстоящие от неё менее, чем на шаг h , называем граничными. Их совокупность обозначаем через γ_h и на рис. 1.3 отмечаем «крестиками». Остальные узлы называем внутренними, а их совокупность обозначаем через ω_h . На рис. 1.3 внутренние узлы выделены «кружочками». Нетрудно видеть, что в целом сетка $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ не является равномерной.

Следуя [5], функцию, определенную в узлах сетки $\bar{\omega}_h$, называем сеточной и в дальнейшем обозначаем так: $u^{(h)}$, $u_{j,k}$ – приближенное (численное) решение разностной задачи; $[u]_h$, $u(x_j, y_k)$ – значения точного решения в узлах сетки. Здесь j, k пробегает множество номеров узлов сетки.

Заменяя в задаче (1.41), (1.42) производные по формулам численного дифференцирования, получим следующую разностную задачу:

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.46)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{h^2}, & (x_j, y_k) \in \omega_h, \\ u_{j,k}, & (x_j, y_k) \in \gamma_h; \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0, & (x_j, y_k) \in \omega_h, \\ x_j^2 \cdot y_k^2, & (x_j, y_k) \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.47)$$

Определим порядок погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.41), (1.42) разностной задачей (1.46), (1.47) [5, с.11–13]. Для этой цели разложим $u(x_{j\pm 1}, y_k)$, $u(x_j, y_{k\pm 1})$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_j, y_k) , ограничиваясь четвертой производной. Подставляя полученные выражения в (1.46), (1.47), находим, что погрешность аппроксимации $\delta f^{(h)}$ имеет представление

$$\delta f^{(h)} \equiv \begin{cases} \delta f_1^{(h)}, \\ \delta f_2^{(h)}, \end{cases}$$

где $\delta f_1^{(h)}$ – погрешность уравнения, $\delta f_2^{(h)}$ – погрешность граничного условия и

$$\delta f_1^{(h)} = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_j^{(1)}, y_k)} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_j, y_k^{(1)})},$$

$x_{j-1} < x_j^{(1)} < x_{j+1}$, $y_{k-1} < y_k^{(1)} < y_{k+1}$. Погрешность граничного условия $\delta f_2^{(h)}$ требует отдельного рассмотрения. Пусть имеется фрагмент границы (рис. 1.4).

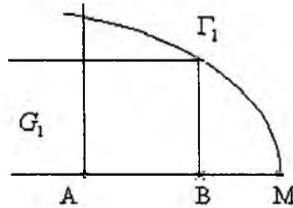


Рис. 1.4

По приведенной выше классификации здесь $A(x_{j-1}, y_k)$ – внутренний узел, $B(x_j, y_k)$, $M(x_j + \delta, y_k)$ – граничные узлы. Если граничное условие представить как

$$u_{j,k} = f(M), \quad M \in \Gamma_1,$$

т.е. переслать в граничный узел B значение решения с границы Γ_1 , то тогда

$$\delta f_2^{(h)} = \delta \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, y_k)}, \quad x_j < x_j^* < x_j + \delta.$$

Итак, если $u(x, y) \in C^{4,4}(\bar{G})$, то $|\delta f_1^{(h)}| \leq k \cdot h^2$, а $|\delta f_2^{(h)}| \leq Q \cdot h$. Чтобы повысить порядок погрешности аппроксимации в граничных узлах до второго, будем использовать формулу Коллатца [1, с. 14–16]:

$$u(x_j, y_k) = \frac{h \cdot u(x_j + \delta, y_k) + \delta \cdot u(x_{j-1}, y_k)}{h + \delta} + O(h^2). \quad (1.48)$$

Тогда погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1.41), (1.42) разностной схемой (1.46), (1.47), где на границе применяется формула (1.48), будет иметь в целом второй порядок относительно h . Другими словами,

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = \max(|\delta f_1^{(h)}|, |\delta f_2^{(h)}|) = C \cdot h^2, \quad C = \text{const}.$$

Для исследования корректности постановки разностной задачи (1.46)–(1.48) требуется показать, что её решение существует и единственно в некотором классе U_h сеточных функций – решений с введенной нормой $\|\cdot\|_{U_h}$ и при этом выполняется неравенство [1, с. 16–17]:

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq M_1 \cdot \|f^{(h)}\|_{F_h}. \quad (1.49)$$

Здесь $M_1 = \text{const}$, не зависит от шага h и правой части $f^{(h)}$. Так как разностная задача (1.46)–(1.48) представляет собой систему уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, то решение такой системы существует. Единственность решения вытекает из теоремы «принцип максимума» [9, с. 17–18].

Докажем выполнение неравенства (1.49), т.е. устойчивость разностной схемы. Для этого определим нормы в пространствах сеточных функций U_h и F_h следующим образом:

$$\begin{aligned} \|u^{(h)}\|_{U_h} &= \max_{\omega_h} |u_{j,k}|, \\ \|u^{(h)}\|_{F_h} &= \max_{\omega_h} |f_{j,k}| + \max_{\Gamma_h} |f_{j,k}|. \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере $f_{j,k}|_{\omega_h} = 0$.

Тогда

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{\Gamma_h} |f_{j,k}|.$$

Введем

$$z^{(h)} = \max_{\gamma_h} |f_{j,k}|.$$

Будем иметь

$$(u^{(h)} + z^{(h)})|_{\gamma_h} = f_{j,k}|_{\gamma_h} + \max_{\gamma_h} |f_{j,k}| \geq 0 \quad (1.50)$$

и

$$L_h(u^{(h)} + z^{(h)})|_{\omega_h} = 0.$$

Тогда согласно теореме «принцип максимума» заключаем, что сеточная функция $u^{(h)} + z^{(h)}$ принимает наименьшее и наибольшее значение в точках γ_h . Согласно (1.50) на γ_h выполнено неравенство

$$u^{(h)} + z^{(h)} \geq 0.$$

Значит, $u^{(h)} + z^{(h)} \geq 0$ всюду в $\bar{\omega}_h$.

Аналогично можно показать, что $(u^{(h)} - z^{(h)}) \leq 0$ на $\bar{\omega}_h$. Следовательно, на $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ справедливо, что

$$u^{(h)} + z^{(h)} \geq 0,$$

$$u^{(h)} - z^{(h)} \leq 0$$

или

$$|u^{(h)}| \leq z^{(h)},$$

т.е.

$$|u^{(h)}| \leq \max_{\gamma_h} |f_{j,k}| = \|f^{(h)}\|_{F_h}.$$

Отсюда получаем

$$\max_{\bar{\omega}_h} |u_{j,k}| \leq \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

или

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq \|f^{(h)}\|_{F_h}.$$

Таким образом, устойчивость рассматриваемой схемы (1.46)–(1.48) показана с константой $M_1 = 1$.

В случае $h = 1$ выпишем систему разностных уравнений (1.46)–(1.48) в явном виде. Для этой цели занумеруем точки сетки, представленной на рис. 1.3, начиная с номера (0,0) и шагая слева направо и снизу вверх. Будем иметь множество номеров узлов сетки: (0,0), (1,0), (2,0), ..., (0,1), (1,1), ..., (2,4).

Система разностных уравнений для определения значений приближенного решения в узлах сетки будет иметь следующий вид:

а) для внутренних узлов сетки:

$$\begin{aligned}
 u_{00} &= \frac{1}{2}(u_{1,0} + u_{0,1}); \\
 u_{j,0} &= \frac{1}{4}(u_{j+1,0} + u_{j-1,0} + 2u_{j,1}), \quad j = 1, 2, 3; \\
 u_{0,k} &= \frac{1}{4}(2u_{1,k} + u_{0,k-1} + u_{0,k+1}); \quad k = \overline{1, 3}; \\
 u_{j,k} &= \frac{1}{4}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1}), \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2;
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

б) для граничных узлов сетки:

$$\begin{aligned}
 u_{4,0} &= x^2 y^2 \Big|_{(4,0)} = 0; & u_{3,3} &= x^2 y^2 \Big|_{(\sqrt{7}, 3)}; \\
 u_{0,4} &= x^2 y^2 \Big|_{(0,4)} = 0; & u_{2,4} &= x^2 y^2 \Big|_{(2, \sqrt{12})}; \\
 u_{4,1} &= x^2 y^2 \Big|_{(\sqrt{15}, 1)}; & u_{1,4} &= x^2 y^2 \Big|_{(1, \sqrt{15})}; \\
 u_{4,2} &= x^2 y^2 \Big|_{(\sqrt{12}, 2)}; \\
 u_{4,3} &= x^2 y^2 \Big|_{(3, \sqrt{7})}; \\
 u_{1,3} &= ug(u_{1,4}, u_{1,2}, \sqrt{15} - 3); \\
 u_{2,3} &= ug(u_{2,4}, u_{2,2}, \sqrt{12} - 3); \\
 u_{3,2} &= ug(u_{4,2}, u_{2,2}, \sqrt{12} - 3); \\
 u_{3,1} &= ug(u_{4,1}, u_{2,1}, \sqrt{15} - 3).
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Здесь $ug(a, b, d) = \frac{h \cdot a + d \cdot b}{h + d}$.

Вводя номер итерации $m \geq 0$, на основании формул (1.51)–(1.52) получаем следующие итерационные формулы, позволяющие с заданной точностью ε определить значения численного решения в точках $\overline{\omega}_h$:

$$\begin{aligned}
 u_{00}^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(u_{1,0}^{(m)} + u_{0,1}^{(m)}); \\
 u_{j,0}^{(m+1)} &= \frac{1}{4}(u_{j+1,0}^{(m)} + u_{j-1,0}^{(m)} + 2u_{j,1}^{(m)}); \quad j = 1, 2, 3; \\
 u_{0,k}^{(m+1)} &= \frac{1}{4}(2u_{1,k}^{(m)} + u_{0,k-1}^{(m)} + u_{0,k+1}^{(m)}); \quad k = 1, 2, 3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j,k}^{(m+1)} &= \frac{1}{4}(u_{j+1,k}^{(m)} + u_{j-1,k}^{(m)} + u_{j,k+1}^{(m)} + u_{j,k-1}^{(m)}), j = 1, 2; k = 1, 2; \\
u_{1,3}^{(m+1)} &= ug(u_{1,4}, u_{1,2}^{(m)}, \sqrt{15} - 3); \\
u_{2,3}^{(m+1)} &= ug(u_{2,4}, u_{2,2}^{(m)}, \sqrt{12} - 3); \\
u_{3,2}^{(m+1)} &= ug(u_{4,2}, u_{2,2}^{(m)}, \sqrt{12} - 3); \\
u_{3,1}^{(m+1)} &= ug(u_{4,1}, u_{2,1}^{(m)}, \sqrt{15} - 3), m \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Для применения формул (1.53) в численных расчетах полагаем $u_{j,k}^{(0)} = 0$ для $(x_j, y_k) \in \bar{\omega}_h$. Вычисления организуем следующим образом:

1) при $m = 0$ по формулам для граничных узлов сетки рассчитываем значения решения $u_{j,k}$ в точках границы;

2) по формулам Коллатца (последние четыре формулы в (1.53)) определяем значения $u_{j,k}^{(m+1)}$ в граничных узлах;

3) с помощью формул (1.53) находим решение $u_{j,k}^{(m+1)}$ во внутренних узлах сетки $(x_j, y_k) \in \omega_h$;

4) вычисляем $\max_{(x_j, y_k) \in \omega_h} |u_{j,k}^{(m+1)} - u(x_j, y_k)| = \rho$. Если $\rho < \varepsilon$, то вычисления прекращаем. Если $\rho \geq \varepsilon$, то полагаем $u_{j,k}^{(m)} = u_{j,k}^{(m+1)}$ и затем продолжаем вычисления со второго пункта.

По описанному алгоритму была составлена программа, по которой затем проводились численные расчеты. Результаты представлены ниже в виде таблиц. В табл. 1.1 приведены значения приближенного решения в узлах сетки $\bar{\omega}_h$ при $h = 1$. Значения точного решения

$$u(x, y) = x^2 y^2 + \frac{1}{8}(256 - (x^2 + y^2)^2); (x, y) \in \bar{G},$$

задачи (1.41)–(1.42), вычисленные в тех же узлах $(x_j, y_k) \in \bar{\omega}_h$, даны в табл. 1.2.

При $\varepsilon = 0,001$ процесс вычислений сходится за 73 итерации.

Как следует из табл. 1.1, 1.2, максимум модуля разности между точным решением и приближенным достигается в узле (3,1) и составляет при $h = 1$ величину 8,6082.

Таблица 1.1

$u_{0,0} = 24,0835$	$u_{1,0} = 24,0836$	$u_{2,0} = 22,6721$	$u_{3,0} = 15,6139$	$u_{4,0} = 0,0000$
$u_{0,1} = 24,0836$	$u_{1,1} = 24,7895$	$u_{2,1} = 25,4954$	$u_{3,1} = 19,8918$	$u_{4,1} = 15,0000$
$u_{0,2} = 22,6721$	$u_{1,2} = 25,4954$	$u_{2,2} = 34,6284$	$u_{3,2} = 43,7614$	$u_{4,2} = 48,0000$
$u_{0,3} = 15,6139$	$u_{1,3} = 19,8919$	$u_{2,3} = 43,7614$	$u_{3,3} = 63,0000$	$u_{4,3} = 63,0000$
$u_{0,4} = 0,0000$	$u_{1,4} = 15,0000$	$u_{2,4} = 48,0000$		

Таблица 1.2

$u_{0,0} = 32,0000$	$u_{1,0} = 31,8750$	$u_{2,0} = 30,0000$	$u_{3,0} = 21,8750$	$u_{4,0} = 0,0000$
$u_{0,1} = 31,8750$	$u_{1,1} = 35,5000$	$u_{2,1} = 32,8750$	$u_{3,1} = 28,5000$	$u_{4,1} = 11,8750$
$u_{0,2} = 30,0000$	$u_{1,2} = 32,8750$	$u_{2,2} = 40,0000$	$u_{3,2} = 46,8750$	$u_{4,2} = 46,0000$
$u_{0,3} = 21,8750$	$u_{1,3} = 28,5000$	$u_{2,3} = 46,8750$	$u_{3,3} = 72,5000$	$u_{4,3} = 97,8750$
$u_{0,4} = 0,0000$	$u_{1,4} = 11,8750$	$u_{2,4} = 46,0000$		

Вычисления проводились и при других значениях шага h . В силу громоздкости таблицы значений полученного при этом решения не приводятся. Укажем лишь, что при $h = 0,5$ максимум модуля разности между точным и приближенным решением равен 3,4198, а при $h = 0,25$ составляет 1,0562.

Процесс вычислений в первом случае ($h = 0,5$) сходится за 232 итерации, а во втором ($h = 0,25$) – за 780 итераций. Другими словами, при измельчении шага сетки наблюдается сходимость приближенного решения к точному, хотя при этом существенно возрастает время расчета.

1.3. Лабораторные задания

Задание. С помощью метода сеток решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Численное решение определить в области G с границей Γ , которая задается соответствующим образом в каждом варианте. Исследовать вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости численного решения к точному.

Вариант № 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 2 \cdot \ln|x+y|,$$

$$u|_{\Gamma} = 0, 5(x+y)^2,$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = -0,5x^2 + 3, 0 \leq x \leq \sqrt{6}, 0 \leq y \leq 3\}$.

Вариант № 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 2,$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-1,5x^2 + 2y^2},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = -0,15x^2 + 0,6, 0 \leq x \leq 2, -0,6 \leq y \leq 0,6\}$.

Вариант № 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 3,$$

$$u|_{\Gamma} = \sqrt{x^2 y^2 + 1},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = x^2 - 1, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

Вариант № 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 25,$$

$$u|_{\Gamma} = \sqrt{0,25x^2 + y^2},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = 0,25x^2, y \leq 2\}$.

Вариант № 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x},$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-0,5(x+y)^2},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = -0,5x^2 + 3, 0 \leq x \leq \sqrt{6}, 0 \leq y \leq 3\}$.

Вариант № 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,5,$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-xy},$$

$$\text{где } \Gamma = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \right\}.$$

Вариант № 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,1,$$

$$u|_{\Gamma} = -0,5x^2 + y^2,$$

$$\text{где } \Gamma = \left\{ (x, y) : y = -0,5x^2 + 1, 0 \leq x \leq \sqrt{2}, -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Вариант № 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,6,$$

$$u|_{\Gamma} = \sin(xy),$$

$$\text{где } \Gamma = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Вариант № 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-(x+y)},$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-(x+y)^2},$$

$$\text{где } \Gamma = \left\{ (x, y) : y = -0,5x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \right\}.$$

Вариант № 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,4,$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-0,4xy},$$

$$\text{где } \Gamma = \left\{ (x, y) : y = x^2 - 4, 0 \leq x \leq 2, -4 \leq y \leq 0 \right\}.$$

Вариант № 11

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,3,$$

$$u|_{\Gamma} = \sin(0,1xy),$$

где $\Gamma = \{(x, y): x^2 + (y^2 - 9) = 0, 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Вариант № 12

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,6,$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-x+y},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = x^2 - 4, 0 \leq x \leq 2, -4 \leq y \leq -1\}$.

Вариант № 13

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(0,1xy),$$

$$u|_{\Gamma} = e^{2x^2 - y^2},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = 0,5x^2 - 1, 0 \leq x \leq \sqrt{2}, -1 \leq y \leq 1\}$.

Вариант № 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,7,$$

$$u|_{\Gamma} = |\sin xy|,$$

где $\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}, -1 \leq y \leq \sqrt{2}\}$.

Вариант № 15

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,5,$$

$$u|_{\Gamma} = e^{xy},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = -x^2 + 0,2, 0 \leq x \leq \sqrt{0,2}, -1 \leq y \leq 0,2\}$.

Вариант № 16

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 1,$$

$$u|_{\Gamma} = e^{-0,3(x+y)},$$

где $\Gamma = \{(x, y): y = 0,5x^2 - 2, 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 0\}$.

Вариант № 17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 4,$$

$$u|_{\Gamma} = \cos(xy),$$

где $\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

Вариант № 18

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = 2x^2 - 4,$$

где $\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$.

Вариант № 19

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = 8 - \frac{26}{9}x^2,$$

где $\Gamma = \{(x, y): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$.

Вариант № 20

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = 2x^2 + 2x - 2y - 4,$$

где $\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$.

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 399 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1960. – Т. 2. – 620 с.
3. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1972. – 119 с.
4. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
5. Элементы теории разностных схем: Методические указания. – Томск: Изд-во ТГУ, 1992. – Ч. 1. – 17 с.
6. Элементы теории разностных схем: Методические указания. – Томск: Изд-во ТГУ, 1993. – Ч. 2. – 26 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
8. Точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений // Методические указания. – Томск: изд-во ТГУ, 1990. – 34 с.
9. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа: Методические указания. – Томск: Изд-во ТГУ, 1995. – Ч. 1. – 21 с.

2. МЕТОД СЕТОК РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1. Метод сеток решения задачи Коши

Пусть $u(x, y)$ – функция независимых переменных x, y . Предположим, что (x, y) меняются в некоторой области G , ограниченной кусочно-гладким контуром Γ .

Определение 1 [1, с. 142–144; 2, с. 692–693; 7, с. 373–376]. Говорят, что в области G задано линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для функции $u(x, y)$, если для любой точки (x, y) из области G имеет место соотношение

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2l(x, y)u_{xy} + b(x, y)u_{yy} + c(x, y)u_x + d(x, y)u_y + g(x, y)u(x, y) = f(x, y). \quad (2.1)$$

Формула (2.1) – *каноническая форма* записи линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Для проведения классификации уравнений вида (2.1) составим следующее соотношение:

$$\delta(x, y) = l^2(x, y) - a(x, y)b(x, y). \quad (2.2)$$

Определение 2. Говорят, что уравнение (2.1) в области G будет *параболического типа*, если для любой точки (x, y) из области G будет выполняться соотношение

$$\delta(x, y) = 0.$$

Уравнения параболического типа описывают *нестационарные процессы*. После замены дифференциальных уравнений и соответствующих краевых условий (если решается I, II или III крайняя задача) разностными уравнениями получаем, что соответствующий численный метод сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и основная проблема, возникающая при реализации численного метода, заключается в решении упомянутой системы.

Фактическое решение сеточных уравнений осуществляется шагами по времени, и если разностная схема *явная* [1, с. 148–149; 2, с. 732–733], то решение находится легко. Однако при этом может возникнуть явление *неустойчивости* вычислительного процесса к ошибкам округления, кото-

рое не позволяет получить приближенное решение с удовлетворительной точностью. Явление неустойчивости проявляется в том, что ошибки округления, допущенные при вычислениях на некотором временном слое, затем быстро возрастают по абсолютной величине и, как правило, сильно искажают приближенное решение. Поэтому для уравнений параболического типа проблема устойчивости [1, с. 151–154; 2, с. 733–736; 3, с. 491–495] является одной из основных, наряду с проблемой сходимости [4, с. 31–33].

При численном решении параболических уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями можно, кроме явных, использовать *неявные* разностные схемы. Последние в основном *абсолютно устойчивы* , но не всегда удобны для применения, т.к. требуют специальных методов для реализации (прогонки или какого-либо итерационного метода).

Вначале остановимся на вопросах замены параболических уравнений сеточными уравнениями, а также на вопросах устойчивости, сходимости и оценки качества явных и неявных разностных схем.

Дадим постановку *задачи Коши* для уравнения параболического типа. Для удобства дальнейшего изложения материала обозначим u через t (время).

Ищется функция $u(x, t) \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющая дифференциальной задаче [7, с. 377]:

$$Lu = F, \tag{2.3}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - g(x, t)u(x, t), \\ (x, t) \in G; \\ u(x, 0), x \in \Gamma; \end{cases}$$

$$F \equiv \begin{cases} f(x, t), \\ u_0(x); \end{cases}$$

$$G = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, 0 < t < \infty\},$$

$$\Gamma = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, t = 0\}.$$

Покроем область \bar{G} равномерной сеткой

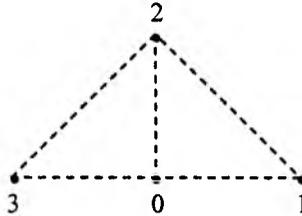
$$\bar{\omega}_m = \{(x_j, t_k) \mid x_j = jh, j = 0, \pm 1, +\dots; t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Рассмотрим два варианта решения задачи Коши:

- 1) вариант с использованием явной разностной схемы;
- 2) вариант, в котором применяется неявная разностная схема.

2.1.1. Построение явной и неявной разностных схем методом неопределенных коэффициентов

1. Построим явную разностную схему [6, с. 191–195] с шаблоном



методом неопределенных коэффициентов (МНК).

Цифрами 0, 1, 2, 3 обозначены номера узлов, входящих в шаблон. Координаты каждого узла следующие:

$$0(x_j, t_k); 1(x_j + h, t_k); 2(x_j, t_k + \tau); 3(x_j - h, t_k).$$

Запишем схему с неопределенными коэффициентами \hat{c}_i :

$$\sum_{i=0}^3 \hat{c}_i u_i = f_0 + O(\tau^2, h^3), \quad (2.4)$$

и распишем сумму из формулы (2.4):

$$\begin{aligned} & \bar{c}_0 u(x_j, t_k) + \bar{c}_1 u(x_j + h, t_k) + \bar{c}_2 u(x_j, t_k + \tau) + \bar{c}_3 u(x_j - h, t_k) = \\ & = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - g(x, t) u(x, t) \right) \Big|_{(x_j, t_k)} + \\ & \quad + O(\tau^2, h^3). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Разложим функцию u , входящую в левую часть (2.5), в окрестности узла (x_j, t_k) по формуле Тейлора, предполагая, что $u(x, t) \in C_2^3(G)$:

$$\begin{aligned} & \bar{c}_0 u(x_j, t_k) + \bar{c}_1 \left\{ u(x_j, t_k) + \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3) \right\} + \\ & \quad + \bar{c}_2 \left\{ u(x_j, t_k) + \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} \frac{\tau}{1!} + O(\tau^2) \right\} + \\ & \quad + \bar{c}_3 \left\{ u(x_j, t_k) - \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} - a(x_j, t_k) \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} - c(x_j, t_k) \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} - g(x_j, t_k) u(x_j, t_k) \right\}. \quad (2.6)$$

Приравнявая коэффициенты при u , а также при $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в левой и правой частях соотношения (2.6), получим

$$\begin{cases} \hat{c}_0 + \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 = -g_0, \\ \hat{c}_2 \tau = 1, \\ \hat{c}_1 h - \hat{c}_3 h = -c_0, \\ \hat{c}_1 \frac{h^2}{2} + \hat{c}_3 \frac{h^2}{2} = -a_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Отметим, что в (2.7) используются обозначения $g_0 = g(x_j, t_k)$, $c_0 = c(x_j, t_k)$ и $a_0 = a(x_j, t_k)$. Решая систему (2.7) относительно неизвестных коэффициентов \hat{c}_j , $j = \overline{0, 3}$, очевидно, будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{c}_0 &= -g(x_j, t_k) + 2 \frac{a(x_j, t_k)}{h^2} - \frac{1}{\tau}; \quad \hat{c}_1 = -\frac{c(x_j, t_k)}{2h} - \frac{a(x_j, t_k)}{h^2}; \quad \hat{c}_2 = \frac{1}{\tau}; \\ \hat{c}_3 &= -\frac{a(x_j, t_k)}{h^2} + \frac{c(x_j, t_k)}{2h}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя полученные значения \hat{c}_j , $j = \overline{0, 3}$, из (2.8) в (2.4), имеем

$$\begin{aligned} & \left(-g(x_j, t_k) + \frac{2a(x_j, t_k)}{h^2} - \frac{1}{\tau} \right) u(x_j, t_k) + \left(-\frac{c(x_j, t_k)}{2h} - \frac{a(x_j, t_k)}{h^2} \right) \times \\ & \times u(x_j + h, t_k) + \frac{1}{\tau} u(x_j, t_k + \tau) + \left(-\frac{a(x_j, t_k)}{h^2} + \frac{c(x_j, t_k)}{2h} \right) \times \\ & \times u(x_j - h, t_k) = f(x_j, t_k) + O(\tau^2, h^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

После несложных преобразований запишем явную разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a_j^k \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} - c_j^k \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} - g_j^k u_j^k = f_j^k, \\ j = 0, \pm 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Добавим к схеме (2.10) разностную аппроксимацию начального условия

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (2.11)$$

На рис. 2.1 показана сетка, в узлах которой ищется решение разностной задачи (2.10)–(2.11).

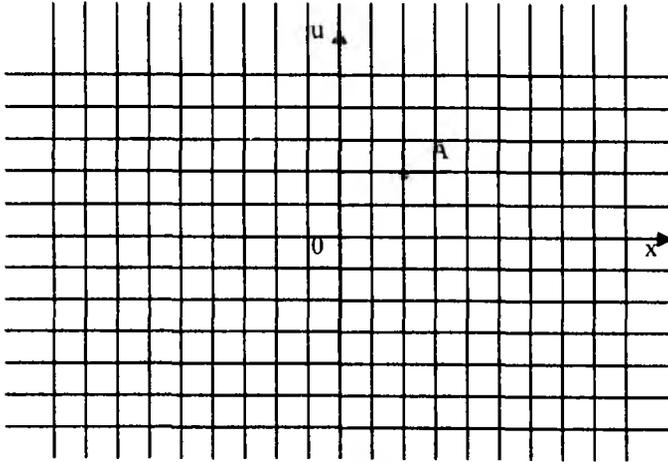


Рис. 2.1

A – узел сетки с координатами x_j, t_k . Решение задачи (2.10)–(2.11) находится слоями по времени.

Для определения значений решения разрешим (2.10) относительно u_j^{k+1} :

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \frac{\tau}{h^2} a_j^k (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \frac{\tau}{2h} c_j^k (u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) + \tau g_j^k u_j^k + \tau f_j^k, \quad j = 0, \pm 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

и добавим начальное условие

$$u_j^0 = u_0(x_j); \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (2.13)$$

Вначале определим значения u_j^0 из (2.13) на нулевом временном слое.

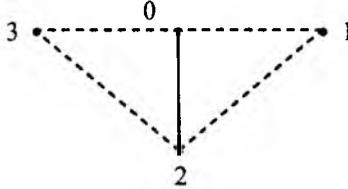
Далее, полагая $k = 0$, находим из (2.12):

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{\tau}{h^2} a_j^0 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) + \frac{\tau}{2h} c_j^0 (u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0) + \tau g_j^0 u_j^0 + \tau f_j^0,$$

$$j = 0, \pm 1, \dots$$

Затем при $k = 1, 2, \dots$ определяем соответственно u_j^2 , $j = 0, \pm 1, \dots$ u_j^3, \dots .

2. Методом неопределенных коэффициентов построим неявную разностную схему с шаблоном:



$$0(x_j, t_k); 1(x_j + h, t_k); 2(x_j, t_k - \tau); 3(x_j - h, t_k).$$

Схема с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$\sum_{i=0}^3 \bar{c}_i u_i = f_0 + O(\tau^2, h^3) \quad (2.14)$$

или более подробно ее можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \bar{c}_0 u(x_j, t_k) + \bar{c}_1 u(x_j + h, t_k) + \bar{c}_2 u(x_j, t_k - \tau) + \bar{c}_3 u(x_j - h, t_k) = \\ & = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - g(x, t) u(x, t) \right) \Big|_{(x_j, t_k)} + \\ & \quad + O(\tau^2, h^3). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Предположим, что $u(x, t) \in C_2^3(G)$. Разлагая функцию u , входящую в левую часть соотношения (2.15), по формуле Тейлора в окрестности узла (x_j, t_k) и приравнявая коэффициенты при u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ в левой и правой частях (2.15), будем иметь

$$\begin{aligned} & \bar{c}_0 u(x_j, t_k) + \bar{c}_1 \left\{ u(x_j, t_k) + \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} \frac{h^1}{1!} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + O(h^3) \right\} + \\ & \quad + \bar{c}_2 \left\{ u(x_j, t_k) - \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} \frac{\tau^1}{1!} + O(\tau^2) \right\} + \\ & \quad + \bar{c}_3 \left\{ u(x_j, t_k) - \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} \frac{h^1}{1!} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + O(h^3) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} - a(x_j, t_k) \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} - c(x_j, t_k) \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} - \\
&\quad - g(x_j, t_k) u(x_j, t_k), \\
&\quad \begin{cases} \bar{c}_0 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 = -g_0, \\ \bar{c}_1 h - \bar{c}_3 h = -c_0, \\ -\bar{c}_2 \tau = 1, \\ \bar{c}_1 \frac{h^2}{2} + \bar{c}_3 \frac{h^2}{2} = -a_0. \end{cases} \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Из системы (2.16) легко определяем

$$\begin{aligned}
\bar{c}_0 &= -g(x_j, t_k) + \frac{2a(x_j, t_k)}{h^2} + \frac{1}{\tau}; \quad \bar{c}_1 = -\frac{c(x_j, t_k)}{2h} - \frac{a(x_j, t_k)}{h^2}; \\
\bar{c}_2 &= -\frac{1}{\tau}; \quad \bar{c}_3 = -\frac{a(x_j, t_k)}{h^2} + \frac{c(x_j, t_k)}{2h}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные значения коэффициентов в (2.14), запишем *невязную разностную схему*

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} - a_j^k \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} - c_j^k \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} - \\
&\quad - g_j^k u_j^k = f_j^k, \quad (2.17) \\
&j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Разностная аппроксимация начального условия имеет вид

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (2.18)$$

На методах реализации неявных разностных схем остановимся позже.

Рассмотрим наиболее типичное уравнение параболического типа – *уравнение теплопроводности* в однородной среде или *уравнение диффузии*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (2.19)$$

где u – температура, $\mu^2 = \frac{k}{\rho c}$, k – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, a, b – левый и правый концы отрезка изменения пространственной переменной x ; $t = 0$ – момент начала процесса, $t = T$ – момент окончания процесса; в случае уравнения

диффузии u – это концентрация диффундирующего вещества; $\mu^2 = \frac{d}{c}$,
 d – коэффициент диффузии, c – коэффициент пористости среды [7,
с. 378–379].

2.2. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности

Постановка задачи Коши для параболического уравнения была приведена выше. Сформулируем три типа краевых задач для уравнения теплопроводности [1, с. 159; 5].

Первая краевая задача

В области $\bar{G} = \{(x, t) | a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти функцию $u(x, t) \in C_1^2(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (2.20)$$

начальному

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.21)$$

и граничным условиям

$$u(a, t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t \leq T; \quad (2.22)$$

$$u(b, t) = \varphi_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.23)$$

Отметим, что $u_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – заданные функции.

Вторая краевая задача

В области \bar{G} требуется определить функцию $u(x, t) \in C_1^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t); \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (2.24)$$

начальному

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.25)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad 0 < t \leq T; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.27)$$

Третья краевая задача

В области \bar{G} требуется найти функцию $u(x, t) \in C_1^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \quad (2.28)$$

начальному

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.29)$$

и граничным условиям

$$\alpha_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} + \alpha_0 u(a, t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t \leq T; \quad (2.30)$$

$$\beta_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} + \beta_0 u(b, t) = \varphi_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.31)$$

Отметим, что $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – заданные числа, причем $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

Опишем физический процесс для случая *первой краевой задачи*. Это процесс теплопередачи по длинному тонкому стержню, лежащему вдоль оси Ox от $x = a$ до $x = b$ (ось стержня и ось Ox совпадают). Предполагается, что в точке $x = a$ температура изменяется со временем по закону $\varphi_1(t)$, а в точке $x = b$ по закону $\varphi_2(t)$. В начальный момент времени функция $u_0(x)$ задает начальное распределение температуры вдоль стержня. Тогда распределение температуры вдоль него в последующие моменты времени определяется решением первой краевой задачи (2.20)–(2.23), причем $u(x, t)$ означает температуру стержня в некоторой точке x в момент времени t . По аналогии с первой краевой задачей можно описать физические процессы для второй и третьей краевых задач соответственно.

2.2.1. Численное решение первой краевой задачи

Применим метод сеток для численного решения задачи (2.20)–(2.23). Для этого покроем область \bar{G} равномерной сеткой $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_x \times \omega_\tau$, где

$$\bar{\omega}_x = \{x_j | x_j = a + jh, j = \overline{0, N}\}; \quad \omega_\tau = \{t_k | t_k = k\tau, k = \overline{0, M}\}, \quad N = \frac{b-a}{h},$$

$$M = \frac{T}{\tau}.$$

Для аппроксимации уравнения теплопроводности можно воспользоваться явной разностной схемой (2.10):

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1};$$

$$k = \overline{0, M-1}, \quad (2.32)$$

или неявной разностной схемой (2.17):

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$k = \overline{1, M}. \quad (2.33)$$

Аппроксимация члена $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в узле (x_j, t_k) имеет одинаковый вид как в явной, так и в неявной схемах. Схемы различаются за счет аппроксимации члена

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_j, t_k)}.$$

В явной схеме используется разность вперед, а в неявной – разность назад. Можно также применить центральную разность для аппроксимации

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_j, t_k)} \approx \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau}. \quad \text{Тогда получим так называемую схему Ричардсона}$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$k = \overline{1, M-1}. \quad (2.34)$$

Запишем разностную аппроксимацию краевых условий:

$$u_0^j = u_0(x_j), \quad j = \overline{0, N}; \quad (2.35)$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t_{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, M-1}. \quad (2.36)$$

Выберем из этих трех разностных схем наилучшую с точки зрения погрешности аппроксимации и устойчивости. Вначале рассмотрим вопрос о погрешности аппроксимации *схемы Ричардсона* (2.34).

Перепишем разностные схемы (2.32)–(2.34) в обозначениях А.А. Самарского [4]:

$$u_t = \mu^2 u_{\bar{x}\bar{x}} + f, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}; \quad (2.37)$$

$$u_{\bar{t}} = \mu^2 u_{\bar{x}\bar{x}} + f, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}; \quad (2.38)$$

$$u_0 = \mu^2 u_{\bar{x}\bar{x}} + f, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau} \quad (2.39)$$

и добавим начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (2.40)$$

где

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad u_{\bar{t}} = \frac{u - \check{u}}{\tau}, \quad u_0 = \frac{\hat{u} - \check{u}}{\tau},$$

$$u_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2},$$

$$\hat{u} = u^{k+1}, \quad u = u^k, \quad \check{u} = u^{k-1}.$$

Определение 3. Схема (2.37), (2.40) *устойчива*, если для решения этой задачи справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{(1)} \leq C_1 \|u_0\| + C_2 \max_{0 \leq t' < t} \|f(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (2.41)$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные, не зависящие от τ и h ; $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ – некоторые нормы на слое (на сетке $\bar{\omega}_h$).

Пусть $f = 0$. Тогда оценка

$$\|u(t)\|_{(1)} \leq C_1 \|u_0\|, \quad t \in \omega_\tau \quad (2.42)$$

выражает *устойчивость* схемы (2.37), (2.40) *по начальным данным*.

Если $u_0(x) = 0$, то неравенство

$$\|u(t)\|_{(1)} \leq C_2 \max_{0 \leq t' < t} \|f(t')\|_{(2)} \quad (2.43)$$

означает *устойчивость* схемы *по правой части*.

Оценка (2.41) для решения задачи (2.37), (2.40) выражает *устойчивость* схемы по начальным данным и по правой части.

Представим решение задачи (2.37), (2.40) в виде суммы $u = \bar{u} + \check{u}$, где \bar{u} – решение однородного уравнения с начальным условием

$$u_t = \mu^2 u_{\bar{x}\bar{x}},$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.44)$$

а \tilde{u} – решение неоднородного уравнения с однородным начальным условием

$$\begin{aligned} u_t &= \mu^2 u_{xx} + f, \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для исследования устойчивости схемы (2.37) по начальным данным надо для решения задачи вида (2.44) получить оценку (2.42) в сеточной норме $L_2(\omega_h)$. Решение задачи u будем искать в виде гармоники. Сеточная норма определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \|u\|_{(1)} &= \|u\|, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}; \\ (u, v) &= \sum_{j=1}^{N-1} u_j v_j h. \end{aligned}$$

В случае системы дифференциальных уравнений в частных производных, когда решение соответствующей разностной задачи есть вектор – функция, т.е. $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$, при исследовании устойчивости разностной схемы по начальным условиям получается так называемая *матрица или оператор перехода* с k -го на $(k+1)$ -й временной слой $G(\tau)$ [3, с. 518–519; 14, с. 145–149], т.е. $u^{k+1} = G(\tau)u^k$.

2.2.2. Теория устойчивости разностных схем по начальным данным

Приведем без доказательства некоторые условия устойчивости, полученные Дж. фон Нейманом и его учениками [8].

Теорема 1 (необходимый признак устойчивости фон Неймана). Если разностная схема устойчива, то собственные значения λ_j матрицы перехода $G(\tau)$ схемы удовлетворяют условиям

$$|\lambda_j| \leq 1 + O(\tau) \quad \text{при} \quad \begin{cases} 0 < \tau < \Delta t, \\ j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.46)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы перехода $G(\tau)$, c – постоянная, не зависящая от шагов сетки.

Условие (2.46) является *необходимым условием устойчивости фон Неймана*. В простейших задачах условие (2.46) применяется в виде

$|\lambda_j| \leq 1$. В некоторых задачах бывает так, что компоненты точного решения с ростом времени t возрастают экспоненциально, а условие $|\lambda_j| \leq 1$ не допускает такого роста. В таких случаях используется условие (2.46).

Приведем без доказательства еще два условия, которые являются не только *необходимыми, но и достаточными условиями устойчивости* [8].

Теорема 2. Если матрица перехода $G(\tau)$ является нормальной, то условие фон Неймана является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости.

Утверждение теоремы 2, в частности, справедливо при $n = 1$. Отсюда следует, что для разностных схем, аппроксимирующих одно дифференциальное уравнение, необходимое условие устойчивости по начальным данным будет и достаточным.

Теорема 3. Если элементы матрицы $G(\tau)$ равномерно ограничены при всех $0 < \tau < \Delta t$ и все ее собственные значения λ_j , за исключением, быть может одного, принадлежат некоторому кругу, лежащему внутри единичного круга, т.е. для $0 < \tau < \Delta t$, $|\lambda_j| \leq \gamma < 1$ при $j = \overline{2, n}$, то условие фон Неймана будет не только необходимым, но и достаточным для устойчивости.

2.2.3. Исследование вопросов аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной краевой задачи первого рода

Обозначим разность между численным решением соответствующей разностной задачи u_j^k и точным решением $u(x_j, t_k)$ исходной задачи через z_j^k , т.е.

$$u_j^k = u(x_j, t_k) + z_j^k. \quad (2.47)$$

Подставляя (2.47) в (2.34), будем иметь

$$\frac{z_j^{k+1} - z_j^{k-1}}{2\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{z_{j+1}^k - 2z_j^k + z_{j-1}^k}{h^2} + \psi_1(x_j, t_k), \quad (2.48)$$

где $\psi_1(x_j, t_k)$ – функция погрешности аппроксимации, причем

$$\psi_1(x_j, t_k) = (\mu(x_j, t_k))^2 \frac{u(x_j + h, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_j - h, t_k)}{h^2} - \frac{u(x_j, t_k + \tau) - u(x_j, t_k - \tau)}{2\tau} + f(x_j, t_k). \quad (2.49)$$

Предположим, что функция $u(x, t) \in C_3^4(G)$. Разлагая функцию u , входящую в (2.49), в окрестности узла (x_j, t_k) по формуле Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \psi_1(x_j, t_k) = & (\mu(x_j, t_k))^2 \frac{u(x_j, t_k) + hu'(x_j, t_k) + \frac{h^2}{2}u''(x_j, t_k)}{h^2} + \\ & + \frac{\frac{h^3}{6}u'''(x_j, t_k) + \frac{h^4}{24}u^{IV}(\bar{x}, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_j, t_k) - hu'(x_j, t_k)}{h^2} + \\ & + \frac{\frac{h^2}{2}u''(x_j, t_k) - \frac{h^3}{6}u'''(x_j, t_k) + \frac{h^4}{24}u^{IV}(\bar{x}, t_k)}{h^2} - \frac{u(x_j, t_k) + \tau \dot{u}(x_j, t_k)}{2\tau} + \\ & + \frac{\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x_j, t_k) + \frac{\tau^3}{6}\ddot{u}(x_j, \bar{t}) - u(x_j, t_k) + \tau \dot{u}(x_j, t_k) - \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x_j, t_k)}{2\tau} + \\ & + \frac{\frac{\tau^3}{6}\ddot{u}(x_j, \bar{t})}{2\tau} + f(x_j, t_k), \end{aligned}$$

где $\bar{x} \in (x_j, x_j + h)$, $\bar{x} \in (x_j - h, x_j)$, $\bar{t} \in (t_k, t_k + \tau)$, $\bar{t} \in (t_k - \tau, t_k)$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т.д., $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и т.д.

По теореме о среднем [13] найдутся такие $\bar{x} \in (x_j - h, x_j + h)$ и $\bar{t} \in (t_k - \tau, t_k + \tau)$, что функцию погрешности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(x_j, t_k) = & \mu^2(x_j, t_k) \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} + f(x_j, t_k) + \\ & + \frac{h^2 \mu^2(x_j, t_k)}{12} \frac{\partial^4 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^4} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^3} \end{aligned}$$

или, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$, получим

$$\psi_1(x_j, t_k) = \frac{h^2 \mu^2(x_j, t_k)}{12} \frac{\partial^4 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^4} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^3}. \quad (2.50)$$

Таким образом, разностная схема (2.34) аппроксимирует уравнение теплопроводности со вторым порядком как по τ , так и по h .

Аналогичным образом можно показать, что для явной схемы (2.32) функция погрешности аппроксимации $\psi_2(x_j, t_k) = O(\tau + h^2)$ и для неявной разностной схемы (2.33) $\psi_3(x_j, t_k) = O(\tau + h^2)$. Сравнивая (2.32), (2.33) и (2.34) с точки зрения погрешности аппроксимации, нетрудно видеть, что предпочтительной является схема Ричардсона – трехслойная разностная схема, имеющая второй порядок погрешности и по τ , и по h .

Исследуем названные схемы на устойчивость по начальным данным. Например, применим распространенный прием исследования разностных схем с постоянными коэффициентами, называемый *методом гармоник* [14, с.145–149]. Метод не является достаточно обоснованным (не учитывается влияние граничных условий и правой части), но позволяет найти необходимые условия устойчивости [3, с. 490–491; 15, с. 275].

Будем искать решение задачи Коши

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (2.51)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j),$$

в виде

$$u_j^k = \lambda^k e^{ij\varphi}, \quad (2.52)$$

где λ – число, которое должно быть определено, $i = \sqrt{-1}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Подставляя (2.52) в (2.51), получим

$$\frac{\lambda^{k+1} e^{ij\varphi} - \lambda^k e^{ij\varphi}}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{\lambda^k (e^{i(j+1)\varphi} - 2e^{ij\varphi} + e^{i(j-1)\varphi})}{h^2}$$

или, сокращая на $\lambda^k e^{ij\varphi}$ левую и правую части последнего соотношения, будем иметь

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{(\mu_j^k)^2}{h^2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2)$$

или

$$\lambda = 1 + \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2). \quad (2.53)$$

Используя тригонометрическую формулу

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi,$$

перепишем (2.53) следующим образом:

$$\lambda = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (2.54)$$

Необходимое условие устойчивости фон Неймана имеет вид

$$|\lambda| \leq 1 \text{ или } \left| 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right| \leq 1.$$

Из определения модуля следует

$$-1 \leq 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1. \quad (2.55)$$

Сначала рассмотрим правое неравенство

$$1 - 4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1.$$

Последнее соотношение, очевидно, справедливо при $\forall \tau, h > 0$.

Теперь запишем левое неравенство из (2.55):

$$-1 \leq 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

или

$$4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$\frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Окончательно необходимое условие устойчивости примет вид

$$\frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (2.56)$$

Для случая одного уравнения необходимое условие устойчивости является и достаточным. Итак, явная схема (2.32) – *условно устойчива*.

Покажем, как проводится исследование устойчивости неявной разностной схемы (2.33) по начальным условиям методом гармоник. Решение задачи находим в виде (2.52). Подставляя последнее в (2.33), будем иметь

$$\frac{(\lambda^k - \lambda^{k-1})e^{i\varphi}}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \lambda^k e^{i\varphi} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2)}{h^2}.$$

Сокращая обе части последнего соотношения на $\lambda^{k-1} e^{i\varphi}$, получим

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = -4 \frac{(\mu_j^k)^2}{h^2} \lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \text{ Отсюда находим множитель перехода } \lambda :$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4 \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (2.57)$$

Очевидно, что $|\lambda| \leq 1$ при любых $\tau, h > 0$. Из этого делаем вывод о том, что условие устойчивости выполняется для λ , определяемого соотношением (2.57), при любых шагах по времени и пространству. Следовательно, неявная разностная схема *абсолютно устойчива* [4].

Абсолютная устойчивость неявной разностной схемы является основным преимуществом таких схем. При выборе временного шага τ руководствуются единственным соображением – необходимой точностью расчета, а не требованием устойчивости [8].

В работе А.А. Самарского и А.В. Гулина рассматривается обобщение двух вышеприведенных схем – *однопараметрическое семейство схем с весами*:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= \sigma u_{\bar{x},j}^{k+1} + (1 - \sigma) u_{\bar{x},j}^k + f_j^k, \\ j &= \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, M-1}, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \end{aligned}$$

где σ – произвольный действительный параметр [8].

Шаблон у приведенного семейства разностных схем – шеститочечный. При $\sigma = 0$ из этого семейства выделяется *явная схема*, при $\sigma = 1$ – *чисто неявная*. При $\sigma = 0,5$ получается *симметричная разностная схема* (неявная). В [8, с. 278] дана оценка погрешности аппроксимации однопараметрического семейства схем при различных значениях σ .

Кроме того, показано, что все схемы семейства с $\sigma \geq 0,5$ являются абсолютно устойчивыми [8, с. 279].

С помощью метода гармоник можно показать, что явная схема Рундсона не является устойчивой и поэтому не может быть использована при численном решении краевых задач для уравнения теплопроводности.

Поэтому с учетом погрешности аппроксимации и устойчивости схемы (2.32) и (2.33) имеют преимущество перед схемой Ричардсона (2.34). Сравнение схем (2.32) и (2.33) с точки зрения погрешности аппроксимации не дает преимущества ни одной из них, т.к. и та и другая имеют первый порядок по τ и второй – по h . Явная схема – *условно устойчива*, неявная – *абсолютно устойчива*. С этих позиций неявная схема предпочтительнее. Но неявную схему сложнее реализовать, т.к. она требует специальных методов для проведения вычислений (прогонки или итерационных методов). Реализация явной схемы осуществляется достаточно просто.

2.2.4. Алгоритм численного решения первой краевой задачи

Для численного решения первой краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T; \quad (2.58)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b; \quad (2.59)$$

$$u(a, t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t \leq T; \quad (2.60)$$

$$u(b, t) = \varphi_2(t), \quad 0 < t \leq T \quad (2.61)$$

выберем явную разностную схему (2.32) (можно с такой же вероятностью взять неявную схему (2.33), но ее будем применять при численном решении третьей краевой задачи). Запишем разностную краевую задачу, аппроксимирующую дифференциальную задачу (2.58)–(2.61):

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{0, M-1}; \quad (2.62)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = \overline{0, N}; \quad (2.63)$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, M-1}; \quad (2.64)$$

$$u_N^{k+1} = \varphi_2(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, M-1}. \quad (2.65)$$

Для удобства проведения вычислений разрешим (2.62) относительно u_j^{k+1} :

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^k)^2 (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \tau f_j^k,$$

$$j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, M-1}; \quad (2.66)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = \overline{0, N}; \quad (2.67)$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, M-1}; \quad (2.68)$$

$$u_N^{k+1} = \varphi_2(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, M-1}. \quad (2.69)$$

Алгоритм решения задачи (2.66)–(2.69) таков: сначала определяем значения решения на нулевом временном слое с помощью начального условия (2.67). Далее переходим на первый временной слой. Для этого в (2.66) полагаем $k = 0$:

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{\tau}{h^2} (\mu_j^0)^2 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) + \tau f_j^0, \\ j = \overline{1, N-1}.$$

Значения u_0^1 на левой границе и u_N^1 на правой границе определяем с помощью (2.68) и (2.69) соответственно. Затем переходим на второй временной слой, полагая в (2.66) $k = 1$, и определяем u_j^2 через соответствующие значения u_j^1 , полученные на предыдущем шаге. Значения u_0^2 и u_N^2 определяем из (2.68) и (2.69) при $k = 1$. Этот процесс вычислений продолжается до $k = M - 1$ включительно по ранее изложенной схеме.

Итак, рассмотрен алгоритм численного решения задачи (2.62)–(2.65) на равномерной сетке с помощью явной схемы. Шаг по времени τ выбирается из условия устойчивости (2.56).

2.3. Метод сеток решения третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности

2.3.1. Постановка задачи и выбор численного метода

В области $G = \{(x, t) \mid 0 < t \leq T, a < x < b\}$ с границей $\Gamma = \{(x, t) \mid t = 0, a \leq x \leq b; 0 < t \leq T; x = a, x = b\}$ требуется определить функцию $u(x, t) \in C_1^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (2.70)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.71)$$

и соответствующим граничным условиям

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_0(t)u \right) \Big|_{x=a} = \alpha_1(t); \quad (2.72)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_0(t)u \right) \Big|_{x=b} = \beta_1(t). \quad (2.73)$$

Для численного решения задачи (2.70)–(2.73) покроем область \bar{G} сеточной областью с равномерной сеткой

$$\bar{\omega}_{\text{нт}} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau,$$

где

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_j \mid x_j = a + \left(j + \frac{1}{2} \right) h, j = \overline{-1, N}, h = \frac{b-a}{N} \right\},$$

$$\omega_\tau = \left\{ t_k \mid t_k = k \tau, k = \overline{0, M} \right\}, M = \frac{T}{\tau}.$$

На рис. 2.2. показаны области \bar{G} и $\bar{\omega}_{\text{нт}}$.

На рис. 2.2 значком \circ обозначены внутренние узлы сеточной области, \times – граничные узлы и \square – фиктивные узлы. Фиктивные узлы имеют координаты (x_{-1}, t_{k+1}) , (x_N, t_{k+1}) , где $x_{-1} = a - \frac{h}{2}$, $x_N = b + \frac{h}{2}$. Как видим,

пространственная сетка на величину $\frac{h}{2}$ смещена относительно границ

$x = a$ и $x = b$. Множество граничных узлов обозначим $\gamma_{\text{нт}}$.

Запишем неявную разностную схему, аппроксимирующую уравнение теплопроводности, а также разностные аналоги для начальных и граничных условий:

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} = (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k, \quad (2.74)$$

$$j = \overline{1, N-1}, k = 1, 2, \dots, M;$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), j = \overline{0, N}; \quad (2.75)$$

$$\frac{u_0^k - u_{-1}^k}{h} - \alpha_0^k \frac{u_0^k + u_{-1}^k}{2} = \alpha_1^k, \quad k = \overline{1, M}; \quad (2.76)$$

$$\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} - \beta_0^k \frac{u_N^k + u_{N-1}^k}{2} = \beta_1^k, \quad k = \overline{1, M}. \quad (2.77)$$

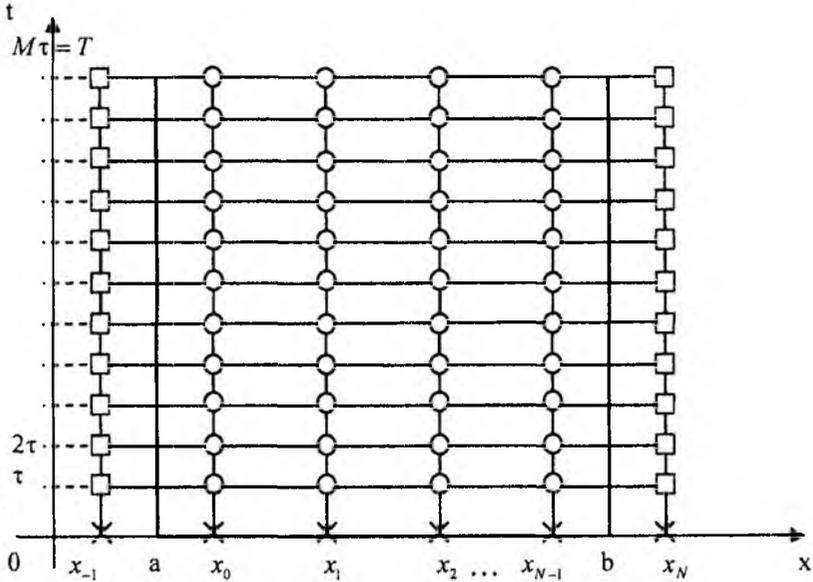


Рис 2.2

2.3.2. Оценка погрешности аппроксимации неявной разностной схемы

Оценим порядок погрешности аппроксимации разностной схемы (2.74)–(2.77). Для этого перепишем разностную задачу в операторной форме

$$L_h u^{(h)} = F^{(h)}, \quad (2.78)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} - (\mu_j^k)^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M}; \\ u_j^0, j = \overline{0, N}; \\ \frac{u_0^k - u_{-1}^k}{h} - \alpha_0^k \frac{u_0^k + u_{-1}^k}{2}, k = \overline{1, M}; \\ \frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} - \beta_0^k \frac{u_N^k + u_{N-1}^k}{2}, k = \overline{1, M}; \end{cases}$$

$$F^{(h)} \equiv \begin{cases} f_j^k, \\ u_0(x_j), \\ \alpha_1^k, \\ \beta_1^k. \end{cases}$$

Предположим, что $u(x, t) \in C_2^4(\bar{G})$. Рассмотрим

$$L_h[u]_h \equiv \begin{cases} \frac{u(x_j, t_k) - u(x_j, t_k - \tau)}{\tau} - (\mu(x_j, t_k))^2 \left[\frac{u(x_j + h, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_j - h, t_k)}{h^2} \right], \\ u(x_j, 0), \\ \frac{u(a + \frac{h}{2}, t_k) - u(a - \frac{h}{2}, t_k)}{h} - \alpha_0(t_k) \frac{u(a + \frac{h}{2}, t_k) + u(a - \frac{h}{2}, t_k)}{2}, \\ \frac{u(b + \frac{h}{2}, t_k) - u(b - \frac{h}{2}, t_k)}{h} - \beta_0(t_k) \frac{u(b + \frac{h}{2}, t_k) + u(b - \frac{h}{2}, t_k)}{2}. \end{cases} \quad (2.79)$$

Разлагая функцию u , входящую в (2.79) в окрестности узлов (x_j, t_k) для базовой схемы, $(x_j, 0)$ – для начального условия, (a, t_k) – для левого граничного условия, (b, t_k) – для правого граничного условия, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{u(x_j, t_k) - u(x_j, t_k) + \tau \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} - \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^2}}{\tau} \\
& - \left(u(x_j, t_k) \right)^2 \frac{u(x_j, t_k) + h \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2}}{h^2} + \\
& + \frac{\frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_j, t_k)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^4} - 2u(x_j, t_k) + u(x_j, t_k)}{h^2} \\
& - \frac{h \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_j, t_k)}{\partial x^3} - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^4}}{h^2}, \\
& u(x_j, 0) + 0, \\
L_h[u]_h \equiv & \left(\frac{u + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{48} \frac{\partial^3 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^3} - u}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{h^3}{48} \frac{\partial^3 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=a, t=t_k} - \alpha_0(t_k) \left(\frac{u}{2} + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u(x^*, t_k)}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{u - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x}}{2} \right) \Big|_{x=a, t=t_k} - \alpha_0(t_k) \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u(x^{**}, t_k)}{\partial x^2}, \\
& \left(\frac{u + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{48} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, t_k)}{\partial x^3} - u + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{h^3}{48} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, t_k)}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=b, t=t_k} - \beta_0(t_k) \left(\frac{u(b, t_k) + \frac{h}{2} \frac{\partial u(b, t_k)}{\partial x}}{2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\left\{ + \frac{\frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^2} + u(b, t_k) - \frac{h}{2} \frac{\partial u(b, t_k)}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 u(\bar{\bar{x}}, t_k)}{\partial x^2}}{2} \right\}$$

Полученные соотношения можно переписать в таком виде:

$$L_h[u]_h \equiv \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \mu^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{(x_j, t_k)} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^2} - \frac{h^2}{24} \mu^2(x_j, t_k) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^4 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\bar{\bar{x}}, t_k)}{\partial x^4} \right), \\ & u(x_j, 0) + 0, \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_0(t) u \right) \Big|_{(a, t_k)} + \frac{h^2}{48} \left(\frac{\partial^3 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u(\bar{\bar{x}}, t_k)}{\partial x^3} \right) - \\ & - \frac{h^2}{8} \alpha_0(t_k) \left(\frac{\partial^2 u(x^*, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x^{**}, t_k)}{\partial x^2} \right), \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_0(t) u \right) \Big|_{(b, t_k)} + \frac{h^2}{48} \left(\frac{\partial^3 u(\hat{x}, t_k)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u(\hat{\hat{x}}, t_k)}{\partial x^3} \right) - \\ & - \frac{h^2}{8} \beta_0(t_k) \left(\frac{\partial^2 u(\bar{x}, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\bar{\bar{x}}, t_k)}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right. \quad (2.80)$$

где

$$\bar{t} \in (t_k - \tau, t_k), \quad \bar{x} \in (x_j, x_j + h), \quad \bar{\bar{x}} \in (x_j - h, x_j);$$

$$\bar{x} \in \left(a, a + \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\bar{x}} \in \left(a - \frac{h}{2}, a \right);$$

$$x^* \in \left(a, a + \frac{h}{2} \right), \quad x^{**} \in \left(a - \frac{h}{2}, a \right);$$

$$\hat{x} \in \left(b, b + \frac{h}{2} \right), \hat{\hat{x}} \in \left(b - \frac{h}{2}, b \right);$$

$$\bar{x} \in \left(b, b + \frac{h}{2} \right), \bar{\bar{x}} \in \left(b - \frac{h}{2}, b \right).$$

По теореме о среднем найдутся такие $\xi_1 \in (x_j - h, x_j + h)$, $\xi_2, \xi_3 \in \left(a - \frac{h}{2}, a + \frac{h}{2} \right)$, $\xi_4, \xi_5 \in \left(b - \frac{h}{2}, b + \frac{h}{2} \right)$, что (2.80) можно переписать

в виде

$$L_h[u]_h = \begin{cases} f(x_j, t_k) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \mu^2(x_j, t_k) \frac{\partial^4 u(\xi_1, t_k)}{\partial x^4}, \\ u_0(x_j) + 0, \\ \alpha_1(t_k) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 u(\xi_2, t_k)}{\partial x^3} - \frac{h^2}{4} \alpha_0(t_k) \frac{\partial^2 u(\xi_3, t_k)}{\partial x^2}, \\ \beta_1(t_k) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 u(\xi_4, t_k)}{\partial x^3} - \frac{h^2}{4} \beta_0(t_k) \frac{\partial^2 u(\xi_5, t_k)}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Обозначим вектор погрешности (невязки) $\overline{\delta F}^{(h)}$:

$$\overline{\delta F}^{(h)} = \begin{pmatrix} -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \mu^2(x_j, t_k) \frac{\partial^4 u(\xi_1, t_k)}{\partial x^4}, 0, \\ \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 u(\xi_2, t_k)}{\partial x^3} - \frac{h^2}{4} \alpha_0(t_k) \frac{\partial^2 u(\xi_3, t_k)}{\partial x^2}, \\ \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 u(\xi_4, t_k)}{\partial x^3} - \frac{h^2}{4} \beta_0(t_k) \frac{\partial^2 u(\xi_5, t_k)}{\partial x^2} \end{pmatrix}^T. \quad (2.81)$$

Компоненты $\overline{\delta F}^{(h)}$ имеют следующие значения:

$$\delta_1 F^{(h)} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \mu^2(x_j, t_k) \frac{\partial^4 u(\xi_1, t_k)}{\partial x^4},$$

$$\delta_2 F^{(h)} = 0,$$

$$\delta_3 F^{(h)} = \frac{h^2}{4} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\xi_2, t_k)}{\partial x^3} - \alpha_0(t_k) \frac{\partial^2 u(\xi_3, t_k)}{\partial x^2} \right),$$

$$\delta_4 F^{(h)} = \frac{h^2}{4} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\xi_4, t_k)}{\partial x^3} - \beta_0(t_k) \frac{\partial^2 u(\xi_5, t_k)}{\partial x^2} \right).$$

Оценим норму вектора невязки $\overline{\delta F}^{(h)}$ в пространстве $C(\overline{\omega}_m)$:

$$\|\delta F^{(h)}\| = \max \left(\|\delta_1 F^{(h)}\|, \|\delta_2 F^{(h)}\|, \|\delta_3 F^{(h)}\|, \|\delta_4 F^{(h)}\| \right),$$

где

$$\begin{aligned} \|\delta_1 F^{(h)}\| &= \max_{t, x \in \omega_m} \left| -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \mu^2(x, t) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right| \leq \\ &\leq \frac{\tau}{2} \max_{t, x \in \omega_m} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right| + \frac{h^2}{12} \max_{t, x \in \omega_m} |\mu^2(x, t)| \max_{t, x \in \omega_m} \left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right| = \\ &= \tau M_1 + h^2 M_2 \leq (\tau + h^2) M_3, \end{aligned}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \max_{t, x \in \omega_m} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|,$$

$$M_2 = \frac{1}{12} \max_{t, x \in \omega_m} |\mu^2(x, t)| \max_{t, x \in \omega_m} \left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right|,$$

$$M_3 = \max(M_1, M_2).$$

$$\|\delta_2 F^{(h)}\| = 0;$$

$$\begin{aligned} \|\delta_3 F^{(h)}\| &= \max_{t, x \in \gamma_m} \left| \frac{h^2}{4} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - \alpha_0(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) \right| \leq \\ &\leq h^2 \frac{1}{24} \max_{t, x \in \gamma_m} \left| \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right| + h^2 \frac{1}{4} \max_{t \in \gamma_m} |\alpha_0(t)| \max_{t, x \in \gamma_m} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right| = \\ &= h^2 M_4 + h^2 M_5 \leq M_6 h^2, \end{aligned}$$

$$M_4 = \frac{1}{24} \max_{t, x \in \gamma_m} \left| \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right|; \quad M_5 = \frac{1}{4} \max_{t \in \gamma_m} |\alpha_0(t)| \max_{t, x \in \gamma_m} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|;$$

$$M_6 = \max(M_4, M_5).$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\|\delta_3 F^{(h)}\| \leq h^2 M_5,$$

где

$$M_9 = \max(M_7, M_8),$$

$$M_7 = \frac{1}{24} \max_{t, x \in \Gamma_M} \left| \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right|, \quad M_8 = \frac{1}{4} \max_{t \in \Gamma_M} |\beta_0(t)| \max_{t, x \in \Gamma_M} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|.$$

Ранее было показано, что схема (2.74) абсолютно устойчива по начальным данным. Следовательно, решение разностной задачи сходится к решению соответствующей дифференциальной задачи.

2.3.3. Метод прогонки для определения численного решения

Перепишем схему (2.74), собрав коэффициенты при $u_{j-1}^k, u_j^k, u_{j+1}^k$ соответственно таким образом, чтобы при u_{j-1}^k и u_{j+1}^k они равнялись бы 1.

Для этого обе части (2.74) умножим на $\frac{h^2}{(\mu_j^k)^2}$. В результате будем иметь

$$A_j^k u_{j-1}^k - B_j^k u_j^k + C_j^k u_{j+1}^k = D_j^k, \quad (2.82)$$

где

$$\begin{aligned} A_j^k &= C_j^k = 1, \\ B_j^k &= 2 + \frac{h^2}{\tau(\mu_j^k)^2}, \quad D_j^k = -\frac{h^2}{\tau(\mu_j^k)^2} u_j^{k-1} - \frac{h^2}{(\mu_j^k)^2} f_j^k, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Система (2.82) имеет трехдиагональную матрицу, следовательно, для решения соответствующей краевой задачи можно использовать метод прогонки [4].

Добавим к формулам (2.82) и (2.83) разностные краевые условия (2.75)–(2.77), предварительно преобразовав их к виду

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = \overline{-1, N}; \quad (2.84)$$

$$u_{-1}^k = W_0^k u_0^k + F_0^k, \quad k = \overline{1, M}; \quad (2.85)$$

$$u_{N-1}^k = R_N^k u_N^k + S_N^k, \quad k = \overline{1, M}, \quad (2.86)$$

где

$$W_0^k = \frac{2 - h\alpha_0^k}{2 + h\alpha_0^k}, \quad F_0^k = -\frac{2h\alpha_1^k}{2 + h\alpha_0^k}; \quad (2.87)$$

$$R_N^k = \frac{2 - h\beta_0^k}{2 + h\beta_0^k}, \quad S_N^k = -\frac{2h\beta_1^k}{2 + h\beta_0^k}. \quad (2.88)$$

Как известно [4], метод прогонки состоит из двух этапов: прямой прогонки и обратной прогонки. Прогонка осуществляется по формуле

$$u_{j-1}^k = P_j^k u_j^k + Q_j^k, \quad (2.89)$$

$j = N, N-1, \dots, 0$; $k = \overline{1, M}$; P_j^k, Q_j^k – прогоночные коэффициенты, которые определяются на первом этапе метода прогонки. Для этого подставляем (2.89) в (2.82) и выражаем u_j^k через u_{j+1}^k . Будем иметь

$$A_j^k (P_j^k u_j^k + Q_j^k) - B_j^k u_j^k + C_j^k u_{j+1}^k = D_j^k,$$

или

$$(A_j^k P_j^k - B_j^k) u_j^k = -C_j^k u_{j+1}^k + D_j^k - A_j^k Q_j^k.$$

Из последнего соотношения выражаем u_j^k :

$$u_j^k = P_{j+1}^k u_{j+1}^k + Q_{j+1}^k, \quad (2.90)$$

где

$$P_{j+1}^k = -\frac{C_j^k}{A_j^k P_j^k - B_j^k}, \quad Q_{j+1}^k = \frac{D_j^k - A_j^k Q_j^k}{A_j^k P_j^k - B_j^k},$$

или

$$P_{j+1}^k = \frac{C_j^k}{B_j^k - A_j^k P_j^k}, \quad Q_{j+1}^k = \frac{A_j^k Q_j^k - D_j^k}{B_j^k - A_j^k P_j^k}, \quad (2.91)$$

$$j = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = \overline{1, M}.$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (2.91), необходимо определить P_0^k, Q_0^k . Очевидно, что эти прогоночные коэффициенты определяются по формулам (2.85) (из левого граничного условия), т.е.

$$P_0^k = \frac{2 - h\alpha_0^k}{2 + h\alpha_0^k}, \quad Q_0^k = -\frac{2h\alpha_1^k}{2 + h\alpha_0^k}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (2.92)$$

Остальные прогоночные коэффициенты находятся по формулам (2.91). P_1^k, Q_1^k определяются через P_0^k, Q_0^k ; P_2^k, Q_2^k через P_1^k, Q_1^k и т.д. После завершения первого этапа метода прогонки (прямой прогонки) проводится второй этап (обратная прогонка), на котором определяются значения решения по формуле (2.89). При $j = N$ имеем

$$u_{N-1}^k = P_N^k u_N^k + Q_N^k. \quad (2.93)$$

В (2.93) содержится две неизвестные величины: u_{N-1}^k, u_N^k . Добавим к (2.93) правое граничное условие (2.86). Исключая из полученной системы u_{N-1}^k , получим

$$u_N^k = \frac{S_N^k - Q_N^k}{P_N^k - R_N^k}. \quad (2.94)$$

Далее с помощью прогоночной формулы (2.89) последовательно определяются $u_{N-1}^k, u_{N-2}^k, \dots, u_1^k, k = 1, 2, \dots, M$.

Метод прогонки осуществляется шагами по времени. Сначала при $k = 0$ вычисляются коэффициенты $A_j^0, B_j^0, C_j^0, D_j^0, j = \overline{1, N-1}$. Далее, при $k = 1$, находим прогоночные коэффициенты P_0^1, Q_0^1 по формулам (2.92), а затем $P_1^1, Q_1^1, \dots, P_N^1, Q_N^1$ по формулам (2.91). На втором этапе находим u_N^1 из (2.94), а затем с помощью прогоночной формулы определяем $u_{N-1}^1, u_{N-2}^1, \dots, u_1^1$. После этого вычислительный процесс повторяется на втором временном слое при $k = 2$, далее для $k = 3, \dots, k = M$.

Возникает вопрос об устойчивости метода прогонки.

Устойчивость метода прогонки зависит от того, обращается ли в ноль знаменатель $B_j^k - A_j^k P_j^k$ в формулах (2.91) для нахождения P_j^k, Q_j^k .

Покажем, что для возможности применения метода прогонки достаточно, чтобы коэффициенты системы (2.82)–(2.88) удовлетворяли условиям

$$A_j^k \neq 0, C_j^k \neq 0, |B_j^k| \geq |A_j^k| + |C_j^k|, j = \overline{1, N-1}; \quad (2.95)$$

$$|P_0^k| \leq 1, |P_N^k| \leq 1. \quad (2.96)$$

Методом математической индукции докажем, что $|P_j^k| \leq 1, j = \overline{1, N}$. Согласно (2.87) справедливо неравенство $|P_0^k| = |W_0^k| < 1$ при условии, что $\alpha_0^k > 0$. Предположим, что $|P_j^k| \leq 1$ для некоторого j . Докажем, что $|P_{j+1}^k| \leq 1$. Действительно, из формул (2.91) следует, что

$$|P_{j+1}^k| = \frac{|C_j^k|}{|B_j^k - A_j^k P_j^k|} \leq \frac{|C_j^k|}{|B_j^k| - |A_j^k| |P_j^k|}. \quad (2.97)$$

Из (2.95) имеем $|C_j^k| \leq |B_j^k| - |A_j^k|$. Тогда можно продолжить цепочку неравенств (2.97):

$$|P_{j+1}^k| \leq \frac{|C_j^k|}{|B_j^k| - |A_j^k| |P_j^k|} \leq \frac{|B_j^k| - |A_j^k|}{|B_j^k| - |A_j^k| |P_j^k|} \leq 1.$$

Последнее неравенство справедливо, т.к. в силу наших предположений $|P_j^k| \leq 1$. Кроме того, очевидно, что $|B_j^k| - |A_j^k| |P_j^k| > 0$, $j = \overline{1, N-1}$.

В формуле (2.94) для нахождения u_N^k в знаменателе стоит разность $P_N^k - R_N^k$. Очевидно, что $B_{N-1}^k - A_{N-1}^k B_{N-1}^k > 0$, $2 + h\beta_0 > 0$, $P_N^k - R_N^k \neq 0$.

Прогночный коэффициент P_0^k определяется по формуле (2.92). Очевидно, что $|P_0^k| < 1$, если коэффициент $\alpha_0(t_k) > 0$.

Следовательно, устойчивость метода прогонки при условиях (2.95)–(2.96) имеет место.

2.4. Решение уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами методом сеток

Дадим постановку первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами [9]:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(a, t) &= \varphi_1(t), \\ u(b, t) &= \varphi_2(t), \end{aligned} \quad (2.98)$$

где $\rho(x, t)$, $k(x, t)$, $f(x, t)$ – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < C_1 \leq k(x, t) \leq C_2, \quad \rho(x, t) \geq C_3 > 0. \quad (2.99)$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.100)$$

из (2.98) и, фиксируя время t , аппроксимируем (2.100) следующим разностным соотношением:

$$\Lambda(t)u_j = \left(a(x_j, t)u_{\bar{x}} \right)_{x,j} = \frac{1}{h} \left[a(x_{j+1}, t) \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - a(x_j, t) \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right], \quad (2.101)$$

Для разностного коэффициента теплопроводности $a(x_j, t)$ должны выполняться условия второго порядка аппроксимации

$$\begin{aligned} a(x_{j+1}, t) + a(x_j, t) &= 2k(x_j, t) + O(h^2), \\ \frac{a(x_{j+1} + h, t) - a(x_j, t)}{h} &= k'(x_j, t) + O(h^2). \end{aligned}$$

Эти условия выполняются для [4]:

$$\begin{aligned} a(x_j, t) &= 0,5(k(x_j, t) + k(x_{j-1}, t)); \\ a(x_j, t) &= k(x_j - \frac{h}{2}, t); \\ a(x_j, t) &= \frac{2k(x_{j-1}, t)k(x_j, t)}{k(x_{j-1}, t) + k(x_j, t)}. \end{aligned}$$

Запишем явную разностную схему, аппроксимирующую задачу (2.98):

$$\begin{aligned} \rho(x_j, t) \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= \left(a(x_j, t_k)u_{\bar{x}}^k \right)_{x,j} + f(x_j, t_k), \quad j = \overline{1, N-1}, \\ u_0^k &= \varphi_1(t_k), \quad u_N^k = \varphi_2(t_k), \quad u_j^0 = u_0(x_j). \end{aligned} \quad (2.102)$$

При этом выполняется первый порядок аппроксимации по τ и второй относительно h .

При исследовании устойчивости разностных схем с переменными коэффициентами используется принцип замороженных коэффициентов [9], в соответствии с которым задача сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Исследуем устойчивость явной разностной схемы (2.102) с $f(x_j, t_k) = 0$:

$$\rho(x_j, t_k) \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \left(a(x_j, t_k)u_{\bar{x}}^k \right)_{x,j}. \quad (2.103)$$

«Заморозим» коэффициенты $\rho(x_j, t_k)$, $a(x_j, t_k)$, т.е. будем считать, что они постоянные: $\rho(x_j, t_k) = \rho = \text{const}$, $a(x_j, t_k) = a = \text{const}$. Перепишем уравнение (2.103) в виде

$$\rho \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = au_{xx,j},$$

или

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau_1} = u_{\bar{x},j}, \quad \tau_1 = \frac{\tau a}{\rho}.$$

Ранее было показано, что схема устойчива при выполнении условия

$$\tau_1 \leq \frac{h^2}{2}$$

или

$$\frac{\tau a}{\rho} \leq \frac{h^2}{2}. \quad (2.104)$$

В соответствии с принципом замороженных коэффициентов схема (2.103) устойчива, если условие (2.104) справедливо при всех допустимых значениях $a(x_j, t_k)$, $\rho(x_j, t_k)$, другими словами, если неравенства

$$\frac{\tau a(x_j, t_k)}{\rho(x_j, t_k)} \leq \frac{h^2}{2} \quad (2.105)$$

выполнены при всех t_k, x_j .

С учетом условий (2.99) неравенство (2.105) можно записать в виде

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{c_1}{2c_2}.$$

Сформулируем далее первую краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(a, t) &= \varphi_1(t), \\ u(b, t) &= \varphi_2(t). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Аппроксимируем уравнение теплопроводности из (2.106) чисто неявной разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= \frac{1}{h} \left(a_{j+1} \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_j^{k+1}}{h} - a_j \frac{u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{h} \right) + f(u_j^k), \\ k &= \overline{0, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad u_0^k = \varphi_1(t_k), \quad u_N^k = \varphi_2(t_k), \quad j = \overline{0, N}, \\ k = \overline{1, M},$$

где

$$a_j = 0,5(k(u_j^k) + k(u_{j-1}^k)).$$

Данная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй – по h и является абсолютно устойчивой. Решение задачи (2.107) можно определить с помощью метода прогонки.

Для реализации неявной схемы (2.107) можно также применить какой-либо итерационный метод, например следующий:

$$\frac{u_j^{k+1(m+1)} - u_j^k}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{j+1} \frac{u_{j+1}^{k+1(m)} - u_j^{k+1(m)}}{h} - a_j \frac{u_j^{k+1(m)} - u_{j-1}^{k+1(m)}}{h} \right) + \\ + f(u_j^k), \quad (2.108) \\ j = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{0, M-1};$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t_{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t_{k+1}).$$

Здесь m – номер итерации, причем в качестве начального приближения для u_j^{k+1} выбирается u_j^k . В случае гладких коэффициентов при $k(u) \geq C_1 > 0$ часто достаточно провести две-три итерации.

2.5. Реализация алгоритма на конкретном примере

Для иллюстрации метода прогонки решим следующую задачу теплопроводности [7, с. 401–402].

Пример. С помощью неявной разностной схемы определить численное решение задачи теплопроводности в стержне.

Решение. Этот физический процесс описывается первой краевой задачей [Там же]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) = 2, \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(b, t) = 1, \quad 0 < t \leq T.$$

Здесь $\mu^2(x, t) = 1$, $u_0(x) = 2$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $T = 2$, $f(x, t) = 0$.

Для аппроксимации уравнения теплопроводности будем использовать разностную схему

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2}.$$

Ее можно переписать в виде

$$\frac{\tau}{h^2} u_{j-1}^k - \left(1 + 2 \frac{\tau}{h^2}\right) u_j^k + \frac{\tau}{h^2} u_{j+1}^k = -u_j^{k-1}, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (2.109)$$

Формула (2.109) выражает решение на k -м временном слое через решение на $(k-1)$ -м слое.

Запишем разностную аппроксимацию начальных

$$u_j^0 = 2, \quad j = \overline{0, N}, \quad (2.110)$$

и граничных условий

$$u_0^k = 1, \quad k = \overline{1, M}; \quad (2.111)$$

$$u_N^k = 1, \quad k = \overline{1, M}. \quad (2.112)$$

Соотношения (2.109)–(2.112) образуют неявную двухслойную схему. Она имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй – по h . Схема абсолютно устойчива и является сходящейся.

Для реализации неявной схемы используем метод прогонки, изложенный в параграфе 2.3.3 данного учебного пособия.

$u_{j-1}^k = P_{j-1}^k u_j^k + Q_{j-1}^k$; $j = \overline{N, 1}$; $k = \overline{1, M}$ – прогоночная формула. Вводя обозначения $A = C = \frac{\tau}{h^2}$; $B = 1 + 2 \frac{\tau}{h^2}$, запишем формулы (2.91), полученные в параграфе 2.3.3, для нахождения прогоночных коэффициентов

$$P_j^k = \frac{C}{B - AP_{j-1}^k}, \quad Q_j^k = \frac{u_j^{k-1} - AQ_{j-1}^k}{B - AP_{j-1}^k},$$

$$j = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{1, M}; \quad P_0^k = 0, \quad Q_0^k = 1.$$

Результаты численного решения задачи (2.109)–(2.112) приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

$k \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	1,00	1,15	1,29	1,40	1,47	1,50	1,47	1,40	1,29	1,15	1,00
20	1,00	1,06	1,11	1,16	1,19	1,20	1,19	1,16	1,11	1,06	1,00

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	1,00	1,02	1,05	1,06	1,07	1,08	1,07	1,06	1,05	1,02	1,00
40	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,01	1,00
50	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00
60	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
70	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
80	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
90	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
100	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
110	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Расчеты проводятся при $h = 0,1$, $\tau = 0,018$, $N = 10$, $M = 110$.

Расчеты, проведенные на сетке, состоящей из большего количества узлов ($N = 100$, $N = 200$ и т.д.), дают ту же качественную картину, что и при $N = 10$. Характер поведения численного решения соответствует физике рассматриваемого процесса.

2.6. Лабораторные задания

Задание 1. Найти численное решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [t_0, T],$$

$$u(x, t_0) = c, \quad a \leq x \leq b,$$

$$u(a, t) = c, \quad u(b, t) = c + rt, \quad t_0 \leq t \leq T$$

с помощью:

1) явной разностной схемы с шаблоном



2) неявной разностной схемы с шаблоном



Схемы строятся с использованием МНК. Шаг пространственной сетки $h = \frac{b-a}{n}$, $n = 10$. Временной шаг τ выбирается с учетом условия устойчивости. Для этого необходимо провести исследование устойчивости соответствующей разностной схемы по начальным данным методом гармоник. Показать сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

Вариант № 1

$$a = 0, b = 1, t_0 = 0, T = 2, c = 0,5, r = 1;$$
$$f(x, t) = x + 0,25t.$$

Вариант № 2

$$a = 1, b = 2, t_0 = 0, T = 3, c = 1, r = 0,5;$$
$$f(x, t) = x + t.$$

Вариант № 3

$$a = 0,5, b = 1,5, t_0 = 0, T = 2, c = 0,7, r = 0,1;$$
$$f(x, t) = x^2 - 0,1t.$$

Вариант № 4

$$a = 0, b = 1, t_0 = 0, T = 3, c = 0,01, r = 0,1;$$
$$f(x, t) = 0,5x + 0,5t.$$

Вариант № 5

$$a = 2, b = 3, t_0 = 0,1, T = 2,1, c = 1, r = 0,01;$$
$$f(x, t) = 0,5x - 0,4t.$$

Вариант № 6

$$a = 0,2, b = 1,2, t_0 = 0, T = 2, c = 0, r = 0,5;$$
$$f(x, t) = x^2 - 0,01t.$$

Вариант № 7

$$a = 3, b = 4, t_0 = 0, T = 2, c = 0,5, r = 1;$$

$$f(x, t) = x - 0,01t.$$

Вариант № 8

$$a = 1, b = 3, t_0 = 0,7, T = 2,7, c = 0,4, r = 0,05;$$

$$f(x, t) = 0,2x - 0,01t.$$

Вариант № 9

$$a = 2, b = 3, t_0 = 0,2, T = 3,2, c = 0,2, r = 0,2;$$

$$f(x, t) = x - 0,01t.$$

Вариант № 10

$$a = 0, b = 1, t_0 = 0, T = 2, c = 0,1, r = 0,5;$$

$$f(x, t) = x + 0,5t.$$

Задание 2. Определить методом сеток решение третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \leq x \leq b, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, t_0) = e^{-cx}, \quad a \leq x \leq b,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_0(t)u \right) \Big|_{x=a} = \alpha_1(t),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_0(t)u \right) \Big|_{x=b} = \beta_1(t),$$

используя явную и неявную разностные схемы и взяв $h = 0,1$; $\tau = 0,01$.

Исследовать вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости используемых разностных схем. Сравнить численные решения между собой.

Вариант № 1

$$a = 0, b = 1, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 3 + 0,1j, j = -5, \\ \alpha_0 = 0,1, \alpha_1 = 0,2, \beta_0 = 0,5, \beta_1 = 0,8, c = 2,5.$$

Вариант № 2

$$a = 0, b = 1, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 3 + 0,1j, j = -4, \\ \alpha_0 = 0,2, \alpha_1 = 0,3, \beta_0 = 0,6, \beta_1 = 0,9, c = 2,6.$$

Вариант № 3

$$a = 0, b = 1, t_0 = 0,2, T = 2,2, \mu^2 = 3 + 0,1j, j = -3, \\ \alpha_0 = 0,15, \alpha_1 = 0,25, \beta_0 = 0,55, \beta_1 = 0,85, c = 2,7.$$

Вариант № 4

$$a = 1, b = 2, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 3 + 0,1j, j = -2, \\ \alpha_0 = 0,2, \alpha_1 = 0,4, \beta_0 = 0,7, \beta_1 = 0,7, c = 2,8.$$

Вариант № 5

$$a = 1, b = 2, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 3 + 0,1j, j = -1, \\ \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1,1, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0,5, c = 2,9.$$

Вариант № 6

$$a = 0,5, b = 1,5, t_0 = 0,1, T = 2, \mu^2 = 2 + 0,05j, j = -1, \\ \alpha_0 = 0,5, \alpha_1 = 0,75, \beta_0 = 0,75, \beta_1 = 0,5, c = 3.$$

Вариант № 7

$$a = 1,5, b = 2,5, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 2 - 0,05j, j = 1, \\ \alpha_0 = 2, \alpha_1 = 1,75, \beta_0 = 0,25, \beta_1 = 0,75, c = 2.$$

Вариант № 8

$$a = 0,7, b = 1,7, t_0 = 0,5, T = 2,5, \mu^2 = 3 - 0,1j, j = -2, \\ \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1,2, \beta_0 = 0,35, \beta_1 = 0,1, c = 2,5.$$

Вариант № 9

$$a = 1, b = 1,5, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 2 + 0,1j, j = -5, \\ \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1,25, \beta_1 = 1,25, c = 2,75.$$

Вариант № 10

$$a = 0,65, b = 1,65, t_0 = 0, T = 2, \mu^2 = 2 + 0,1j, j = -4, \\ \alpha_0 = 0,2, \alpha_1 = 0,5, \beta_0 = 0,3, \beta_1 = 0,6, c = 3,5.$$

Задание 3. Для аппроксимации первой краевой задачи в случае уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), a \leq x \leq b, 0 < t \leq T, \\ u(a,t) = \alpha_1(t), u(b,t) = \alpha_2(t), 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \beta(x), a \leq x \leq b$$

на сетке

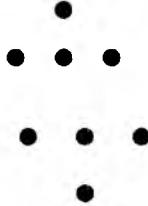
$$\omega_{\tau} = \left\{ (x_j, t_k) \mid x_j = a + jh, t_k = k\tau, \tau > 0, j = \overline{0, N}, k = \overline{0, M}, h = \frac{b-a}{N} \right\}$$

используется разностная схема с весом σ

$$\frac{v_j^{k+1} - v_j^k}{\tau} = \Lambda \left[\sigma v_j^{k+1} + (1-\sigma)v_j^k \right] + \phi_j^k, \\ j = \overline{1, N-1}, k = \overline{0, M-1}, \\ v_0^k = \alpha_1(t_k), v_N^k = \alpha_2(t_k), k = \overline{1, M}; \\ v_j^0 = \beta(x_j), j = \overline{0, N},$$

$$\text{где } \Lambda v_j^k = \frac{v_{j-1}^k - 2v_j^k + v_{j+1}^k}{h^2}.$$

1. Укажите, при каких σ разностная схема становится явной с шаблоном



неявной с шаблоном

2. Покажите, что погрешность аппроксимации дифференциальной задачи разностной при $\sigma = 0,5$ и $\varphi_j^k = f(x_j, t_k + 0,5\tau)$ есть величина $O(\tau^2 + h^2)$ в норме $C_h(L_{2,h})$.

3. Покажите, что при $\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{h^2}{\tau}$, $\varphi_j^k = f(x_j, t_k + 0,5\tau) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 f(x_j, t_k + 0,5\tau)}{\partial x^2}$ [4, с. 73–75, 79] погрешность аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой есть величина $O(\tau^2 + h^4)$.

Задание 4. Методом сеток определить решение $u(x, t)$ задачи

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (-\alpha t + 1) e^{-\alpha t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2;$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 1 + t e^{-\alpha}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$$\alpha = 0,01k, \quad k = 1, 2, \dots, 10.$$

Используйте неявную разностную схему. Примените метод прогонки и обоснуйте его сходимость.

Задание 5. С помощью метода сеток найти $u(x, t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

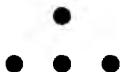
удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, 0) = -e^{-\alpha x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = e^{\alpha t}, \quad u(1, t) = e^{\alpha(t-1)}, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$$\alpha = \overline{1,5}.$$

Используйте явную разностную схему с шаблоном



Шаг пространственной сетки $h = 0,1$; шаг по времени определите из условия устойчивости, полученного методом гармоник.

Замечание. Дополнительные варианты задач для уравнений параболического типа можно найти в [10–12].

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 399 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1960. – Т. 2. – 620 с.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
7. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. – 480 с.
8. Рихтмайер Р.Д., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
10. Сборник задач по методам вычислений / Под ред. П.И. Монастырского. – М.: Наука, 1994. – 319 с.
11. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам. – М.: Высшая школа, 1979. – 184 с.
12. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
13. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 248 с.
14. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: ТГУ, 2007. – Ч. 2. – 285 с.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 429 с.

3. МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ

Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа можно свести к решению родственных задач для параболических уравнений до выхода решения на стационарный режим (до *установления*), используя при этом разностные схемы, разработанные для параболических уравнений. Изучению такого способа решения краевых задач посвящен данный раздел [2–4, 6].

3.1. Итерационный метод решения разностной задачи Дирихле

Пусть в прямоугольной области $G = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ с границей Γ требуется найти функцию $u(x, y) \in C^{2,2}(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую в G уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (3.1)$$

а на границе области – условию Дирихле (*первому граничному условию*)

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (3.2)$$

функции $\varphi(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные функции на $C(\bar{G})$.

Для численного решения задачи (3.1)–(3.2) с помощью метода сеток в главе 1 была построена разностная схема вида

$$\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{h_2^2} = f_{j,k}, \quad (3.3)$$

$$(x_j, y_k) \in \omega_h,$$

$$u_{j,k} = \varphi_{j,k}, \quad (x_j, y_k) \in \gamma_h. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\bar{\omega}_h = \left\{ (x_j, y_k), x_j = j h_1, j = \overline{0, N_1}; y_k = k h_2, k = \overline{0, N_2}; h_1 = \frac{a}{N_1}; h_2 = \frac{b}{N_2} \right\},$$

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \times \gamma_h,$$

где γ_h – граница сеточной области, ω_h – совокупность внутренних узлов.

Наряду с итерационными методами, приспособленными для решения разностной задачи (3.3)–(3.4) [1], используется метод установления [2, 3, 6], о котором далее пойдет речь.

Основная идея метода установления состоит в том, что с задачей (3.1)–(3.2) сопоставляется родственная нестационарная задача о распространении тепла:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - f(x, y), (x, y) \in G, t > 0; \quad (3.5)$$

$$\vartheta|_{\Gamma} = \varphi(\mathbf{B}), \mathbf{B} - \text{точка контура } \Gamma; \quad (3.6)$$

$$\vartheta(0, x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in \bar{G}. \quad (3.7)$$

Здесь $\psi(x, y)$ – произвольная функция, которая выбирается таким образом, что мало отличается от решения задачи (3.1), (3.2).

При этом $\vartheta = \vartheta(t, x, y)$. Заметим, что в задаче (3.5)–(3.7) источник тепла $f(x, y)$ и температура на границе $\varphi(\mathbf{B})$ не зависят от времени t . Поэтому

$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда будет следовать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t, x, y) = u(x, y)$, т.к.

в этом случае задачи (3.1), (3.2) и (3.5)–(3.7) будут совпадать.

Можно предположить поэтому, что для достаточно больших значений t , например для $t > T$, будет выполняться с необходимой точностью приближенное равенство $\vartheta(t, x, y) \approx u(x, y)$. Другими словами, $\|\vartheta(t, x, y) - u(x, y)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в норме пространства $L_2(\bar{G})$.

Аппроксимируем задачу (3.5)–(3.7) следующей двухслойной разностной схемой:

$$\frac{\vartheta_{j,k}^{n+1} - \vartheta_{j,k}^n}{\tau} = \frac{\vartheta_{j+1,k}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j-1,k}^n}{h_1^2} + \frac{\vartheta_{j,k+1}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j,k-1}^n}{h_2^2} - f_{j,k}, \quad (3.8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; k = 1, 2, \dots, N_2 - 1; n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\vartheta_{j,k}^{n+1} = \varphi(x_j, y_k), (x_j, y_k) \in \gamma_n; \quad (3.9)$$

$$\vartheta_{j,k}^0 = \psi(x_j, y_k), j = 0, 1, \dots, N_1, k = 0, 1, \dots, N_2. \quad (3.10)$$

Доопределим функцию $\psi(x, y)$ таким образом, чтобы для $(x_j, y_k) \in \gamma_n$ выполнялось условие

$$\psi(x_j, y_k) = \varphi(x_j, y_k).$$

Заметим, что разностное уравнение (3.8) имеет преимущества перед (3.3). Разностное уравнение (3.3) – система линейных алгебраических уравнений, в которой $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ неизвестных. Если N_1 и N_2 принимают большие значения, то определение решения системы (3.3) есть достаточно сложная задача. Вычисления по формуле (3.8) носят рекурсивный характер и не представляют особых затруднений.

Разностная схема (3.8)–(3.10) называется *явным методом установления* [4].

Для простоты изложения материала будем рассматривать равномерную сетку в направлении x и y соответственно и с одинаковым количеством узлов N_1 вдоль обеих осей. Шаг по пространственным осям обозначим h . С учетом сказанного схема (3.8)–(3.10) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{j,k}^{n+1} - \vartheta_{j,k}^n}{\tau} &= \frac{\vartheta_{j+1,k}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j-1,k}^n}{h^2} + \\ &+ \frac{\vartheta_{j,k+1}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j,k-1}^n}{h^2} - f_{j,k}, \\ &j, k = \overline{1, N_1 - 1}; \\ &\vartheta_{j,k}^{n+1} = \varphi(x_j, y_k), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$x_j = jh, y_k = kh, (x_j, y_k) \in \gamma_h; \quad (3.12)$$

$$\vartheta_{j,k}^0 = \psi(x_j, y_k), j, k = \overline{1, N_1 - 1}, \quad (3.13)$$

причем

$$\psi(x_j, y_k) = \varphi(x_j, y_k), (x_j, y_k) \in \gamma_h. \quad (3.14)$$

Перепишем (3.11)–(3.13) в операторном виде [5]:

$$L_h \vartheta^{(h)} = f^{(h)}, \quad (3.15)$$

где

$$L_h \vartheta^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{\vartheta_{j,k}^{n+1} - \vartheta_{j,k}^n}{\tau} - \frac{\vartheta_{j+1,k}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j-1,k}^n}{h^2} - \frac{\vartheta_{j,k+1}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j,k-1}^n}{h^2}, \\ j, k = \overline{1, N_1 - 1}, \\ \vartheta_{j,k}^{n+1}, (x_j, y_k) \in \gamma_h, \\ \vartheta_{j,k}^0, j, k = \overline{1, N_1 - 1}; \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} -f_{j,k}, j, k = \overline{1, N_1 - 1}; \\ \varphi(x_j, y_k), (x_j, y_k) \in \gamma_h; \\ \psi(x_j, y_k), (x_j, y_k) \in \omega_h. \end{cases}$$

Здесь $\mathfrak{G}^{(h)} \equiv \{\mathfrak{G}_{j,k}^n\} \in U_h$, $f^{(h)} \in F_h$; U_h, F_h – пространства сеточных функций – решений и правых частей соответственно, L_h – линейный разностный оператор.

Покажем, что разностная задача (3.15) аппроксимирует задачу (3.5)–(3.7) и условно устойчива.

Для оценки погрешности аппроксимации подставим в (3.11)–(3.13) решение $\mathfrak{G}(t, x, y)$ дифференциальной задачи (3.5)–(3.7).

Предположим, что $\mathfrak{G}(t, x, y) \in C_2^{4,4}(\bar{G})$. Применяя формулу Тейлора в окрестности узла (t_n, x_j, y_k) , получим

$$\mathfrak{G}(t_{n+1}, x_j, y_k) = \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k) + \frac{\partial \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial t} \frac{\tau^1}{1!} + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(\xi, x_j, y_k)}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2!}, \quad (3.16)$$

$$t_n < \xi < t_{n+1};$$

$$\mathfrak{G}(t_n, x_{j+1}, y_k) = \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k) + \frac{\partial \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial x} \frac{h^1}{1!} + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 \mathfrak{G}(t_n, \xi_1, y_k)}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!}, \quad (3.17)$$

$$x_j < \xi_1 < x_{j+1};$$

$$\mathfrak{G}(t_n, x_{j-1}, y_k) = \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k) - \frac{\partial \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial x} \frac{h^1}{1!} + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 \mathfrak{G}(t_n, \xi_2, y_k)}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!}, \quad x_{j-1} < \xi_2 < x_j; \quad (3.18)$$

$$\mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k + h) = \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k) + \frac{\partial \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial y} \frac{h^1}{1!} + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathfrak{G}(t_n, x_j, y_k)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 \mathfrak{G}(t_n, x_j, \eta_1)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!}, \quad y_k < \eta_1 < y_{k+1}; \quad (3.19)$$

$$\vartheta(t_n, x_j, y_k - h) = \vartheta(t_n, x_j, y_k) - \frac{\partial \vartheta(t_n, x_j, y_k)}{\partial y} \frac{h^1}{1!} + \frac{\partial^2 \vartheta(t_n, x_j, y_k)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 \vartheta(t_n, x_j, y_k)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 \vartheta(t_n, x_j, \eta_2)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!}, \quad y_{k-1} < \eta_2 < y_k. \quad (3.20)$$

Введем вектор-функцию невязки

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \delta_1 f^{(h)}, \\ \delta_2 f^{(h)}, \\ \delta_3 f^{(h)}. \end{cases}$$

Используя формулы (3.16)–(3.20) и подставляя их в разностную схему (3.15), получим, что [4]:

$$\delta_1 f^{(h)} = C_1 \tau + C_2 h^2,$$

где C_1 и C_2 – положительные константы, не зависящие от шагов τ и h .

$\delta_2 f^{(h)}$ – невязка для граничного, а $\delta_3 f^{(h)}$ – для начального условия. Очевидно, что $\delta_2 f^{(h)} = \delta_3 f^{(h)} = 0$.

Определим для любого $f^{(h)} \in F_h$ норму следующим образом:

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{j,k} |f_{j,k}|.$$

Тогда $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = \max\{\|\delta_1 f^{(h)}\|, \|\delta_2 f^{(h)}\|, \|\delta_3 f^{(h)}\|\}$, или $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = C_1 \tau + C_2 h^2 \leq (\tau + h^2) C_3$,

где

$$C_3 = \max(C_1, C_2).$$

Отсюда следует, что разностная схема (3.15) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (3.5)–(3.7) с порядком $O(\tau + h^2)$.

Докажем далее, что схема устойчива, т.е. однозначно разрешима, и решение задачи $\vartheta^{(h)} \in U_h$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\vartheta^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|\delta f^{(h)}\|_{F_h}. \quad (3.21)$$

Существование и единственность решения задачи (3.15) следует из принципа максимума (минимума) [4].

Для доказательства справедливости неравенства (3.21) введем нормы на фиксированном временном слое n :

$$\|\mathfrak{G}^{(h)}\|_{U_h} = \max_{j,k} |\mathfrak{G}_{j,k}^n|, \quad \|\mathfrak{G}^{(h)}\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{(x_j, y_k) \in \gamma_h} |\varphi_{j,k}|, \max_{(x_j, y_k) \in \omega_h} |\psi_{j,k}| \right\}.$$

Перепишем схему (3.11)–(3.13) в виде

$$\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{4\tau}{h^2}\right) \mathfrak{G}_{j,k}^n + \frac{\tau}{h^2} \left[\mathfrak{G}_{j+1,k}^n + \mathfrak{G}_{j-1,k}^n + \mathfrak{G}_{j,k+1}^n + \mathfrak{G}_{j,k-1}^n \right], \quad (3.22)$$

$$j, k = \overline{1, N_1 - 1};$$

$$\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1} = \varphi(x_j, y_k), \quad (x_j, y_k) \in \gamma_h, \quad (3.23)$$

$$\mathfrak{G}_{j,k}^0 = \psi(x_j, y_k), \quad j, k = \overline{1, N_1 - 1}. \quad (3.24)$$

Если $1 - \frac{4\tau}{h^2} \geq 0$ или, что то же, $\frac{4\tau}{h^2} \leq 1$, то будет справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 - \frac{4\tau}{h^2}\right) \mathfrak{G}_{j,k}^n + \frac{\tau}{h^2} (\mathfrak{G}_{j+1,k}^n + \mathfrak{G}_{j-1,k}^n + \mathfrak{G}_{j,k+1}^n + \mathfrak{G}_{j,k-1}^n) \right| \leq \\ & \leq \left[\left(1 - \frac{4\tau}{h^2}\right) + \frac{4\tau}{h^2} \right] \max \left(|\mathfrak{G}_{j-1,k}^n|, |\mathfrak{G}_{j+1,k}^n|, |\mathfrak{G}_{j,k+1}^n|, |\mathfrak{G}_{j,k-1}^n|, |\mathfrak{G}_{j,k}^n| \right) \leq \max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\mathfrak{G}_{j,k}^n|. \end{aligned}$$

С помощью этой оценки из (3.22) получим, что

$$|\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}| \leq \max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\mathfrak{G}_{j,k}^n|, \quad (3.25)$$

т.е. с увеличением n $|\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}|$ не возрастает.

Так как правая часть неравенства (3.25) не зависит от j, k , то из (3.25), очевидно, следует

$$\max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}| \leq \max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\mathfrak{G}_{j,k}^n|.$$

Аналогичным образом рассуждая, будем иметь

$$\max_{j,k} |\mathfrak{G}_{j,k}^n| \leq \max_{j,k} |\mathfrak{G}_{j,k}^{n-1}|,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\max_{j,k} |\mathfrak{G}_{j,k}^1| \leq \max_{j,k} |\mathfrak{G}_{j,k}^0| = \max_{j,k} |\psi_{j,k}|.$$

Из полученной цепочки неравенств следует, что

$$\max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}| \leq \max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\psi_{j,k}|.$$

С учетом граничных условий последнее неравенство можно переписать в виде

$$\max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\vartheta_{j,k}^{n+1}| \leq \max \left\{ \max_{1 \leq j, k \leq N_1 - 1} |\psi_{j,k}|, \max_{(x_j, y_k) \in \gamma_h} |\varphi_{j,k}| \right\}$$

для любого n , что означает устойчивость разностной схемы в выбранных нормах.

Устойчивость схемы показана при выполнении условия $\tau \leq \frac{h^2}{4}$. Из аппроксимации и устойчивости по соответствующей теореме [2] следует сходимость решения разностной задачи $\vartheta^{(h)}$ к решению дифференциальной задачи $[\vartheta]_h$ [5].

Метод установления позволяет определить значения $\vartheta(t, x, y)$ в узлах сетки на любом последующем временном слое через его значения на предыдущем. Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока модули разности значений $\vartheta(t, x, y)$ в моменты времени t_n и t_{n+1} в соответствующих узлах не станут меньше некоторой заранее заданной величины. Последнее означает, что решение $\vartheta(t, x, y)$ с течением времени меняется мало, т.е. выходит на стационарный режим.

Для исследования скорости сходимости решения нестационарной задачи к решению соответствующей задачи Дирихле потребуется использование разложения в ряд Фурье сеточных функций. Остановимся на этом вопросе [2].

3.2. Ряды Фурье. Случай сеточных функций

Рассмотрение проведем на примере одномерной модельной задачи, решение которой представляется в виде конечного ряда Фурье. Такое представление очень ценно, т.к. позволяет понять свойства рассматриваемой модельной задачи.

Рассматривается множество вещественных функций $\vartheta = \{\vartheta_j\}$, определяемых в узлах сетки $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N_1$; $N_1 h = 1$. Функции обращаются в нуль, если $j = 0$ и $j = N_1$. Совокупность этих функций с обычными операциями сложения и умножения их на вещественные числа образует линейное пространство. Размерность пространства $N_1 - 1$, т.к. для $l = 1, \dots, N_1 - 1$ система функций

$$\tilde{\theta}_j^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq l, \\ 1, & \text{если } j = l \end{cases}$$

образует базис.

В самом деле, любую функцию $\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N_1})$, $\vartheta_0 = \vartheta_{N_1} = 0$, можно единственным образом представить в виде линейной комбинации функций $\tilde{\theta}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(2)}, \dots, \tilde{\theta}^{(N_1-1)}$:

$$\vartheta = \vartheta_1 \tilde{\theta}^{(1)} + \dots + \vartheta_{N_1-1} \tilde{\theta}^{(N_1-1)}.$$

В указанном пространстве введем скалярное произведение

$$(\vartheta, \omega) = h \sum_{j=0}^{N_1} \vartheta_j \omega_j, \quad (3.26)$$

и покажем, что система функций

$$\theta^{(l)} = \sqrt{2} \sin \frac{l\pi j}{N_1}, \quad l = 1, \dots, N_1 - 1, \quad (3.27)$$

образует ортонормированный базис в рассматриваемом пространстве, т.е.

$$(\theta^{(l)}, \theta^{(m)}) = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ 1, & l = m; \quad l, m = 1, 2, \dots, N_1 - 1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Прежде чем доказать справедливость этого утверждения, отметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N_1-1} \cos \frac{l\pi j}{N_1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(e^{i \frac{l\pi j}{N_1}} + e^{-i \frac{l\pi j}{N_1}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{i l \pi}}{1 - e^{i \frac{l\pi}{N_1}}} + \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-i l \pi}}{1 - e^{-i \frac{l\pi}{N_1}}} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } l - \text{четное и } 0 < l < 2N_1, \\ 1, & \text{если } l - \text{нечетное.} \end{cases} \end{aligned}$$

В самом деле, обозначим

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{i l \pi}}{1 - e^{i \frac{l\pi}{N_1}}} + \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-i l \pi}}{1 - e^{-i \frac{l\pi}{N_1}}}.$$

Используя известные формулы $e^{i l \pi} = \cos l \pi + i \sin l \pi$, $e^{-i l \pi} = \cos l \pi - i \sin l \pi$, после несложных преобразований получим

$$q = \frac{(1 - \cos l \pi) \left(1 - \cos \frac{l\pi}{N_1} \right) + \sin l \pi \sin \frac{l\pi}{N_1}}{4 \sin^2 \frac{l\pi}{2N_1}}.$$

Имеют место очевидные соотношения

$$(1 - \cos l\pi) = 0 \text{ для } l = 2, 4, \dots;$$

$$(1 - \cos l\pi) = 2 \text{ для } l = 1, 3, \dots$$

Отсюда справедливость утверждения очевидна.

Тогда при $l \neq m$ имеем

$$\begin{aligned} (\theta^{(l)}, \theta^{(m)}) &= 2h \sum_{j=0}^{N_1} \sin \frac{l\pi j}{N_1} \sin \frac{m\pi j}{N_1} = 2h \sum_{j=0}^{N_1-1} \sin \frac{l\pi j}{N_1} \sin \frac{m\pi j}{N_1} = \\ &= h \sum_{j=0}^{N_1-1} \cos \frac{(l-m)\pi j}{N_1} - h \sum_{j=0}^{N_1-1} \cos \frac{(l+m)\pi j}{N_1} = 0, \end{aligned}$$

если $(l-m)$ – нечетное, то $(l+m)$ – тоже (т.к. если $(l-m)$ – четное, то $(l+m)$ – также четное).

Если $l = m$, то

$$(\theta^{(l)}, \theta^{(m)}) = h \sum_{j=0}^{N_1-1} \cos 0 - h \sum_{j=0}^{N_1-1} \cos \frac{2l\pi j}{N_1} = hN_1 - h0 = 1.$$

Любую сеточную функцию $\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N_1})$ можно разложить по ортонормированному базису (3.27) в виде

$$\vartheta = \sum_{l=1}^{N_1-1} c_l \theta^{(l)},$$

или

$$\vartheta_j = \sqrt{2} \sum_{l=1}^{N_1-1} c_l \sin \frac{l\pi j}{N_1}, \quad (3.29)$$

где

$$c_l = (\vartheta, \theta^{(l)}) = \sqrt{2}h \sum_{j=0}^{N_1-1} \vartheta_j \sin \frac{l\pi j}{N_1}.$$

Очевидно, что

$$(\vartheta, \vartheta) = \sum_{l=1}^{N_1-1} c_l^2. \quad (3.30)$$

Выражение (3.29) представляет собой разложение сеточной функции $\vartheta = \{\vartheta_j\}$ в конечный ряд Фурье, а (3.30) – точный аналог равенства Парсеваля из теории рядов Фурье [2, с. 250–261].

$$\text{Рассмотрим оператор } \Lambda_{xx} \vartheta_j = \frac{1}{h^2} (\vartheta_{j+1} - 2\vartheta_j + \vartheta_{j-1}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx} \sin \frac{l\pi j}{N_1} &= \frac{1}{h^2} \left[\sin \frac{l\pi(j+1)}{N_1} - 2 \sin \frac{l\pi j}{N_1} + \sin \frac{l\pi(j-1)}{N_1} \right] = \\ &= \frac{2}{h^2} \left[\cos \frac{l\pi}{N_1} - 1 \right] \sin \frac{l\pi j}{N_1} = \mu_l \sin \frac{l\pi j}{N_1}, \quad j = \overline{1, N_1 - 1}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_l = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{l\pi}{2N_1}. \quad (3.31)$$

Отсюда следует, что μ_l – собственные значения оператора Λ_{xx} , соответствующие собственным функциям

$$\theta^{(l)} = \sqrt{2} \sin \frac{l\pi j}{N_1}. \quad (3.32)$$

3.3. Исследование сходимости явного метода установления

Введем обозначение

$$\varepsilon_{j,k}^n = \vartheta_{j,k}^n - u_{j,k}, \quad (3.33)$$

где $\vartheta_{j,k}^n$ – решение нестационарной задачи (3.11)–(3.13); $u_{j,k}$ – точное решение родственной стационарной задачи Дирихле (3.3), (3.4); $\varepsilon_{j,k}^n$ – функция погрешности, показывающая близость решений названных задач.

Заметим, что в силу граничного условия Дирихле, очевидно,

$$\varepsilon_{j,k}^n \Big|_{\gamma_n} = 0 \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Определим норму $\|\varepsilon^n\| = \left(\sum_{j,k} |\varepsilon_{j,k}^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ и выясним, в какой момент времени и с какой скоростью

$$\|\varepsilon^n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Запишем конечно-разностное соотношение (3.3) в эквивалентном виде ($h_1 = h_2 = h$):

$$0 = \frac{u_{j,k} - u_{j,k}}{\tau} = \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{h^2} - f_{j,k}$$

и получим разностную схему для погрешности

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{j,k}^{n+1} - \varepsilon_{j,k}^n}{\tau} &= \frac{\varepsilon_{j+1,k}^n - 2\varepsilon_{j,k}^n + \varepsilon_{j-1,k}^n}{h^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{j,k+1}^n - 2\varepsilon_{j,k}^n + \varepsilon_{j,k-1}^n}{h^2}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$j, k = \overline{1, N_1 - 1}$$

$$\varepsilon_{j,k}^{n+1} = 0 \text{ при } (x_j, y_k) \in \gamma_h, \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_{j,k}^0 = \psi(x_j, y_k) - u_{j,k}, \quad j, k = \overline{1, N_1 - 1}. \quad (3.37)$$

С целью упрощения анализа задачи будем считать, что $a = b = 1$.

Значения решения на временном слое номера n обозначим ε^n и в дальнейшем, если в этом не будет нужды, не будем указывать зависимость ε^n от j и k .

По аналогии с теорией, изложенной в предыдущем пункте, рассмотрим конечные ряды Фурье на сеточном квадрате. Имеется сетка с узлами $x_j = jh_1$, $y_k = kh_2$, $0 \leq jh_1 \leq 1$; $0 \leq kh_2 \leq 1$; $h_1 = h_2 = \frac{1}{N_1} = h$.

Совокупность вещественных функций $\varepsilon^n = \{\varepsilon_{j,k}^n\}$ при фиксированном слое n , определенных в узлах сетки и обращающихся в нуль в точках, лежащих на границе квадрата, образует линейное пространство размерности $(N_1 - 1) \times (N_1 - 1)$.

Рассуждая аналогично вышесказанному, можно показать, что система функций $\theta^{(l,m)} = 2 \sin \frac{l\pi j}{N_1} \sin \frac{m\pi j}{N_1}$, $l, m = \overline{1, N_1 - 1}$, образует ортонормированный базис, т.е.

$$(\theta^{(l,m)}, \theta^{(s,t)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq s, \text{ либо } m \neq t, \\ 1, & \text{если } l = s \text{ и } m = t. \end{cases}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (\theta^{(l,m)}, \theta^{(s,t)}) &= \left(2 \sum_{j=0}^{N_1} \sin \frac{l\pi j}{N_1} \sin \frac{s\pi j}{N_1} \right) \left(2 \sum_{k=0}^{N_1} \sin \frac{m\pi k}{N_1} \sin \frac{t\pi k}{N_1} \right) = \\ &= (\theta^{(l)}, \theta^{(s)}) (\theta^{(m)}, \theta^{(t)}). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость нашего утверждения.

Применяя вышеизложенную теорию, будем искать решения вида

$$\varepsilon_{j,k}^n = \lambda_{j,k}^n \theta_{j,k}^{(l,m)}, \text{ где } \theta = \psi - u.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx} \theta^{(l,m)} &= \Lambda_{xx} \left(\theta_j^{(l)} \theta_k^{(m)} \right) = \theta^{(m)} \Lambda_{xx} \theta^{(l)} = \\ &= \mu^{(l)} \theta^{(l)} \theta^{(m)} = \mu^{(l)} \theta^{(l,m)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\Lambda_{yy} \theta^{(l,m)} = \mu^{(m)} \theta^{(l,m)}.$$

Поэтому для $\lambda_{l,m}$ получим

$$\frac{\lambda_{l,m} - 1}{\tau} = \mu^{(l)} + \mu^{(m)}$$

или

$$\lambda_{l,m} = 1 - \frac{4\tau}{h^2} \left(\sin^2 \frac{l\pi}{2N_1} + \sin^2 \frac{m\pi}{2N_1} \right). \quad (3.38)$$

Здесь $\lambda_{l,m}$ – собственные значения оператора $\frac{\partial}{\partial t} - (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})$.

В [2, с. 250–253, 257–259] получены соответствующие $\lambda_{l,m}$ собственные функции

$$\theta_{j,k}^{(l,m)} = 2 \sin \frac{l\pi j}{N_1} \sin \frac{m\pi k}{N_1}, \quad j, k = 0, \dots, N_1. \quad (3.39)$$

Запишем решение разностной задачи (3.35)–(3.37) в виде

$$\varepsilon^n = \sum_{l,m=1}^{N_1-1} c_{l,m} \lambda_{l,m}^n \theta_{l,m}^{(l,m)}, \quad (3.40)$$

где $c_{l,m}$ – некоторые постоянные.

Функции $\theta^{(l,m)}$ выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие $\theta_{j,k}^{(l,m)}|_{\gamma_h} = 0$. Тогда $\varepsilon_{j,k}^n|_{\gamma_h} = 0$ и решение (3.40) будет удовлетворять разностному уравнению (3.35) и граничному условию (3.36).

Чтобы решение вида (3.40) удовлетворяло начальному условию

$$\varepsilon_{j,k}^0 = \psi(x_j, y_k) - u_{j,k},$$

т.е.

$$\sum_{l,m=1}^{N_1-1} c_{l,m} \lambda_{l,m}^0 \theta_{l,m}^{(l,m)} = \psi(x_j, y_k) - u_{j,k},$$

необходимо в качестве постоянных коэффициентов взять разностные коэффициенты Фурье для функции $\psi(x_j, y_k) - u_{j,k}$. Итак,

$$c_{l,m} = h^2 \sum_{j,k=0}^{N_l} (\psi(x_j, y_k) - u_{j,k}) \cdot 2 \sin \frac{l\pi j}{N_l} \sin \frac{m\pi k}{N_l}. \quad (3.41)$$

Обозначим $\mu_{l,m}^n = c_{l,m} \lambda_{l,m}^n$. Тогда соотношение (3.40) можно переписать в виде

$$\varepsilon^n = \sum_{l,m=1}^{N_l-1} \mu_{l,m}^n \theta^{(l,m)}.$$

Из этой формулы следует, что числа $\mu_{l,m}^n$ являются коэффициентами Фурье разложения погрешности ε^n по функциям $\theta^{(l,m)}$.

$$\text{Рассмотрим } (\varepsilon^n, \varepsilon^n) = \sum_{l,m=1}^{N_l-1} |c_{l,m} \cdot \lambda_{l,m}^n|^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\| &= \left(\sum_{l,m=1}^{N_l-1} |c_{l,m} \cdot \lambda_{l,m}^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\varepsilon^0\| &= \left(\sum_{l,m=1}^{N_l-1} |c_{l,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\lambda_{l,m}^0 = 1). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Если $\lambda = \max_{l,m} |\lambda_{l,m}|$, то $|\lambda_{l,m}| \leq \lambda$.

Из (3.42) следует, что

$$\|\varepsilon^n\| \leq \lambda^n \|\varepsilon^0\|. \quad (3.43)$$

При $\lambda < 1$ из неравенства (3.43) вытекает, что $\|\varepsilon^n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Чем меньше λ , тем быстрее стремится к нулю $\|\varepsilon^n\|$.

Из (3.38) имеем

$$\max_{l,m} |\lambda_{l,m}| = \max_{l,m} \left| 1 - \frac{4\tau}{h^2} \left(\sin^2 \frac{l\pi}{2N_l} + \sin^2 \frac{m\pi}{2N_l} \right) \right| = \lambda(\tau).$$

Подберем шаг по времени τ таким образом, чтобы $\lambda(\tau)$ принимало наименьшее значение.

Введем обозначение

$$Q(l, m) = \sin^2 \frac{l\pi}{2N_1} + \sin^2 \frac{m\pi}{2N_1}, \quad 1 \leq l, m \leq N_1 - 1.$$

Имеет место очевидное неравенство

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1} \leq Q(l, m) \leq 2 \cos^2 \frac{\pi}{2N_1}. \quad (3.44)$$

Обозначим $\sigma_{l,m}(\tau) = 1 - \frac{4}{h^2} Q(l, m)\tau$, $1 \leq l, m \leq N_1 - 1$; $\tau > 0$.

Построим график семейства функций $\sigma_{l,m}(\tau)$, учитывая неравенство (3.44). Заметим, что все графики функций семейства $\sigma_{l,m}(\tau)$ лежат внутри области, ограниченной прямыми $\sigma_1 = 1 - \frac{8}{h^2} \tau \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2N_1}$ и

$$\sigma_2 = 1 - \frac{8}{h^2} \tau \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}.$$

Задавая значения $\sigma_1 = -1, 0, +1$, определим соответствующие значения τ и представим их в виде табл. 3.1 значений прямой σ_1 .

Таблица 3.1

σ_1	1	0	-1
τ	0	$\frac{h^2}{8 \cos^2 \frac{\pi}{2N_1}}$	$\frac{h^2}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2N_1}}$

Аналогичную таблицу значений σ, τ составим для прямой σ_2 (табл. 3.2).

Таблица 3.2

σ_2	1	0	-1
τ	0	$\frac{h^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}}$	$\frac{h^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}}$

Нарисуем графики прямых σ_1 и σ_2 (рис. 3.1).

Здесь $A(0,1)$, $B\left(\frac{h^2}{8\cos^2\frac{\pi}{2N_1}}, 0\right)$, $C\left(\frac{h^2}{4\cos^2\frac{\pi}{2N_1}}, 0\right)$, $D\left(\frac{h^2}{8\sin^2\frac{\pi}{2N_1}}, 0\right)$.

Из рис. 3.1 видно, что значения τ , обеспечивающие выполнение условия $|\lambda| < 1$, расположены в интервале

$$0 < \tau < \frac{h^2}{4\cos^2\frac{\pi}{2N_1}}.$$

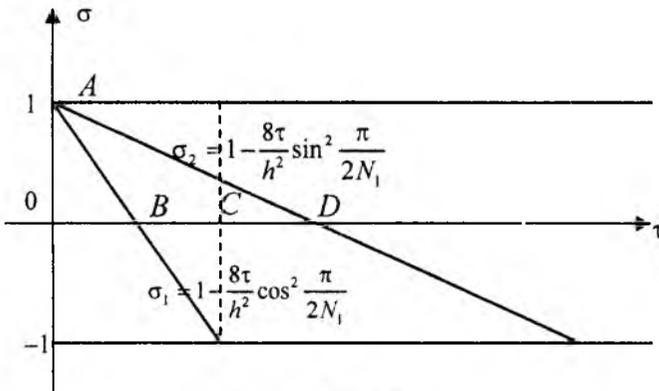


Рис. 3.1

При

$$\tau \geq \frac{h^2}{4\cos^2\frac{\pi}{2N_1}}$$

очевидно, что

$$|\sigma(\tau)| \geq 1.$$

Оптимальное значение шага по времени τ расположено на промежутке

$$\frac{h^2}{8\cos^2\frac{\pi}{2N_1}} < \tau < \frac{h^2}{4\cos^2\frac{\pi}{2N_1}}. \quad (3.45)$$

Если τ удовлетворяет условию (3.45), то функция $\sigma(\tau) = 1 - \frac{8}{h^2} \tau \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}$ убывает (см. рис. 3.1) и $\sigma(\tau) < 1$.

Функция $|\sigma(\tau)| = \left| 1 - \frac{8}{h^2} \tau \cos^2 \frac{\pi}{2N_1} \right|$ возрастает и $|\sigma(\tau)| < 1$.

Если имеет место равенство

$$1 - \frac{8}{h^2} \tau \sin^2 \frac{\pi}{2N_1} = \left| 1 - \frac{8}{h^2} \tau \cos^2 \frac{\pi}{2N_1} \right|, \quad (3.46)$$

то τ достигает оптимального значения на отрезке, определяемом неравенством (3.45).

В самом деле, из (3.46) вытекает:

$$\text{а) } 1 - \frac{8}{h^2} \tau \cos^2 \frac{\pi}{2N_1} = 1 - \frac{8}{h^2} \tau \sin^2 \frac{\pi}{2N_1};$$

$$\text{б) } -1 + \frac{8}{h^2} \tau \cos^2 \frac{\pi}{2N_1} = 1 - \frac{8}{h^2} \tau \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}.$$

Из условия б следует, что

$$\frac{8}{h^2} \tau \left(\cos^2 \frac{\pi}{2N_1} + \sin^2 \frac{\pi}{2N_1} \right) = 2$$

или

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{h^2}{4}.$$

Тогда

$$\lambda_{\text{опт}} = \max_{l,m} (|\lambda_{l,m}|) \Big|_{\tau=\tau_{\text{опт}}} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1},$$

т.е.

$$\lambda_{\text{опт}} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}, \quad |\lambda_{\text{опт}}| < 1.$$

Потребуем теперь, чтобы $\|\varepsilon^n\| < \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое наперед заданное малое положительное число ($\delta > \|\varepsilon^0\|$).

Определим n из следующего неравенства:

$$\|\varepsilon^n\| \leq \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}\right)^n \cdot \|\varepsilon^0\| < \delta.$$

Имеем

$$n \ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}\right) + \ln \|\varepsilon^0\| \geq \ln \delta$$

(т.к. $\delta > 0$ – малое положительное число, значит $\ln \delta < 0$) и, следовательно,

$$n \geq \frac{\ln \delta - \ln \|\varepsilon^0\|}{\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}\right)}$$

или для малых значений $\frac{\pi}{2N_1}$ получим

$$n \approx \frac{2N_1^2}{\pi^2} (\ln \|\varepsilon^0\| - \ln \delta). \quad (3.47)$$

Таким образом, для обеспечения сходимости решения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи требуется выполнить порядка N_1^2 временных слоев.

3.4. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом установления

Проиллюстрируем изложенную выше теорию метода установления на примере решения модельной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном квадрате.

Итак, пусть в области $G = \{(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ (рис. 3.2) требуется найти функцию $u(x, y) \in C^{2,2}(G) \cap C(\bar{G})$, являющуюся решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.48)$$

и удовлетворяющую условиям Дирихле на границе Γ :

$$u(0, y) = -y^2, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$\begin{aligned}
 u(1, y) &= 1 - y^2, \quad 0 \leq y \leq 1; \\
 u(x, 0) &= x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \\
 u(x, 1) &= x^2 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

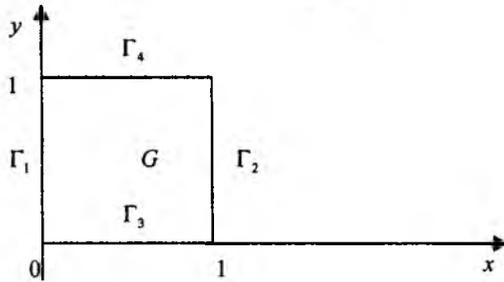


Рис. 3.2

Нетрудно проверить, что аналитическим решением задачи (3.48)–(3.49) является функция $u(x, y) = x^2 - y^2$, изображенная на рис. 3.3.

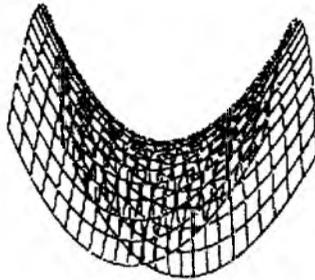


Рис. 3.3

Согласно методу установления сопоставим в соответствие стационарной задаче (3.48), (3.49) нестационарную задачу о распространении тепла в пластине:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in G; \\
 \vartheta(t, 0, y) &= -y^2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad t \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(t, 1, y) &= 1 - y^2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad t \geq 0; \\
\vartheta(t, x, 0) &= x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0; \\
\vartheta(t, x, 1) &= x^2 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0; \\
\vartheta(0, x, y) &= \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

В (3.50) функцию $\psi(x, y)$ следует подобрать так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (3.49) и мало отличалась от функции $u(x, y)$.

Положим

$$\psi(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x, y), \tag{3.51}$$

где

$$\varepsilon(x, y) = x(1-x)y(1-y) \tag{3.52}$$

обладает той же гладкостью, что и $u(x, y)$, и обращается в нуль на Γ .

Будем решать задачу (3.50) численно на сетке

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_{h,\tau} &= \left\{ (t_n, x_j, y_k), \quad x_j = jh, y_k = kh; \quad j, k = \overline{0, N_1}, \quad N_1 = \frac{1}{h}; \quad t_n = n\tau, \right. \\
&\quad \left. n = 0, 1, 2, \dots; h, \tau > 0 \right\}.
\end{aligned}$$

При построении сетки задаем число узлов N_1 по оси $0x$ и $0y$, вычисляем шаг $h = \frac{1}{N_1}$, а временной шаг τ выбираем из полученного вы-

ше условия устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$. Затем аппроксимируем задачу (3.50) разностной схемой вида (3.8)–(3.10), а именно:

$$\begin{aligned}
\frac{\vartheta_{j,k}^{n+1} - \vartheta_{j,k}^n}{\tau} &= \frac{\vartheta_{j+1,k}^k - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j-1,k}^n}{h^2} + \frac{\vartheta_{j,k+1}^n - 2\vartheta_{j,k}^n + \vartheta_{j,k-1}^n}{h^2}, \\
j, k &= \overline{1, N_1 - 1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\
\vartheta_{0,k}^{n+1} &= -y_k^2, \quad k = \overline{0, N_1}, \quad n = 0, 1, \dots; \\
\vartheta_{N_1,k}^{n+1} &= 1 - y_k^2, \quad k = \overline{0, N_1}, \quad n = 0, 1, \dots; \\
\vartheta_{j,0}^{n+1} &= x_j^2, \quad j = \overline{0, N_1}, \quad n = 0, 1, \dots; \\
\vartheta_{j,N_1}^{n+1} &= x_j^2 - 1, \quad j = \overline{0, N_1}, \quad n = 0, 1, \dots; \\
\vartheta_{j,k}^0 &= \psi(x_j, y_k), \quad j, k = \overline{1, N_1 - 1}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Из первого уравнения в (3.53) имеем

$$\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1} = \mathfrak{G}_{j,k}^n + \frac{\tau}{h^2} (\mathfrak{G}_{j+1,k}^n + \mathfrak{G}_{j-1,k}^n + \mathfrak{G}_{j,k+1}^n + \mathfrak{G}_{j,k-1}^n - 4\mathfrak{G}_{j,k}^n), \quad (3.54)$$

$$j, k = \overline{1, N_1 - 1}; n = 0, 1, \dots$$

По этой формуле последовательно находим значения решения во внутренних узлах сетки, полагая $n = 0, 1, 2, \dots$. В формуле (3.54) используются значения решения в граничных узлах сетки, которые определяются по соответствующим формулам из (3.53). Заметим, что значения решения в граничных узлах от номера слоя n не зависят, а лишь от x_j, y_k , и их достаточно вычислить один раз. Вычисления значений $\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}$ по формуле (3.54) продолжаются до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$M = \max_{j,k=0,N_1} |\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1} - \mathfrak{G}_{j,k}^n| < \varepsilon \quad (3.55)$$

и полученные решения не будут удовлетворять разностной схеме. Значения сеточной функции $\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}$ считаем приближенными значениями решения стационарной задачи. В табл. 3.3 приведены значения приближенного решения $\mathfrak{G}_{j,k}^{n+1}$ в узлах сетки, построенной для $N_1 = 5$ ($h = 0,2$), и точности вычислений $\varepsilon = 0,000001$. Приближенные значения решения сравнивались с точным решением $u(x, y) = x^2 - y^2$, вычисленным в тех же узлах сетки (x_j, y_k) , $j, k = \overline{0, N_1}$. Получено, что максимум модуля разности решений для $N_1 = 5$ по всем узлам сетки равен $\approx 3,5 \cdot 10^{-6}$. Итерационный процесс, определяемый формулой (3.54), сходится в этом случае за 46 итераций, т.е. неравенство (3.55) выполняется для $n = 46$.

Таблица 3.3

0,00000	-0,04000	-0,16000	-0,36000	-0,64000	-1,00000
1,00000	0,00000	-0,12000	-0,32000	-0,60000	-0,96000
0,16000	0,12000	0,00000	-0,20000	-0,48000	-0,84000
0,36000	0,32000	0,20000	0,00000	-0,28000	-0,64000
0,64000	0,60000	0,48000	0,28000	0,00000	-0,36000
1,00000	0,96000	0,84000	0,64000	0,36000	0,00000

Расчеты проводились и при других значениях N_1 . Например, при $N_1 = 10$ потребовалось выполнить 163 итерации, при $N_1 = 3$ или $N_1 = 6$ соответственно 16 и 65 итераций. Таким образом, при точности $\varepsilon = 0,000001$ для получения значений приближенного решения потребовалось $O(N_1^2)$ итераций, что вполне согласуется с изложенной выше теорией сходимости явного метода установления.

3.5. Лабораторные задания

Задание. С помощью метода установления решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Численное решение получить в области G с границей Γ , которая задается соответствующим образом в каждом варианте.

Вариант № 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(x+y); (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(0, y) = y^3, 0 \leq y \leq 1; u(x, 0) = x^3, 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(1, y) = 1 + y^3, 0 \leq y \leq 1; u(x, 1) = 1 + x^3, 0 \leq x \leq 1.$$

Вариант № 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x+y}; (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 0,5, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(0, y) = e^y, 0 \leq y \leq 1; u(x, 0) = e^x, 0 \leq x \leq 0,5;$$

$$u(0,5, y) = \sqrt{e} e^y, 0 \leq y \leq 1; u(x, 1) = e^{1+x}, 0 \leq x \leq 0,5.$$

Вариант № 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 - x^2) \sin y; (x, y) \in \bar{G} = \left\{ (x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$u(0, y) = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(1, y) = \sin y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = x^2, 0 \leq x \leq 1.$$

Вариант № 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 - y^2) \cos x; (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(0, y) = y^2, 0 \leq y \leq 1; u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \pi;$$
$$u(\pi, y) = -y^2, 0 \leq y \leq 1; u(x, 1) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi.$$

Вариант № 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x(6 + x^2)e^y; (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(x, 0) = x^3, 0 \leq x \leq 1; u(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1;$$
$$u(x, 1) = 2,7183x^3, 0 \leq x \leq 1; u(1, y) = e^y, 0 \leq y \leq 1.$$

Вариант № 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 + y^2)e^x; (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 2; u(0, y) = y^2, 0 \leq y \leq 1;$$
$$u(x, 1) = e^x, 0 \leq x \leq 2; u(2, y) = 7,38906y^2, 0 \leq y \leq 1.$$

Вариант № 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(e^{2x} + 1); (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 0,5, 0 \leq y \leq 2\};$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}e^{2x}, 0 \leq x \leq 0,5; u(0, y) = 0,5 + y^2, 0 \leq y \leq 2;$$
$$u(x, 2) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 8), 0 \leq x \leq 0,5; u(0,5, y) = 1,35914 + y^2, 0 \leq y \leq 2.$$

Вариант № 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos y - \sin x; (x, y) \in \bar{G} = \left\{ (x, y), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \pi \right\};$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u(0, y) = -\cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$u(x, \pi) = 1 + \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 - \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Вариант № 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$(x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 2\};$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2; \quad \bullet$$

$$u(x, 2) = 7,38906 \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Вариант № 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$(x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi\};$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0, y) = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$u(x, \pi) = -e^x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(1, y) = 2,71828 \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Вариант № 11

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos x + \sin y); \quad (x, y) \in \bar{G} = \left\{ (x, y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u(0, y) = 1 + \sin y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = 1 + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Вариант № 12

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + e^y; \quad (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2\};$$

$$u(x, 0) = 1 + x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0, y) = e^y, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$u(x, 2) = x^2 + 7,38906, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(1, y) = 1 + e^y, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Вариант № 13

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - \cos y; \quad (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(x, 0) = 1 + x^2, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad u(1, y) = 1 + \cos y, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 1) = 0,5403 + x^2, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad u(2, y) = 4 + \cos y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Вариант № 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - \sin y;$$

$$(x, y) \in \bar{G} = \left\{ (x, y), \quad 2 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 2 \leq x \leq 3; \quad u(2, y) = 4 + \sin y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = 1 + x^2, \quad 2 \leq x \leq 3; \quad u(3, y) = 9 + \sin y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Вариант № 15

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x + e^y; \quad (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq 0,5, \quad 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{3}x^3 + 1, \quad 0 \leq x \leq 0,5; \quad u(0, y) = e^y, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 1) = \frac{1}{3}(x^3 + 8,154845), \quad 0 \leq x \leq 0,5; \quad u(0,5, y) = 0,041667 + e^y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Вариант № 16

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 + \cos x - \sin y; \quad (x, y) \in \bar{G} = \left\{ (x, y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \pi \right\};$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u(0, y) = \sin y - 1, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$u(x, \pi) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin y + 1,2337, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Вариант № 17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (3 + y^2)e^x; \quad (x, y) \in \bar{G} = \left\{ (x, y), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1 \right\};$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad u(0, y) = 1 + y^2, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 1) = 2e^x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad u(0, 5, y) = 1,64872(1 + y^2), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Вариант № 18

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(x^2 + y^2); \quad (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u(x, 0) = 2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0, y) = 2, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 1) = 2 + x + x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(1, y) = 2 + y + y^2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Вариант № 19

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + xe^y; \quad (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 2 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2\};$$

$$u(x, 0) = 1 + x + x^2, \quad 2 \leq x \leq 3; \quad u(2, y) = 5 + 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$u(x, 2) = 1 + 7,38906x + x^2, \quad 2 \leq x \leq 3; \quad u(3, y) = 10 + 3e^y, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Вариант № 20

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + ye^x; \quad (x, y) \in \bar{G} = \{(x, y), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 2 \leq y \leq 3\};$$

$$u(x, 2) = 11 + 2e^x, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad u(1, y) = y^2 + 2,7183y + 7, \quad 2 \leq y \leq 3;$$

$$u(x, 3) = 16 + 3e^x, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad u(2, y) = y^2 + 7,38906y + 7, \quad 2 \leq y \leq 3.$$

Литература

1. *Разностные* схемы для уравнений эллиптического типа. – Томск: Изд-во ТГУ, 1995. – Ч. 1. – 21 с.
2. *Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
4. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – Ч. 2. – 399 с.
5. *Элементы* теории разностных схем. – Томск: Изд-во ТГУ, 1992. – Ч. 1. – 17 с.
6. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 340 с.

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

4.1. Линейные нестационарные уравнения с частными производными первого и второго порядка

Пусть в некоторой односвязной области G изменения независимых переменных x, y задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка в канонической форме (2.1).

Уравнение (2.1) будет называться уравнением *гиперболического типа* в области $G = \{(x, y) | 0 < x < L, 0 < y < T\}$ [1, с. 372–375; 2, с. 691–693; 3, с. 141–142], если для любой точки (x, y) из этой области будет справедливо неравенство

$$\delta(x, y) = I^2(x, y) - a(x, y)b(x, y) > 0. \quad (4.1)$$

Обозначим $y = t$ (время).

4.1.1. Постановка краевых задач для уравнения второго порядка

Одним из наиболее типичных уравнений гиперболического типа является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (4.2)$$

где $u = u(x, t)$.

Волновое уравнение может описывать малые продольные колебания упругого стержня. Тогда $c^2 = \frac{k}{\rho}$, k – модуль Юнга, ρ – плотность. Если (4.2) описывает малые поперечные колебания струны, то $u(x, t)$ – откло-

нение струны при некотором значении x в момент времени t ; $c^2 = \frac{\tilde{T}}{\rho}$, \tilde{T} – натяжение струны, ρ – плотность (линейная). При этом $x = 0$, $x = L$ – левый и правый концы струны, а $t = 0$, $t = T$ – начало и конец процесса. Заметим, что если колебания совершаются под действием внешней силы, которая характеризуется функцией $f(x, t)$, то уравнение, описывающее свободные колебания, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Волновое уравнение, или уравнение свободных колебаний однородной мембраны, в двумерном случае принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

или с помощью двумерного оператора Лапласа его можно записать так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u.$$

С помощью волнового уравнения описывается процесс распространения звуковых волн в сжимаемой среде. В этом случае оно называется уравнением акустики, причем $c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, P_0 , ρ_0 – давление и плотность в невозмущенной среде, c_p , c_v – коэффициенты теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

Для волнового уравнения гиперболического типа сформулируем соответствующие краевые задачи.

Первая краевая задача

В области $\bar{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ определяется функция $u(x, t) \in C_2^2(G) \cap C_0^1(\bar{G})$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (4.3)$$

начальным

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (4.4)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) &= v_1(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(L, t) &= v_2(t), \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ – заданные функции.

Вторая краевая задача

Пусть требуется найти функцию $u(x, t) \in C_2^2(G) \cap C_1^1(\overline{G})$, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (4.6)$$

начальным

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (4.7)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \mu_1(t), \quad 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} &= \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – заданные функции своих аргументов.

Третья краевая задача

Функция $u(x, t) \in C_2^2(G) \cap C_1^1(\overline{G})$ находится в области \overline{G} и удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (4.9)$$

начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.11)$$

и граничным условиям

$$\alpha_1(t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_0(t) u(0, t) = \gamma_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4.12)$$

$$\beta_1(t) \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} + \beta_0(t) u(L, t) = \gamma_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4.13)$$

причем $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$ – заданные функции.

4.1.2. Постановка краевых задач для уравнения первого порядка

В общем случае нестационарное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет вид

$$b(x, t)u_t + a(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t),$$

где $u(x, t)$ – искомое решение; $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ – коэффициенты уравнения, причем $b(x, t) \neq 0$, $f(x, t)$ – правая часть. Уравнение является эволюционным [1].

Частным случаем приведенного выше дифференциального уравнения первого порядка является уравнение переноса [1, с. 391; 2, с. 691] частиц в веществе

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t),$$

где $a_1(x, t)$ интерпретируется как скорость переноса.

Сформулируем для уравнения переноса задачу Коши и соответствующие краевые задачи.

Задача Коши

Пусть в области $\bar{G} = G \cup \Gamma$, $G = \{(x, t) \mid -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$, $\Gamma = \{(x, t) \mid -\infty < x < \infty, t = 0\}$, рассматривается функция $u(x, t) \in$

$\in C_1^1(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющая уравнению переноса (для простоты будем считать, что $a_1(x, t) = 1$, $f(x, t) = 0$) и начальному условию:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Первая краевая задача

Дана область $\bar{G} = G \cup \Gamma$, где $\bar{G} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$. Требуется найти функцию $u(x, t) \in C_1^1(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

и соответствующим начальному и граничному условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) &= v(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отметим, что уравнения характеристик для поставленной задачи (4.15) имеют вид $x + t = \text{const}$, $\text{tg } \varphi = 1$, $\varphi = 45^\circ$ [1, с. 391–393].

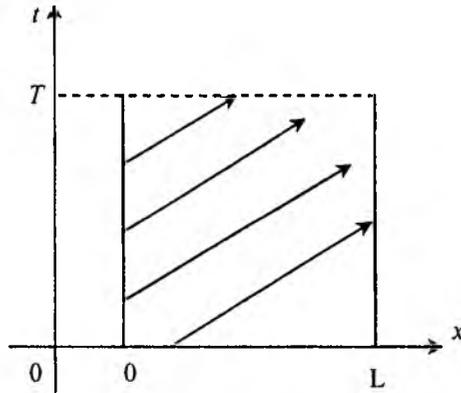


Рис. 4.1

Так как характеристики направлены с левой границы на правую (рис. 4.1), то достаточно задать граничное условие на левом конце промежутка $[0, L]$.

Вторая краевая задача

Требуется найти функцию $u(x, t) \in C_1^1(G) \cap C_0^1(\bar{G})$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

начальному и граничному условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \mu(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Третья краевая задача

Ищется функция $u(x, t) \in C_1^1(G) \cap C_0^1(\bar{G})$, удовлетворяющая уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

начальному и граничному условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ \alpha_0(t)u(0, t) + \alpha_1(t)\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \gamma_1(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В задачах (4.15)–(4.17) функции $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\gamma_1(t)$, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ заданы.

4.2. Решение задачи Коши для волнового уравнения

Задача Коши ставится в бесконечной области изменения пространственной переменной x . Требуется найти функцию $u(x, t) \in C_2^2(G) \cap C_1^0(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T, \quad (4.18)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty; \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.20)$$

где $\bar{G} = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$, граница области G проходит по оси x .

Применим метод сеток к задаче (4.18)–(4.20). Для этого покроем область \bar{G} сеточной областью $\bar{\omega}_h = \{(x_j, t_k) \mid x_j = j \cdot h, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; t_k = k \cdot \tau, k = 0, 1, 2, \dots\}$, где h – шаг сетки по оси ox , а τ – по оси ot . В главе 2 рассматривался метод неопределенных коэффициентов (МНК) для построения разностных схем с определенным шаблоном, аппроксимирующих уравнение теплопроводности.

Для волнового уравнения можно, очевидно, выбрать аппроксимирующую формулу для производной $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{(x_j, t_k)}$ по аналогии с формулой для

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ из главы 2, т.е.

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{(x_j, t_k)} = \frac{u(x_j, t_{k-1}) - 2u(x_j, t_k) + u(x_j, t_{k+1}))}{\tau^2} + O(\tau^2).$$

Тогда для аппроксимации уравнения (4.18) приходим к следующей разностной схеме:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}. \quad (4.21)$$

Шаблон схемы (4.21) представляет собой «крест». Погрешность аппроксимации имеет порядок $O(h^2 + \tau^2)$. Запишем разностную аппроксимацию начальных условий

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (4.22)$$

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.23)$$

Преобразуем (4.21) к явной формуле, разрешив её относительно u_j^{k+1} :

$$u_j^{k+1} = 2u_j^k + \frac{\tau^2}{h^2} c^2 (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) - u_j^{k-1}.$$

Обозначим $\gamma = \frac{\tau}{h} c$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$u_j^{k+1} = \gamma^2 u_{j-1}^k + (2 - 2\gamma^2) u_j^k + \gamma^2 u_{j+1}^k - u_j^{k-1}, \quad (4.24)$$

где $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$.

Для определения значений решения на временных слоях, начиная со второго, по формуле (4.24) необходимо добавить формулы (4.22), (4.23), позволяющие находить значения решения на нулевом и первом временных слоях. Разрешив (4.23) относительно u_j^1 , получим

$$u_j^1 = u_j^0 + \tau \psi_j,$$

или

$$u_j^1 = \varphi_j + \tau \psi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.25)$$

Таким образом, значения решения будем находить по следующей расчетной схеме:

$$\begin{cases} u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ u_j^1 = \varphi_j + \tau \psi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ u_j^{k+1} = \gamma^2 u_{j-1}^k + (2 - 2\gamma^2) u_j^k + \gamma^2 u_{j+1}^k - u_j^{k-1}, \\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.26)$$

Заметим, что погрешность аппроксимации начального условия (4.22) равна нулю, а для (4.23) – $O(\tau)$. Тогда в целом погрешность аппроксимации будет $O(h^2 + \tau)$.

4.2.1. Построение разностной схемы второго порядка точности методом фиктивной точки

Для повышения порядка погрешности аппроксимации в целом до второго по t воспользуемся центральной разностной аппроксимацией для

производной $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0}$ в начальном условии (4.20) [2, с. 742; 3, с. 204–205]:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x_j, 0)} = \frac{u(x_j, t_1) - u(x_j, t_{-1})}{2 \cdot \tau} - \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{\partial^2 u(x_j, t_0^{(1)})}{\partial t^2}, \quad (4.27)$$

где $t_{-1} = -\tau, t_1 = \tau, t_0^{(1)} \in (-\tau, +\tau)$. При этом предполагается, что решение задачи (4.18)–(4.20) можно продолжить в область $G^* = \{-\tau \leq t \leq 0, -\infty < x < +\infty\}$. Отбрасывая в (4.27) члены порядка $O(\tau^2)$, получим разностную аппроксимацию для условия (4.20):

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\tau} = \psi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.28)$$

Значения $u_j^{-1}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ можно исключить с помощью разностного уравнения (4.21), записанного при $k = 0$:

$$\frac{u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2}. \quad (4.29)$$

Выразим u_j^{-1} из (4.28) и (4.29) соответственно:

$$\begin{aligned} u_j^{-1} &= u_j^1 - 2\tau\psi_j, \\ u_j^{-1} &= \gamma^2 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) + 2u_j^0 - u_j^1. \end{aligned}$$

В полученных соотношениях приравняем правые части, в результате чего будем иметь

$$u_j^1 - 2\tau\psi_j = \gamma^2 (u_{j+1}^0 + u_{j-1}^0) + (2 - 2\gamma^2)u_j^0 - u_j^1.$$

Отсюда имеем следующее равенство:

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_j + \frac{1}{2} \frac{\tau c^2}{h^2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0). \quad (4.30)$$

Следуя [4, с. 72–73], введем обозначение

$$\Lambda u_j^0 \equiv u_{\text{ex},j} = \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2}.$$

Тогда для решения задачи Коши (4.18)–(4.20) получаем следующую разностную схему:

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (4.31)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; \\ u_j^0, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; & k = 0, 1, 2, \dots; \\ \varphi_j, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \psi_j + \frac{\tau}{2} c^2 \Lambda u_j^0, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Численная реализация схемы (4.31) осуществляется таким же образом, как и для разностной схемы (4.26). Легко показать, что погрешность аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой (4.31) есть $O(h^2 + \tau^2)$.

4.2.2. Об исследовании устойчивости схемы «крест» по начальным данным

Исследуем устойчивость разностной схемы (4.21) по начальным данным методом гармоник [3, с. 162–165; 4, с. 76–83; 5, с. 19–26, 77–99; 6, с. 221–232]. Получим необходимое условие устойчивости фон Неймана спектральным методом на примере задачи Коши (4.31). Исследуем устойчивость разностной схемы с правой частью вида

$$f^{(h)} = \begin{cases} 0, \\ \varphi_j, \\ \psi_j \end{cases}$$

Определение 1 [3, с. 163]. Говорят, что разностная схема (4.31) устойчива по начальным данным, если для нее справедлива оценка

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq C(\|\varphi_j\|_{F_h} + \|\psi_j\|_{F_h}), \quad (4.32)$$

где C – константа, не зависящая от h и $f^{(h)}$.

Неравенство (4.32) в определении устойчивости должно выполняться при некоторых частных значениях u_j^0 . Полагая

$$u_j^0 = \varphi_j = e^{i\varphi}, \quad (4.33)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, выпишем решение задачи (4.31) при условии (4.33) с помощью метода разделения переменных

$$u_j^k = \lambda^k e^{i\varphi}. \quad (4.34)$$

Численный параметр λ (амплитуда гармоники (4.34)) подбирается таким образом, чтобы u_j^k вида (4.34) удовлетворяло однородному разностному уравнению из (4.31). Подставляя (4.34) в однородное уравнение (4.31), имеем

$$\frac{\lambda^{k+1} e^{ij\varphi} - 2\lambda^k e^{ij\varphi} + \lambda^{k-1} e^{ij\varphi}}{\tau^2} = c^2 \frac{\lambda^k e^{i(j+1)\varphi} - 2\lambda^k e^{ij\varphi} + \lambda^k e^{i(j-1)\varphi}}{h^2},$$

или

$$\lambda^{k-1} e^{ij\varphi} \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\tau^2} = c^2 \lambda^{k-1} e^{ij\varphi} \frac{\lambda(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})}{h^2}.$$

Сокращая обе части полученного соотношения на $\lambda^{k-1} e^{ij\varphi}$, получим

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda \gamma^2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2).$$

Известно, что $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$.

Тогда

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2 = -4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Параметр λ удовлетворяет квадратному уравнению вида

$$\lambda^2 - 2 \left(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \lambda + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{-4\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4\gamma^4 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}$$

или

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{-4\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (4.35)$$

Если подкоренное выражение в (4.35) не превосходит нуля, то корни λ_1, λ_2 будут комплексно-сопряженными. Последнее утверждение справедливо, если

$$1 - \gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq 0. \quad (4.36)$$

Из неравенства (4.36) следует, что

$$\gamma^2 \leq 1 \quad (\text{т.к. } \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1). \quad (4.37)$$

Проверим, выполняется ли необходимое условие устойчивости Неймана для корней λ_1, λ_2 . Имеем

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\left(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4\gamma^4 \sin^4 \frac{\varphi}{2}},$$

или

$$|\lambda_{1,2}| = 1.$$

Таким образом, схема «крест» является *нейтральной* [7, с. 29–30]. Последнее означает, что если в решении задачи возникают колебания (за счет, например, начальных условий), то они разностной схемой не подавляются и сохраняются на протяжении всего расчета.

Отметим также, что разностная схема (4.31) *условно устойчива*, причем условие устойчивости (4.37) является для случая множителя перехода не только необходимым, но и достаточным [5, с. 92–95].

4.2.3. Об областях зависимости дифференциального уравнения и разностной схемы

Рассмотрим дифференциальное уравнение (4.18) с начальными условиями (4.19)–(4.20) и соответствующую им разностную схему

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} &= \gamma^2 u_{j-1}^k + (2 - 2\gamma^2) u_j^k + \gamma^2 u_{j+1}^k - u_{j-1}^{k-1}, \\ u_j^0 &= \varphi_j, \quad u_j^1 = \varphi_j + \tau \psi_j, \\ j &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.38}$$

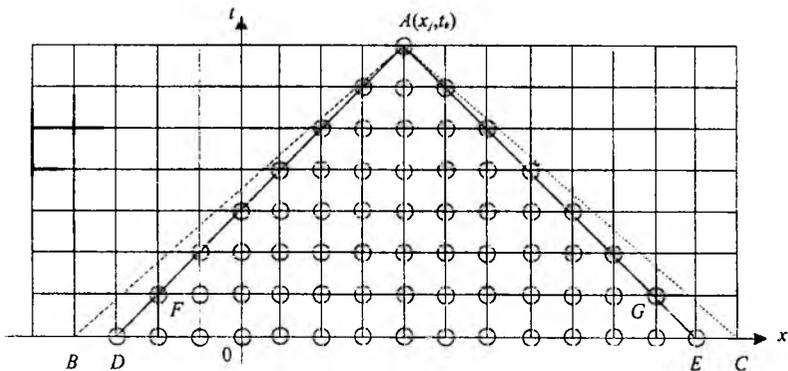


Рис. 4.2

Предположим, что необходимо вычислить значение решения в узле $A(x_j, t_k)$ с помощью формул (4.38) для $k \geq 2$ и любого целого числа j . Полагая в (4.38) $k = k - 1$, определяем u_j^k через значения u_{j+1}^{k-1} , u_j^{k-1} , u_{j-1}^{k-1} , u_j^{k-2} . Если $k - 2 > 1$, то значения u_{j-1}^{k-1} , u_j^{k-1} , u_{j-1}^{k-1} , u_j^{k-2} по схеме (4.38) определяются через u_{j+2}^{k-2} , u_{j+1}^{k-2} , u_j^{k-2} , u_{j-1}^{k-2} , u_{j-2}^{k-2} , u_{j+1}^{k-3} , u_j^{k-3} , u_{j-1}^{k-3} и т.д. Значения решения на втором временном слое определяются через значения решения в узлах, заданных на первом и нулевом временных слоях (на отрезках FG и DE , рис. 4.2).

Итак, решение в узле сетки $A(x_j, t_k)$ определяется через его значения в узлах, заключенных в треугольнике ADE . Сторона треугольника DE лежит на оси ox , а две другие проходят через точку A и образуют с осью абсцисс углы AED и ADE , равные соответственно $\text{arctg}(-\alpha)$ и $\text{arctg} \alpha$, $\alpha = \frac{\tau}{h} > 0$. Треугольник ADE называется *областью зависимости разностной схемы* (4.38).

Таким образом, значение u_j^k в узле A определяется разностной схемой (4.38) и начальными значениями u_j^0 и u_j^1 , вычисленными в узлах, лежащих на отрезках DE и FG .

Остановимся на вопросе о нахождении точного значения решения $u(x, t)$ дифференциальной задачи (4.18)–(4.20) в точке A . Из курса уравнений математической физики следует, что значение решения $u(x, t)$ в точке A определяется уравнением (4.18) и начальными условиями, которые расположены на отрезке, отсекаемом характеристиками, проходящими через точку A , на оси ox . Уравнение характеристик для (4.18) имеет вид

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0$$

или

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2.$$

Из последнего соотношения получим

$$\frac{dx}{dt} = \pm c. \quad (4.39)$$

Характеристики уравнения (4.18) образуют с осью ox углы, один из которых ABC равен $\arctg c$, а второй ACB равен $\arctg(-c)$. При значении $c^2 = 1$ характеристики уравнения (4.18) перпендикулярны друг другу и образуют с осью абсцисс углы ABC и ACB , равные соответственно $\pi/4$ и $3\pi/4$. Треугольник ABC называется *областью зависимости дифференциального уравнения* (4.18) [3, с. 207].

На рис. 4.2 представлен случай, когда $c^2 = 1$ и треугольник определенности ABC дифференциального уравнения (4.18) содержит внутри себя треугольник определенности ADE разностной схемы (4.38). В этом случае для шагов τ , h справедливо неравенство

$$\alpha = \frac{\tau}{h} > 1.$$

При таком выборе шагов τ и h начальных условий, влияющих на решение в узле A и задаваемых на отрезке DE , будет недостаточно для определения решения в этой точке. В самом деле, если изменить начальные условия на отрезках BD и EC , то это изменит решение дифференциальной задачи (4.18)–(4.20) в области G , в том числе и в точке A . Однако на разностное решение u_j^k в узле A изменения начальных условий не скажутся. Поэтому разностное решение останется неизменным и не будет сходиться к точному решению в точке A . В силу того что разностная схема (4.38) аппроксимирует задачу Коши (4.18)–(4.20), она не может быть устойчивой, так как в противном случае из аппроксимации и устойчивости следовала бы сходимость. Итак, при $\alpha > 1$ нет сходимости и, следовательно, устойчивость не имеет места.

Рассмотрим теперь случай, когда область зависимости разностной схемы содержит в себе область зависимости дифференциальной задачи или совпадает с ним. Это будет иметь место, если $\alpha = \frac{\tau}{h} \leq 1$. В этом случае имеет место условная устойчивость разностной схемы.

Для более общего вида уравнения гиперболического типа область зависимости дифференциального уравнения будет криволинейной, так же как и область зависимости соответствующей разностной схемы. При этом для сохранения устойчивости схемы область зависимости дифференциального уравнения должна содержаться или совпадать с областью зависимости разностного уравнения [3, с. 208].

4.3. Численное решение третьей краевой задачи

Запишем третью краевую задачу (4.9)–(4.13) в операторной форме

$$Lu = f, \quad (4.40)$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, 0 < t < T; \\ u(x, 0), & 0 \leq x \leq L; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq L; \\ \alpha_1(t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_0(t) u(0, t), & 0 < t \leq T; \\ \beta_1(t) \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} + \beta_0(t) u(L, t), & 0 < t \leq T; \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} 0, & 0 < x < L, 0 < t < T; \\ \varphi(x), & 0 \leq x \leq L; \\ \psi(x), & 0 \leq x \leq L; \\ \gamma_1(t), & 0 < t \leq T; \\ \gamma_2(t), & 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Предположим, что краевая задача (4.40) имеет единственное решение в области $\bar{G} = G + \Gamma$ (см. рис. 4.3), где Γ – граница области G . Для построения разностной схемы покроем область \bar{G} равномерной сеткой

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \{(x_j, t_k) \mid x_j = j \cdot h, j = 0, 1, \dots, N; h = \frac{L}{N},$$

$$t_k = k \cdot \tau, k = 0, 1, \dots, M; \tau = \frac{T}{M}\}.$$

Так же как в случае задачи Коши, для аппроксимации волнового уравнения (4.9) будем использовать явную трехслойную схему «крест» [1, с. 408–410; 3, с. 208–210]:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}.$$

Запишем в операторной форме разностную аппроксимацию краевой задачи (4.40):

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} L_h u^{(h)} = f^{(h)}, & (4.41) \\ \frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, & j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}; \\ u_j^0, & j = \overline{0, N}; \\ \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau}, & j = \overline{0, N}; \\ \alpha_1(t_k) \cdot \frac{u_1^k - u_0^k}{h} + \alpha_0(t_k) u_0^k, & k = \overline{2, M}; \\ \beta_1(t_k) \cdot \frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} + \beta_0(t_k) u_N^k, & k = \overline{2, M}; \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0, & j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}; \\ \varphi(x_j), & j = \overline{0, N}; \\ \psi(x_j), & j = \overline{0, N}; \\ \gamma_1(t_k), & k = \overline{2, M}; \\ \gamma_2(t_k), & k = \overline{2, M}. \end{cases}$$

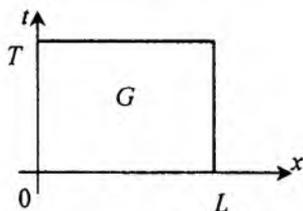


Рис. 4.3

Оценим погрешность аппроксимации задачи (4.41). Пусть $\overline{\delta F^{(h)}} = (\delta_1 f^{(h)}, \delta_2 f^{(h)}, \delta_3 f^{(h)}, \delta_4 f^{(h)}, \delta_5 f^{(h)})^T$ – вектор погрешности аппроксимации разностной задачи, а $\delta_1 f^{(h)}$ – погрешность для разностной схемы; $\delta_2 f^{(h)}$, $\delta_3 f^{(h)}$ – погрешности аппроксимации начальных, а $\delta_4 f^{(h)}$, $\delta_5 f^{(h)}$ – граничных условий.

Можно показать, что [3, с. 203–204; 4–6]:

$$\delta_1 f^{(h)} = O(\tau^2 + h^2); \delta_2 f^{(h)} = 0;$$

$$\delta_3 f^{(h)} = O(\tau); \delta_4 f^{(h)} = O(h), \delta_5 f^{(h)} = O(h).$$

Оценим

$$\|\overline{\delta F^{(h)}}\| = \max \left\{ \|\delta_1 f^{(h)}\|, \|\delta_2 f^{(h)}\|, \|\delta_3 f^{(h)}\|, \|\delta_4 f^{(h)}\|, \|\delta_5 f^{(h)}\| \right\},$$

где $\|\delta_1 f^{(h)}\|_{C_h} = \max_{1 \leq k \leq M-1} \max_{1 \leq j \leq N-1} |\delta_1 f(x_j, t_k)|$, $\|\delta_2 f^{(h)}\|_{C_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |\delta_2 f(x_j)|$,

$$\|\delta_3 f^{(h)}\|_{C_h} = \max_{0 \leq k \leq l} |\delta_3 f(t_k)|, \quad \|\delta_4 f^{(h)}\|_{C_h} = \max_{2 \leq k \leq M} \max_{j=0} |\delta_4 f(x_j, t_k)|,$$

$$\|\delta_5 f^{(h)}\|_{C_h} = \max_{2 \leq k \leq M} \max_{j=N} |\delta_5 f(x_j, t_k)|.$$

Из полученных соотношений, очевидно, следует, что

$$\|\overline{\delta F^{(h)}}\| = O(\tau + h).$$

Запишем алгоритм решения задачи (4.41). Для этого разрешим первое уравнение разностной схемы относительно u_j^{k+1} :

$$u_j^{k+1} = \gamma^2 u_{j-1}^k + (2 - 2\gamma^2) u_j^k + \gamma^2 u_{j+1}^k - u_j^{k-1}, \quad (4.42)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots, M-1.$$

Для нахождения значений решения по схеме (4.42) на временных слоях, начиная со второго, требуется добавить к (4.42) начальные условия, позволяющие определять значения решения на нулевом и первом временных слоях:

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad (4.43)$$

$$u_j^1 = \varphi_j + \tau \psi_j, \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad (4.44)$$

$$u_0^k = -\frac{\alpha_1(t_k)}{h\alpha_0(t_k) - \alpha_1(t_k)} u_1^k + \frac{h\gamma_1(t_k)}{h\alpha_0(t_k) - \alpha_1(t_k)},$$

или

$$u_0^k = \frac{\alpha_1(t_k)}{\alpha_1(t_k) - h\alpha_0(t_k)} u_1^k - \frac{h\gamma_1(t_k)}{\alpha_1(t_k) - h\alpha_0(t_k)}, \quad k = 2, 3, \dots, M; \quad (4.45)$$

$$u_N^k = \frac{\beta_1(t_k)}{\beta_1(t_k) + h\beta_0(t_k)} u_{N-1}^k + \frac{h\gamma_2(t_k)}{\beta_1(t_k) + h\beta_0(t_k)}, \quad k = 2, 3, \dots, M. \quad (4.46)$$

Значения решения u_0^k , u_N^k , $k = 2, 3, \dots, M$ определяются из формул (4.45) и (4.46), полученных разностной аппроксимацией граничных условий третьего рода (4.12), (4.13).

Реализация численного алгоритма (4.42)–(4.46) осуществляется следующим образом. Сначала с помощью формулы (4.43) находим значения решения на нулевом слое u_j^0 , $j = \overline{0, N}$. На рис. 4.4 узлы нулевого слоя помечены x . Далее, используя формулу (4.44), определяем на первом временном слое u_j^1 , $j = \overline{0, N}$. Узлы первого временного слоя также помечены символом x . Последующие вычисления будут осуществляться с помощью разностной схемы (4.42). Полагаем в (4.42) $k = 1$ и вычисляем значения на втором временном слое u_j^2 , $j = \overline{1, N-1}$. На рис. 4.4 эти узлы обозначены o . Чтобы определить u_0^2 , u_N^2 (узлы / и / соответственно), воспользуемся разностными граничными условиями (4.45), (4.46) при $k = 2$, т.е.

$$u_0^2 = \frac{\alpha_1(t_2)}{\alpha_1(t_2) - h\alpha_0(t_2)} u_1^2 - \frac{h\gamma_1(t_2)}{\alpha_1(t_2) - h\alpha_0(t_2)},$$

$$u_N^2 = \frac{\beta_1(t_2)}{\beta_1(t_2) + h\beta_0(t_2)} u_{N-1}^2 + \frac{h\gamma_2(t_2)}{\beta_1(t_2) + h\beta_0(t_2)},$$

при этом предполагается, что $\alpha_1(t_2) - h\alpha_0(t_2) \neq 0$, $\beta_1(t_2) + h\beta_0(t_2) \neq 0$.

Последующие вычисления u_j^3 , u_j^4 , ..., u_j^M , $j = \overline{0, N}$, осуществляются аналогично определению u_j^2 .

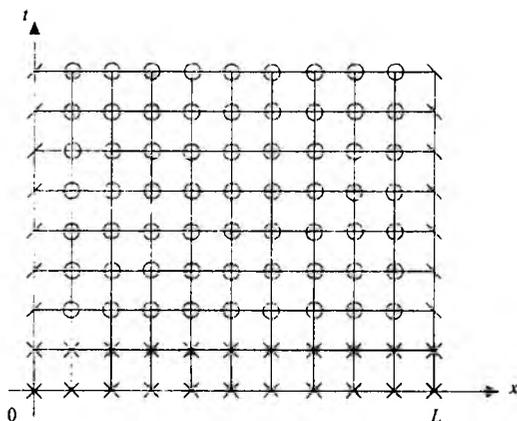


Рис. 4.4

Исследование устойчивости явной трехслойной схемы для случая третьей краевой задачи подробно проведено в [4], а также в [3, с. 210–214].

4.4. Решение варианта задания

Пример. С помощью явной разностной схемы (4.42) найти численное решение первой краевой задачи [1, с. 409–411]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \frac{5\pi}{18}, \\ u(x, 0) &= \sin(x(\pi - x)), \quad 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{5\pi}{18}, \\ u(\pi, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{5\pi}{18}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Отметим, что $c^2 = 1$, $\varphi(x) = \sin(x(\pi - x))$, $\psi(x) = 0$, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$, $L = \pi$, $T = \frac{5\pi}{18}$, $\alpha_1(t) = \beta_1(t) = 0$, $\alpha_0(t) = \beta_0(t) = 1$. Зададим $N = 18$, тогда пространственный шаг сетки $h = \frac{\pi}{18}$. Шаг по времени τ , который выбирается из условия устойчивости, равен $\frac{\pi}{18}$ ($M = 5$). Запишем теперь алгоритм решения первой краевой задачи (4.17) с помощью явной разностной схемы (4.42):

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} &= \gamma^2 u_{j-1}^k + (2 - 2\gamma^2) u_j^k + \gamma^2 u_{j+1}^k - u_j^{k-1}, \\ j &= 1, 2, \dots, N-1; \quad k = 1, 2, \dots, M-1; \\ u_j^0 &= \sin(x_j(\pi - x_j)), \quad j = \overline{0, N}; \\ u_j^1 &= u_j^0 + \tau \psi_j, \quad j = \overline{0, N}; \\ u_0^k &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, M; \\ u_N^k &= 0, \quad k = \overline{0, M}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Заметим, что при $c^2 = 1$ параметр $\gamma = \frac{\tau^2}{h^2}$. Результаты численных расчетов приведем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,495	0,828	0,980	0,991	0,917	0,812	0,715	0,648	0,624
1	0	0,495	0,828	0,980	0,991	0,917	0,812	0,715	0,648	0,624
2	0	0,333	0,647	0,838	0,907	0,886	0,820	0,746	0,691	0,671
3	0	0,152	0,343	0,574	0,733	0,809	0,819	0,796	0,769	0,758
4	0	0,011	0,079	0,238	0,476	0,667	0,785	0,843	0,863	0,867
5	0	-0,073	-0,094	-0,019	0,172	0,453	0,690	0,852	0,940	0,968

В силу симметричности функции $u(x, t)$ относительно $x = \frac{\pi}{2}$ в табл. 4.1 приведены значения решения для j от 0 до 9. Численное решение описывает колебание струны, натянутой между точками $x=0$ и $x=\pi$.

4.5. О задании дополнительных граничных условий для разностных схем

Ранее рассматривались примеры разностных краевых задач, в которых построение разностных краевых условий осуществлялось без особых проблем, т.к. для этого необходимо было аппроксимировать дифференциальные начальные и граничные условия с определенной точностью. Другими словами, разностные краевые условия порождались в этих задачах дифференциальными или аналитическими краевыми условиями.

Остановимся теперь на более сложных в этом смысле случаях.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения гиперболического типа

$$Lu = F, \quad (4.49)$$

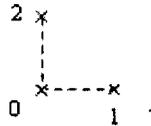
где

$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u(x, 0); \end{cases}$$

$$F \equiv \begin{cases} f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ \varphi(x), & -\infty < x < \infty, t = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $u(x, t) \in C_1^1(G) \cap C(\bar{G})$, $\bar{G} = \{(x, t) | -\infty < x < \infty, t \geq 0\}$.

Построим двухслойную разностную схему первого порядка точности по τ и h с шаблоном



уголок «правый», аппроксимирующую дифференциальную задачу (4.49).

Покроем область \bar{G} регулярной сеткой $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$, где $\bar{\omega}_h = \{x_j \mid x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\omega_\tau = \{t_k \mid t_k = k \cdot \tau, k = 0, 1, 2, \dots\}$. Координаты узлов, входящих в шаблон, приведем ниже:

$$0(x_j, t_k), 1(x_j + h, t_k), 2(x_j, t_k + \tau).$$

Для построения разностной схемы с заданным шаблоном воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Положим

$$\sum_{j=0}^2 c_j u_j = f_j + O(\tau^2 + h^2) \quad (4.50)$$

или

$$c_0 u(x_j, t_k) + c_1 u(x_j + h, t_k) + c_2 u(x_j, t_k + \tau) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_j, t=t_k} + O(\tau^2 + h^2).$$

Предположим, что $u(x, t) \in C_2^2(\bar{G})$. Применим формулу Тейлора к функции $u(x, t)$ из последнего соотношения в окрестности узла (x_j, t_k) . Будем иметь

$$\begin{aligned} & c_0 u(x_j, t_k) + c_1 \left[u(x_j, t_k) + h \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x} + O(h^2) \right] + \\ & + c_2 \left[u(x_j, t_k) + \tau \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} + O(\tau^2) \right] = \\ & = \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t} - \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при $u(x_j, t_k)$, $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}$ в левой и правой частях (4.51), получим следующую СЛАУ для нахождения неизвестных коэффициентов c_j , $j = 0, 1, 2$:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0, & u(x_j, t_k); \\ c_1 h = -1, & \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial x}; \\ c_2 \tau = 1, & \frac{\partial u(x_j, t_k)}{\partial t}. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений имеем $c_1 = -\frac{1}{h}$, $c_2 = \frac{1}{\tau}$. Из первого уравнения системы получим

$$c_0 = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h}.$$

После подстановки значений c_i , $i = \overline{0, 2}$, в (4.50) построим следующую разностную схему:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - \frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{h} = f_j^k, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (4.52)$$

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Разностная схема (4.52) называется схемой против потока: направление потока определяется знаком коэффициента при правой разностной производной, а он равен $(-1) < 0$. При применении правой разностной производной используются значения сеточных функций u_{j+1} и u_j , причем u_{j+1} вычисляется в узле x_{j+1} , расположенном справа относительно узла x_j (в направлении, противоположном потоку).



Если вместо правой пространственной разности использовать левую, т.е. $\frac{u_j - u_{j-1}}{h}$, то значение функции u_{j-1} будет вычисляться в узле x_{j-1} ,

расположенном слева от узла x_j (в направлении, совпадающем с направлением потока). Отсюда название схемы как схемы по потоку.

Алгоритм решения задачи Коши

Решение разностной задачи осуществляется слоями по времени. Для этого разрешаем (4.52) относительно u_j^{k+1} :

$$\begin{aligned} u_j^{k+1} &= (1-\gamma)u_j^k + \gamma u_{j+1}^k + \tau f_j^k, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots; \\ u_j^0 &= \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где $\gamma = \frac{\tau}{h}$.

Чтобы определить значения u_j^1 , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, из (4.53) при $k = 0$, надо знать значения решения на нулевом горизонтальном слое. Значения u_j^0 , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определяются из начального условия. Далее находят u_j^2 , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ через u_j^1 , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и т.д.

Следует отметить, что разностная задача (4.52) аппроксимирует дифференциальную задачу Коши с порядком $O(\tau + h)$.

При численном решении задачи (4.53) шаг по времени определяется из условия устойчивости схемы.

Для исследования устойчивости явной разностной схемы (4.52) по начальным данным ищем частное решение в виде

$$u_j^k = \lambda^k e^{ij\varphi}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (4.54)$$

Тогда имеем

$$\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} e^{ij\varphi} - \lambda^k \frac{(e^{i\varphi} - 1)}{h} e^{ij\varphi} = 0.$$

Из последнего соотношения получаем

$$\lambda = 1 - \gamma(1 - \cos \varphi) + i\gamma \sin \varphi.$$

Оценим λ по модулю:

$$|\lambda| = \sqrt{\left(1 - 2\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)},$$

или $|\lambda| = \sqrt{1 - 4\gamma(1 - \gamma) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$

$|\lambda| \leq 1$, если $1 - \gamma \geq 0$. Отсюда следует, что $\gamma \leq 1$ или $\frac{\tau}{h} \leq 1$.

Схема условно устойчива. Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной. Условие $\gamma \leq 1$ обеспечивает монотонность разностной схемы (4.53) [5, с. 304–308].

Нетрудно показать, что при использовании схемы по потоку условие устойчивости не выполняется.

4.5.1. Дополнительные граничные условия (ДГУ).

Понятие о ДГУ

Понятие о дополнительных граничных условиях (ДГУ) вводится в [8, с. 317–323] на примере краевой задачи первого рода для простейшего модельного уравнения гиперболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$, $a > 0$. В качестве разностной схемы изучается схема с двусторонним шаблоном [8, с. 317]:

$$u^{n+1}(x) = S_h u^n(x).$$

В данном разделе рассматривается линейное уравнение переноса гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a_1 > 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (4.55)$$

с начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (4.56)$$

и граничным

$$u(1, t) = 0 \quad (4.57)$$

условиями.

Заметим, что уравнение (4.55) имеет характеристики $x + a_1 t = \text{const}$, которые приходят на левую границу $x = 0$ (рис. 4.5).

Решение задачи (4.55)–(4.57) постоянно вдоль характеристики и полностью определяется заданием начальных и граничных условий. При условии согласования начального и граничного условий данная дифференциальная задача корректно поставлена в L_2 [8, с. 317].

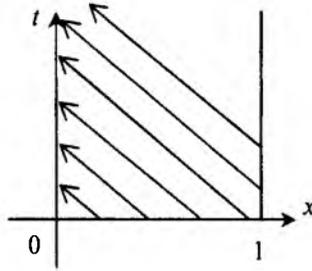


Рис. 4.5

Определим решение поставленной задачи численно. Для этого рассмотрим область $\bar{G} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ равномерной сеткой $\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ с шагами h и τ по оси Ox и Ot соответственно, где $\bar{\omega}_h = \left\{ x_j \mid x_j = jh, j = \overline{0, N}; h = \frac{1}{N} \right\}$, $\omega_\tau = \{t_k \mid t_k = k\tau, k = \overline{0, 1, \dots, M}\}$. Вычисления будем проводить по схеме Лакса–Вендроффа второго порядка точности [7, с. 53–55]:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = \tau a_1^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (4.58)$$

$$j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1},$$

с начальным

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = \overline{0, N}, \quad (4.59)$$

и граничным

$$u_N^k = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad (4.60)$$

условиями.

Заметим, что расчеты по формулам (4.58)–(4.60) невозможны, так как для определения значения u_0^{k+1} необходимо задать дополнительное граничное условие (ДГУ).

Рассмотрим три способа задания ДГУ:

$$1) u_0^{k+1} = u_1^{k+1}; \quad (4.61)$$

$$2) u_0^{k+1} = u_1^k; \quad (4.62)$$

$$3) u_0^{k+1} = u_1^k + \gamma(u_1^k - u_0^k). \quad (4.63)$$

ДГУ 1 и 2 представляют собой экстраполяцию по пространству и по времени-пространству, а ДГУ 3 – разностную схему уголок «правый».

Численные расчеты задачи (4.58)–(4.60) с ДГУ (4.61)–(4.63) проводились с шагами τ и h , удовлетворяющими условию устойчивости

$$\frac{\tau}{h} a_1 \leq 1.$$

Результаты решения задачи (4.58)–(4.61) носят *устойчивый характер*, но точность расчетов на левой границе недостаточная. Счет по схеме Лакса–Вендроффа с использованием ДГУ (4.62) *устойчив*, но не достаточно точна точность расчетов на левой границе. И, наконец, вычисления с использованием ДГУ (4.63) дают удовлетворительные результаты и в смысле устойчивости, и в смысле точности. Как видим, подбор ДГУ влияет как на точность вычислений, так и на устойчивость.

Погрешность аппроксимации разностной схемы Лакса–Вендроффа есть $O(\tau^2 + h^2)$, а начальных условий равна нулю. Оценим погрешность аппроксимации ДГУ (4.61). Составим функцию погрешности, предполагая, что $u(x, t) \in C_0^1(\bar{G})$:

$$\psi_1(x_0, t_{k+1}) = u(0, t_{k+1}) - u(h, t_{k+1}).$$

Применим к функции $u(h, t_{k+1})$ формулу Тейлора в окрестности узла $(0, t_{k+1})$. Получим

$$\psi_1(0, t_{k+1}) = u(0, t_{k+1}) - u(0, t_{k+1}) - h \frac{\partial u(\xi_2, t_{k+1})}{\partial x},$$

$\xi_2 \in (0, h)$. Следовательно, погрешность аппроксимации ДГУ (4.61) имеет порядок $O(h)$.

Составим функцию погрешности для (4.62):

$$\psi_2(0, t_{k+1}) = u(0, t_{k+1}) - u(h, t_k).$$

Предположим, что $u(x, t) \in C_1^1(\bar{G})$. Применим формулу Тейлора к функции $u(h, t_k)$ из $\psi_2(0, t_{k+1})$ в окрестности узла $(0, t_{k+1})$. Получим

$$\psi_2(0, t_{k+1}) = u(0, t_{k+1}) - u(0, t_{k+1}) - h \frac{\partial u(\xi_3, t_{k+1})}{\partial x} + \tau \frac{\partial u(0, \eta_1)}{\partial t},$$

где $\xi_3 \in (0, h)$, $\eta_1 \in (t_k, t_{k+1})$.

Имеем, что погрешность аппроксимации для (4.62) есть $O(\tau + h)$. Для ДГУ (4.63) запишем функцию погрешности аппроксимации:

$$\psi_3(0, t_{k+1}) = u(0, t_{k+1}) - u(0, t_k) + \frac{\tau}{h}(u(h, t_k) - u(0, t_k)).$$

Предполагая, что $u(x, t) \in C_2^2(\bar{G})$, и применяя формулу Тейлора в окрестности узла $(0, t_{k+1})$, можно показать, что

$$\psi_3(0, t_{k+1}) = O(\tau^2 + h^2).$$

Таким образом, во всех трех случаях аппроксимация на границе имеет место, но в случае ДГУ (4.61) и (4.62) погрешность аппроксимации на левой границе больше, чем для схемы и начальных условий. Применение ДГУ (4.61)–(4.62) *ведет к потере точности*. Для ДГУ (4.63) численные результаты оказались наилучшими в смысле близости к точному решению [9].

Изложим прием, позволяющий расширить класс нестационарных задач, для исследования которых может применяться спектральный признак устойчивости. В частности, его можно применять к задачам с ограниченной областью задания, когда граничные условия задаются не только в начальный момент времени, но и на боковых границах.

Этот подход основан на *признаке Бабенко–Гельфанда*, подробное изложение которого можно найти в [6, с. 243–251]. Рассмотрим основные положения этого признака на примере задачи (4.58)–(4.60). *Необходимый признак Бабенко–Гельфанда* дополняется исследованиями *Крайса, Сундстрема и Густафссона* [9, 10].

4.5.2. Анализ нормальных мод

Признак Бабенко–Гельфанда состоит в том, что разностная краевая задача *расчленяется на три задачи*: задачу Коши (левая и правая границы области удалены в $-\infty$ и $+\infty$ соответственно); задачу с левой границей (правая граница удалена в $+\infty$); задачу с правой границей (левая устремлена в $-\infty$). Оценивается спектр каждой из трех новых задач. *Необходимое условие устойчивости* получается как *объединение спектров всех трех задач*, которое должно лежать в единичном круге [6, с. 245]. Запишем три вспомогательные задачи для разностной задачи (4.58)–(4.61).

Задача I. Задача Коши получается из рассматриваемой краевой задачи, если обе границы одновременно удаляются в бесконечность, и задача

рассматривается для таких значений u_j^k , для которых $|u_j^k| \leq K$, $j \rightarrow \pm\infty$, $K = \text{const} > 0$:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a_1 \frac{u_{j-1}^k - u_{j-1}^{k-1}}{2h} = \tau a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{2h^2},$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.64)$$

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$|u_j^k| \leq K, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 1, 2, \dots$$

Задача II (только с правой границей). Получается из исходной задачи, если левая граница удалена в $-\infty$ и рассматривается для сеточных функций u_j^k , для которых $|u_j^k| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow -\infty$:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a_1 \frac{u_{j-1}^k - u_{j-1}^{k-1}}{2h} = \tau a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{2h^2},$$

$$j = \dots, -2, -1, 0, \dots, N-1, k = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.65)$$

$$u_N^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$|u_j^k| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow -\infty.$$

Задача III (только с левой границей). Получается из исходной задачи, если правая граница области удаляется в $+\infty$ и рассматривается для таких сеточных функций, для которых $|u_j^k| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a_1 \frac{u_{j-1}^k - u_{j-1}^{k-1}}{2h} = \tau a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{2h^2},$$

$$j = 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.66)$$

$$u_0^{k+1} = u_1^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$|u_j^k| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow +\infty.$$

Х. Крайсс, Б. Густаффсон, А. Сундстрём [10] усилили необходимый признак устойчивости Бабенко–Гельфанда, потребовав, чтобы не просто спектр трех задач лежал внутри круга $|\lambda| \leq 1$, но чтобы не существовало обобщенных решений для второй и третьей вспомогательных задач, соответствующих $|\lambda| = 1$ (критерий К.Г.С.).

Определение 2 [9]. Обобщенное решение – это решение, для которого не выполнено условие $|u_j^k| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), но которое может

быть получено как предельное из тех решений, для которых это условие выполнено, а $|\lambda| > 1$.

Метод исследования устойчивости на основе определения 2 называется *анализом нормальных мод* [10]. Применим этот метод к исследованию устойчивости разностной задачи (4.58)–(4.61). Сначала, в соответствии с признаком Бабенко–Гельфанда, расчленим задачу на три вспомогательные (4.64), (4.65), (4.66).

I. Задача Коши. Спектр этой задачи – множество таких чисел λ , что сеточная функция $u_j^k = \alpha \lambda^k w_j$ есть решение задачи (4.64), ограниченное при $j \rightarrow \pm\infty$.

Подставим $u_j^k = \alpha \lambda^k w_j$ в разностную схему:

$$\frac{\alpha \lambda^{k+1} w_j - \alpha \lambda^k w_j}{\tau} - \alpha a_1 \lambda^k \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} - \tau a_1^2 \alpha \lambda^k \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{2h^2} = 0.$$

Из последнего соотношения следует

$$(\lambda - 1)w_j - \frac{\gamma}{2}(w_{j+1} - w_{j-1}) - \frac{\gamma^2}{2}(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) = 0, \quad (4.67)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{h} a_1$$

резольвентное уравнение [9]. Оно представляет собой однородное разностное уравнение второго порядка. Сеточная функция $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ является решением (4.67), если λ и q связаны между собой характеристическим уравнением

$$(\lambda - 1) - \frac{\gamma}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \left(q - 2 + \frac{1}{q} \right) = 0. \quad (4.68)$$

Решение задачи Коши вида $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ будет ограничено при $j \rightarrow \pm\infty$, если $|q| = 1$, т.е. $q = e^{i\varphi}$. Итак, для оценки спектра первой вспомогательной задачи надо искать ее решение в виде $u_j^k = \alpha \lambda^k e^{i\varphi j}$.

Из (4.68), очевидно, следует

$$\lambda = 1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + i\gamma \sin \varphi.$$

$|\lambda| \leq 1$, если $\gamma^2 \leq 1$ или

$$\frac{\tau}{h} |a_1| \leq 1.$$

II. Задача только с правой границей. На этой границе задано условие $u_N^k = 0$. Характеристическое уравнение (4.68) имеет комплексный корень. Решение второй вспомогательной задачи вида $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ должно стремиться к 0 при $j \rightarrow -\infty$. Последнее условие выполняется, если $|q| > 1$. Нетривиальных решений указанного вида для задачи с правой границей не существует, т.к. при $x=1$ $u_N^k = 0$.

III. Задача только с левой границей. Решение, стремящееся к нулю при $j \rightarrow +\infty$, имеет следующий вид:

$$u_j^k = \alpha \lambda^k q^j, \quad |q| < 1. \quad (4.69)$$

Подставим (4.69) в левое граничное условие

$$u_0^{k+1} = u_1^{k+1}.$$

Далее имеем

$$\alpha \lambda^{k+1} = \alpha \lambda^{k+1} q.$$

Так как $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$, то получим

$$q - 1 = 0 \quad \text{или} \quad q = 1.$$

Решение, удовлетворяющее левому ДГУ, имеет следующую структуру:

$$u_j^k = \alpha \lambda^k,$$

причем $|u_j^k|$ не стремится к нулю при $j \rightarrow +\infty$. Определим из (4.68) λ , соответствующее $q = 1$. Имеем

$$\lambda = 1.$$

Посмотрим, как получается обобщенное решение, соответствующее $|q| = 1$: как предел тех решений, для которых $|\lambda| > 1$ и $|q| < 1$, или тех, для которых $|\lambda| > 1$ и $|q| > 1$.

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$. Полагаем $\lambda = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \ll 1$ – малая величина; $q = 1 + \delta$. Известно, что $|\delta| \ll 1$, а знак δ надо определить, чтобы ответить на поставленный вопрос. Подставляя λ и q в (4.68) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$(1 + \varepsilon - 1) - \frac{\gamma}{2} \left(1 + \delta - \frac{1}{1 + \delta} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \left(1 + \delta - 2 + \frac{1}{1 + \delta} \right) = 0.$$

$$\varepsilon - \gamma \delta \approx 0.$$

Или

$$\varepsilon \approx \gamma \delta .$$

Так как $\varepsilon > 0$, то из последнего соотношения следует, что $\delta > 0$. Это значит, что $q = 1 + \delta$ будет иметь $|q| > 1$. Последнее означает, что обобщенное решение $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$, соответствующее $q = 1$, $\lambda = 1$, получается как предельное тех решений, для которых $|q| > 1$. Следовательно, для этого случая выполнен необходимый критерий устойчивости К.Г.С. Численные расчеты подтверждают это [9].

Объединение спектров трех вспомогательных задач дает условие устойчивости $\frac{\tau}{h} |a_1| \leq 1$.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что для задач (4.58)–(4.60), (4.62) и (4.58)–(4.60), (4.63) также выполняется необходимый критерий устойчивости К.Г.С. Необходимый критерий устойчивости К.Г.С. является и достаточным для устойчивости в специальной норме [9].

Отметим, что изложенный признак устойчивости для нестационарных разностных задач с граничными условиями может применяться в случае краевых задач для систем разностных уравнений [6, с. 249, 396–403]. В этом случае схемы, удовлетворяющие необходимому условию фон Неймана, часто бывают неустойчивыми из-за неудачного выбора ДГУ или неудачной аппроксимации граничных условий. В таких ситуациях важно уметь подбирать разностные схемы, свободные от этого недостатка.

4.5.3. Решение варианта задания

Требуется найти численное решение первой краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, a_1 > 0, 0 < x < 1, t > 0,$$

с начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

и граничным

$$u(0, t) = 0$$

условиями.

Заметим, что уравнение переноса имеет характеристики $x - a_1 t = const$, которые приходят на правую границу $x = 1$.

Решение поставленной задачи постоянно вдоль характеристики и целиком определяется заданными начальными и граничными условиями. Как было ранее отмечено, при условии согласования начального и граничного условий данная краевая задача корректно поставлена в L_2 .

Для нахождения численного решения указанной задачи покроем область $\bar{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ равномерной сеткой $\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ с шагами h и τ по оси Ox и Ot соответственно, где $\bar{\omega}_h = \{x_j | x_j = j \cdot h, j = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N}\}$, $\omega_\tau = \{t_k | t_k = k \cdot \tau, k = \overline{0, M}\}$.

Вычисления будут проводиться по схеме второго порядка «leap – frog» [8, с. 313, 315]:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} + a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = 0, j = \overline{1, N-1}; k = \overline{1, M-1}.$$

Эта схема условно устойчива по начальным данным, у нее отсутствует схемная вязкость и поэтому при решении прикладных задач газовой динамики требуется использовать механизмы монотонизации данной разностной схемы.

Схема «leap – frog» представляет не столько практический, сколько теоретический интерес с точки зрения иллюстрации вопросов, связанных с использованием трехслойных разностных схем. Например, для численного решения поставленной краевой задачи требуется задать дополнительное условие на первом временном слое. Кроме того, для нахождения численного решения в узле x_N в момент времени t_{k+1} необходимо задать ДГУ на правой границе.

Запишем разностную краевую задачу:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} + a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = 0, j = \overline{1, N-1}; k = \overline{1, M-1},$$

с начальным

$$u_j^0 = \varphi_j, u_j^1 = \varphi_j + \tau a_1 \varphi_j', j = \overline{0, N},$$

и граничным

$$u_N^k = 0, k = \overline{2, M},$$

условиями.

Аналогично ранее рассмотренному случаю будем использовать три типа ДГУ на правой границе:

$$1) u_N^{k+1} = u_{N-1}^{k+1};$$

$$2) u_N^{k+1} = u_{N-1}^k;$$

$$3) u_N^{k+1} = u_N^k + \gamma(u_N^k - u_{N-1}^k).$$

Погрешность аппроксимации разностной схемы «leap – frog» есть величина порядка $O(\tau^2 + h^2)$, а для начальных условий равна нулю. Погрешность аппроксимации ДГУ (4.61), как было ранее показано, равна $O(h)$. Для ДГУ (4.62) – $O(\tau + h)$, а для ДГУ (4.63) – $O(\tau^2 + h^2)$.

Исследуем на устойчивость разностную краевую задачу с помощью анализа нормальных мод. Для этого разобьем указанную задачу на три.

Задача I. Задача Коши.

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} + a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = 0,$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 1, 2, \dots;$$

$$u_j^0 = \varphi_j, u_j^1 = \varphi_j + \tau \varphi_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$|u_j^k| \leq K, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 1, 2, \dots$$

Она получается из вышеприведенной краевой задачи, если обе границы одновременно удаляются в бесконечность и задача рассматривается для таких значений u_j^k , для которых $|u_j^k| \leq K, j \rightarrow \pm\infty, K = const > 0$.

Задача II (только с правой границей).

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} + a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = 0,$$

$$j = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots;$$

$$u_N^{k+1} = u_{N-1}^k, k = 1, 2, \dots;$$

$$|u_j^k| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow -\infty.$$

Задача получается из исходной, если левая граница удалена в $-\infty$ и рассматривается для сеточных функций u_j^k , для которых $|u_j^k| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow -\infty$.

Задача III (только с левой границей). Получается из исходной задачи, если правая граница области удаляется в $+\infty$ и рассматривается для таких сеточных функций, для которых $|u_j^k| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} + a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots;$$

$$u_0^{k+1} = 0, k = 1, 2, \dots;$$

$$|u_j^k| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow +\infty.$$

Сначала исследуем на устойчивость задачу I (Коши). Спектр этой задачи – множество таких чисел λ , что сеточная функция $u_j^k = \alpha \lambda^k w_j$ есть решение задачи Коши, ограниченное при $j \rightarrow \pm\infty$.

Подставим $u_j^k = \alpha \lambda^k w_j$ в разностную схему:

$$\frac{\alpha \lambda^{k+1} w_j - \alpha \lambda^{k-1} w_j}{2\tau} + a_1 \alpha \lambda^k \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} = 0.$$

Из последнего соотношения следует резольвентное уравнение [9]:

$$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) w_j + \gamma (w_{j+1} - w_{j-1}) = 0,$$

$$\gamma = \frac{\tau}{h} a_1.$$

Это однородное разностное уравнение второго порядка. Сеточная функция $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ является решением резольвентного уравнения, если λ и q связаны между собой характеристическим уравнением

$$\lambda + \gamma \left(q - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Решение задачи Коши вида $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ будет ограничено при $j \rightarrow \pm\infty$, если $|q| = 1$, т.е. $q = e^{i\varphi}$. Итак, для оценки спектра первой вспомогательной задачи надо искать ее решение в виде $u_j^k = \alpha \lambda^k e^{i j \varphi}$. Тогда из характеристического уравнения, очевидно, следует

$$\lambda + \gamma (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + \lambda 2i\gamma \sin \varphi - 1 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = -i\gamma \sin \varphi \pm \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}.$$

Корни характеристического уравнения будут комплексными, если $1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi \geq 0$. Из этого неравенства следует, что $\gamma \leq 1$. Более подробно неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\tau}{h}|a_1| \leq 1.$$

Очевидно, что $|\lambda| = 1$.

Исследование спектра второй вспомогательной задачи (только с правой границей) начинается с получения характеристического уравнения для ДГУ (4.61). Решение второй вспомогательной задачи вида $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ должно стремиться к нулю при $j \rightarrow -\infty$. Последнее условие выполняется, если $|q| > 1$. Подставляя решение указанного вида в (4.61), получим $q = 1$. Отсюда следует, что решение, удовлетворяющее правому ДГУ, имеет следующую структуру:

$$u_j^k = \alpha \lambda^k,$$

причем $|u_j^k|$ не стремится к нулю при $j \rightarrow -\infty$. Определим из характеристического уравнения для базовой разностной схемы λ , соответствующее $q = 1$. Имеем

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = \pm 1.$$

Посмотрим, как получается обобщенное решение, соответствующее $q = 1$: как предел тех решений, для которых $|\lambda| > 1$ и $|q| < 1$, или тех, для которых $|\lambda| > 1$ и $|q| > 1$.

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим случай, когда $\lambda = -1$. Полагаем $\lambda = -1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \ll 1$ – малая величина; $q = 1 + \delta$. Известно, что $|\delta| \ll 1$, а знак δ надо определить, чтобы ответить на поставленный вопрос. Подставляя λ и q в характеристическое уравнение схемы «leap – frog», получим

$$1 + 2\varepsilon + \delta - 2\gamma\delta - 1 - \delta \approx 0$$

или

$$\varepsilon \approx \delta\gamma.$$

Так как $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$, то $\delta > 0$. Отсюда следует, что $|q| > 1$. Необходимое условие устойчивости К.Г.С. не выполняется.

Для третьей вспомогательной задачи на левой границе задано условие $u_0^k = 0$. Решение этой задачи вида $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ должно стремиться к нулю

при $j \rightarrow +\infty$. Последнее условие выполняется, если $|q| < 1$. Характеристическое уравнение базовой схемы «leap – frog» для каждого λ имеет два корня q_1, q_2 , причем $q_1 \cdot q_2 = 1$.

Нетривиальных решений с $|q| < 1$, удовлетворяющих граничному условию $u_0^k = 0$, не существует.

Применим анализ нормальных мод к исследованию устойчивости ранее поставленной разностной задачи с ДГУ (4.62). Алгоритм исследования: задача расчленяется на три вспомогательные, причем задача I и задача III будут такими же, как и в ранее рассмотренном случае. Исследование этих задач рассмотрено ранее. Остановимся на задаче II.

Задача II (с правой границей) вычленяется из нашей задачи, если устремить левую границу в $-\infty$. Задача рассматривается для сеточных функций, для которых $|u_j^k| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow -\infty$:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} + a_1 \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} = 0,$$

$$j = \dots, -1, 0, \dots, N-1, k = 1, 2, \dots; \quad (4.70)$$

$$u_N^{k+1} = u_{N-1}^k, k = 1, 2, \dots;$$

$$|u_j^k| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow -\infty.$$

Решение $u_j^k = \alpha \lambda^k q^j$ стремится к нулю при $j \rightarrow -\infty$, если $|q| > 1$. При подстановке u_j^k в правое граничное условие $u_N^{k+1} = u_{N-1}^k$ получим уравнение

$$\lambda - q = 0. \quad (4.71)$$

Отсюда следует, что $\lambda = q$. Подставляя $\lambda = q$ в характеристическое уравнение схемы «leap – frog», будем иметь

$$q + \gamma \left(\frac{1}{q} - q \right) - \frac{1}{q} = 0,$$

или

$$q^2 = 1.$$

Тогда $q_1 = 1, q_2 = -1$, соответственно $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Рассмотрим случай $\lambda_1 = 1, q_1 = 1$. Проверим, как получается обобщенное решение, соответствующее $q_1 = 1$.

Полагаем $\lambda_1 = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малая величина и $\varepsilon \ll 1$; $q_1 = 1 + \delta$, причем $|\delta| \ll 1$. Знак δ необходимо определить, чтобы ответить на выше-поставленный вопрос. Подставим λ_1 и q_1 в (4.71) (или в характеристическое уравнение базовой схемы). Получим

$$\varepsilon - \delta = 0,$$

или

$$\varepsilon = \delta.$$

Так как $\varepsilon > 0$, то $\delta > 0$ и $|q_1| > 1$. Это значит, что обобщенное решение, соответствующее $q_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$, получается как предельное тех решений, для которых $|q_1| > 1$. Следовательно, для этого случая выполнен необходимый критерий устойчивости К.Г.С.

Исследуем второй случай: $\lambda_2 = -1$, $q_2 = -1$. Полагаем $\lambda_2 = -1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$; $q_2 = -1 - \delta$, $|\delta| \ll 1$. Подставим λ_2 и q_2 в (4.71):

$$-1 - \varepsilon - (-1 - \delta) = 0.$$

Тогда $-\varepsilon = -\delta$. Отсюда следует, что $\delta > 0$ или $|q_2| > 1$. Необходимый критерий устойчивости К.Г.С. выполняется и для второго случая.

Анализ нормальных мод показал, что для рассмотренной разностной задачи с ДГУ вида (4.62) выполнен необходимый критерий К.Г.С. Этот критерий является и достаточным для устойчивости в специальной норме [9]. Аналогичным образом можно показать, что для рассмотренной разностной задачи с ДГУ вида (4.63) также выполняется необходимый критерий устойчивости К.Г.С.

Численные расчеты разностной краевой задачи с использованием схемы «leap – frog» и ДГУ вида (4.61) на правой границе показали, что решение растет экспоненциально, то есть применение этого ДГУ приводит к неустойчивости. Это подтверждают результаты теоретического исследования. Счет по схеме «leap – frog» с использованием ДГУ (4.62) на правой границе устойчив, но точность расчетов на правой границе недостаточная. И, наконец, вычисление с использованием ДГУ вида (4.63) дает удовлетворительные результаты и в смысле устойчивости, и в смысле точности, что подтверждает правильность проведенных теоретических исследований. Как видим, выбор ДГУ влияет как на точность вычислений, так и на устойчивость.

В заключение отметим, что изложенный признак устойчивости для нестационарных разностных задач с граничными условиями может применяться в случае краевых задач для систем разностных уравнений

[6, с. 249, 396–403]. В этом случае схемы, удовлетворяющие необходимому условию Неймана, часто бывают неустойчивыми из-за неудачного выбора ДГУ или неудачной аппроксимации граничных условий. В таких ситуациях важно уметь подбирать разностные схемы, свободные от этого недостатка.

4.6. Численные методы решения задач математической физики для случая трех независимых переменных

Сформулируем краевые задачи с тремя независимыми переменными x, y, t , где x, y – пространственные координаты, а t – время.

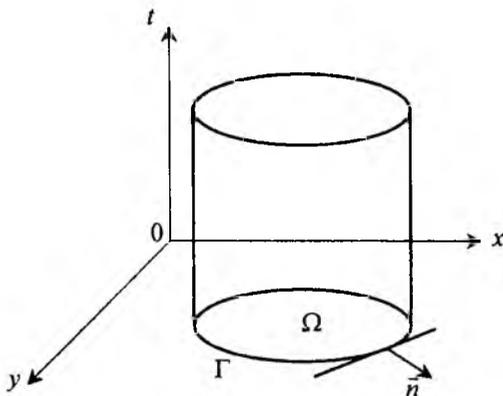


Рис. 4.6

Решение рассматриваемых задач в общем случае определяется в цилиндрической области (рис. 4.6).

4.6.1. Постановка краевых задач для двумерного волнового уравнения

Дано двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.72)$$

где $u = u(x, y, t)$, $c^2 = \frac{\tilde{T}}{\rho}$, \tilde{T} – проекция вектора натяжения на плоскость Oxy , ρ – поверхностная плотность мембраны. Уравнение (4.72) описывает малые поперечные колебания.

Первая краевая задача

Дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); (x, y, t) \in G.$$

Требуется найти функцию $u(x, y, t) \in C_2^{2,2}(G) \cap C_1^{0,0}(\bar{G})$, удовлетворяющую уравнению, а также начальным

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= \psi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

и граничным

$$u(x, y, t) = v(x, y, t), (x, y) \in \Gamma, 0 < t \leq T,$$

условиям. В (4.73) $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $v(x, y, t)$ – заданные функции, $G = \{(x, y, t) | (x, y) \in \Omega, t \in (0, T)\}$, $\bar{G} = G \cup \partial G$.

Вторая краевая задача

Требуется определить функцию $u(x, y, t) \in C_2^{2,2}(G) \cap C_1^{1,1}(\bar{G})$, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); (x, y, t) \in G,$$

начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= \psi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad 0 < t \leq T.$$

В граничном условии задается производная в направлении внешней нормали.

Третья краевая задача

Ищется функция $u(x, y, t) \in C_2^{2,2}(G) \cap C_1^{1,1}(\bar{G})$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (x, y, t) \in G,$$

начальным

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

и граничному

$$\alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} + \beta_1 u(x, y, t) = \gamma_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad 0 < t \leq T,$$

условиям.

Отметим, что α_1, β_1 – заданные числа ($\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$) или, в более общем виде, это функции от t .

4.6.2. Постановка задачи для двумерного уравнения переноса

Рассматривается двумерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (4.76)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$; c_1, c_2 – скорости переноса по осям ox и oy соответственно, $f(x, y, t)$ – заданная функция. С помощью этого уравнения описываются многие физические процессы. Например, в атмосфере [7], в газах (теплопроводность) и другие [1, с. 447–448].

Первая краевая задача

Требуется найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T),$$

начальному

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (4.77)$$

и граничному

$$u(x, y, t) = v(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad 0 < t \leq T,$$

условиям. Здесь $c_1 = c_2 = 1$, $\varphi(x, y)$, $v(x, y, t)$ – заданные функции, $G = \Omega \times (0, T)$, $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

4.6.3. Разностные методы решения краевых задач (двумерный случай)

Для простоты изложения предполагается, что область \bar{G} , где находится решение, представляет собой параллелепипед со следующими значениями характеристических параметров: длина – L , ширина D и высота T (рис. 4.7). Покроем \bar{G} равномерной сеткой

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ (x_j, y_k, t_n) \mid \begin{aligned} x_j &= jh_x, 0 \leq j \leq N_1; \\ y_k &= k \cdot h_y, 0 \leq k \leq N_2; t_n = n\tau, 0 \leq n \leq M \end{aligned} \right\},$$

где N_1 , N_2 , M – целые положительные числа; h_x , h_y – шаги пространственной сетки по осям $0x$ и $0y$ соответственно; τ – шаг по времени. Отметим, что $N_1 h_x = L$; $N_2 h_y = D$, $M\tau = T$.

При построении разностных схем решения краевых задач для уравнения гиперболического типа (двумерный случай) будем опираться на ранее полученные результаты для одномерного случая.

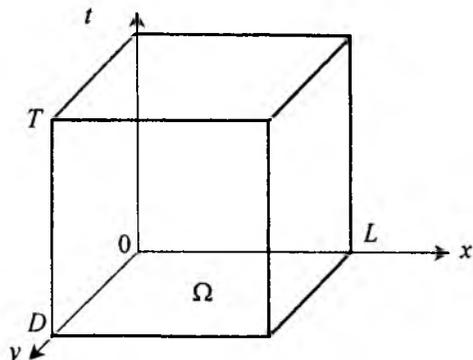


Рис. 4.7

Обобщая формулы для частных производных, полученные ранее, на двумерный случай, будем иметь

$$\begin{aligned}
 u_t &= \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\tau}, \quad u_T = \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k}^{n-1}}{\tau}, \quad u_0 = \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n-1}}{2\tau}; \\
 u_{\bar{t}} &= \frac{u_{j,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^n + u_{j,k}^{n-1}}{\tau^2}; \quad u_x = \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{h_x}; \\
 \hat{u}_x &= \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_x}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{h_x}, \quad \hat{u}_{\bar{x}} = \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1}}{h_x}; \\
 u_x &= \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2h_x}, \quad \hat{u}_x = \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1}}{2h_x}, \quad u_y = \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n}{h_y}; \\
 \hat{u}_y &= \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{h_y}, \quad u_{\bar{y}} = \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{h_y}, \quad \hat{u}_{\bar{y}} = \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y}; \\
 u_y &= \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2h_y}, \quad \hat{u}_y = \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{2h_y}; \quad \bar{u}_{xx} = \frac{u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{h_x^2}; \\
 \hat{u}_{\bar{x}} &= \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1}}{h_x^2}; \quad \bar{u}_{yy} = \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{h_y^2}; \\
 \hat{u}_{\bar{y}} &= \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y^2}.
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

В формулах (4.78) приведены выражения разностных производных по t и по x, y первого и второго порядка, аппроксимирующие соответствующие частные производные. Если в соответствующей формуле из (4.78) в знаменателе стоит τ, h_x, h_y , то она имеет первый порядок аппроксимации по соответствующим шагам, а если в знаменателе стоит $\tau^2, h_x^2, h_y^2, 2\tau, 2h_x, 2h_y$, то второй порядок [1, с. 453, 454].

Построим разностные схемы для первой краевой задачи (4.73) с помощью формул (4.78) (для простоты записи и исследований полагаем $c^2 = 1$). Имеем

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^n + u_{j,k}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{h_x^2} + \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{h_y^2}, \quad (4.79)$$

$$j = \overline{1, N_1 - 1}, k = \overline{1, N_2 - 1}, n = \overline{1, M - 1}.$$

Запишем разностную аппроксимацию начальных и граничных условий (по аналогии с (4.30)):

$$u_{j,k}^0 = \varphi_{j,k}, \quad j = \overline{0, N_1}, k = \overline{0, N_2};$$

$$\frac{u_{j,k}^1 - u_{j,k}^0}{\tau} = \psi_{j,k} + \frac{\tau c^2}{2} \left(\frac{u_{j+1,k}^0 - 2u_{j,k}^0 + u_{j-1,k}^0}{h_x^2} + \frac{u_{j,k+1}^0 - 2u_{j,k}^0 + u_{j,k-1}^0}{h_y^2} \right), \quad (4.80)$$

$$j = \overline{1, N_1 - 1}; k = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Разностная аппроксимация граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} u_{0,k}^{n+1} &= v_k^{n+1}, \quad k = \overline{0, N_2}, n = \overline{0, M - 1}; \\ u_{j,0}^{n+1} &= v_j^{n+1}, \quad j = \overline{0, N_1}, n = \overline{0, M - 1}; \\ u_{N_1,k}^{n+1} &= v_k^{n+1}, \quad k = \overline{0, N_2}, n = \overline{0, M - 1}; \\ u_{j,N_2}^{n+1} &= v_j^{n+1}, \quad j = \overline{0, N_1}, n = \overline{0, M - 1}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Схема (4.79) использует шаблон, изображенный на рис. 4.8 [1, с. 458].

Разностная схема (4.79), а также начальные и граничные условия (4.80)–(4.81) имеют второй порядок аппроксимации относительно шагов сетки.

Данная трехслойная схема условно устойчива, т.е. шаги сетки связаны условием устойчивости [1, с. 458]:

$$\tau < \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)^{-1/2}.$$

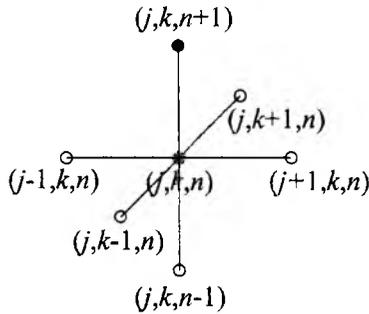


Рис. 4.8

Аналогичным образом можно записать разностную аппроксимацию для краевых задач (4.74) и (4.75) [1, с. 458–459].

Рассмотрим краевую задачу первого рода для двумерного уравнения переноса [1, с. 454]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in (0, L) \times (0, D) \times (0, T),$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, D] \quad (\text{начальное условие}); \quad (4.82)$$

$$u(0, y, t) = v_1(y, t), \quad y \in [0, M], \quad t \in (0, T] \quad (\text{краевое условие});$$

$$u(x, 0, t) = v_2(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \in (0, T] \quad (\text{краевое условие}),$$

где $f(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$, $v_1(y, t)$, $v_2(x, t)$ – заданные функции.

Построим разностную аппроксимацию для задачи (4.82). Воспользуемся формулами (4.78), и в результате построим либо явную, либо неявную разностные схемы. Приведем неявную схему для уравнения переноса:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\tau} + \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1}}{h_x} + \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y} = f_{j,k}^n \quad (4.83)$$

$$j = \overline{1, N_1}, \quad k = \overline{1, N_2}, \quad n = \overline{1, M-1}.$$

Запишем разностную аппроксимацию для начального и граничного условий:

$$u_{j,k}^0 = \varphi_{j,k}, \quad j = \overline{0, N_1}, \quad k = \overline{0, N_2};$$

$$u_{0,k}^{n+1} = v_{1,k}^{n+1}, \quad k = \overline{0, N_2}, \quad 0 \leq n \leq M-1; \quad (4.84)$$

$$u_{j,0}^{n+1} = v_{2,j}^{n+1}, \quad j = \overline{0, N_1}, \quad 0 \leq n \leq M-1.$$

На рис. 4.9 приведен шаблон схемы (4.83), (4.84).

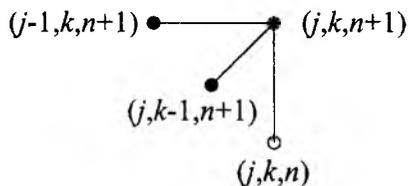


Рис. 4.9

Можно показать, что разностная схема (4.83), (4.84) абсолютно устойчива и имеет первый порядок аппроксимации. Алгоритм решения задачи (4.83), (4.84) можно посмотреть в [1, с. 455].

4.7. Лабораторные задания

Задание. С помощью метода сеток определить решение краевой задачи для уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = v_1(t), \quad u(1, t) = v_2(t).$$

Решение найти в области $\bar{G} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$. Пространственный шаг сетки $h = 0,1$; шаг по времени τ выбрать с учетом условия устойчивости.

Методом неопределенных коэффициентов построить схему с соответствующим шаблоном. Показать сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной [11, с. 292–293; 12, с. 264–265; 13, с. 155–157].

Вариант № 1

$$\varphi(x) = x(x + 0,5),$$

$$\psi(x) = \sin x,$$

$$v_1(t) = 0, \quad v_2(t) = 2(t + 0,75), \quad f(x, t) = 0.$$



Вариант № 2

$$\varphi(x) = \sin \frac{\pi}{2} x,$$

$$\psi(x) = x,$$

$$v_1(t) = 0, v_2(t) = 1+t, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 3

$$\varphi(x) = x \sin \pi x,$$

$$\psi(x) = (x+1),$$

$$v_1(t) = t, v_2(t) = 0, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 4

$$\varphi(x) = (1+x) \sin \frac{\pi}{2} x,$$

$$\psi(x) = x+1,$$

$$v_1(t) = 0, v_2(t) = t+2, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 5

$$\varphi(x) = (1-x) \sin \frac{\pi}{2} x,$$

$$\psi(x) = x,$$

$$v_1(t) = 0, v_2(t) = 0, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 6

$$\varphi(x) = (1-x)(1-x),$$

$$\psi(x) = 1 + \sin x,$$

$$v_1(t) = 1, v_2(t) = 0,25t, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 7

$$\varphi(x) = 0,25(x+1),$$

$$\psi(x) = \sin x,$$

$$v_1(t) = 0,25, v_2(t) = 0,5, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 8

$$\varphi(x) = (x+0,25)(x+2),$$

$$\psi(x) = \cos x,$$

$$v_1(t) = 0,5, v_2(t) = 3,75, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 9

$$\varphi(x) = 0,2(x+1),$$

$$\psi(x) = x \sin x,$$

$$v_1(t) = 0,2+t, v_2(t) = 0,4, f(x,t) = 0.$$



Вариант № 10

$$\varphi(x) = (x+2)(x+1),$$

$$\psi(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$v_1(t) = 2, v_2(t) = 4,5 - 2t, f(x,t) = x+t.$$



Вариант № 11

$$\varphi(x) = (1+x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

$$\psi(x) = x+1,$$

$$v_1(t) = t+1, v_2(t) = 0, f(x,t) = x+t.$$



Вариант № 12

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (1, 1x + 1, 1) \sin \pi x, \\ \psi(x) &= 0, \\ v_1(t) &= 0, \quad v_2(t) = 0, \quad f(x, t) = 2(x + t).\end{aligned}$$



Вариант № 13

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (0, 5x + 1) \sin \pi x, \\ \psi(x) &= 0, 5x, \\ v_1(t) &= 0, \quad v_2(t) = 0, \quad f(x, t) = 2(x + t).\end{aligned}$$



Вариант № 14

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (x^2 + 0, 5) \sin \pi x, \\ \psi(x) &= 0, 3x, \\ v_1(t) &= 0, \quad v_2(t) = 0, \quad f(x, t) = x + t.\end{aligned}$$



Вариант № 15

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (0, 5x^2 + 0, 4) e^{-x}, \\ \psi(x) &= 0, \\ v_1(t) &= 0, 4, \quad v_2(t) = 0, 9 \cdot e^{-1}, \quad f(x, t) = x^2 - 0, 5t^2.\end{aligned}$$



Вариант № 16

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (1, 2x^2 + 0, 8) e^{-x}, \\ \psi(x) &= 0, 5, \\ v_1(t) &= 0, 8, \quad v_2(t) = 2 \cdot e^{-1}, \quad f(x, t) = x^2 + t^2.\end{aligned}$$



Вариант № 17

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (1 + x)^{-1}, \\ \psi(x) &= -0, 5(1 + x)^{-2},\end{aligned}$$



$$v_1(t) = (0,5t + 1)^{-1}, \quad v_2(t) = (0,5t + 2)^{-1},$$

$$f(x, t) = -1,5 \cdot (x + t + 1)^{-2}.$$

Вариант № 18

$$\varphi(x) = (x + 0,5)^{-1},$$

$$\psi(x) = -(x + 0,5)^{-2},$$

$$v_1(t) = (0,2t + 0,5)^{-1}, \quad v_2(t) = (0,2t + 1,5)^{-1},$$

$$f(x, t) = 0,5.$$



Вариант № 19

$$\varphi(x) = \frac{x}{0,2x + 1},$$

$$\psi(x) = -\frac{0,2x}{(0,2x + 1)^2},$$

$$v_1(t) = 0, \quad v_2(t) = (0,2(t + 1) + 1)^{-1},$$

$$f(x, t) = 0,4 \cdot (0,2(x + t) + 1)^{-2}.$$



Вариант № 20

$$\varphi(x) = e^{0,5x},$$

$$\psi(x) = 0,5e^{0,5x},$$

$$v_1(t) = e^{0,5t}, \quad v_2(t) = e^{0,5(t+1)}, \quad f(x, t) = 1.$$



Литература

1. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. – 480 с.
2. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 848 с.

3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 399 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
6. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
7. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 136 с.
8. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.
9. Компаниец Л.А. Обзор работ по исследованию устойчивости разностных систем с дополнительными граничными условиями, аппроксимирующих уравнения гиперболического типа // Препринт ВЦ СОАН СССР. – Красноярск: ВЦ СОАН СССР, 1988. – № 10. – 27 с.
10. Gustafsson B., Kreiss H.O., Sundström A. Stability theory of difference approximations for mixed initial-boundary value problems II. – Math. Comput., 1972. – Vol. 26, № 119. – P. 649–686.
11. Копченкова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 367 с.
12. Сборник задач по методам вычислений / Под ред. П.И. Монастырного. – М.: Наука, 1994. – 319 с.
13. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам. – М.: Высшая школа, 1979. – 184 с.

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Основные виды линейных интегральных уравнений

Интегральными уравнениями называют уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком определенного интеграла [1–8].

Отметим, что к решению интегральных уравнений приводят многие задачи механики сплошной среды, газовой динамики, квантовой механики и т.п.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением *линейных интегральных уравнений*, в которые неизвестная функция входит под знак интеграла в первой степени.

На единой основе проведем классификацию линейных интегральных уравнений, следуя [1, с. 332–335].

Уравнения вида

$$\int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (5.1)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (5.2)$$

где ядро $K(x, s)$ и свободный член $f(x)$ известны, а требуется определить решение $y(x)$ при заданном числовом параметре λ , называются *интегральными уравнениями Фредгольма* соответственно 1-го и 2-го рода.

Уравнения (5.1), (5.2) получили свое название в честь шведского математика Фредгольма Эрика Ивара (1866–1927), который в 1900 г. опубликовал законченную теорию по этим уравнениям.

Если в уравнении (5.2) правая часть $f(x) = 0$, то получается однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds = 0,$$

которое допускает тривиальное решение.

Определение 1. Значения параметра λ , при которых уравнение $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds$ имеет ненулевые решения, называются *собст-*

венными значениями (собственными числами) ядра $K(x, s)$, а отвечающие им ненулевые решения – собственными функциями.

Для уравнений вида (5.2) справедлива следующая теорема [8, с. 19].

Теорема Фредгольма:

1) если λ не является собственным числом ядра $K(x, s)$, то соответствующее неоднородное интегральное уравнение Фредгольма (5.2) с регулярным ядром $K(x, s)$ и непрерывной правой частью $f(x)$ имеет единственное непрерывное решение $y(x)$, $x \in [a, b]$;

2) если λ – собственное значение ядра $K(x, s)$, то уравнение (5.2) или не имеет решений или имеет их бесчисленное множество.

Таким образом, для уравнений Фредгольма (5.2) может быть поставлена одна из задач:

1) при заданном значении λ найти точное или приближенное решение неоднородного интегрального уравнения;

2) найти собственные значения и соответствующие им собственные функции однородного интегрального уравнения.

Уравнение (5.1) описывает *некорректную задачу* [9]. Поясним сказанное для случая, когда решения нет.

Пусть ядро $K(x, s)$ непрерывно в квадрате $\bar{G} = \{(x, s) | a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$, а $y(x)$ принадлежит множеству абсолютно интегрируемых на $[a, b]$ функций. Уравнение (5.1), в котором $y(x)$ – оригинал, а $f(x)$ – изображение, будет при принятых предположениях непрерывной функцией на $[a, b]$. Другими словами, (5.1) отображает множество абсолютно интегрируемых функций во множество C_0 непрерывных на $[a, b]$ функций.

Если множество изображений составляет лишь часть C_0 , то достаточно взять в качестве $f(x)$ непрерывную функцию из C_0 , не принадлежащую этой части, и тогда уравнение (5.1) не будет иметь решений.

В практических приложениях часто встречаются интегральные уравнения

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (5.3)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (5.4)$$

где $a \leq s \leq x \leq b$, которые называют *интегральными уравнениями Вольтерра* соответственно 1-го и 2-го рода.

Вольтерра Вито (1860–1940), итальянский математик, в 1896 г. опубликовал работу, в которой изучал уравнения вида (5.4). Поэтому уравнения (5.3), (5.4) носят его имя.

Уравнения Вольтерра можно свести к уравнениям Фредгольма. Для этого достаточно ввести функцию

$$K^*(x, s) = \begin{cases} K(x, s), & a \leq s \leq x, \\ 0, & s > x \end{cases}$$

и вместо уравнений (5.3), (5.4) можно рассматривать уравнения (5.1), (5.2) с ядром $K^*(x, s)$. Однако уравнения Вольтерра в некоторых случаях полезно изучать независимо.

Заметим, что если $K(x, s)$ и $f(x)$ есть непрерывно дифференцируемые функции и $K(x, x) \neq 0$, то уравнение Вольтерра 1-го рода приводится к уравнению Вольтерра 2-го рода.

В дальнейшем остановимся на методах решения интегральных уравнений, проводя рассмотрение теории на примере уравнений Фредгольма 2-го рода [1, с. 338–361; 2, с. 590–620; 3, с. 367–375; 4, с. 252–285; 5, с. 571–587; 6, с. 292–308; 7, с. 655–687].

5.2. Примеры задач, сводящихся к решению интегральных уравнений

5.2.1. Две задачи об упругой нити

Изложение материала проведем, следуя работе [8, с. 9–14].

Рассмотрим упругую нить длины l , которая без сопротивления изменяет свою форму и подчиняется закону Гука, т.е. для увеличения ее длины на Δl требуется сила $k\Delta l$, $k = \text{const}$.

Пусть концы нити закреплены в неподвижных точках A и B , находящихся, для определенности, в положительной части оси ox , и точка A совпадает с началом отсчета (рис. 5.1).

Ось ox считаем горизонтальной. Пусть нить находится в покое под действием силы T_0 – горизонтальной растягивающей силы, очень большой по сравнению с другими рассматриваемыми силами. Тогда положение нити будет совпадать с осью ox .

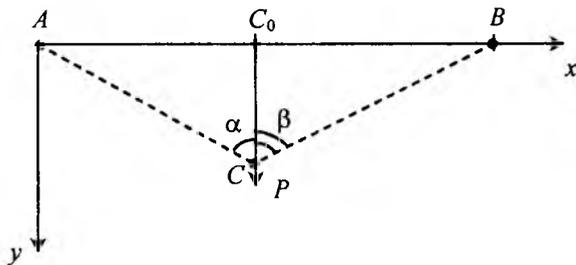


Рис. 5.1

Пусть в точке C_0 , для которой $x = s$, к нити приложена вертикальная сила P . Под ее действием нить примет форму ломаной ACB (рис. 5.1). Пусть $|C_0C| = \delta$, где δ – малое по сравнению с $|AC_0|$ и $|C_0B|$. В силу малости δ^2 по сравнению с l можно считать, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P . Найдем проекции T_0' , T_0'' силы натяжения T_0 нити в точке C и силы P на ось OY . Пренебрегая δ^2 , получим

$$|AC| = \sqrt{s^2 + \delta^2} \approx s; \quad |BC| = \sqrt{\delta^2 + (l-s)^2} \approx l-s;$$

$$T_0' = T_0 \cos \alpha \approx T_0 \frac{\delta}{s}; \quad T_0'' = T_0 \cos \beta \approx T_0 \frac{\delta}{l-s}.$$

Так как сумма всех сил равна нулю, имеем

$$T_0 \frac{\delta}{s} + T_0 \frac{\delta}{l-s} - P = 0. \quad (5.5)$$

Из (5.5) находим величину прогиба нити

$$\delta = \frac{P(l-s)s}{T_0 l}.$$

Если теперь через $f(x)$ обозначить величину прогиба нити в точке с абсциссой x , то на основе предыдущих рассуждений находим, что

$$f(x) = P \cdot K(x, s),$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{x(l-s)}{T_0 l} & \text{для } AC_0 : 0 \leq x \leq s; \\ \frac{s(l-x)}{T_0 l} & \text{для } C_0B : s \leq x \leq l. \end{cases} \quad (5.6)$$

Нетрудно видеть, что

$$K(x, s) = K(s, x).$$

Пусть, далее, на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(s)$ так, что на участок длины Δs действует сила $p(s)\Delta s$. По принципу суперпозиции смещения, обусловленные элементарными силами $p(s)\Delta s$, суммируются. Тогда нить примет форму

$$f(x) = \int_0^l K(x, s) p(s) ds. \quad (5.7)$$

Итак, можно считать поставленными следующие задачи.

Задача 1. Найти плотность распределения силы $p(s)$, под влиянием которой нить примет заданную форму $f(x)$. Получаем уравнение (5.7) – интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно $p(s)$.

Задача 2. Пусть на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью в точке s :

$$p(s) \sin \omega t, \quad \omega > 0.$$

Под ее действием нить придет в движение. Пусть при движении нити абсцисса каждой ее точки не меняется и нить совершает периодические колебания

$$y(s) \sin \omega t.$$

Пусть, далее, $\rho(s)$ есть линейная плотность массы нити в точке s . Тогда на участок нити Δs , кроме силы

$$p(s) \sin \omega t \Delta s,$$

действует еще сила инерции

$$-\rho(s) \Delta s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho(s) y(s) \omega^2 \sin \omega t \Delta s.$$

При этих предположениях уравнение (5.7) примет вид

$$y(x) \sin \omega t = \int_0^l K(x, s) [p(s) \sin \omega t + \omega^2 \rho(s) y(s) \sin \omega t] ds. \quad (5.8)$$

Разделим (5.8) на $\sin \omega t$ и обозначим

$$\int_0^l K(x, s) p(s) ds = F(x), \quad \omega^2 = \lambda, \quad K(x, s) \rho(s) = K_1(x, s).$$

В итоге получим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^l K_1(x, s) y(s) ds = F(x). \quad (5.9)$$

Если функция $p(s)$ задана, то $F(x)$ можно вычислить и уравнение (5.9) будет интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода относительно $y(x)$.

Сформулированные выше две задачи об упругой нити являются типичными примерами задач, сводящихся к решению интегральных уравнений Фредгольма.

5.2.2. Связь между дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра 2-го рода

Как и в работе [1, с. 335–337], считаем, что дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad (5.10)$$

при начальных условиях

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \beta, \quad a \leq x \leq b. \quad (5.11)$$

Пусть

$$u''(x) = y(x). \quad (5.12)$$

Проинтегрируем (5.12) дважды от a до x . Получим

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x y(t) dt + C_1,$$

$$u(x) = \int_a^x ds \int_a^s y(t) dt + C_1(x-a) + C_2,$$

где $a \leq t \leq s \leq x \leq b$. В двойном интеграле изменим порядок интегрирования:

$$\int_a^x ds \int_a^s y(t) dt = \int_a^x dt \int_t^x y(t) ds = \int_a^x (x-s)y(s) ds.$$

Тогда

$$u(x) = \int_a^x (x-s)y(s) ds + C_1(x-a) + C_2.$$

Константы C_1 и C_2 определим из начальных условий (5.11):

$$u(a) = \alpha = C_2;$$

$$u'(a) = \beta = C_1.$$

Будем иметь

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x y(s) ds + \beta, \quad (5.13)$$

$$u(x) = \int_a^x (x-s)y(s) ds + \beta(x-a) + \alpha. \quad (5.14)$$

Подставим (5.12)–(5.14) в (5.10), получим

$$y(x) + p(x) \int_a^x y(s) ds + p(x)\beta + q(x)[\alpha + \beta(x-a) + \int_a^x (x-s)y(s) ds] = f(x),$$

или

$$y(x) + \int_a^x K(x,s)y(s) ds = F(x), \quad (5.15)$$

где

$$K(x,s) = p(x) + q(x)(x-s), \\ F(x) = f(x) - \beta p(x) - q(x)[\alpha + \beta(x-a)].$$

Решая интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (5.15), найдем $y(x)$, а затем $u(x)$, $u'(x)$ ($u''(x) = y(x)$). Таким образом, интегральное уравнение (5.15) включает в себя всю информацию о задаче (5.10), (5.11) и не требует никаких дополнительных условий.

Пример 1. Свести решение задачи Коши для ОДУ 2-го порядка

$$u''(x) + \frac{1}{3}u'(x) - u(x) = 6x + x^2 - x^3,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad x \in [0,1],$$

к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Решение. Согласно изложенной теории имеем

$$p(x) = \frac{1}{3}, \quad q(x) = -1, \quad f(x) = 6x + x^2 - x^3, \\ \alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Тогда поставленная задача Коши заменяется интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода:

$$y(x) + \int_0^x K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (5.16)$$

Здесь

$$K(x, s) = \frac{1}{3} - x + s.$$

Нетрудно проверить, что решением интегрального уравнения (5.16) является функция

$$y(x) = 6x.$$

По формулам (5.12)–(5.14) находим, что

$$u''(x) = 6x, \quad u'(x) = 3x^2, \quad u(x) = x^3.$$

Таким образом, решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода дает полное представление о решении задачи Коши для ОДУ 2-го порядка.

Заметим, что представленный выше пример можно использовать в качестве тестового при изучении численных методов решения интегральных уравнений.

5.3. Метод квадратур численного решения интегральных уравнений Фредгольма

5.3.1. Построение вычислительного правила и оценка погрешности численного решения

Метод квадратур иначе называют методом *конечных сумм* [1]. Изложим его идею на примере интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (5.17)$$

предполагая достаточную гладкость ядра $K(x, s)$ и правой части $f(x)$.

На $[a, b]$ зададим n точек

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

и будем находить в них значения y_i численного решения. Для этого заменим интеграл в (5.17) по какой-либо квадратурной формуле. Будем иметь

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = \sum_{j=1}^n A_j(x) y(x_j) + r_n(x), \quad (5.18)$$

где

$$A_j(x) = C_j K(x, x_j),$$

C_j – коэффициенты квадратурной формулы, $r_n(x)$ – остаточный член квадратурной формулы. Подставляя (5.18) в (5.17) и последовательно полагая $x = x_i$, получим СЛАУ относительно значений $y(x_i)$ точного решения:

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j(x_i) y(x_j) = \lambda r_n(x_i) + f(x_i), \quad (5.19)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad A_j(x_i) = C_j K(x_i, x_j).$$

Пренебрегаем в (5.19) членами $\lambda r_n(x_i)$. Тогда для вычисления y_i получаем СЛАУ

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_{ji} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.20)$$

Определитель СЛАУ (5.20):

$$\Delta(\lambda) = \det(E - \lambda A),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_1(x_1) & A_2(x_1) & \dots & A_n(x_1) \\ A_1(x_2) & A_2(x_2) & \dots & A_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(x_n) & A_2(x_n) & \dots & A_n(x_n) \end{pmatrix},$$

в общем случае есть многочлен степени n относительно λ .

Если λ не является собственным числом ядра $K(x, s)$, то $\Delta(\lambda) \neq 0$ и СЛАУ (5.20) имеет единственное решение относительно y_1, y_2, \dots, y_n . Его можно найти любым методом, разработанным для решения СЛАУ [10]. Например, по правилу Крамера

$$y_i = \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$\Delta_i(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{1,1} & -\lambda A_{2,1} & \dots & -\lambda A_{i-1,1} & f_1 & -\lambda A_{i+1,1} & \dots & -\lambda A_{n,1} \\ -\lambda A_{1,2} & 1 - \lambda A_{2,2} & \dots & -\lambda A_{i-1,2} & f_2 & -\lambda A_{i+1,2} & \dots & -\lambda A_{n,2} \\ \dots & \dots \\ -\lambda A_{1,n} & -\lambda A_{2,n} & \dots & -\lambda A_{i-1,n} & f_n & -\lambda A_{i+1,n} & \dots & 1 - \lambda A_{n,n} \end{vmatrix},$$

Если $\Delta(\lambda) = 0$, то решается задача о нахождении собственных значений и собственных функций ядра $K(x, s)$.

Пусть $\Delta(\lambda) \neq 0$ и при численном решении СЛАУ (5.20) учитываются погрешности округлений δ_i в каждом уравнении.

Другими словами, вместо (5.20) решается СЛАУ

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_{ij} y_j = f_i - \delta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.21)$$

Отсюда находим, что

$$y_i = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^n \Delta_{ji} (f_j - \delta_j), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.22)$$

Здесь Δ_{ji} – алгебраические дополнения элемента определителя $\Delta_i(\lambda)$ с индексами i, j .

Получим оценку для погрешности приближенного решения

$$\varepsilon_i = y(x_i) - y_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из СЛАУ (5.19) находим значения точного решения

$$y(x_i) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^n \Delta_{ji} [f_j + \lambda r_n(x_j)], \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.23)$$

Вычтем почленно (5.22) из (5.23). Тогда

$$y(x_i) - y_i = \varepsilon_i = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^n \Delta_{ji} [\lambda r_n(x_j) + \delta_j], \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.24)$$

Чтобы получить оценку для $|\varepsilon_i|$, предположим, что

$$\begin{aligned} |r_n(x_j)| &\leq r = r(n), \\ |\delta_j| &\leq \delta = \delta(n), \end{aligned} \quad (5.25)$$

где

$$r = \max_{x \in [a, b]} |r_n(x)|,$$

а величина δ выбирается в соответствии с вычислительным процессом.

Из (5.24) находим, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &\leq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|} \sum_{j=1}^n |\Delta_{ji}| (|\lambda r_n(x_j)| + |\delta_j|) \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|} \sum_{j=1}^n |\Delta_{ji}| (|\lambda| r + \delta) \leq B_i (|\lambda| r + \delta). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Здесь $B_i \geq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|} \sum_{j=1}^n |\Delta_{ji}|$ – величины вычисляемые.

Чтобы сделать вывод о малости $|\varepsilon_i|$ и сходимости процесса метода квадратур, в [4, с. 269–275] вместо величины r рассматриваются погрешности от интегрирования по выбранному правилу ядра и правой части $f(x)$. Подробные выкладки в силу громоздкости здесь не приводятся. С теоремой о сходимости метода квадратур можно познакомиться в [4, с. 274].

5.3.2. Примеры выбора квадратурных формул

В методе квадратур

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds \approx \sum_{j=1}^n C_j K(x, x_j) y_j.$$

Укажем коэффициенты C_j и абсциссы x_j для некоторых наиболее употребительных на практике формул.

Формула средних прямоугольников

Абсциссы x_j вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_j &= a + \frac{2j-1}{2} h, \quad j = \overline{1, n}, \\ h &= \frac{b-a}{n}, \end{aligned}$$

а коэффициенты $C_j = h$, $j = \overline{1, n}$. Остаточный член

$$r_n(x) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(x, s) \Big|_{s=\xi}, \quad \xi \in [a, b],$$

$$F(x, s) = K(x, s)y(s).$$

Формула трапеций

Узлы

$$x_j = a + (j-1)h, \quad j = \overline{1, n}, \quad h = \frac{b-a}{n-1}.$$

Коэффициенты

$$C_j = h, \quad j = \overline{2, n-1}, \quad C_1 = C_n = \frac{h}{2}.$$

Погрешность

$$r_n(x) = -\frac{b-a}{12} h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(x, \xi), \quad a \leq \xi \leq b, \quad F(x, s) = K(x, s)y(s).$$

Формула Симпсона

В формуле Симпсона промежуток $[a, b]$ разбивается на $2m$ частей,

$$h = \frac{b-a}{2m}, \quad n = 2m+1, \quad x_j = a + (j-1)h, \quad j = \overline{1, n}.$$

Коэффициенты

$$C_1 = C_n = \frac{h}{3}, \quad C_2 = C_4 = \dots = C_{2m} = \frac{4h}{3}, \quad C_3 = C_5 = \dots = C_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

Погрешность формулы Симпсона

$$r_n(x) = -\frac{1}{180} \frac{(b-a)^5}{(2m)^4} \frac{\partial^4 F}{\partial s^4}(x, \xi), \quad F(x, s) = K(x, s)y(s), \quad \xi \in [a, b].$$

Замечание 1. Применение метода квадратур к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x)$$

дает для определения значений y_i в узлах x_i СЛАУ

$$\sum_{j=1}^n C_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Определитель СЛАУ имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1 K_{11} & C_2 K_{12} & \dots & C_n K_{1n} \\ C_1 K_{21} & C_2 K_{22} & \dots & C_n K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1 K_{n1} & C_2 K_{n2} & \dots & C_n K_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замечание 2. В случае уравнений Фредгольма 2-го рода можно с помощью таблицы численного решения, полученного методом квадратур, записать приближенное аналитическое решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j(x) y_j. \quad (5.27)$$

5.3.3. Пример получения численного решения методом квадратур

Применим изложенную ранее теорию к численному решению конкретного уравнения Фредгольма 2-го рода.

Пример 2. Методом трапеций при $n=3$ найти численное решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^1 x e^{xs} y(s) ds = e^x.$$

Решение. Имеем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, где $\lambda = -1$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, s) = x e^{xs}$, $f(x) = e^x$. Будем решать его численно с использованием метода трапеций при $n=3$. Тогда

$$h = \frac{1}{2}; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = 1; \quad c_1 = c_3 = \frac{1}{4}; \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Для вычисления значений y_i в узлах x_i составляем СЛАУ (5.20), которая в данном примере имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 1; \\ \frac{1}{8} y_1 + y_2 + \frac{1}{4} e^{0,25} y_2 + \frac{1}{8} e^{0,5} y_3 = e^{0,5}; \\ y_3 + \frac{1}{4} e^{0,1} y_1 + \frac{1}{2} e^{0,5} y_2 + \frac{1}{4} e^1 y_3 = e^1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = 1; \\ 1,321y_2 + 0,2061y_3 = 1,5237; \\ 0,8244y_2 + 1,6796y_3 = 2,4683. \end{cases} \quad (5.28)$$

Нетрудно найти, что СЛАОУ (5.28) имеет единственное решение относительно y_2, y_3 :

$$y_2 \approx 1,0008; \quad y_3 \approx 0,9783.$$

Тогда приближенное аналитическое решение можно записать по формуле (5.27):

$$y(x) = e^x - \frac{x}{4} [1 + 2,0016e^{0,5x} + 0,9783e^x].$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что точное решение интегрального уравнения есть $y(x) = 1$. Легко видеть, что численное решение в узлах сетки совпадает с точным до сотых долей.

5.4. Применение метода квадратур к численному решению интегральных уравнений Вольтерра

При изучении данного вопроса достаточно остановиться на уравнениях Вольтерра 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (5.29)$$

так как при $K(x, x) \neq 0$ дифференцированием можно свести уравнение Вольтерра 1-го рода к уравнению Вольтерра 2-го рода.

Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, как было описано ранее, можно записать в виде уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром

$$K^*(x, s) = \begin{cases} K(x, s), & s \leq x, \\ 0, & s > x \end{cases}$$

и, следовательно, решать методом квадратур по описанному выше алгоритму. Однако при таком подходе может возникнуть проблема сходимости метода квадратур с увеличением n [5, с. 574–575].

Целесообразно задать на $[a, b]$ n точек

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

и рассмотреть n равенств

$$y(x_i) - \lambda \int_a^{x_i} K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.30)$$

Интегралы в (5.30) заменим квадратурной суммой:

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s) y(s) ds \approx \sum_{j=1}^i C_j K(x_i, x_j) y_j.$$

Тогда для определения y_1, y_2, \dots, y_n имеем СЛАУ:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^i C_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.31)$$

Получилась СЛАУ с нижней треугольной матрицей

$$\begin{cases} y_1 - \lambda C_1 K_{11} y_1 = f_1; \\ y_2 - \lambda (C_1 K_{21} y_1 + C_2 K_{22} y_2) = f_2; \\ \dots \\ y_n - \lambda (C_1 K_{n1} y_1 + C_2 K_{n2} y_2 + \dots + C_n K_{nn} y_n) = f_n. \end{cases} \quad (5.32)$$

Если

$$1 - \lambda C_i K_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то из (5.32) последовательно находим

$$y_i = \frac{f_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} C_j K_{ij} y_j}{1 - \lambda C_i K_{ii}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.33)$$

Замечание 3. Интегралы в (5.30) можно заменять квадратурной формулой по всем точкам x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда процесс вычислений существенно усложнится.

Продемонстрируем применение метода квадратур к численному решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, полученного в примере 1.

Пример 3. Найти численное решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^x \left(\frac{1}{3} - x + s \right) y(s) ds = -x^3 + x^2 + 6x, \quad 0 \leq s \leq x \leq 1,$$

заменяя интеграл по формуле Симпсона.

Решение. Имеем $\lambda = -1$, $K(x, s) = \frac{1}{3} - x + s$, $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$,

$x \in [0, 1]$.

Положим $n = 2m + 1 = 3$, т.е. $m = 1$. Тогда $h = \frac{1}{2}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 1$; $C_1 = C_3 = \frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{2}{3}$. Для определения значений численного решения y_1, y_2, y_3 имеем СЛАУ вида (5.32):

$$\begin{cases} y_1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} y_1 = 0; \\ y_2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - 0,5 \right) y_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} y_2 = 3,125; \\ y_3 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) y_1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - 0,5 \right) y_2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} y_3 = 6. \end{cases}$$

По формулам (5.33) последовательно получаем такие значения численного решения:

$$y_1 = 0; \quad y_2 \approx 2,5568; \quad y_3 \approx 5,9533.$$

Точное решение интегрального уравнения есть $y(x) = 6x$, и в узлах сетки эта функция принимает значения

$$y(x_1) = 0; \quad y(x_2) = 3; \quad y(x_3) = 6.$$

Сравнение значений численного и точного решений в узлах сетки позволяет сделать вывод о том, что для уменьшения величины погрешности требуется увеличить число узлов сетки. Читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно.

5.5. Интерполяционный квадратурный метод

Рассмотрение проведем на примере интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Интерполяционный квадратурный метод является частным случаем метода квадратур и основан на замене подынтегральной функции $y(x)$ интерполяционным многочленом [4, с. 275–278].

Воспользуемся многочленом Лагранжа, построенным по узлам

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

и значениям функции

$$y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n).$$

Тогда

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(x)y(x_j)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} + r(x),$$

где

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \\ \omega'(x_j) &= (x_j-x_1)(x_j-x_2)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n), \\ r(x) &= \frac{y^{(n)}(\xi(x))}{n!}\omega(x), \quad \xi \in (a,b). \end{aligned}$$

Пусть

$$l_j(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}.$$

Следовательно,

$$y(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x)y(x_j) + r(x). \quad (5.34)$$

Подставим (5.34) в интегральное уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds$$

под знак интеграла. Получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \left(\sum_{j=1}^n l_j(s)y(x_j) + r(s) \right) ds,$$

или

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n L_j(x)y(x_j) + \lambda R(x), \quad (5.35)$$

где

$$L_j(x) = \int_a^b K(x,s)l_j(s)ds, \quad R(x) = \int_a^b K(x,s)r(s)ds.$$

Отбросим в (5.35) остаточный член $\lambda R(x)$ и затем последовательно положим x равным x_1, x_2, \dots, x_n . Получим СЛАУ для нахождения приближенных значений y_i :

$$y_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n L_{ij}y_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.36)$$

СЛАУ (5.36) является частным случаем СЛАУ (5.20) (при $A_{ji} = L_{ji}$ СЛАУ совпадают). По найденным значениям y_1, y_2, \dots, y_n можно на основе формулы (5.35) получить приближенное решение на $[a, b]$:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n L_j(x) y_j. \quad (5.37)$$

Если $y(x)$ является многочленом степени $\leq n-1$, то $r(x) = 0$. Тогда $\lambda R(x) = 0$ и из СЛАУ (5.36) будут найдены точные значения решения, и по формуле (5.37) в этом случае можно построить точное решение.

Как доказано в [4, с. 276–278], специальным выбором узлов x_i , $i = \overline{1, n}$, можно увеличить степень точности интерполяционного метода.

5.6. Метод замены ядра уравнения на вырожденное ядро

Рассмотрение классического метода замены ядра уравнения на вырожденное проведем на примере интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода [1, с. 345–353; 2, с. 597–604; 3, с. 367–370; 4, с. 278–285; 5, с. 576–579]:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

Определение 2. Ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*, если оно может быть представлено в виде конечной суммы парных произведений

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) \beta_j(s), \quad (5.38)$$

где $\alpha_j(x)$, $\beta_j(s)$ – линейно независимы.

Подставим (5.38) в интегральное уравнение. Получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j \alpha_j(x), \quad (5.39)$$

где

$$A_j = \int_a^b \beta_j(s) y(s) ds \quad (5.40)$$

являются некоторыми постоянными коэффициентами. Для их определения составим СЛАУ, подставляя (5.39) в (5.40). Будем иметь

$$A_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) A_j ds,$$

или

$$A_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n A_j \gamma_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.41)$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ji} = \int_a^b \alpha_j(s) \beta_i(s) ds.$$

С использованием символов Кронекера СЛАУ (5.41) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) A_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.42)$$

Определитель СЛАУ (5.42):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \gamma_{11} & -\lambda \gamma_{21} & \dots & -\lambda \gamma_{n1} \\ -\lambda \gamma_{12} & 1 - \lambda \gamma_{22} & \dots & -\lambda \gamma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \gamma_{1n} & -\lambda \gamma_{2n} & \dots & 1 - \lambda \gamma_{nn} \end{vmatrix}. \quad (5.43)$$

Возможны два случая.

1-й случай: $\Delta(\lambda) \neq 0$. Тогда, например, по формулам Крамера получаем

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ji}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.44)$$

Здесь $\Delta_{ji}(\lambda)$ – алгебраические дополнения соответствующих элементов $\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}$ определителя $\Delta(\lambda)$.

В рассматриваемом случае интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет единственное решение, которое по формуле (5.39) представимо в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)} \alpha_i(x). \quad (5.45)$$

Если в формулу (5.45) вместо f_j подставить

$$f_j = \int_a^b \beta_j(s) f(s) ds, \quad j = \overline{1, n},$$

то после преобразований решение $y(x)$ записывается через *резольвенту* $R(x, s, \lambda)$:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds. \quad (5.46)$$

Здесь

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(x) \beta_j(s) \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Таким образом, если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то нахождение единственного решения $y(x)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром сводится к вычислению f_i , γ_{ji} и решению СЛАУ (5.42).

2-й случай: $\Delta(\lambda) = 0$. В этом случае решается задача поиска собственных значений ядра $K(x, s)$ как корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad (5.47)$$

и собственных функций – нетривиальных решений однородного уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (5.48)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ($r \leq n$) – корни уравнения (5.47) – собственные значения ядра $K(x, s)$. Тогда собственные функции ядра $K(x, s)$ будут

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \sum_{i=1}^n A_i^{(m)} \alpha_i(x), \quad m = \overline{1, r}, \quad (5.49)$$

где $A_i^{(m)}$ есть ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda_m \gamma_{ji}) A_j^{(m)} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, r}. \quad (5.50)$$

Пример 4. Решить интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода [1, с. 347–348]:

$$y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x+s) y(s) ds = x^2.$$

Решение. Имеем $a = -1$; $b = 1$; $f(x) = x^2$; $K(x, s) = x + s$. Очевидно, что ядро $K(x, s)$ – вырожденное:

$$K(x, s) = \alpha_1(x)\beta_1(s) + \alpha_2(x)\beta_2(s),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= x; & \alpha_2(x) &= 1; \\ \beta_1(s) &= 1; & \beta_2(s) &= s. \end{aligned}$$

Согласно изложенному выше методу замены ядра на вырожденное ядро решение интегрального уравнения представимо в виде

$$y(x) = x^2 + \lambda(A_1x + A_2). \quad (5.51)$$

Коэффициенты A_1, A_2 находятся из системы (5.42) при $n = 2$. Для ее записи вычислим $f_1, f_2, \gamma_{ji}, i, j = 1, 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_{-1}^1 \beta_1(s) f(s) ds = \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{2}{3}; \\ f_2 &= \int_{-1}^1 \beta_2(s) f(s) ds = \int_{-1}^1 s^3 ds = 0; \\ \gamma_{11} &= \int_{-1}^1 s ds = 0; \quad \gamma_{21} = \int_{-1}^1 ds = 2; \\ \gamma_{12} &= \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{2}{3}; \quad \gamma_{22} = \int_{-1}^1 s ds = 0. \end{aligned}$$

Получаем СЛАУ для определения A_1, A_2 :

$$\begin{cases} A_1 - 2\lambda A_2 = \frac{2}{3}; \\ -\lambda \frac{2}{3} A_1 + A_2 = 0. \end{cases} \quad (5.52)$$

Определитель СЛАУ (5.52):

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{4}{3}\lambda^2.$$

Если

$$\lambda^2 \neq \frac{3}{4},$$

то исходное интегральное уравнение имеет единственное решение (5.51) при

$$A_1 = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}, A_2 = \frac{\frac{4}{9}\lambda}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}.$$

Итак, решаемое интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = x^2 + \frac{6\lambda x + 4\lambda^2}{3(3 - 4\lambda^2)}$$

при $\lambda^2 \neq \frac{3}{4}$.

Если $\lambda^2 = \frac{3}{4}$, то интегральное уравнение решений не имеет, и следует находить собственные значения и собственные функции ядра $K(x, s) = x + s$ [1, с. 348–350].

Замечание 4. Можно получать приближенные решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода и в случае, когда ядро $K(x, s)$ не является вырожденным, но обладает достаточной гладкостью. Тогда ядро заменяют близким к нему вырожденным, используя один из следующих приемов [1, с. 350–353; 4, с. 280–285]:

- 1) разложение в степенной ряд по переменной x или s ;
- 2) разложение в двойные ряды по переменным x, s ;
- 3) замена ядра $K(x, s)$ интерполяционным многочленом по s или по x .

Оценка близости получаемого при этом приближенного решения к точному дается в теореме из [2, с. 598–600].

Замечание 5. Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода можно находить в виде суммы $f(x)$ и линейной комбинации заранее выбранных линейно независимых функций по методу моментов [1, с. 358–361; 2, с. 604–608]. В [2] показана равносильность метода моментов методу замены ядра вырожденным ядром, строящимся специальным образом.

Кроме метода моментов при решении интегральных уравнений используются методы наименьших квадратов [1, с. 356–358; 2, с. 608–611] и коллокации [1, с. 353–356; 3, с. 370–371].

5.7. Лабораторные задания

Задание 1. Заменить задачу Коши для ОДУ 2-го порядка интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода и доказать, что задача корректно поставлена. Решить полученное интегральное уравнение численно с применением метода квадратур. Показать сходимость численного решения к точному.

Варианты заданий

Вариант № 1

$$u''(x) + u'(x) - 2u(x) = -0,4x^5 + x^4 + 4x^3, \quad x \in [0, 1];$$
$$u(0) = 1; u'(0) = 1; u(x) = e^x + 0,2x^5.$$

Вариант № 2

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x(x+1), \quad x \in [0, 1];$$
$$u(0) = 1; u'(0) = -1; u(x) = e^{-x} - \frac{1}{3}x^3.$$

Вариант № 3

$$u''(x) - \frac{1}{5}u'(x) - 4u(x) = -4x^5 - x^4 + 20x^3 - 8, \quad x \in [1, 2];$$
$$u(1) = 3; u'(1) = 5; u(x) = 2 + x^5.$$

Вариант № 4

$$u''(x) + \frac{1}{5}u'(x) - 4u(x) = 12x(x^2 + 1) + x^2(x^2 + 1, 2) - 4x^5 - 1, \quad x \in [1, 2];$$
$$u(1) = 3, 25; u'(1) = 11; u(x) = x^5 + 2x^3 + 0, 25.$$

Вариант № 5

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) - 2u(x) = -2x^4 - 4x^3 + 16x^2 + 18x, \quad x \in [1, 2];$$
$$u(1) = 3; u'(1) = 10; u(x) = x^4 + 2x^3.$$

Вариант № 6

$$u''(x) + u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = 2e^x(x+1), \quad x \in [1; 1,5];$$

$$u(1) = 2,7183; \quad u'(1) = 5,4366; \quad u(x) = xe^x.$$

Вариант № 7

$$u''(x) + 2u'(x) - \frac{4}{x}u(x) = 3e^x + 2x^2 + 6x - \frac{4e^x}{x}, \quad x \in [1, 2];$$

$$u(1) = 1 + \exp(1); \quad u'(1) = \exp(1) + 3; \quad u(x) = e^x + x^3.$$

Вариант № 8

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) - \frac{1}{x^2}u(x) = 15x^2 + 9, \quad x \in [1, 2];$$

$$u(1) = 4; \quad u'(1) = 10; \quad u(x) = x^4 + 3x^2.$$

Вариант № 9

$$u''(x) + 2xu'(x) - u(x) = 2x(e^x - e^{-x}), \quad x \in [0, 1];$$

$$u(0) = 2; \quad u'(0) = 0; \quad u(x) = e^x + e^{-x}.$$

Вариант № 10

$$u''(x) - u'(x) + 2u(x) = 2(e^x - 2e^{-x}), \quad x \in [0, 1];$$

$$u(0) = 0; \quad u'(0) = 2; \quad u(x) = e^x - e^{-x}.$$

Вариант № 11

$$u''(x) - \frac{2}{x}u'(x) - xu(x) = -2x^4 - x^3 - 2, \quad x \in [0; 0,5];$$

$$u(0) = 0; \quad u'(0) = 0; \quad u(x) = 2x^3 + x^2.$$

Вариант № 12

$$u''(x) - 2u'(x) - u(x) = -x^3 - 6x^2 + 6x - e^x, \quad x \in [0; 1];$$

$$u(0) = 0,5; \quad u'(0) = 0,5; \quad u(x) = 0,5e^x + x^3.$$

Вариант № 13

$$u''(x) - x^2 u'(x) - 2u(x) = -3x^4 - 2x^3 + 6x + e^{-x} (1 - x^2), \quad x \in [0; 0,5];$$

$$u(0) = -1; \quad u'(0) = 1; \quad u(x) = x^3 - e^{-x}.$$

Вариант № 14

$$u''(x) + \frac{1}{(x+1)^2} u'(x) - 2u(x) = 6(x+1) + 3 - 2(x+1)^3, \quad x \in [0,1];$$

$$u(0) = 1; \quad u'(0) = 3; \quad u(x) = (x+1)^3.$$

Вариант № 15

$$u''(x) - \frac{1}{x^2} u'(x) + 2u(x) = 2x^5 + 24x^3 - 5x^2 + 12x - 2, \quad x \in [1,2];$$

$$u(1) = 5; \quad u'(1) = 11; \quad u(x) = x^5 + 2x^3 + 2.$$

Вариант № 16

$$u''(x) - u'(x) + u(x) = e^x + \sin x, \quad x \in [0,1];$$

$$u(0) = 2; \quad u'(0) = 1; \quad u(x) = e^x + \cos x.$$

Задание 2. Найти приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода методом квадратур (с использованием одной из обобщенных формул: средних прямоугольников, трапеций, Симпсона) и методом замены ядра уравнения на близкое ему вырожденное. Полученные результаты сравнить между собой.

Варианты заданий

Вариант № 1

$$y(x) - \int_0^1 \frac{\sin(xs)}{s} y(s) ds = e^x.$$

Вариант № 2

$$y(x) - \int_0^1 (e^{xs} - 1) y(s) ds = x.$$

Вариант № 3

$$y(x) - \int_0^1 (e^{-xs} - 1) y(s) ds = x^2.$$

Вариант № 4

$$y(x) - \int_1^2 \frac{\cos(xs)}{s} y(s) ds = \sqrt{x}.$$

Вариант № 5

$$y(x) + \int_0^{\pi} \sin(xs)^2 y(s) ds = 1 + x.$$

Вариант № 6

$$y(x) + \int_0^{0.5} e^{\frac{xs}{5}} y(s) ds = x + e^x.$$

Вариант № 7

$$y(x) - \int_0^1 e^{xs} y(s) ds = 1 + e^x.$$

Вариант № 8

$$y(x) - \int_0^1 \sin(0,6xs) y(s) ds = x.$$

Вариант № 9

$$y(x) - 2 \int_0^{0.5} e^{-xs} y(s) ds = 1 + x^2.$$

Вариант № 10

$$y(x) - 0,5 \int_0^1 (1+s)(e^{xs} - 1)y(s) ds = \frac{1}{x}.$$

Вариант № 11

$$y(x) - \int_0^1 (1+s)(e^{-0,2xs} - 1)y(s) ds = \frac{1}{x}.$$

Вариант № 12

$$y(x) + \int_0^1 (1+s)(e^{0,4xs} - 1)y(s) ds = \frac{1}{x}.$$

Вариант № 13

$$y(x) - \int_0^1 \left(1 + xs + \frac{(xs)^2}{2} \right) y(s) ds = 1 + x.$$

Вариант № 14

$$y(x) - \int_1^2 (xs + 1)y(s) ds = e^{-x}.$$

Вариант № 15

$$y(x) - 0,5 \int_1^2 (0,16x^2s^2 + 0,4xs)y(s) ds = e^x.$$

Вариант № 16

$$y(x) + 0,5 \int_0^1 (1+s)(e^{-0,3xs} - 1)y(s) ds = x.$$

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: ГИФМЛ, 1960. – Т. 2. – 620 с.
3. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1986. – 584 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 399 с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
6. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1951. – 127 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.А. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
10. Меркулова Н.Н. Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: Учеб. пособие. – Томск: Том. гос. ун-т, 2005. – 257 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	4
1.1. Типы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Постановка граничных задач	4
1.2. Метод сеток	10
1.2.1. Постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона	10
1.2.2. Замена дифференциальной задачи разностной	11
1.2.3. Исследование корректности постановки разностной задачи	18
1.2.4. О методах решения систем разностных уравнений	20
1.2.5. Пример решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток	21
1.3. Лабораторные задания	29
Литература	34
2. Метод сеток решения краевых задач для уравнений параболического типа	35
2.1. Метод сеток решения задачи Коши	35
2.1.1. Построение явной и неявной разностных схем методом неопределенных коэффициентов	37
2.2. Постановка краевых задач для уравнений теплопроводности	42
2.2.1. Численное решение первой краевой задачи	44
2.2.2. Теория устойчивости разностных схем по начальным данным	46
2.2.3. Исследование вопросов аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной краевой задачи первого рода	47
2.2.4. Алгоритм численного решения первой краевой задачи	52
2.3. Метод сеток решения третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности	53
2.3.1. Постановка задачи и выбор численного метода	53
2.3.2. Оценка погрешности аппроксимации неявной разностной схемы	55
2.3.3. Метод прогонки получения численного решения	61
2.4. Решение уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами методом сеток	64
2.5. Реализация алгоритма на конкретном примере	67
2.6. Лабораторные задания	69
Литература	75
3. Метод установления	76
3.1. Метод итераций решения разностной задачи Дирихле	76

3.2. Ряды Фурье. Случай сеточных функций	82
3.3. Исследование сходимости явного метода установления	85
3.4. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом установления	92
3.5. Лабораторные задания	96
Литература	101
4. Численные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа	102
4.1. Линейные нестационарные уравнения с частными производными первого и второго порядка	102
4.1.1. Постановка краевых задач для уравнения второго порядка	102
4.1.2. Постановка краевых задач для уравнения первого порядка	105
4.2. Решение задачи Коши для волнового уравнения	107
4.2.1. Построение разностной формулы второго порядка точности методом фиктивной точки	109
4.2.2. Об исследовании устойчивости схемы «крест» по начальным данным	111
4.2.3. Об областях зависимости дифференциального уравнения и разностной схемы	113
4.3. Численное решение третьей краевой задачи	116
4.4. Решение варианта задания	120
4.5. О задании дополнительных граничных условий для разностных схем	121
4.5.1. Дополнительные граничные условия (ДГУ). Понятие о ДГУ	125
4.5.2. Анализ нормальных мод	128
4.6. Численные методы решения задач математической физики для случая трех независимых переменных	139
4.6.1. Постановка краевых задач для двумерного волнового уравнения	139
4.6.2. Постановка задачи для двумерного уравнения переноса	141
4.6.3. Разностные методы решения краевых задач (двумерный случай)	142
4.7. Лабораторные задания	146
Литература	150
5. Методы решения интегральных уравнений	152
5.1. Основные виды линейных интегральных уравнений	152
5.2. Примеры задач, сводящихся к решению интегральных уравнений	154
5.2.1. Две задачи об упругой нити	154
5.2.2. Связь между дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра 2-го рода	157
5.3. Метод квадратур численного решения интегральных уравнений Фредгольма	159

5.3.1 Построение вычислительного правила и оценка погрешности численного решения	159
5.3.2 Примеры выбора квадратурных формул	162
5.3.3 Пример получения численного решения методом квадратур	164
5.4 Применение метода квадратур к численному решению интегральных уравнений Вольтерра	165
5.5 Интерполяционный квадратурный метод	167
5.6 Метод замены ядра уравнения на вырожденное ядро	169
5.7 Лабораторные задания	174
Литература	179

Учебное издание

**Нина Николаевна Меркулова,
Михаил Дмитриевич Михайлов**

**МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ
ВЫЧИСЛЕНИЙ**

Учебное пособие

Часть III

Издание 2-е, исправленное и дополненное

Редактор Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайнер обложки А.В. Бабенко

Подписано к печати 03.08.2011 г. Формат 60x84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 10,7.
Тираж 100 экз. Заказ № **83** .

Отпечатано на оборудовании
редакционно-издательского отдела
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. Корп. 4. Оф. 011
Тел. 8+(382-2)–52-98-49