МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Экономический факультет
Кафедра математических методов
и информационных технологий в экономике

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие

Томск
2011

ОДОБРЕНО кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике

Зав. кафедрой, профессор В.В. Домбровский

РАССМОТРЕНО и УТВЕРЖДЕНО методической комиссией экономического факультета

Протокол № 4 от «16» февраля 2011 г.

Председатель комиссии, профессор В.С. Цитленок

В пособии приведены основные сведения из теории несобственных интегралов и описаны методы исследования их сходимости на основе применения различных признаков. Материал пособия снабжен достаточно большим количеством примеров, а также задач для самостоятельной работы, что способствует выработке практических навыков исследования сходимости и вычисления несобственных интегралов.

Для студентов экономического факультета дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛЬ – профессор В.А. Удод

1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При введении понятия определенного интеграла предполагалось, что выполняются условия:

1) пределы интегрирования a и b являются конечными;

2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$.

В этом случае определенный интеграл называют ***собственным***. Слово «***собственный***» обычно опускается. Если нарушается хотя бы одно из этих двух условий, то определенный интеграл называется ***несобственным.***

1.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Определение. ***Несобственным интегралом*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ называется предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. При этом пишут

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся*** (к данному пределу), в противном случае – ***расходящимся.***

При работе с несобственными интегралами обычно выделяют следующие две задачи:

а) исследование вопроса о сходимости данного несобственного интеграла;

б) вычисление значения интеграла в случае его сходимости.

В некоторых случаях решения этих двух задач удается объединить.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. По определению

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1,$$

т.е. искомый несобственный интеграл сходится к 1.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение. По определению

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|x|\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|b| - \ln|1|\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \ln b = = +\infty .$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$.

Решение. По определению

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\sin x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\sin b - \sin 0\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \sin b ,$$

но предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$ не существует. Следовательно, интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$ расходится.

Пример 4. Исследовать, при каких значениях α сходится несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. 1) Если $\alpha \neq 1$, то по определению

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} \ \textit{при} \ \alpha > 1; \\ +\infty \ \textit{при} \ \alpha < 1 . \end{cases}$$

2) Если $\alpha = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty \text{ (см. пример 2).}$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится (к числу $\frac{1}{\alpha - 1}$) при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Геометрически несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от неотрицательной функции *f(x)* выражает площадь *S* бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху – графиком функции *y* = *f(x)*, слева – прямой *x* = *a,* снизу – осью *Ox* (рис. 1):

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

(в случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, а в случае расходящегося – бесконечной).

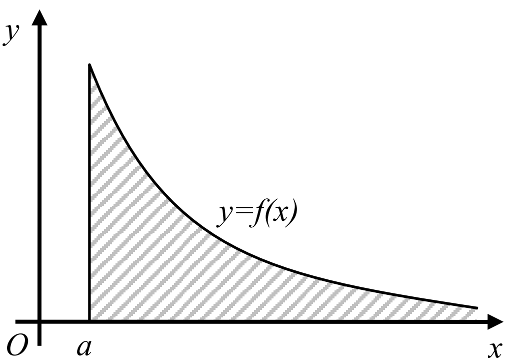

Рис. 1. К геометрическому смыслу несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования

Замечание. Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных промежутков:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx\,;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx\,,$$

где c – любое число. Последнее равенство следует понимать так: если каждый из двух интегралов, стоящих справа, сходится, то сходится, по определению, и интеграл, стоящий слева.

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(arctg\, x\Big|_{a}^{0} \right) = \lim_{a\to-\infty} (arctg0 - arctga) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (0 - arctga) = \lim_{a\to-\infty} (-\, arctga) = -\lim_{a\to-\infty} arctga =$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

т.е. искомый несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится к $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 6. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Полагая $c = 0$, по определению имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Теперь, также по определению, мы должны исследовать сходимость каждого из двух несобственных интегралов, стоящих справа.

Первый интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится к числу $\dfrac{\pi}{2}$ (см. пример 5). Исследуем сходимость второго интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\,x\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(arctgb-arctg0\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(arctgb-0\right)=\lim_{b\to+\infty}arctgb=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, оба несобственных интеграла $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ и $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ сходятся. Следовательно, и искомый несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ также будет сходящимся и при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Пример 7. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$.

Решение. Полагая $c = 0$, по определению имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx=\int_{-\infty}^{0}e^x dx+\int_{0}^{+\infty}e^x dx.$$

Исследуем сходимость каждого из двух несобственных интегралов, стоящих справа:

$$\int_{-\infty}^{0}e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^0\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(e^0-e^a\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(1-e^a\right)=\left|1-e^{-\infty}=1-0\right|=1,$$

т.е. первый из интегралов сходится к 1;

$$\int_{0}^{+\infty}e^x dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}e^x dx=\lim_{b\to+\infty}\left(e^x\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(e^b-e^0\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(e^b-1\right)=\left|e^{+\infty}-1=+\infty-1\right|=+\infty,$$

т.е. второй интеграл $\int_{0}^{+\infty}e^x dx$ расходится. Следовательно, расходится и исходный несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$.

Задачи

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$.

2. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

7. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

8. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4}$.

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.

12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$.

13. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin xdx$.

14. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-kx}dx \ (k>0)$.

15. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin^2 xdx$.

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$.

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgxdx}{x^2+1}$.

18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctgxdx}{x^2}$.

19. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln xdx}{x}$.

20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln xdx}{x^2}$.

21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

22. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение. Пусть функция *f(x)* непрерывна, но *не ограничена* на полуинтервале [*a*, *b*). Тогда ***несобственным интегралом*** от функции *f(x)* на отрезке [*a*, *b*] называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. При этом пишут

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся*** (к данному пределу), в противном случае – ***расходящимся.***

Определение. Назовем точку x_0 ***особой*** точкой для функции *f(x)*, если данная функция *не ограничена* на каждом интервале ($x_0 - \varepsilon$, x_0) $\subset D(f)$ слева от точки x_0, либо на каждом интервале (x_0, $x_0 +$ $+\varepsilon$) $\subset D(f)$ справа от точки x_0.

Замечание. Если функция *f(x)* имеет бесконечный разрыв в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ либо } \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \text{, либо } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty ,$$

то точка x_0 будет являться особой точкой для функции *f(x)*.

Таким образом, для вычисления несобственных интегралов данного типа целесообразно проводить предварительное исследование подынтегральной функции на непрерывность с целью выявления *особых* точек.

Пример 8. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Исследуем сначала подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на непрерывность на отрезке интегрирования [0, 1]. Данная функция является элементарной, а значит, она будет непрерывной на множестве $D(f) = (-1, 1)$. Следовательно, она будет непрерывной и на полуинтервале [0, 1). Отсюда вытекает, что единственной *особой* точкой из отрезка интегрирования [0, 1] может быть только точка

$x = 1$. Чтобы выяснить это найдем предел подынтегральной функции в данной точке:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{1}{\sqrt{1-(1-0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0+}} = \frac{1}{0+}\right| = +\infty .$$

Так как предел бесконечный, то точка $x = 1$ действительно является *особой* точкой. Поэтому, по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\arcsin(1-\varepsilon) - 0) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

т.е. искомый несобственный интеграл сходится к $\frac{\pi}{2}$.

Пример 9. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ непрерывна на полуинтервале $[0, 1)$ и в точке $x = 1$ имеет бесконечный разрыв. Поэтому, по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\ln|1-x|\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\ln|1-1+\varepsilon| + \ln|1-0|) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\ln\varepsilon) =$$

$$= \left|-\ln(0+) = -(-\infty)\right| = +\infty .$$

Следовательно, искомый интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ расходится.

Геометрически несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции *f(x)* выражает площадь S бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху – графиком функции $y = f(x)$, слева – прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, снизу – осью Ox (рис. 2):

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

(в случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, а в случае расходящегося – бесконечной).

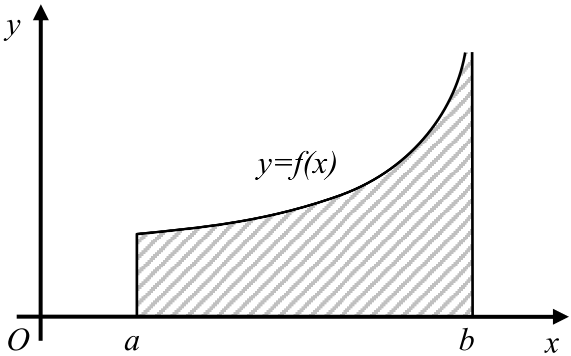

Рис. 2. К геометрическому смыслу несобственного интеграла от неограниченной функции, где $x = b$ – особая точка.

Замечание. Если $x = a$ – особая точка для функции $f(x)$, то, по определению, полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,.$$

Пример 10. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$ и в точке $x = 0$ имеет бесконечный разрыв. Следовательно, $x = 0$ – особая точка. Поэтому, по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2,$$

т.е. искомый несобственный интеграл сходится к 2.

Пример 11. Исследовать, при каких положительных значениях α сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Точка $x = 0$ – особая. Для удобства исследования сходимости данного интеграла рассмотрим отдельные случаи.

1) Если $0 < \alpha < 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{-\alpha+1}-\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \left|\frac{1-(0+)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1-0}{1-\alpha}\right| = \frac{1}{1-\alpha},$$

т.е. интеграл сходится.

2) Если $\alpha > 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{-\alpha+1}-\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \left|\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{(\alpha-1)(0+)^{\alpha-1}} = \frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{(0+)}\right| = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

3) Если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln|x|\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln|1|-\ln|\varepsilon|) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\ln\varepsilon) = \left|-\ln(0+) = -(-\infty)\right| = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

Таким образом, несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится (к числу $\frac{1}{1-\alpha}$) при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Пример 12. Исследовать, при каких значениях p сходится интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$.

Решение. 1) Если $p \le 0$, то подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ будет многочленом $(x-a)^{-p}$ с неотрицательной степенью ($-p \ge 0$), а значит она будет непрерывной всюду на отрезке интегрирования [a, b] и, поэтому, ограниченной на данном отрезке. Следовательно, в рассматриваемом случае интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ будет собственным, а стало быть – сходящимся.

2) Если $0 < p < 1$, то подынтегральная функция будет непрерывной на полуинтервале (a, b] и в точке $x = a$ будет иметь бесконечный разрыв ($x = a$ – особая точка). Поэтому, по определению

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{(x-a)^p} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1} \right)\Bigg|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) =$$

$$= \left| \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(0+)^{1-p}}{1-p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - 0 \right| = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p},$$

т.е. интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ сходится.

3) Если $p > 1$, то, повторяя рассуждения как в предыдущем случае, будем иметь

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{(x-a)^p} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1} \right)\Bigg|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) =$$

$$=\left|\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}-\frac{(0+)^{1-p}}{1-p}=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(0+)^{p-1}}=\right.$$

$$=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(0+)}=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{p-1}\cdot(+\infty)=$$

$$\left.=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}+\infty\right|=+\infty,$$

т.е. интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ расходится.

4) Если $p = 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}=\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^{b}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln|b-a|-\ln|\varepsilon|)=$$

$$=\left|\ln(b-a)-\ln(0+)=\ln(b-a)-(-\infty)\right|=+\infty,$$

т.е. интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ расходится.

Таким образом, интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

сходится (и имеет значение $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$) при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Пример 13. Исследовать, при каких значениях p сходится интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$.

Решение. Аналогично примеру 12 нетрудно установить, что интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

сходится (и имеет значение $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$) при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Замечание. Если внутренняя точка отрезка $[a, b]$ – точка $x = c$ является особой для функции $f(x)$, то, по определению, полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

При этом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ считается *сходящимся,* если сходятся оба несобственных интеграла в правой части. В противном случае – *расходящимся.*

Пример 14. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна всюду на отрезке интегрирования $[-1, 1]$ за исключением точки $x = 0$, в которой она имеет бесконечный разрыв. Следовательно, $x = 0$ – особая точка. Поэтому, по определению

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} .$$

Теперь, также по определению, мы должны исследовать сходимость каждого из двух несобственных интегралов, стоящих справа.

Исследуем сходимость первого интеграла:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln|-\varepsilon| - \ln|-1|) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\varepsilon = -\infty ,$$

т.е. интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ расходится.

В данном случае можно не исследовать сходимость второго интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ (хотя он также будет расходящимся (см. пример 11)), т.к. первый интеграл $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ уже оказался расходящимся, а значит, по определению, будет расходящимся и исходный несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$.

Пример 15. Вычислить $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ непрерывна всюду на отрезке интегрирования $[-1, 1]$ за исключением точки $x = 0$, в которой она имеет бесконечный разрыв ($x = 0$ – особая точка). Поэтому, по определению

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^{2/3}} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} .$$

Исследуем сходимость первого несобственного интеграла, стоящего справа:

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\left. \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right|_{-1}^{-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(3\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} \right) =$$

$$=3 \lim_{\varepsilon\to 0+} (\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}) = 3 \lim_{\varepsilon\to 0+} (1 - \sqrt[3]{\varepsilon}) = 3.$$

Второй несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ является частным случаем интеграла, рассмотренного в примере 11, откуда следует, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = 3.$$

Таким образом, искомый несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2/3}}$ сходится к 3+3 = 6.

Пример 16. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{e^x-1}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ непрерывна всюду на отрезке интегрирования [–1, 1] за исключением точки $x = 0$, в которой она имеет бесконечный разрыв ($x = 0$ – особая точка). Поэтом, по определению

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{e^x-1}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^x dx}{e^x-1}+\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x dx}{e^x-1}.$$

Исследуем сходимость первого несобственного интеграла, стоящего справа:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^x dx}{e^x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{e^x dx}{e^x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{d(e^x)}{e^x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{d(e^x-1)}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln\left|e^x-1\right|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln\left|e^{-\varepsilon}-1\right|-\ln\left|e^{-1}-1\right|)=$$

$$=\left|\ln\left|e^{-(0+)}-1\right|-\ln\left|e^{-1}-1\right|=\ln\left|e^0-1\right|-\ln\left|\frac{1}{e}-1\right|=\ln|1-1|-\right.$$

$$\left.-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)=\ln 0-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)=-\infty-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right|=-\infty,$$

т.е. интеграл расходится, а значит, расходится и исходный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{e^x-1}$.

Замечание. Если a и b особые точки для функции $f(x)$, то, по определению, полагают

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx,$$

где c – любая точка из интервала (a, b).

При этом интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ считается *сходящимся,* если сходятся оба несобственных интеграла в правой части. В противном случае – *расходящимся.*

Пример 17. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. На отрезке интегрирования [–1, 1] подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет две особые точки: $x = -1$ и $x = 1$. Поэтому, полагая $c = 0$, по определению, имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Второй интеграл в правой части равенства сходится к числу $\frac{\pi}{2}$ (см. пример 8). Нетрудно убедиться (проводя аналогичные выкладки как в примере 8), что и первый интеграл справа также сходится к числу $\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Замечание. Если функция *f(x)* на промежутке $[a, +\infty)$ имеет конечное число особых точек, то промежуток $[a, +\infty)$ разбивают на соответствующие частичные промежутки и на каждом из них вычисляют несобственные интегралы. Если они сходятся, то несобственный интеграл от функции *f(x)* на промежутке $[a, +\infty)$ определяется как сумма интегралов на этих частичных промежутках.

Пример 18. Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. На промежутке интегрирования $[0, +\infty)$ подынтегральная функция $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ имеет особую точку $x = 0$. Поэтому, разобьем промежуток $[0, +\infty)$, например, на частичные промежутки $[0, 1]$, $[1, +\infty)$ и исследуем сходимость интегралов от функции *f(x)* на каждом из них: $\int\limits_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \Big|$ для нахождения первообразной применим метод замены переменной, взяв за новую переменную

$$\sqrt{x} \quad \Big| = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-2e^{-\sqrt{x}} \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-2(e^{-1} - e^{-\sqrt{\varepsilon}})) = 2(1 - e^{-1});$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to +\infty} \int\limits_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to +\infty} \left(-2e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to +\infty} (-2(e^{-\sqrt{b}} - e^{-1})) = 2 \lim_{b\to +\infty} (e^{-1} - e^{-\sqrt{b}}) =$$

$$= \Big| \; 2(e^{-1} - e^{-\sqrt{+\infty}}) = 2(e^{-1} - e^{-\infty}) = 2(e^{-1} - 0) \; \Big| = 2e^{-1}.$$

Таким образом, оба несобственных интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ сходятся. Следовательно, по определению,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2(1 - e^{-1}) + 2e^{-1} = 2,$$

т.е. исходный несобственный интеграл сходится (к числу 2).

Задачи

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

23. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

24. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 1}$.

25. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$.

26. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

27. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$.

28. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

29. $\int\limits_0^1 \ln x dx$.

30. $\int\limits_0^1 \ln^2 x dx$.

31. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x}}$.

32. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

33. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

34. $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4 - x)^2}}$.

35. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

36. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

37. $\int\limits_0^{\pi/2} ctgx dx$.

38. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \sin x}$.

39. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

40. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$.

41. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

42. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

43. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$.

44. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$.

45. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$.

46. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x}}$.

1.3. Главные значения несобственных интегралов

Допустим, что в промежутке [a, b] задана функция $f(x)$, которая имеет одну лишь особую точку $x = c$ внутри этого промежутка. Если при этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, но существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right),$$

то его называют ***главным значением несобственного интеграла*** $\int_a^b f(x)dx$ ***в смысле Коши*** и обозначают символом V. p. $\int_a^b f(x)dx$:

$$\text{V. p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

(V. p. – начальные буквы от слов «Valeur principale», означающих по-французски «главное значение»). В этом случае говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *существует в смысле главного значения*.

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения; обратное же, вообще говоря, неверно.

Пример 19. Главное значение несобственного интеграла $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ ($a < c < b$) равно

$$\text{V. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-c}\right) = \ln\left(\frac{b-c}{c-a}\right);$$

тогда как несобственного интеграла $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ ($a < c < b$) не существует.

Определение. Если несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходятся, а предел $\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$ существует, то он называется ***глав-***

ным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается символом V. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx\,.$$

Пример 20. Если функция *f(x) нечетная*, то ее интеграл в симметричном относительно 0 промежутке [–*b*, *b*] будет равен 0, так что и

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

хотя несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ может и вовсе не существовать (как, скажем, для функции $\sin x$).

Пример 21. Так как функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ нечетная, то $\int\limits_{-b}^{b} \dfrac{x}{1+x^2}dx =$ = 0; отсюда получаем

$$\int\limits_{-b}^{b} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Таким образом, главное значение несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1+x}{1+x^2}dx$ равно

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-b}^{b} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

(см. пример 6). Сам же несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1+x}{1+x^2}dx$ расходится.

2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Признаки сходимости формулируются для несобственных интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; для других типов несобственных интегралов справедливы аналогичные утверждения.

2.1. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций

Теорема (первый признак сравнения). Если функции *f(x)* и *g(x)* на промежутке $[a, +\infty)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема (второй (предельный) признак сравнения). Если функции *f(x)* и *g(x)* неотрицательны на промежутке $[a, +\infty)$ и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \le K \le +\infty),$$

то:

1) при $K < +\infty$ из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) при $K > 0$ из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

3) при $0 < K < +\infty$ оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ или одновременно сходятся, или одновременно расходятся.

Замечание. 1) Для несобственных интегралов вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (где $a > 0$) в качестве функции сравнения удобно использовать функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$, которая интегрируема при $p > 1$ и не интегрируема при $p \leq 1$ (см. пример 4).

2) Для несобственных интегралов вида $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ в качестве функции сравнения удобно использовать функцию (см. примеры 12 и 13):

$$g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}, \text{ если особая точка } x = a;$$

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}, \text{ если особая точка } x = b.$$

Соответственно при этом в случае использования второго (предельного) признака сравнения нужно рассматривать предел:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если особая точка } x = a;$$

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если особая точка } x = b.$$

Пример 22. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+x)}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2(1+x)}$ с функцией $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $[1, +\infty)$. Очевидно, что

$$\frac{1}{x^2(1+x)} < \frac{1}{x^2},$$

т.е. $f(x) < g(x)$ на промежутке $[1, +\infty)$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 1). Следовательно, согласно первому признаку сравнения, сходится и данный интеграл.

Пример 23. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Решение. Использую для подынтегральной функции $f(x)=e^{-x^2}$ функцию сравнения $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \Big|$ для раскрытия неопределенности применим правило Лопиталя $\Big| = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{x^2}2x} == \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}} = \left|\dfrac{1}{e^{(+\infty)^2}} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty}\right| = 0.$

Следовательно, по второму (предельному) признаку сравнения, данный интеграл сходится, так как сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$.

Пример 24. Исследовать сходимость эллиптического интеграла $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Особая точка $x = 1$. Рассмотрим для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ функцию сравнения $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \Big|$$

разложим знаменатель на множители:

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1-x^2)(1+x^2)} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2} \quad \Big| =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится (см. пример 8), то, согласно второму (предельному) признаку сравнения, сходится и данный интеграл.

Пример 25. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{x}$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Рассмотрим для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ функцию сравнения $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{\cos x}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\cos x = 1.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 12 при $a = 0$, $b = \pi/2$, $p = 1$), то, согласно второму (предельному) признаку сравнения, расходится и данный интеграл.

Задачи

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

47. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$. 48. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

49. $\int\limits_{e-1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$. 50. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{x^2}$.

51. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,arctgx\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$. 52. $\int\limits_1^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

53. $\int\limits_1^{+\infty} x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$. 54. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{tgx - x}$.

55. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$. 56. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

57. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$. 58. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2}dx$.

2.2. Абсолютная сходимость несобственных интегралов

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Замечание. Аналогичные определения имеют место для других видов несобственных интегралов.

Определение. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, то функция $f(x)$ называется ***абсолютно интегрируемой*** на промежутке $[a, +\infty)$.

Теорема (об абсолютной сходимости). Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то сходится также и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

С помощью данной теоремы и рассмотренных выше признаков сравнения можно исследовать сходимость несобственных интегралов от *знакопеременных* функций.

Пример 26. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

является знакопеременной на промежутке интегрирования $[1, +\infty)$.

Перейдем от данной функции $f(x)$ к ее модулю $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2}$, который сравним с функцией

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

на промежутке интегрирования $[1, +\infty)$.

Очевидно, что

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

т.е. $|f(x)| \leq g(x)$ на промежутке $[1, +\infty)$. Но интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится (см. пример 1). Следовательно, согласно первому признаку сравнения, сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$, а значит, по теореме об абсолютной сходимости, будет сходиться и исходный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.

2.3. Признак сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций

Если от *знакопеременной* функции $f(x)$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится, то вопрос о сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ остается открытым и может быть решен, например, с помощью нижеследующей теоремы (*признака Дирихле*).

Теорема (признак Дирихле). Пусть:

1) функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке [*a*, *A*] и интеграл $\int\limits_a^{A} f(x)dx$ оказывается ограниченным:

$$\left|\int\limits_a^{A} f(x)dx\right| \le K \ (K = const,\, a \le A < +\infty);$$

2) функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 27. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x}$.

Решение. Положим $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$\left|\int\limits_1^{A} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_1^{A} \sin x dx\right| = \left|\ \left(-\cos x\Big|_1^A\right)\ \right| = \left|\ \cos 1 - \cos A\ \right| \le \left|\ \cos 1\ \right| + \left|\ \cos A\ \right| \le 2$$

для любого числа $A \ge 1$ и функция $g(x) = \dfrac{1}{x}$, монотонно убывая на промежутке $[1, +\infty)$, стремится к нулю при $x \to +\infty$

($\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0)$. Следовательно, по признаку Дирихле, исходный интеграл сходится.

В дополнение к рассмотренному примеру заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ (\textit{интеграл Дирихле})}.$$

Задачи

Исследовать сходимость несобственных интегралов от *знакопеременных* функций:

59. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt{x}}$.

60. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x dx}{x}$.

61. $\int_0^{+\infty} \sin^3 x e^{-x} dx$.

62. $\int_0^{+\infty} \cos^3 x e^{-x} dx$.

63. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{x}}{x^2+1} dx$.

64. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2+1} dx$.

65. $\int_1^{+\infty} \sin x (e^{\frac{1}{x}} - 1) dx$.

66. $\int_1^{+\infty} \frac{(e^{-x} - \cos x) dx}{x}$.

3. ДЕЙСТВИЯ С НЕСОБСТВЕННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Свойства определенных интегралов для несобственных интегралов переносятся на интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и другие несобственные интегралы следующим образом:

1. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает и сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx$ (c = const), причем $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

2. Если сходятся оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left[f(x) \pm g(x)\right]dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. В случае несобственного интеграла от неограниченной функции $f(x)$ справедлива формула

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b},$$

если первообразная функция $F(x)$ непрерывна (точнее, допускает доопределение по непрерывности) в особых точках.

4. УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

67. $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx$.

68. $\int\limits_0^{+\infty} arctgx dx$.

69. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$.

70. $\int\limits_1^{+\infty} \sin^2 x e^{-x^2} dx$.

71. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

72. $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sin x}$.

73. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

74. $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$.

75. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

76. $\int\limits_1^{+\infty} \cos^3 x(e^{\frac{1}{x}}-1)dx$.

77. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(e^{-x}+\sin x)dx}{x}$.

78. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x e^{\sin x} dx}{x}$.

79. Найти площадь фигуры, ограниченной сверху – кривой $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, слева – прямой $x = 0$ (осью Oy), снизу – осью Ox.

80. Найти площадь фигуры, ограниченной сверху – кривой $y = \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}$, слева – прямой $x = 0$ (осью Oy), справа – прямой $x = \frac{\pi}{2}$, снизу – осью Ox.

81*. Доказать, что эйлеров интеграл 1-го рода (*бэта-функция*)

$$\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

82*. Доказать, что эйлеров интеграл 2-го рода (*гамма-функция*)

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

сходится при $p > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2000. 471с.

Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2000. 656 с.

Гусак А.А. Высшая математика: В 2 т.: Учебник для студентов вузов. Минск: ТетраСистемс, 2001. Т. 2. 448 с.

Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2001. 304 с.

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1971. 416 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1974. 472 с.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, 1969. Т. 2. 800 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 544 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Несобственные интегралы …..……………………….................…………… 3
1.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования 3
1.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций …..................… 9
1.3. Главные значения несобственных интегралов ……….....................…… 20
2. Признаки сходимости несобственных интегралов …….................………… 23
2.1. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций ……………...……………………… 23
2.2. Абсолютная сходимость несобственных интегралов …...................…… 27
2.3. Признак сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций ………………………..………… 29
3. Действия с несобственными интегралами ………………….....................….. 31
4. Упражнения ……………………………................…………………….... 32
Литература 33

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
редакционно-издательского отдела ТГУ

Заказ №   от «12» августа 2011 г. Тираж 100 экз.