А.Г. Мизин

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК НА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Г. Мизин

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК НА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

Учебное пособие

Томск
2011

УДК 514.144.2
ББК 22.151.3
М 587

Мизин А.Г.

М 587 **Двойное отношение четырех точек на проективной прямой**: Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет, 2011. – 28 с.

Учебное пособие посвящено свойствам простого отношения трех точек на аффинной прямой и двойного отношения четырех точек на проективной прямой, которые являются соответственно основными инвариантами аффинной и проективной геометрий. В нем методами аналитической геометрии подробно рассматриваются изменения значений этих отношений в зависимости от всевозможных перестановок данных точек. Детально изучаются гармонические четверки точек и указывается способ построения таких четверок с помощью одной линейки.

Пособие содержит учебные примеры и упражнения для самостоятельной работы, составленные автором.

Для студентов, специализирующихся в проективной геометрии.

УДК 514.144
ББК 22.151.3

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является приложением к книге автора «Проективно-дифференциальная геометрия семейств прямых и многомерных плоскостей» [3] и посвящено основному инварианту проективной геометрии – двойному или сложному отношению четырех точек на проективной прямой.

Известно, что математической моделью окружающего нас пространства является E_3. Это точечно-векторное пространство, состоящее из множества точек и сопоставленного с ним направляющего действительного линейного евклидова пространства E^3, то есть линейного пространства L^3, в котором введено скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{y})$. Если в пространстве E_3 рассматривать преобразование, то есть взаимное однозначное соответствие $\varphi : M \mapsto M'$ между его произвольными точками M и M', то наиболее естественным считать такое, при котором расстояние M_1M_2 между исходными точками M_1 и M_2 равно расстоянию $M_1'M_2'$ между их образами M_1' и M_1'. Такое преобразование φ называется *движением*, а все они образуют группу.

Итак, простейшим инвариантом евклидовой геометрии является длина отрезка. Естественно, что при движениях будут сохраняться все метрические величины, то есть углы, площади и объемы плоских или пространственных фигур.

С математической точки зрения не возникает никаких проблем с увеличением размерности направляющего пространства. Переходя к E^n, мы получаем евклидово точечно-векторное пространство E_n с его простейшим метрическим инвариантом – длиной отрезка.

Можно ограничиться требованием того, чтобы при преобразовании φ любая прямая l переходила в прямую l' с сохранением параллельности, то мы получим так называемое *аффинное преобразование* пространства E_n. При этом группа движений расширяется до группы аффинных преобразований.

Если же изначально отказаться от метрических аксиом, а в качестве направляющего пространства рассматривать линейное пространство L^n, то получится точечно-векторное *аффинное* пространство A_n, в котором действует группа всех аффинных преобразований. Простейшим инвариантом этой группы является простое отношение $\lambda = V(AB,C)$ трех точек A,B и C на одной прямой, где $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$.

Перейдем к проективному пространству P_n, получаемому из аффинного пространства A_n путем пополнения его *несобственными* (*бесконечно удаленными)* элементами. При этом предполагается, что все параллельные между собой прямые имеют одну общую *несобственную* точку, а все такие точки заполняют несобственную гиперплоскость A^0_{n-1}. В результате мы получим *расширенное* аффинное пространство A^∞_n, которое и является одной из моделей проективного пространства P_n. В нем, в отличие от расширенного аффинного пространства нет различия между собственными и несобственными элементами. В пространстве A^∞_n рассмотрим преобразование φ, которое любую прямую l переводит снова в прямую l', но без обязательного сохранения параллельности. Такое преобразование называется *проективным* преобразованием расширенного пространства A^∞_n. При этом группа аффинных преобразований расширяется до группы проективных преобразований.

Простейшим инвариантом этой группы является двойное отношение $\lambda = DV(AB;CD) = V(AB,C):V(AB,D)$ четырех точек A,B,C и D на одной прямой.

Переходя к расширенному евклидову пространству E^∞_n, которое получается из расширенного пространства A^∞_n путем введения в линейном пространств L^3 скалярного произведения $(\overline{x},\overline{y})$. заключаем, что в нем определена наиболее общая группа проективных преобразований, переводящих прямые в прямые без сохранения не только углов между ними, но и даже параллельности.

Таким образом, проективные свойства являются наиболее общими свойствами фигур в однородных пространствах.

В данном пособии исследуются свойства двойного отношения $\lambda = DV(AB;CD)$ при всевозможных перестановках точек в данной четверке. Всего таких перестановок будет $4!=24$.

Автором подготовлены и рассмотрены учебные примеры, а также составлены упражнения для самостоятельной работы.

Конец доказательств теорем и решений примеров отмечается знаком ▲.

1. Простое отношение трех точек на аффинной прямой

Напомним следующее классическое аффинное понятие.

Определение 1. Пусть дана аффинная прямая AB и точка C на ней. Число λ называется *простым отношением трех точек* на прямой и обозначается $\lambda = V(AB;C)$, если $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$.

В этом случае говорят также, что точка C *делит отрезок* AB *в отношении, равном числу* λ. Это отношение является простейшим инвариантом аффинных преобразований [1],[2].

Будем считать, что все три точки различны. Это означает, что $\lambda \neq 0$, т.е. $C \neq A$; $\lambda \neq \infty$, т.е. $C \neq B$ и $\lambda \neq -1$, т.е. $A \neq B$.

Отметим, что на прямой нет такой точки C, для которой $\lambda = -1$. Число λ будет только стремиться к этому значению, если точка C становится «бесконечно удаленной». Если же пополнить аффинную прямую такой точкой M_∞, которую называют *несобственной*, то мы получим одну из моделей проективной прямой.

Из определения непосредственно следует, что радиус-вектор $\overline{x}$ точки C, для которой $\lambda = V(AB;C)$, имеет вид

$$\overline{x} = \frac{\overline{x_1} + \lambda \overline{x_2}}{1+\lambda},$$

где точки A и B заданы радиус-векторами $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$.

Знак числа λ и его модуль имеет следующую геометрическую характеристику. При $\lambda > 0$ точка C лежит внутри отрезка, а при $\lambda < 0$ – на прямой, но вне отрезка AB. При $|\lambda| < 1$ точка C расположена «ближе» к точке A, а при $|\lambda| > 1$ – к точке B.

Наглядное представление об изменении значения простого отношения $\lambda = V(AB;C)$ дает следующая функция. Выберем на координатной прямой точки $A(a)$ и $B(b)$, а точку $C(x)$ будем перемещать по прямой AB (горизонтальной оси), откладывая значения λ по вертикальной оси. Мы получим график функции

$$\lambda(x) = \frac{x-a}{b-x} = -1 + \frac{a-b}{x-b}.$$

Эта функция имеет область определения $D_\lambda = (-\infty, b) \bigcup (b, +\infty)$ и область изменения $E_\lambda = (-\infty, -1) \bigcup (-1, +\infty)$. Если точка B следует за A, т.е. $a < b$, то функция возрастает на каждом из интервалов, а если точка A следует за B, т.е. $a > b$, то она убывает на них.

Заметим, что если точка C совпадёт с несобственной точкой M_∞, то $V(AB; M_\infty) = -1$.

Выясним, как изменится значение λ, если мы, не перемещая сами точки, будем совершать всевозможные перестановки точек в тройках.

Напомним, что три точки A, B и C предполагаются различными, т.е. $\lambda(1+\lambda) \neq 0$ и $\lambda \neq \infty$.

Положим $\lambda = V(AB; C)$ и докажем следующие тождества:

$$V(BA;C) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(BC;A) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}, \quad V(CB;A) = -\frac{\lambda}{1+\lambda},$$
$$V(CA;B) = -\frac{1}{1+\lambda}, \quad V(AC;B) = -(1+\lambda).$$

Докажем, например, второе и четвертое тождества.

Пусть $V(BC; A) = \mu$, т.е. $\overline{BA} = \mu \overline{AC}$. Если $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$, то, с одной стороны, $\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CA} = -\overline{CB} - \lambda \overline{CB} = -(1+\lambda)\overline{CB}$, а, с другой стороны, $\overline{BA} = \mu \overline{AC} = \mu(\lambda \overline{CB})$. Таким образом,

имеем $\mu\lambda = -(1+\lambda)$, откуда $\mu = -\dfrac{1+\lambda}{\lambda}$.

Пусть теперь $V(CA, B) = \kappa$. Это означает, что $\overline{CB} = \kappa \overline{BA}$.

Так как $\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CA}$, то $\overline{CB} = \kappa(\overline{BC} - \lambda\overline{CB}) = -\kappa(1+\lambda)\overline{CB}$, то есть $\kappa(1+\lambda) = -1$. Отсюда заключаем, что $\kappa = -\dfrac{1}{1+\lambda}$. ▲

Упражнение 1. Доказать остальные тождества.

Таким образом, простое отношение трех различных точек (но фиксированных!) на прямой в зависимости от их порядка в тройке может принимать одно из значений

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad -(1+\lambda), \quad -\frac{1}{1+\lambda}, \quad -\frac{1+\lambda}{\lambda}, \quad -\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Эти шесть значений, вообще говоря, различны, но совпадения возможны. При некоторых значениях λ имеются по три пары совпадений.

А именно, при $\lambda = 1$ имеем $V(AB;C) = V(BA;C)$, а также $V(BC;A) = V(AC;B)$ и $V(CB;A) = V(CA;B)$.

При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ имеем $V(AB;C) = V(AC;B)$, а также $V(BA;C) = V(CA;B)$ и $V(BC;A) = V(CB;A)$.

При $\lambda = -2$ имеем $V(AB;C) = V(CB;A)$, а также $V(AB;C) = V(BA;C)$ и $V(CA;B) = V(AC;B)$.

Упражнение 2. Проверить эти утверждения.

С помощью понятия простого отношения $\lambda = V(AB;C)$ удается решить многие как аффинные, так и метрические задачи. Поясним это на примерах.

Пример 1. Известно, что в произвольном треугольнике ABC, где точки A, B и C заданы радиус-векторами $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ и $\overline{x_3}$, три медианы пересекаются в одной точке, и каждая из них делится этой точкой в отношении $\lambda = 2:1$, считая от вершины. Эта точка называется *центром* треугольника ABC

Действительно, рассмотрим точку M, которая задается радиус-вектором вектором $\overline{x_M} = \dfrac{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}}{3}$. Для нее и каждой из середин сторон имеем

$$\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}}{3}=\frac{\overline{x_1}+2\dfrac{\overline{x_2}+\overline{x_3}}{2}}{1+2}=\frac{\overline{x_2}+2\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_3}}{2}}{1+2}=\frac{\overline{x_3}+2\dfrac{\overline{x_2}+\overline{x_1}}{2}}{1+2}.$$

Рассмотрим общение этого факта на случай произвольной треугольной пирамиды $ABCD$.

Пример 2. Пусть точки A, B, C и D заданы радиус-векторами $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ и $\overline{x_4}$. Рассмотрим точку M, которая задается радиус-вектором вектором $\overline{x_M}=\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4}}{4}$. Она называется *центром* пирамиды $ABCD$. Наряду с ней рассмотрим центры всех четырех граней. Например, центр A' грани BCD, где $\overline{x_1'}=\dfrac{\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4}}{3}$. Покажем, что $\lambda=V(AA';M)=3:1$. Действительно, для них имеем

$$\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4}}{4}=\frac{\overline{x_1}+3\dfrac{\overline{x_2}+\overline{x_3}+\overline{x_4}}{3}}{1+3}.$$

Для центра M и центров остальных трех граней ACD, ABD и ABC доказательство аналогично. ▲ Итак, доказана

Теорема. Все отрезки, соединяющие вершины произвольной треугольной пирамиды с центрами противоположных граней, пересекаются в одной точке (**центре** пирамиды) и делятся этой точкой в отношении $\lambda=3:1$, считая от вершины.

Аналогичный результат имеет место в многомерном аффинном пространстве для случая n - симплекса [2].

Пример 3. Две стороны треугольника лежат на данных прямых $5x-2y-23=0$ и $5x+y-11=0$. Составить уравнение третьей стороны, если известен его центр $M(4,1)$.

Решение. Воспользуемся тем свойством треугольника, что отрезок, заключенный между двумя сторонами и параллельный третьей стороне, делится медианой, проведенной к этой стороне, на равные части. Если провести через центр $M(4,1)$ прямую $x=4+\alpha t$,

$y=1+\beta t$, то для прямой, параллельной искомой стороне имеем $t_1+t_2=0$, где t_1 и t_2 соответствуют точкам пересечения с прямыми $5x-2y-23=0$ и $5x+y-11=0$, то есть $t_1=\dfrac{5}{5\alpha-2\beta}$ и $t_2=\dfrac{-10}{5\alpha+\beta}$. Отсюда следует, что $\alpha:\beta=1:1$, а прямая, проходящая через центр M параллельно искомой стороне, задается уравнением $x-y-3=0$. Теперь выделим ту прямую из пучка $\lambda(5x-2y-23)+\mu(5x+y-11)=0$, которая будет параллельна найденной. Для нее $\dfrac{5\lambda+5\mu}{1}=\dfrac{-2\lambda+\mu}{-1}$, то есть $\lambda:\mu=2:-1$, и мы получили прямую $x-y-3=0$. Итак, имеем две прямые $x-y-7=0$ и $x-y-3=0$, параллельные искомой прямой $x-y+C=0$. Первая проходит через вершину, а вторая через центр M. Так как расстояние между этими прямыми в два раза больше, чем расстояние между второй и искомой прямой, то $7-3=-2(C+3)$, т.е. $c=-1$, Итак, третья сторона треугольника задается уравнением $x-y-1=0$.▲

Пример 4. В евклидовом пространстве E_3 дан треугольник ABC, где $A(2,7,-3), B(-5,5,-2)$ и $C(-6,3,-4)$. Найти углы треугольника, образованными биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине C.

Решение. Рассмотрим сторону BC, а также биссектрисы CP и CP' внутреннего и внешнего углов, соответственно. Введем векторы $\bar{a}=\overline{CA}(8,4,1)$ и $\bar{b}=\overline{CB}(1,2,2)$, длины которых суть $CA=9$ и $CB=3$. Как известно, по свойству биссектрис имеем $V(AB;P)=CA:CB=3:1$ и $V(AB;P')=-CA:CB=-3:1$.

Следовательно, $\overline{CP}=\dfrac{\bar{a}+3\bar{b}}{1+3}$ и $\overline{CP'}=\dfrac{\bar{a}-3\bar{b}}{1-3}$, т.е. $\overline{CP}(\dfrac{11}{4},\dfrac{10}{4},\dfrac{7}{4})$

и $\overline{CP}(-\frac{5}{2},\frac{2}{2},\frac{5}{2})$. Эти направляющие векторы биссектрис двух смежных улов перпендикулярны, действительно $(\overline{CP},\overline{CP'})=0$. Теперь найдем вектор $\overline{CP'}-\overline{CP}=\overline{PP'}(-\frac{21}{4},-\frac{6}{4},\frac{3}{4})$. Таким образом, мы получили прямоугольный треугольник $\triangle CPP'$ с катетами $CP=\frac{3\sqrt{30}}{4}$ и $CP=\frac{9\sqrt{6}}{4}$. Углы этого треугольника: $\angle PCP'=90^0$, $\angle CPP'=\arcsin\frac{2}{3}$ и $\angle CPP'=\arccos\frac{2}{3}$. ▲

Особый интерес представляет расположение четырех точек A, B, C и D на аффинной прямой, для которых

$$V(AB;C)=-V(AB;D).$$

Определение 2. Такую четверку точек на прямой называют *гармонической.*

Примером гармонической четверки являются концы любого отрезка, его середина и бесконечно удаленная точка на этой прямой.

Действительно, для середины C любого отрезка AB имеем $V(AB;C)=1$, а для бесконечно удаленной точки $D=M_\infty$ естественно считать, что $V(AB;D)=-1$.

В пособии [3] методами аналитической геометрии показано, что гармоническую четверку образуют точки A, B, C и D, которые получаются помощью полного четырехвершинника, приведенного на рисунке 1 .

Заметим, что гармоническая четверка точек A, B, C и D на аффинной прямой может быть построена с помощью более простого геометрического построения, описанного на стр. 16 и 17 (рис. 1 и рис. 2)

Отметим, что указанное построение выполняется с помощью одной линейки и без использования циркуля.

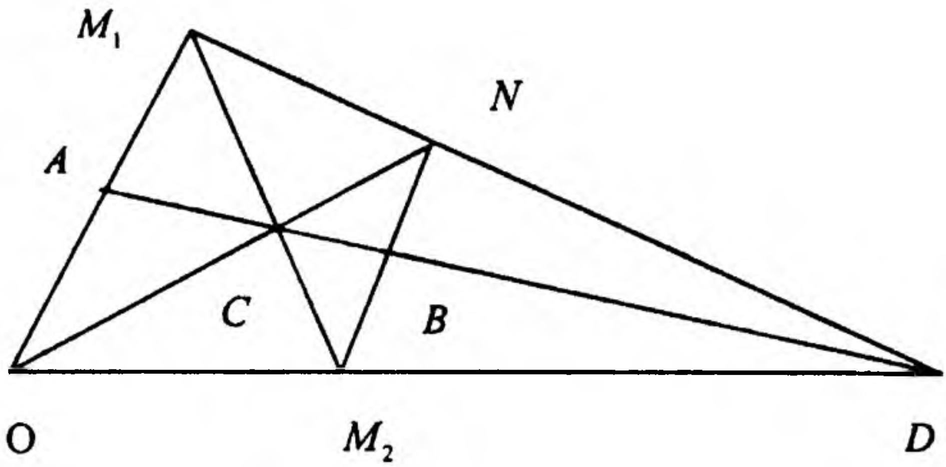

Рис. 1

Заметим, что гармоническая четверка точек A, B, C и D на аффинной прямой может быть построена с помощью более простого геометрического построения, описанного на стр. 20 и 21.

Отметим еще, что указанное построение выполняется с помощью одной линейки и без использования циркуля.

Пример 5. Даны три прямые $3x+2y+3=0\,(a)$, $x-2y-7=0\,(b)$ и $x-y-4=0\,(c)$. Убедиться, что они принадлежат одному пучку, и найти в пучке такую прямую d, что $V(AB;C)=-V(AB;D)$, где A, B, C и D - точки пересечения соответствующих прямых с осью Ox.

Решение. Рассмотрим пучок, определенный первыми прямыми $\alpha(3x+2y+3)+\beta(x-2y-7)=0$. Прямая c принадлежит этому пучку, если $\dfrac{3\alpha+\beta}{1}=\dfrac{2\alpha-2\beta}{-1}=\dfrac{3\alpha-7\beta}{-4}$. Эта система совместна и имеет решение $\alpha:\beta=1:5$. Значит, c есть прямая из пучка.

Теперь найдем точки A, B и C пересечения с осью Ox соответствующих прямых. Очевидно, что это точки $A(-1,0), B(7,0)$ и

$C(4,0)$. Так как $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$, $\lambda = \frac{4+1}{7-4} = \frac{5}{3}$. Найдем точку D пересечения искомой прямой d с осью Ox, для которой

$$V(a,b;d) = -\frac{5}{3}. \text{ Ясно, что } x_D = \frac{-1-\frac{5}{3}\cdot 7}{1-\frac{5}{3}} = 19, \text{ т.е. } D(19,0).$$

Осталось найти прямую d из пучка, проходящую через точку D. Для нее $\alpha(57+3)+\beta(19-7)=0$, или $\alpha:\beta = 1:-5$. Это означает, что прямая d задается уравнением $x-6y-19=0$. ▲

Мы еще вернемся к этой задаче и решим ее методами проективной геометрии.

Пример 6. Стороны AB и AC треугольника лежат на прямых $x-4y-17=0$ и $2x-y-12=0$. Составить уравнение третьей стороны BC, если известна ее средина $M(4,-1)$.

Решение. Рассмотрим параметрические уравнения $x = 4+\alpha t$, $y = -1+\beta t$ произвольной прямой, проходящей через точку M. Пусть точкам пересечения этой прямой с данными прямыми соответствуют значения t_1 и t_2 параметра t, а именно, $t_1 = \frac{9}{\alpha-4\beta}$ и

$t_2 = \frac{3}{2\alpha-\beta}$. Так как отрезок искомой прямой, заключенный между данными прямыми, должен делиться точкой M на равные части, то $t_1+t_2 = \frac{9}{\alpha-4\beta}+\frac{3}{2\alpha-\beta} = 0$, откуда $\alpha:\beta = 1:1$. Следовательно, каноническое уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1}$, или $x-y-5=0$. ▲

Упражнение 3. Для точек $A(-1), B(3)$ и $C(2)$ найти $V(AB;C)$, а также найти точку $D(x)$, для которой $V(AB;D) = -V(AB;C)$. {*отв.* $V(AB;C)=3; D(5)$ }

Упражнение 4. Для заданных трех точек $A(x_1)$, $B(x_2)$ и $C(x_3)$ найти четвертую гармоническую точку $D(x)$.

{*отв.* $x = \dfrac{x_3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{2x_3 - x_1 - x_2}$ }

Упражнение 5. Для треугольника $\triangle ABC$, где $A(5,4,-3)$, $B(9,-2,9)$ и $C(11,6,-6)$ найти стороны треугольника, который образован биссектрисами внутреннего и внешних углов треугольника при вершине A.

{*отв.* $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}, 2\sqrt{122}, \dfrac{4\sqrt{293}}{3}$ }

2. Двойное отношение четырех точек на проективной прямой

Рассмотрим расширенную аффинную прямую A_1^∞. В частности, при выборе аффинной системы координат Ox на расширенной аффинной прямой A_1^∞ для точек $M(x)$ имеем $x = \dfrac{x^1}{x^0}$. А прямая A_1^∞ становится проективной P_1, состоящей из точек $M = (x^0 : x^1)$.

Определение 3. *Двойным (сложным) отношением* четырех точек A, B, C и D на прямой A_1^∞ назовем число

$$\lambda = DV(AB;CD) = \frac{V(AB;C)}{V(AB:D)}.$$

Будем считать, что все четыре точки A, B, C и D различны. Это означает, что $\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ и $\lambda \neq \infty$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $C \equiv A$ или $D \equiv B$, если $\lambda = 1$, то $C \equiv D$ или $A \equiv B$, а если $\lambda = \infty$, то $C \equiv B$ или $D \equiv A$.

Сначала рассмотрим случай, когда все точки собственные. Пусть на прямой точки заданы своими аффинными координатами $A(x_1), B(x_2), C(x_3)$ и $D(x_4)$. Тогда $\overline{AC}(x_3 - x_1), \overline{CB}(x_2 - x_3)$ и

$\overline{AD}(x_4 - x_1), \overline{DB}(x_2 - x_4)$. Следовательно, имеем

$$DV(AB;CD) = \frac{V(AB;C)}{V(AB;D)} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}. \qquad (2.1)$$

Исследуем значение двойного отношения

$$\lambda = DV(AB;CD) = \frac{V(AB;C)}{V(AB:D)}$$

в зависимости от расположения точек A, B, C и D на расширенной аффинной прямой A_1^∞. Рассмотрим два случая. Пусть на A_1^∞ точка C в аффинном смысле лежит «между» точками A и B.

Например, рассмотрим следующие точки $A(-1)$, $C(2)$ и $B(3)$. Пусть точка $D(x)$ движется по расширенной аффинной прямой A_1^∞, где $x \in (-\infty; +\infty)$. Для указанных точек имеем

$V(AB;C) = \dfrac{2+1}{3-2} = 3$, а в силу (2.1) получим

$$\lambda(x) = DV(AB;CD) = 3\frac{3-x}{x+1} = 3(\frac{4}{x+1} - 1).$$

Отметим на нашей прямой наряду с выбранными точками еще две: несобственную точку $M^\infty(\infty)$, а также точку $C'(5)$, которая вместе с данными точками A, B, C образует гармоническую четверку, то есть $DV(AB;CD) = -1$. Действительно, для них имеем $\lambda(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} 3\dfrac{3-x}{x+1} = -3$ и $\lambda(5) = 3\dfrac{3-5}{5+1} = -1$, соответственно.

В пособии [3] показано, что если аффинной координаты x перейти к однородным координатам $x^0 : x^1$, которые являются частным случаем проективных, а затем совершить произвольное преобразование проективных координат, то данное двойное отношение является **инвариантом** проективной геометрии.

Итак, в проективных координатах мы имеем

$$DV(AB;CD)=\frac{\begin{vmatrix} x_1^0 & x_3^0 \\ x_1^1 & x_3^1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_4^0 & x_2^0 \\ x_4^1 & x_2^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3^0 & x_2^0 \\ x_3^1 & x_2^1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_1^0 & x_4^0 \\ x_1^1 & x_4^1 \end{vmatrix}}. \tag{2.2}$$

Это выражение часто записывают в условной форме

$$DV(AB;CD)=\frac{(1,3)\cdot(4,2)}{(3,2)\cdot(1,4)}.$$

Из определения простого отношения трех точек на прямой следует, что при $\lambda>0$ обе точки C и D лежат либо внутри отрезка AB, либо вне его, а при $\lambda<0$ одна из точек C и D лежит внутри отрезка AB, а другая – вне его. Во втором случае говорят, что *пара* C, D *разделяет пару* A, B, и наоборот, а в первом случае эти *пары не разделяют друг друга.*

Выясним, как изменится значение λ, если мы, не перемещая сами точки, будем совершать всевозможные перестановки в данной четверке. Напомним, что эти точки предполагаются различными, т.е. $\lambda(\lambda-1)\neq 0$ и $\lambda\neq\infty$.

Мы покажем, что при 24 возможных перестановках четырех точек A, B, C и D получается всего лишь шесть значений, именно

$$\lambda,\quad 1-\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad \frac{1}{\lambda-1},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1}. \tag{2.3}$$

Прежде всего, установим тождество, которому удовлетворяют определители второго порядка $\begin{vmatrix} x_K^0 & x_L^0 \\ x_K^1 & x_L^1 \end{vmatrix}$, записываемые в условной форме в виде $(K,L)=\begin{vmatrix} x_K^0 & x_L^0 \\ x_K^1 & x_L^1 \end{vmatrix}$, где K и L суть различные порядковые номера в упорядоченной четверке точек A,B,C и D.

Искомое тождество в условных обозначениях имеет вид

$$(1,2)(3,4)+(1,3)(4,2)+(1,4)(3,2)=0. \qquad (2.4)$$

Оно является простым следствием того, что следующий определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 \end{vmatrix},$$

разложенный по первым двум строкам, тождественно равен нулю.

Положим $\lambda = DV(AB;CD)$ и докажем основные равенства.

$$DV(BA;CD)=\frac{1}{\lambda}, DV(CB;AD)=\frac{\lambda}{\lambda-1},$$
$$DV(DB;CA)=1-\lambda,\ DV(AC;BD)=1-\lambda, \qquad (2.5)$$
$$DV(AD;CB)=\frac{\lambda}{\lambda-1}\ DV(AB;DC)=\frac{1}{\lambda}.$$

Приведем доказательства, например, первых трех равенств. Они основаны на использовании формулы (2.1) и тождества (2.4).

В первом случае имеем

$$DV(BA;CD)=\frac{(2,3)\cdot(4,1)}{(3,1)\cdot(2,4)}=1:\frac{(1,3)\cdot(4,2)}{(3,2)\cdot(1,4)}=\frac{1}{\lambda}.$$

Во втором и третьем случаях совершим преобразования

$$DV(CB;AD)=\frac{(3,1)\cdot(4,2)}{(1,2)\cdot(3,4)}=\frac{(1,3)\cdot(4,2)}{(1,2)\cdot(3,4)}=$$

$$=\frac{(1,3)\cdot(2,4)}{(1,3)\cdot(2,4)-(2,3)\cdot(1,4)}=\frac{1}{1-\frac{(2,3)\cdot(1,4)}{(1,3)\cdot(2,4)}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

$$DV(DB;CA)=\frac{(4,3)\cdot(1,2)}{(3,2)\cdot(4,1)}=\frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(3,2)\cdot(1,4)}=$$

$$=\frac{(1,3)\cdot(2,4)-(2,3)\cdot(1,4)}{(3,2)(1,4)}=1+\frac{(1,3)\cdot(2,4)}{(3,2)\cdot(1,4)}=1-\lambda\,.\ \blacktriangle$$

Упражнение 6. Доказать остальные основные равенства.

Чтобы получить все требуемые равенства, можно также воспользоваться вычислительной формулой (2.1), а так же тождеством (2.4).

Но можно поступить иначе, а именно, использовать основные равенства (2.4). Для этого достаточно совершать последовательные перестановки различных пар в данных четверках точек.

Найдем, например, значение $DV(BC;AD)$. Второе равенство в (2.5) означает, что при перестановке первых двух точек в четверке B, C, A и D исходное значение $DV(BC;AD)$ заменяется на обратное, то есть $DV(BC;AD)=\dfrac{1}{DV(CB;AD)}$. Теперь воспользуемся вторым равенством в (2.4), переставим первую и третью точки в четверке C, B, A и D. В результате получим

$$DV(CB;AD)=1:\left(1-\frac{1}{DV(AB;CD)}\right)=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Таким образом, имеем

$$DV(BC;AD)=\frac{1}{DV(CB;AD)}=1:\frac{\lambda}{\lambda-1}=\frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Пользуясь указанными приемами, найдем, например, значения

$$DV(DC;BA) = 1 - DV(AC;BD) = 1 - (1-\lambda) = \lambda \text{ и}$$

$$DV(BD;CA) = \frac{1}{DV(DB;CA)} = \frac{1}{1 - DV(AB;CD)} = \frac{1}{1-\lambda}. \blacktriangle$$

Продолжив этот процесс, мы получим все 24 тождества

$$DV(AB;CD) = DV(BA;DC) = DV(CD;AB) = DV(DC;BA) = \lambda,$$

$$DV(BA;CD) = DV(AB;DC) = DV(DC;BA) = DV(CD;BA) = \frac{1}{\lambda},$$

$$DV(AC;BD) = DV(CA;DB) = DV(BD;AC) = DV(DB;CA) = 1-\lambda,$$

$$DV(AC;DB) = DV(CA;BD) = DV(DB;AC) = DV(BD;CA) = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$DV(AD;BC) = DV(DA;CB) = DV(BC;AD) = DV(CB;DA) = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

$$DV(AD;CB) = DV(DA;BC) = DV(CB;AD) = DV(BC;DA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Упражнение 7. Доказать эти тождества.

Итак, двойное отношение четверки различных точек на проективной прямой P_1 в зависимости от их порядка может принимать одно шести из значений. Напомним, что четыре точки будут различны, только если $\lambda(\lambda-1) \neq 0$ и $\lambda \neq \infty$.

Эти шесть значений (2.1), вообще говоря, не совпадают, но и совпадения возможны. При некоторых значениях λ имеются по две пары совпадений.

А именно, при $\lambda = -1$ имеем $1-\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ и $\frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$,

при $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$ и $\frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, а при $\lambda = 2$ имеем $\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ и $1-\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$.

Особый интерес представляют гармонические четверки точек A, B, C и D, для которых

$$DV(AB;CD) = -1.$$

Такая гармоническая четверка точек A, B, C и D на прямой может быть построена на аффинной плоскости с использованием, например, полного четырехвершинника. (см. рис. 1).

На практике используют более простую конструкцию.

Сначала рассмотрим случай, когда точка C лежит на прямой AB между точками A и B (рис.2)

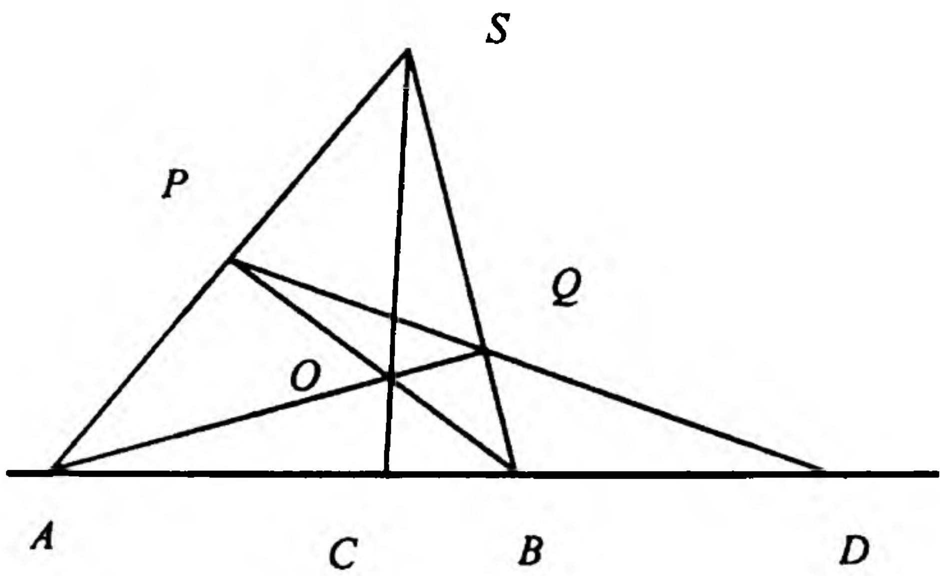

Рис. 2.

Выбираем произвольную точку S, не лежащую на прямой AB, затем на прямой SC выбираем некоторую точку O. Потом проводим прямые AO и BO, которые в пересечении с прямыми SB и SA дают соответственно точки P и Q. Остается найти точку пересечения прямой PQ с прямой AB. Это и будет искомая точка D, расположенная на прямой вне отрезка AB.

Рассмотрим также случай, когда точка C лежит на прямой вне отрезка AB. Построим для данной тройки четвертую гармоническую точку D (рис. 3). Построения в этом случае совершенно аналогичны. Только в этом случае искомая точка D лежит вне отрезка AB.

Так как $DV(AB;CD) = -1$, то в силу тождеств имеем $DV(CD;AB) = -1$. Поэтому говорят, что пары (A,B) и (C,D) *гармонически разделяют* друг друга.

В заключение покажем, как для упорядоченной тройки точек A, B и C найти четвертую гармоническую точку D.

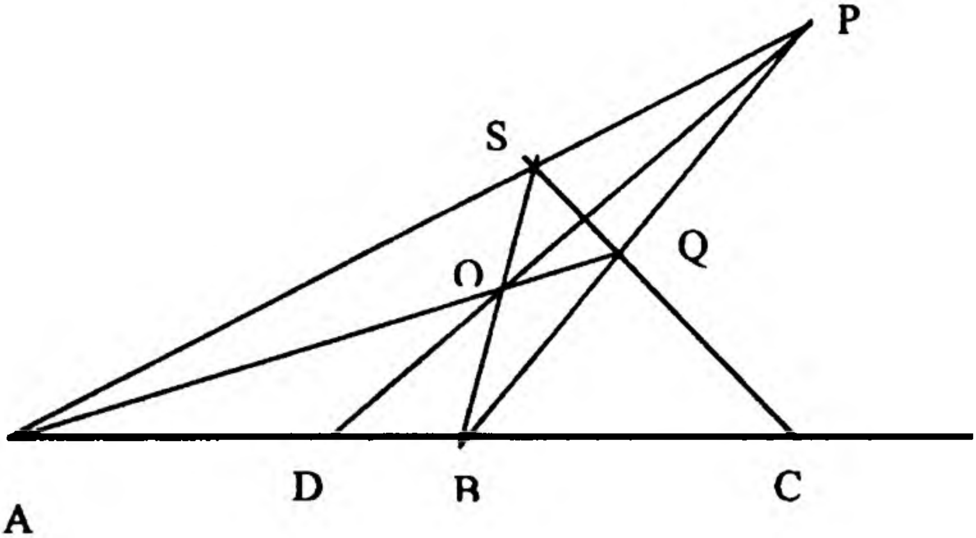

Рис. 3

Так как $DV(AB;CD) = -1$, то в силу тождеств имеем $DV(CD;AB) = -1$. Поэтому говорят, что пары (A,B) и (C,D) *гармонически разделяют* друг друга.

Пусть теперь на проективной прямой P_1 выбран проективный репер $\{A_0, A_1, E\}$, а данные точки заданы своими проективными координатами: $A = (x_1^0 : x_1^1)$, $B = (x_1^0 : x_1^1)$ и $C = (x_3^0 : x_3^1)$.

Найдем координаты четвертой гармонической точки $D = (x^0 : x^1)$, то есть такой что $DV(AB;CD) = -1$. В силу (2.1) имеем

$$DV(AB;CD)=\frac{\begin{vmatrix} x_1^0 & x_3^0 \\ x_1^1 & x_3^1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x^0 & x_2^0 \\ x^1 & x_2^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3^0 & x_2^0 \\ x_3^1 & x_2^1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_1^0 & x^0 \\ x_1^1 & x^1 \end{vmatrix}}=-1,$$

или

$$(x_1^0x_3^1-x_3^0x_1^1)(x_2^1x^0-x_2^0x^1)+(x_3^0x_2^1-x_2^0x_3^1)(x_1^0x^0-x_1^1x^1)=0.$$

$$(x_1^0x_3^1-x_3^0x_1^1)(x_2^1x^0-x_2^0x^1)+(x_3^0x_2^1-x_2^0x_3^1)(x_1^0x^0-x_1^1x^1)=0$$

Таким образом, получаем

$$x^0:x^1=\frac{2x_1^0x_2^0x_3^1-(x_1^0x_2^1+x_1^1x_2^0)x_3^0}{(x_1^0x_2^1+x_1^1x_2^0)x_3^1-2x_1^1x_2^1x_3^0}. \qquad (2.6)$$

Вернемся к примеру 5. В нем идет речь о пучке прямых на аффинной плоскости, то есть о проективной прямой.

Действительно, если четыре прямые a, b, c и d одного пучка образуют гармоническую четверку, т.е. $DV(AB;CD)=-1$, то и точки пересечения A, B, C и D этих прямых с любой прямая l таковы, что $V(AB;C)=-V(AB;D)$.

Пример 7. Даны три прямые, принадлежащие одному пучку $3x+2y+3=0\ (a)$, $x-2y-7=0\ (b)$ и $x-y-4=0\ (c)$. В этом пучке найти четвертую гармоническую, т.е. такую прямую d, что $DV(a,b;c,d)=-1$.

Решение. Способ 1. Пополним нашу плоскость бесконечно удаленными точками и перейдем к однородным координатам $x^0:x^1:x^2$. Рассмотрим бесконечно удаленную прямую, которая задается уравнением $x^0=0$. Бесконечно удаленными на данных прямых будут следующие точки $A_\infty=(0:2:-3)$, $B_\infty=(0:2:1)$ и $C_\infty=(0:1:1)$. Воспользуемся аналогом формулы (2.6) для проективных координат $x^1:x^2$ и найдем

$$x^1 : x^2 = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(2\cdot 1 - 3\cdot 3)}{(2\cdot 1 + 3\cdot 2)\cdot 1 - 2\cdot(-3)\cdot 1\cdot 1} = \frac{8-(-4)}{1\cdot 5+6} = 6:1,$$

Так как $D_\infty = (0:6:1)$ и она должна удовлетворять уравнению прямой в однородных координатах

$$\alpha(3x^0 + 3x^1 + 2x^2) + \beta(-7x^0 + x^1 + 2x^2) = 0,$$

то $6(3\alpha + \beta) + (2\alpha - 2\beta) = 20\alpha + 4\beta = 0$, или $\alpha : \beta = 1 - 5$, и мы опять получаем искомую прямую $x - 6y - 19 = 0\ (d)$.

Способ 2. Совершим **проективизацию** данного пучка, поставив в соответствие каждой прямой l пропорциональную пару $\alpha : \beta$, то есть точку $L = (\alpha : \beta)$ проективной прямой. Тогда прямым a, b, c и d, соответствуют точки $L_a = (1:0)$, $L_b = (0:1)$, $L_c = (1:5)$ и $L_d = (\alpha : \beta)$, где в силу формулы (2.6) имеем

$$\alpha : \beta = \frac{2\cdot 0\cdot 1\cdot 5 - 1\cdot(1\cdot 1 + 0\cdot 0)}{(1\cdot 1 + 0\cdot 0)\cdot 5 - 2\cdot 0\cdot 1\cdot 1} = \frac{0-1}{1\cdot 5} = 1:-5,$$

что и дает уравнение искомой прямой $x - 6y - 19 = 0\ (d)$. ▲

Обратимся еще раз к следующему примеру.

Пример 6. Стороны AB и AC треугольника лежат на прямых $x - 4y - 17 = 0$ и $2x - y - 12 = 0$. Составить уравнение третьей стороны BC, если известна ее средина $M(4,-1)$.

Решение. Так точка M делит отрезок BC в отношении $V(BC;M) = 1$, то четвертой гармонической для точек B, C и M будет бесконечно удаленная точка M_∞ на прямой BC. Это значит, что в пучке $\alpha(x - 4y - 17) + \beta(2x - y - 12) = 0$ надо сначала найти прямую AM, а затем четвертую гармоническую к прямым AB, AC и AM. Это будет прямая, параллельная прямой BC. Для прямой AM имеем $9\alpha + 3\beta = 0$. Итак, проективные координаты $\alpha : \beta$ прямых AB, AC и AM соответственно таковы $1:0$, $0:1$ и $1:-3$. Тогда в силу формулы (2.6) для искомой прямой получим $\alpha : \beta = 1:3$. Это означает, что прямая пучка, параллельная стороне

BC, задается уравнением $7x-7y-53=0$, а искомая прямая, параллельная найденной прямой, задается уравнением $x-y-5=0$. ▲

Пример 8. Боковые стороны AB и CD трапеции лежат на прямых $x+y+1=0$ и $5x-y-13=0$, соответственно, а ее диагонали AC и BD пересекаются в точке $Q(2,1)$. Найти прямые, на которых лежат основания AD и BC, если известно, что на одном из них лежит точка $M_0(3,5)$.

Решение. С аффинной точки зрения, трапеция характеризуется тем, что середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. При этом указанные точки образуют гармоническую четверку.

Мы начнем с того, что отрезок, который заключен между боковыми сторонами, параллелен основаниям и проходит через точку $Q(2,1)$, делится этой точкой на равные части. Если через Q провести прямую $x=2+\alpha t$, $y=1+\beta t$, то для прямой, параллельной основаниям имеем $t_1+t_2=0$, где значения t_1 и t_2 соответствуют точкам пересечения с боковыми сторонами $x+y+1=0$ и $5x-y-13=0$.

Тогда получим $t_1=\dfrac{-4}{\alpha+\beta}$ и $t_2=\dfrac{4}{5\alpha-\beta}$. Отсюда следует, что $\alpha:\beta=1:2$, а прямая, проходящая через точку Q параллельно основаниям, задается уравнением $2x-y-3=0$. Теперь найдем параллельную ей прямую, т. е. то основание, на котором лежит точка $M_0(3,5)$. Это будет прямая $2x-y-1=0$. Рассмотрим также ту прямую из пучка $\alpha(x+y+1)+\beta(5x-y-13)=0$, определенного боковыми сторонами AD и CD, которая параллельна основаниям. Для нее $\dfrac{\alpha+5\beta}{2}=\dfrac{\alpha-\beta}{-1}$, т.е. $\alpha:\beta=1:-1$. Следовательно, это будет прямая $2x-y-7=0$. Найдем прямую, на которой лежит второе основание. Так как в несобственном пучке три прямые $2x-y-7=0$, $2x-y-3=0$ и $2x-y-1=0$ вместе с искомой прямой $2x-y+c=0$ образуют гармоническую четверку, то $c=-4$. Итак, основании трапеции лежат на прямых $2x-y-1=0$ и $2x-y-4=0$. ▲

Отметим, что в этом примере мы сознательно не искали координаты вершин трапеции и уравнения ее диагоналей, а имели дело лишь с уравнениями сторон. Аффинно-проективные свойства трапеции позволили сделать это.

Упражнение 8. Для тройки точек $A=(1:2)$, $B=(3:4)$ и $C=(5:6)$ найти четвертую гармоническую точку $D(x^0:x^1)$.

{*отв.* $D=(7:10)$ }

Упражнение 9. Боковые стороны трапеции лежат на координатных прямых, а основания – на прямых $2x-y+4=0$ и $2x-y+20=0$. Найти точку C пресечения ее диагоналей.

{*отв.* $C(-\frac{5}{3}:\frac{10}{3})$ }

Литература

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. М. : Наука, 1968.

2. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М. : Наука, 1966.

3. *Мизин А.Г.* Проективно-дифференциальная геометрия семейств прямых и многомерных плоскостей. Томск : Изд-во ТГУ, 2007.

Учебное издание

Мизин Анатолий Георгиевич

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК НА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

Учебное пособие

Оригинал-макет автора

Подписано к печати 10.11.2011 г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Ризография.
Печ. л. 1,8. Усл. печ. л. 1,7. Тираж 50 экз. Заказ №100

Томский государственный университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Участок оперативной ризографии и офсетной печати
Редакционно-издательского отдела ТГУ
634050, г. Томск, Московский тр., 8. ауд. 011
Тел. 8+3822+52-98-49