На правах рукописи

Никольская Мария Михайловна

Абелевы группы, изоморфные собственной вполне характеристической подгруппе

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2012

Работа выполнена на кафедре алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор С.Я. Гриншпон
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Я.Н. Нужин
	кандидат физико-математических наук, доцент И.Л. Фаустова
Ведущая организация	ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Защита состоится «23» марта 2012 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, ул. Ленина, д. 36, корпус 2, ауд.304.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, Томск, ул. Ленина, д. 34а.

Автореферат разослан « » февраля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.Н. Малютина

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В теории абелевых групп одним из направлений исследований является изучение групп, содержащих собственную подгруппу, изоморфную самой группе.

Такие группы изучал Р. А. Бьюмонт в ([9]), он называл их I-группами. В ([9]) установлено, что всякая примарная абелева группа, разложимая в бесконечную прямую сумму коциклических групп, является I-группой. I-модули исследовались в ([10]) Р. А. Бьюмонтом и Р. С. Пирсом. В частности, в ([10]) установлено, что R-модуль без кручения M, не являющийся делимым, является I-модулем, а любой периодический модуль M конечного ранга не является I-модулем. В ([11]) кроме I-групп рассматривались IP-группы (группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе) и ID-группы (группы, изоморфные собственному прямому слагаемому).

В ([13]) П. Кроули строит пример бесконечной примарной абелевой группы без элементов бесконечной высоты, которая не изоморфна никакой собственной подгруппе.

В работе ([16]) П. Хилл и Ч. Меджиббен дают более общую и простую конструкцию примарных групп без собственных изоморфных подгрупп, чем П. Кроули. В своей работе они также показывают, что для того, чтобы бесконечная редуцированная примарная группа была группой без собственных изоморфных подгрупп, необходимо, чтобы она была неограниченной, несчетной и имела конечные инварианты Ульма – Капланского.

В ([18]) Г. С. Монк исследует абелевы p-группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе.

В последнее время интерес к группам без собственных изоморфных им подгрупп не угасает. В частности, в ([14]) Б. Голдсмит, С. Охогейн и С. Валлутис изучают квазиминимальные группы (группы, изоморфные всем своим подгруппам такой же мощности как сами группы), сервантно квазиминимальные группы (группы, изоморфные всем своим сервантным подгруппам такой же мощности как сами группы), прямо квазиминимальные группы (группы, изоморфные всем своим прямым слагаемым такой же мощности как сами группы).

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение групп, содержащих собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе (такие группы названы в работе IF-группами), из различных классов абелевых групп.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы теории абелевых групп и модулей. В работе используется также понятие вполне транзитивной абелевой группы без кручения, введенное П. А. Крыловым, и некоторые результаты о таких группах, полученные С.Я. Гриншпоном и П.А. Крыловым.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы являются новыми. Основными результатами работы можно считать следующие.

- Установлены связи между некоторыми свойствами возрастающей последовательности α неотрицательных целых чисел и редуцированной сепарабельной группы A при условии изоморфизма группы A на ее вполне характеристическую подгруппу S, задаваемую последовательностью α.
- Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы группа A, разлагающаяся в прямую сумму своих вполне характеристических подгрупп, являлась IF-группой.
- Доказано, что любая ограниченная группа не содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе.
- Доказано, что нередуцированная периодическая группа A является IF-группой тогда и только тогда, когда некоторая p-компонента группы A не является делимой группой и имеет редуцированную часть, которая является IF-группой.
- Доказано, что сепарабельная p-группа не является IF-группой, если ее базисная подгруппа не является IF-группой, и найдено необходимое условие, при котором неограниченная сепарабельная p-группа является IF-группой.
- Получено полное описание периодически полных IF-групп.
- Доказано, что однородная χ-группа A не содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA, которая изоморфна самой группе.
- Установлено, что собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной вполне транзитивной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n, отличного от единицы.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории абелевых групп и модулей, а также при чтении спецкурсов для студентов старших курсов и аспирантов.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на XII, XIII и XIV Всероссийских конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (Томск, 2008 г., 2009 г. и 2010 г.), на Международной алгебраической конференции, посвященной 100–летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 2008 г.), на Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 130–летию Томского государственного университета и 60–летию механико-математического факультета (Томск, 2008 г.), на Международной конференции «Алгебра, логика и приложения» (Красноярск, 2010 г.), на Всероссийском симпозиуме «Абелевы группы», посвященном 95-летию Л.Я. Куликова (Бийск, 2010 г.), на II Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики» (Томск, 2011 г.). Основные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета. По теме диссертации опубликовано 13 работ ([20] – [32]).

Структура и объем работы. Представляемая диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трех глав и списка литературы. Работа изложена на 77 страницах. Библиография содержит 32 наименования.

Содержание работы. Все группы, рассматриваемые в работе, являются абелевыми.

В первой главе диссертации рассматриваются некоторые общие свойства групп, имеющих собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе. В первом параграфе этой главы приводятся основные определения и известные результаты, используемые в дальнейшем.

Во втором параграфе, используя описание И. Капланского вполне характеристических подгрупп одного класса p-групп в терминах последовательностей порядковых чисел и символов ∞, исследуются связи между некоторыми свойствами возрастающей последовательности α неотрицательных целых чисел и свойствами редуцированной сепарабельной

p-группы A при условии изоморфизма группы A на ее вполне характеристическую подгруппу S, задаваемую последовательностью α.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞ (для любой пары индексов (i, j), где $i < j$, $\alpha_i < \alpha_j$, если $\alpha_i \neq \infty$, и $\alpha_i = \alpha_j$, если $\alpha_i = \infty$). Если $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, то говорят, что *последовательность α имеет скачок в α_{i+1}*. Обозначим через $\mathbb{N}_0$ множество всех неотрицательных целых чисел. *Длиной $\lambda(\alpha)$ последовательности α* называется наименьшее число $i \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\alpha_i = \infty$; причем полагаем $\lambda(\alpha) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i < \infty$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$.

Возрастающая последовательность $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ неотрицательных целых чисел и символов ∞ называется *U-последовательностью* для редуцированной сепарабельной p-группы A, если для любого $\alpha_i \neq \infty$ имеем $\alpha_i < \lambda(A)$ и всякий раз, когда существует скачок в α_n, α_{n-1}-й инвариант Ульма – Капланского $f_A(\alpha_{n-1})$ группы A отличен от нуля ([17]). Обозначим через $A(\alpha)$ следующую подгруппу группы A:

$$A(\alpha) = \{a \in A \mid h(p^n a) \geq \alpha_n \text{ для всякого } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Понятно, что $A(\alpha)$ — вполне характеристическая подгруппа группы A. Из результатов И. Капланского ([17], с. 56–66) следует, что всякая вполне характеристическая подгруппа S редуцированной сепарабельной p-группы A имеет вид $A(\alpha)$ для некоторой U-последовательности α, причем подгруппа S представляется в указанном виде единственным образом.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞. Будем говорить, что редуцированная сепарабельная p-группа A *имеет α-копию*, если α — U-последовательность для группы A и $A \cong A(\alpha)$. Заметим, что если A — неограниченная редуцированная сепарабельная p-группа и A имеет α-копию, то $\lambda(\alpha) = \infty$, то есть в последовательности α нет символов ∞.

Обозначим через W множество всех возрастающих последовательностей неотрицательных целых чисел и через W_0 — множество всех возрастающих последовательностей неотрицательных целых чисел, начинающихся с нуля.

Основными результатами второго параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть* $\alpha \in W$ *и* A *— неограниченная редуцированная сепарабельная* p*-группа, имеющая* α*-копию. Тогда*

1) если последовательность α *для некоторого* i *имеет скачок в* α_{i+1}*, то* $f_A(i) \neq 0$ *и* $f_A(i) \geq f_A(\alpha_i)$*;*

2) если в α_{i+1} *скачка нет, то* $f_A(i) = f_A(\alpha_i)$*.*

Теорема 2.4. *Пусть* $\alpha \in W_0$ *и* A *— неограниченная редуцированная сепарабельная* p*-группа, все инварианты Ульма – Капланского которой конечны. Тогда, если* α *имеет хотя бы один скачок, то группа* A *не имеет* α*-копию.*

Вторая глава состоит из трех параграфов. В начале главы вводится следующее определение.

Группу назовем *IF-группой*, если она изоморфна некоторой собственной вполне характеристической подгруппе.

В третьем параграфе исследуются некоторые свойства IF-групп, в частности, рассмотрены IF-группы, являющиеся прямыми суммами своих вполне характеристических подгрупп. Получен следующий результат.

Теорема 3.4. *Пусть* $B = \bigoplus\limits_{i \in I} B_i$*, где* B_i *— вполне характеристическая подгруппа группы* B *для каждого* $i \in I$*.* B *является* IF*-группой тогда и только тогда, когда существует хотя бы один индекс* $i \in I$*, для которого группа* B_i *является* IF*-группой.*

Из теоремы 3.4 вытекает важное следствие.

Следствие 3.5. *Периодическая группа является* IF*-группой тогда и только тогда, когда некоторая ее* p*-компонента является* IF*-группой.*

Доказан также следующий результат об ограниченных группах.

Теорема 3.6. *Всякая ограниченная группа не является* IF*-группой.*

В четвертом параграфе рассматриваются нередуцированные и делимые периодические группы. Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 4.3. *Делимая периодическая группа не является* IF*-группой.*

Теорема 4.4. *Для нередуцированной периодической группы* A *следующие условия эквивалентны:*

1) A *является* IF*-группой;*

2) некоторая p*-компонента группы* A *не является делимой группой и имеет редуцированную часть, которая является* IF*-группой;*

3) редуцированная часть группы A является IF-группой.

Теоремы 4.3 и 4.4 сводят исследование периодических IF-групп к исследованию редуцированных примарных IF-групп.

В пятом параграфе исследуются примарные сепарабельные IF-группы. Существенную роль в этом исследовании играет понятие допустимой последовательности, введенное в этом параграфе. Пусть A — сепарабельная p-группа. Строго возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ назовем *допустимой* для группы A, если для инвариантов Ульма – Капланского этой группы выполняется система равенств

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i), k \in \mathbb{N}_0.$$

Получен следующий критерий для неограниченных p-групп, являющихся прямой суммой циклических групп.

Теорема 5.2. *Пусть B — неограниченная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Группа B является IF-группой тогда и только тогда, когда для нее существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Для произвольных сепарабельных p-групп получен следующий результат.

Теорема 5.3. *Сепарабельная p-группа не является IF-группой, если ее базисная подгруппа не является IF-группой.*

Для неограниченных сепарабельных p-групп доказана такая теорема.

Теорема 5.4. *Если неограниченная сепарабельная p-группа является IF-группой, то для нее существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Периодически полной p-группой называется периодическая часть $T\left(\bar{B}\right)$ p-адического пополнения $\bar{B}$ прямой суммы B циклических p-групп ([7], с. 22). Впервые эти группы стал изучать Л.Я. Куликов, он называл их замкнутыми группами ([4]). Такие группы играют фундаментальную роль при изучении p-групп.

Для периодически полных p-групп в пятом параграфе получены следующие результаты.

Теорема 5.5. *Для периодически полной p-группы A следующие условия эквивалентны:*

1) A является IF-группой;

2) базисная подгруппа группы A является IF-группой;

3) A — неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

Будем говорить, что последовательность инвариантов Ульма – Капланского неограниченной сепарабельной p-группы A является *периодической*, если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n+k)$.

Следствие 5.6. *Пусть A — периодически полная p-группа. Если последовательность инвариантов Ульма – Капланского группы A является периодической, то A — IF-группа.*

Следствие 5.7. *Если для периодически полной p-группы A существует такое кардинальное число γ, что $f_A(n) = \gamma$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$, то A является IF-группой.*

Третья глава состоит из двух параграфов. В этой главе изучаются группы без кручения, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

В шестом параграфе установлен следующий факт.

Теорема 6.1. *Группа без кручения A содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе, тогда и только тогда, когда A — не делимая группа.*

Группа без кручения, не являющаяся делимой, всегда содержит собственную вполне характеристическую подгруппу вида nA, изоморфную самой группе. Далее рассматриваются группы без кручения, которые имеют собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA, изоморфную самой группе.

Группу без кручения A назовем *IF-группой*, если она содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA, которая изоморфна самой группе.

Основным результатом шестого параграфа является следующая теорема.

Теорема 6.4. *Нередуцированная группа без кручения является IF-*

группой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть является IF-группой.

Основными понятиями для групп без кручения являются понятия характеристики и типа.

Характеристикой называется последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество таких последовательностей. Если $\chi_1 = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi_2 = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$, то полагают $\chi_1 \leq \chi_2$ тогда и только тогда, когда $k_n \leq l_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Две характеристики $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $(l_1, \ldots, l_n, \ldots)$ считаются *эквивалентными*, если неравенство $k_n \neq l_n$ имеет место лишь для конечного числа номеров n, и только тогда, когда k_n и l_n конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом.*

Пусть A — группа без кручения, $a \in A$. Последовательность p-высот

$$\chi(a) = (h_{p_1}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots),$$

где $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию, называется *характеристикой* или *высотной последовательностью* элемента a. Если $\chi(a)$ принадлежит типу $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$.

Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной* группой (типа $\mathbf{t}$).

Пусть A — группа без кручения. Если $v \in \mathfrak{X}$, то обозначим через $A(v)$ следующую подгруппу группы A: $A(v) = \{a \in A \,|\, \chi(a) \geq v\}$. $A(v)$ — вполне характеристическая подгруппа группы A. Заметим, что если A — редуцированная группа и характеристика v состоит только из символов ∞, то $A(v) = 0$.

Редуцированная группа без кручения A называется *χ-группой*, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(v)$, где v — некоторая характеристика ([1]). Редуцированная группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых двух ее элементов a и b, для которых $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует эндоморфизм φ этой группы такой, что $\varphi(a) = b$ ([15]).

Основным результатом седьмого параграфа является следующая теорема.

Теорема 7.1. *Однородные χ-группы не являются IF-группами.*

С помощью этой теоремы получаем такие следствия.

Следствие 7.2. *Собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной вполне транзитивной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n, отличного от единицы.*

Следствие 7.3. *Собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной редуцированной сепарабельной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n, отличного от единицы.*

Автор искренне благодарит научного руководителя профессора Самуила Яковлевича Гриншпона за постановку задач, внимание к моей научной работе, помощь в оформлении статей и данной диссертации.

Список литературы

[1] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1982. — С. 56–92.

[2] Гриншпон С. Я. О некоторых классах примарных абелевых групп почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам // Изв. Вузов. Матем. — 1976. — № 2. — С. 23–30.

[3] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8. — № 2. — С. 407–473.

[4] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1945. — № 16. — С. 129–162.

[5] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1941. — № 9. — С. 165–182.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т. 1. — 335 с.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1977. — Т. 2. — 416 с.

[8] Шерстнева (Ботыгина) А. И. U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристическим подгруппам // Изв. ВУЗов. Математика. — 2001. — № 5. — С. 72–80.

[9] Beaumont R. A. Groups with isomorphic proper subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — V. 51. — P. 381–387.

[10] Beaumont R. A. Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules / R. A. Beaumont, R. S. Pierce// Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 91. — P. 209–219.

[11] Beaumont R. A. Isomorphic direct summands of abelian groups / R. A. Beaumont, R. S. Pierce // Math. Annalen. — 1964. — V. 153. — P. 21–37.

[12] Benabdallah K. M. The structure of large subgroups of primary Abelian groups / K. M. Benabdallah, B. J. Eisenstadt, J. M. Irwin, E. W. Poluianov // Acta Math. Acad. Scient. Hung. — 1970. — V. 21. — № 3–4. — P. 421–435.

[13] Crawley P. An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 68. — P. 463–467.

[14] Goldsmith B. Quasi-minimal groups / B. Goldsmith, S. Óhógáin, S. Wallutis // Proc. of Amer. Math. Soc. — 2004. — V. 132. — № 8. — P. 2185–2195.

[15] Grinshpon S. Ya. Fully invariant subgroups, full transitivity and homomorphism groups of Abelian groups / S. Ya. Grinshpon, P. A. Krylov // Journal Math. Sciences. — 2005. — V. 128. — № 3. — P. 2894–2997.

[16] Hill P. On primary groups with countable basic subgroups / P. Hill, Ch. Megibben // Trans. of Amer. Math. Soc. — 1966. — V. 124. — № 1. — P. 49–59.

[17] Kaplansky I. Infinite Abelian groups // Michigan. — Ann Arbor. — Univ. Michigan Press. — 1968. — 94 p.

[18] Monk G. S. Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Ill. J. Math. — 1970. — V. 14. — № 1. — P. 164–177.

[19] Pierce R. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois. — 1963. — P. 215–310.

Работы автора по теме диссертации

[20] Савинкова М. М. U-последовательности и вполне характеристические подгруппы абелевых групп // XII Всеросс. конф. студ., аспир. и молодых ученых «Наука и образование» (21–25 апреля 2008 г.): В 6 т. Т. 1. Естественные и точные науки. Ч. 1. Физика и математика. — Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета. — 2009. — С. 87-88.

[21] Савинкова М. М. Вполне характеристические подгруппы абелевых p-групп, изоморфных самой группе // Междунар. алгебраическая конф., посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша: тез. докл. — М. — 2008. — С. 200–201.

[22] Савинкова М. М. U-последовательности и примарные группы, содержащие собственные изоморфные себе вполне характеристические подгруппы // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — Томск. — 2008. — № 2(3). — С. 56–60.

[23] Савинкова М. М. О сепарабельных p-группах, содержащих вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе // Всеросс. конф. по математике и механике: тез. докл. 22–25 сентября 2008. — Томск. — 2008. — С. 62.

[24] Савинкова М. М. IF-группы и инварианты Ульма – Капланского // XIII Всеросс. конф. студ., аспир. и молодых ученых «Наука и образование» (20–24 апреля 2009 г.): В 6 т. Т. 1. Естественные и точные науки. Ч. 1. Физика и математика. — Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета. — 2009. — С. 22–23.

[25] Гриншпон С. Я. IF-группы / С. Я. Гриншпон, М. М. Никольская (Савинкова) // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — Томск. — 2010. — № 1(9). — С. 5–14.

[26] Никольская (Савинкова) М. М. Примарные IF-группы // XIV Всеросс. конф. студ., аспир. и молодых ученых «Наука и образование» (19–23 апреля 2010 г.): В 6 т. Т. 1. Естественные и точные науки. Ч. 1. — Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета. — 2010. — С. 155–157.

[27] Гриншпон С. Я. Абелевы p-группы, неизоморфные собственным вполне характеристическим подгруппам / С. Я. Гриншпон, М. М. Никольская // Алгебра, логика и приложения: Тезисы докладов. — Красноярск. — 2010. — С. 27–28.

[28] Гриншпон С. Я. Собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные группе / С. Я. Гриншпон, М. М. Никольская // Абелевы группы: Материалы Всероссийского симпозиума, посвященного 95-летию Л.Я. Куликова (Бийск, 19–25 августа 2010). — Бийск. — 2010. — С. 29–31.

[29] Гриншпон С. Я. Примарные IF-группы / С. Я. Гриншпон, М. М. Никольская // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — Томск. — 2011. — № 3(15). — С. 25–31.

[30] Grinshpon S. Ya. Fully invariant subgroups of Abelian p-groups with finite Ulm – Kaplansky invariants / S. Ya. Grinshpon, M. M. Nikolskaya (Savinkova) // Communications in Algebra. — 2011. — V. 39. — Issue 11. — P. 4273–4282.

[31] Никольская М. М. IF-группы без кручения // Современные проблемы математики и механики: Материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. — Томск: Изд-во Том. ун-та. — 2011. — С. 33–35.

[32] Гриншпон С. Я. Собственные вполне характеристические подгруппы групп без кручения, изоморфные самой группе / С. Я. Гриншпон, М. М. Никольская // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. — Томск. — 2012. — № 1(17). — С. 25–30.