

**ТРУДЫ**  
**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА**  
**ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**  
**ПРИ ТОМСКОМ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ**  
**ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. В. В. КУЙБИШЕВА**

**Том 6**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА**  
**Томск — 1977**

# ТРУДЫ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА  
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ПРИ ТОМСКОМ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 6

Настоящий сборник содержит оригинальные работы по теоретической и прикладной механике, представленные сотрудниками научно-исследовательского института прикладной математики и механики при ТГУ и ряда кафедр Томского государственного университета.

Труды рассчитаны на инженеров и научных работников, работающих в области механики и ее приложениях.

Редактор — доц. Богоряд И. Б.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГЛАДКИХ И ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕРАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ И ИЗГИБА

В. И. АГАПОВ, А. Н. КУДИНОВ, В. Н. РОГОВСКИЙ

В работе сообщаются результаты экспериментальных исследований устойчивости гладких и подкрепленных оболочек под действием изгиба и секториального внешнего давления.

1. Для проведения экспериментальных исследований на модельных образцах нами были разработаны и изготовлены две установки:

1. Установка для нагружения оболочек неравномерным по окружности внешним давлением. Описание этой установки дано в работе [2].

2. Установка на изгиб оболочек поперечной силой и для исследования их поведения при комбинированном воздействии изгиба и внешнего давления.

Приспособление на изгиб (рис. 1) состоит из станины, имеющей две стойки (1), укрепленных на жестком основании (2); нижнего (3) и верхнего (4) торцевых зажимов и прижимных колец (11), (12) обо-

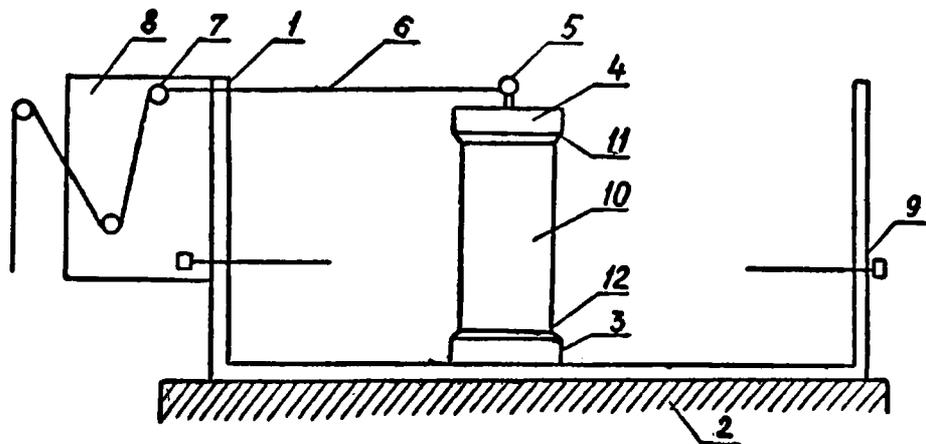


Рис. 1.

лочки, направляющего винта (5), троса натяжения (6), трех блоков (7), два из которых укреплены на планке (8), жестко соединенной со стойкой (1) и корпусом разрывной машины типа РМП-500. Третий блок крепится в неподвижном захвате этой машины. Направляющие винты (9) служат для фиксирования в заданном положении приспособления для нагружения неравномерным внешним давлением.

Методика эксперимента на изгиб заключается в следующем. Оболочку с веерообразным оперением по торцам насаживают на верхний торцевой зажим (4) и закрепляют с помощью прижимных полуколец (11) и винтов (9). Затем закрепляется нижний торец оболочки и с помощью прижимных колец и винтов жестко соединяется со станиной. При этом оболочка устанавливается на торцевых зажимах таким образом, чтобы сварной шов находился в плоскости, перпендикулярной плоскости действия изгиба. Затем в направляющий винт (5) заправляют трос натяжения, один конец которого упирается в винт, а другой пропускается через блоки и закрепляется в подвижном захвате машины РМП-500. После предварительного натяга троса, равного  $5 \div 10$  кг, начинается изгиб оболочки, который представляет собой изгиб консоли силой, приложенной на свободном конце. Нагружение производится до тех пор, пока оболочка хлопком не потеряет устойчивость.

Испытания оболочек на совместное действие изгиба и внешнего давления проводились в следующем порядке. Предварительно задается изгиб оболочки силой  $P$ , равной  $\sim 1/2 P^*$  ( $P^*$  — критическая нагрузка при изгибе). Затем в зависимости от того, прикладывается ли внешнее давление в зоне растягивающих или сжимающих напряжений, на направляющие винты (9) надевается приспособление для внешнего давления и вплотную с помощью винтов подводится к оболочке. В верхней части оболочка прижимается полукольцом (4), а в нижней части корпус приспособления поджимается направляющими винтами (9). При этом в течение всего процесса подготовки постоянно контролируется заданная нагрузка  $P'$ . Визуальное наблюдение за оболочкой ведется со стороны верхнего торцевого зажима, имеющего три окна, расположенных под углом  $120^\circ$ . В процессе нагружения оболочки фиксировались значения давления  $q_0$  и  $q^*$ , соответствующие местной и общей потере устойчивости оболочек.

II. Исследование проводилось на цилиндрических оболочках следующих размеров:  $L=162$  мм,  $R=53$  мм. В качестве материала образцов использовались листовая сталь IX18H9 толщиной 0,2 мм, 0,15 мм и 0,1 мм. Технология изготовления оболочек изложена в работах [1], [2].

В табл. 1 приведены результаты испытаний на устойчивость оболочек из стали IX18H9 ( $R/h=353$ ,  $L/R=3,43$ ,  $h=0,15$  мм) при изгибе и внешнем давлении, распределенном на участке окружности с центральным углом  $\varphi=90^\circ$ . Давление прилагалось к участку оболочки, находящемуся в зоне растяжения.

Таблица 1

| № опыта | Вид нагружения   | $\sigma_{\max}^u$<br>кг/см <sup>2</sup> | $\bar{q}^*$ | Примечания                                     |
|---------|------------------|---|-------------|--|
| 1       | Внешнее давление |   | 0,0109      | Две вмятины                                    |
| 2       | "                |   | 0,0109      |  |
| 3       | Изгиб            | -1335                                   | —           | Много вмятин в зоне сжатия у нижнего основания |
| 4       | "                | -1285                                   | —           |  |
| 5       | Изгиб + давление | +445                                    | 0,012       | Две вмятины                                    |
| 6       | "                | +890                                    | 0,0125      |  |

Из таблицы видно, что критическое давление, несмотря на значительные напряжения от изгиба, максимум которых находится у нижнего основания, растет несущественно. Качественная картина волнооб-

разования аналогична либо картине при действии лишь внешнего давления, либо картине при действии осевого сжатия.

В табл. 2 приведены результаты экспериментальных исследований подкрепленных цилиндрических оболочек при действии изгиба и внешнего давления, действующего на участке контура поперечного сечения с центральным углом  $\varphi=90^\circ$ . Опыты 1÷8 приводились на образцах следующих геометрических размеров: оболочка  $R/h=353$ ;  $L/R=3,43$ ;  $h=0,15$  мм; шпангоуты  $\delta_2=1$  мм;  $b=1$  мм; расположение равномерное:  $t_1=t_2=t_3=t_4=t_5=32$  мм. У образцов второй серии — 9÷18 шпангоуты располагались неравномерно:  $t_1=t_5=43$  мм;  $t_2=t_3=t_4=24$  мм, т. е. были увеличены крайние панели и уменьшены средние.

Таблица 2

| Серия | №  | $\sigma_{\max}^u$<br>кг/см <sup>2</sup> | $\bar{q}_0 \cdot 10^2$ | $\bar{q}^* \cdot 10^2$ | Примечание  |
|-------|----|---|------------------------|------------------------|---|
| I     | 1  | —                                       | —                      | 4,52                   | Две вмятины по всей длине                                 |
|       | 2  | —                                       | —                      | 3,74                   | "   |
|       | 3  | -1638                                   | —                      | —                      | Много мелких вмятин в панели у нижнего торца              |
|       | 4  | -1584                                   | —                      | —                      | "   |
|       | 5  | -890                                    | 2,49                   | 3,12                   | Вмятина в панели, а затем общая потеря устойчивости       |
|       | 6  | -890                                    | 2,49                   | 3,72                   | "   |
|       | 7  | +890                                    | 5,05                   | 5,65                   | Две вмятины хлопком по всей длине                         |
|       | 8  | +890                                    | —                      | 5,75                   | "   |
|       | 9  | —                                       | 3,9                    | 6,07                   | Вмятина в панели, затем две вмятины по всей длине         |
|       | 10 | —                                       | 4,49                   | 5,91                   | "   |
|       | 11 | -1673                                   | —                      | —                      | Много вмятин в панели у нижнего торца                     |
| II    | 12 | -1744                                   | —                      | —                      | "   |
|       | 13 | +890                                    | —                      | 5,45                   | Одна вмятина по всей длине                                |
|       | 14 | +890                                    | —                      | 6,23                   | "   |
|       | 15 | +890                                    | 5,6                    | 8,1                    | Две вмятины по всей длине                                 |
|       | 16 | -890                                    | 1,87                   | 4,98                   | Две вмятины в панели, а затем одна по всей длине оболочки |
|       | 17 | -890                                    | 2,67                   | 9,04                   | "   |
|       | 18 | -890                                    | 1,87                   | 4,97                   | "   |

Из таблицы видно, что критическое внешнее давление для образцов второй серии выше, чем для образцов первой. Здесь  $\bar{q}=qR^2/Eh^2$  — безразмерный параметр давления. Весьма примечательно, что давление, соответствующее местной потере устойчивости образцов второй серии выше, чем давление, соответствующее общей потере устойчивости образцов первой серии. Заслуживает внимания и тот факт, что критическая нагрузка изгиба для образцов второй серии также выше. Процесс потери устойчивости также различен: у образцов второй серии сначала наблюдается местная потеря устойчивости, а затем общая; у образцов первой серии местная потеря устойчивости наблюдается редко.

Учитывая опытные данные табл. 2, можно сделать вывод, что оптимальное расположение шпангоутов при действии внешнего давления [2], [3] будет являться оптимальным и при действии изгиба совместно с внешним давлением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Кудин о в. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при совместном действии осевого сжатия, внутреннего давления и нагрева.— Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 6, «Наукова думка», 1966.

2. А. Н. Кудин о в, В. И. Мурав и ц к и й. Экспериментальное исследование устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек под действием неравномерного внешнего давления и нагрева.— Труды VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Изд. «Наука», 1970.

3. Н. А. Алф у т о в. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечным силовым набором и нагруженным внешним равномерным давлением.— Инж. сб. Т. XXIII, 1956.

---

## ЭКСПРЕССНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СРЕДНИХ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ

В. А. АРХИПОВ, Е. П. БОЛТРУКЕВИЧ, Г. С. РАТАНОВ

Существующие методы определения средних размеров и функции распределения частиц аэрозолей и взвесей (микрофотографирование, седиментационный анализ и т. д.) трудоемки и требуют больших затрат времени [1].

Предлагается экспрессный метод измерения дисперсности микрочастиц, основанный на зависимости поглощения и рассеяния лазерного излучения от размеров неоднородностей (частиц взвеси) при прохождении через неоднородную среду.

Оптическая толща слоя полидисперсных частиц равна [2]

$$\tau_{\lambda} = \frac{1.5 c_m l}{\rho_k} \cdot \frac{\int_0^{\infty} Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^3 f(D) dD}, \quad (1)$$

где  $c_m$  — массовая концентрация частиц;

$l$  — оптическая длина пути;

$\rho_k$  — плотность материала частиц;

$f(D)$  — функция распределения частиц по размерам;

$Q(\alpha, m)$  — фактор эффективности ослабления;

$\alpha = \frac{\pi D}{\lambda}$  — параметр Ми.

Величина  $Q(\alpha, m)$  рассчитывается по формулам теории Ми [2] для заданной величины диаметра частиц  $D$ , длины волны излучения  $\lambda$  и комплексного показателя преломления материала частиц  $m$ .

При неизвестном заранее виде функции  $f(D)$  обращение интегрального уравнения (1) представляет весьма сложную проблему, связанную с решением некорректно поставленной задачи. Во многих практических случаях заранее известно аналитическое выражение для  $f(D)$  в виде одно- или двухпараметрической формулы (логарифмически нормальное распределение, гамма-распределение и т. д.).

Подставляя в (1) функцию распределения, зависящую от двух параметров  $a_1, a_2$ , получим

$$\tau_{\lambda} = \frac{1.5 c_m l}{\rho_k} \cdot \varphi(a_1, a_2), \quad (2)$$

где

$$\varphi(a_1, a_2) = \int_0^{\infty} Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD / \int_0^{\infty} D^3 f(D) dD.$$

Записав выражения (2) для оптической толщи, измеренной на двух длинах волн, получим систему уравнений, с помощью которой определяются параметры  $a_1$  и  $a_2$ , а следовательно, и распределение частиц по размерам

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\lambda_1, \rho_k} / 1.5 c_m l &= \varphi_1(a_1, a_2) \\ \tau_{\lambda_2, \rho_k} / 1.5 c_m l &= \varphi_2(a_1, a_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Система (3) решается графо-аналитическим способом по измеренным экспериментально левым частям.

Если полидисперсная взвесь состоит из непоглощающих частиц ( $m = n - ix$  — вещественное число), то возможно определение среднего объемно-поверхностного диаметра частиц

$$D_{32} = \int_0^{\infty} D^3 f(D) dD / \int_0^{\infty} D^2 f(D) dD.$$

без предварительного задания функции распределения.

Выражение для  $\tau_{\lambda}$  при этом можно представить в виде

$$\tau_{\lambda} = 1.5 c_m l \bar{Q}(\alpha, m) / \rho_k D_{32}.$$

Усредненный фактор эффективности ослабления

$$\bar{Q}(\alpha, m) = \int_0^{\infty} Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD / \int_0^{\infty} D^2 f(D) dD = \psi(D_{32}).$$

не зависит от вида функции распределения, а полностью определяется величиной  $D_{32}$  [3]. Из графического решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}(\alpha, m) &= \psi(D_{32}) \\ \bar{Q}(\alpha, m) &= \tau_{\lambda} \rho_k D_{32} / 1.5 c_m l \end{aligned} \right\}$$

определяется средний размер частиц  $D_{32}$ .

При измерении оптической толщи на двух длинах волн в случае непоглощающих частиц нет необходимости определять концентрацию частиц  $c_m$ . При этом можно пользоваться рассчитанным графиком функции

$$\chi(D_{32}) = \frac{\tau_{\lambda_2}}{\tau_{\lambda_1}} = \frac{\bar{Q}(\alpha_2, m)}{\bar{Q}(\alpha_1, m)}.$$

Экспериментальная установка для измерения дисперсности частиц состоит из источника и приемника излучения и кювет с плоскопараллельными стенками из оптического стекла. В качестве источника излучения используется He—Ne лазер ЛГ-56 или ЛГ-126. Лазер ЛГ-56 работает на одной длине волны  $\lambda = 0,63$  мкм, а ЛГ-126 — на трех длинах волн  $\lambda_1 = 0,63$  мкм,  $\lambda_2 = 1,15$  мкм,  $\lambda_3 = 3,39$  мкм.

Использование лазера делает строго обоснованным применение теории Ми и значительно упрощает оптическую схему установки. Приемником излучения служит фотоумножитель или германиевый фотодиод в зависимости от длины волны излучения.

Концентрация частиц взвеси определяется взвешиванием образца перед помещением его в кювету с жидкостью.

Применение оптического метода ведет к резкому сокращению времени дисперсного анализа образцов. Простота алгоритма обработки и возможность выполнения предварительного расчета необходимых функций позволяют легко автоматизировать процесс обработки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Леончик и др. Измерения в дисперсных потоках. М., «Энергия», 1971.
  2. Г. ван-де-Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. М., ИИЛ, 1961.
  3. Dobbins R., Jizmagian G. Journal of the Optical Society of America, 56, 1945 (1966).
-

## ИЗМЕРЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ И ДИСПЕРСНОСТИ САЖЕВЫХ ЧАСТИЦ В СВЕТЯЩЕМСЯ ПЛАМЕНИ

В. А. АРХИПОВ, С. И. ИЗМАЙЛОВ, Г. С. РАТАНОВ

При решении многих научных и технических задач необходимо иметь надежные данные о дисперсном составе и концентрации сажевых частиц в продуктах сгорания различных топлив. Эти данные используются в расчетах лучистого теплообмена, при исследовании процессов горения и сажеобразования и т. д.

Известно много различных способов измерения дисперсности и концентрации микрочастиц. Основным недостатком прямых методов отбора является нарушение физической структуры исследуемой среды. В работах [1—3] были рассмотрены оптические методы измерения параметров сажи при горении жидких и газообразных топлив, основанные на законах рассеяния света частицами. В основу этих работ положено допущение о монодисперсности частиц сажи. Результаты электронно-микроскопического анализа свидетельствуют, однако, о ярко выраженной полидисперсности [4].

Предлагается оптический метод измерения размеров и концентрации сажевых частиц с учетом их полидисперсности, основанный на ослаблении лазерного излучения пламенем. Оптическая толщина слоя частиц равна [5]

$$\tau_{\lambda} = \frac{\pi c_n l}{4} \int_0^{\infty} Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD, \quad (1)$$

где  $c_n$  — счетная концентрация частиц;

$l$  — оптическая длина пути;

$Q(\alpha, m)$  — фактор эффективности ослабления;

$\alpha = \pi D / \lambda$  — параметр Ми;

$D$  — диаметр частиц;

$\lambda$  — длина волны падающего излучения;

$m$  — комплексный показатель преломления материала частиц;

$f(D)$  — функция распределения частиц по размерам.

На основе анализа экспериментальных данных по дисперсности сажевых частиц в продуктах сгорания выражение для функции распределения может быть взято в виде [4]

$$f(D) = \frac{4 D^2}{V \pi D_m^3} \exp\left(-\frac{D^2}{D_m^2}\right), \quad (2)$$

где  $D_m$  — наиболее вероятный (модальный) диаметр. Подставив (2) в (1) и разделив полученные выражения для  $\tau_\lambda$  на двух длинах волн, получим

$$\frac{\tau_{\lambda_2}}{\tau_{\lambda_1}} = \int_0^\infty Q(\alpha_2, m) D^4 \exp\left(-\frac{D^2}{D_m^2}\right) dD / \int_0^\infty Q(\alpha_1, m) D^4 \exp\left(-\frac{D^2}{D_m^2}\right) dD = \varphi(D_m).$$

Отношение оптических толщ, измеренных на двух длинах волн, является однозначной функцией  $D_m$ . График этой функции  $\varphi(D_m)$ , рассчитанный для  $\lambda_1 = 0,63$  мкм и  $\lambda_2 = 1,15$  мкм, приведен на рис. 1. Факторы эффективности ослабления, входящие в выражение для  $\varphi(D_m)$ , рассчитывались по точным формулам теории Ми [5].

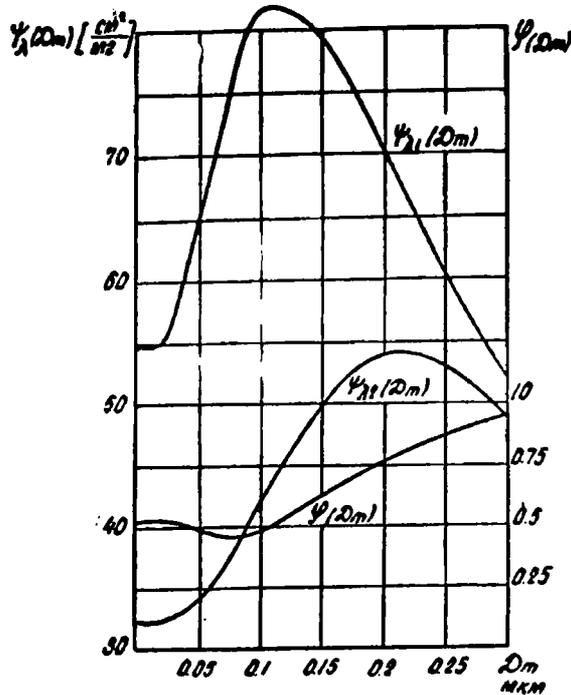


Рис. 1.

Массовая концентрация частиц  $c_m$  определяется по закону Бугера

$$\tau_\lambda = K_{m\lambda} c_m l. \quad (3)$$

Используя выражения (1—3) и связь между  $c_n$  и  $c_m$

$$c_n = \frac{6 c_m}{\pi \rho_k \int_0^\infty D^3 f(D) dD},$$

где  $\rho_k = 1,75$  г/см<sup>3</sup> — плотность материала частиц; выражение для массового показателя ослабления  $K_{m\lambda}$  можно представить в виде

$$K_{m\lambda} = \frac{1.5}{\rho_k D_m^6} \int_0^\infty Q(\alpha, m) D^4 \exp\left(-\frac{D^2}{D_m^2}\right) dD = \psi_\lambda(D_m).$$

Графики функций  $\psi_{\lambda_1}(D_m)$  и  $\psi_{\lambda_2}(D_m)$ , рассчитанные для  $\lambda_1 = 0,63$  мкм и  $\lambda_2 = 1,15$  мкм, приведены на рис. 1. По измеренному от-

ношению  $\tau_{\lambda 2}/\tau_{\lambda 1}$  с помощью графика  $\varphi(D_m)$  определяется модальный диаметр частиц  $D_m$ ; по графикам  $\psi_{\lambda 1}(D_m)$  и  $\psi_{\lambda 2}(D_m)$  определяются  $K_{m\lambda 1}$  и  $K_{m\lambda 2}$  и по (3) рассчитывается массовая концентрация частиц  $c_m$  (критерием правильности измерений может служить равенство значений  $c_m$ , определенных на двух длинах волн).

Экспериментальная установка для измерения  $c_m$  и  $D_m$  состоит из источника излучения — He—Ne лазера типа ЛГ-126, работающего на длинах волн 0,63 мкм и 1,15 мкм и приемника излучения — германиевого фотодиода ФД-3, позволяющего регистрировать излучение в видимой и ближней инфракрасной областях спектра. Непосредственно измеряется спектральный коэффициент пропускания  $T_\lambda$  исследуемого пламени, равный отношению прошедшего светового потока к начальному. Связь  $T_\lambda$  с оптической толщиной  $\tau_\lambda$  выражается формулой

$$\tau_\lambda = \ln(1/T_\lambda).$$

Оптические измерения концентрации и дисперсности сажевых частиц проводились в пламени парафина, горящего при атмосферном давлении. На расстоянии 1 см от поверхности горения концентрация сажевых частиц составляет  $c_m \cong 0,05 \frac{\text{мг}}{\text{см}^3}$ , модальный диаметр частиц  $D_m \cong 0,1$  мкм. Анализ погрешностей измерений показал, что оптический метод позволяет определять  $D_m$  и  $c_m$  с относительной погрешностью 3 и 4% соответственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Senftleben, E. Benedikts. Annalen der Physiks 60, 297, 1919.
  2. G. Erickson. Combustion and Flame. 8, № 2, 1964.
  3. W. Dalzell, G. Williams. Combustion and Flame. 14, 161, 1970.
  4. А. Г. Блох. Тепловое излучение в котельных установках. М.-Л. «Энергия», 1967.
  5. Г. ван-де-Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. ИИЛ, 1961.
-

## КРУЧЕНИЕ ВАЛА ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Л. К. АХАЕВА, В. И. ТАРАКАНОВ

1. Рассматривается кручение бесконечного вала, состоящего из двух полубесконечных цилиндров разного радиуса, соединенных переходной зоной. Границы области задаются уравнениями

$$r=1, \quad 0.4 \leq z < \infty. \quad (1.1)$$

$$r=1.4-0.4 \cos \varphi, \quad z=0.4-0.4 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (1.2)$$

$$r=1.4, \quad -\infty < z < 0. \quad (1.3)$$

Боковая поверхность вала свободна от нагрузок. Момент  $N$  приложен к торцам цилиндров на бесконечности.

В близкой постановке задача рассматривалась в работах [1, 3, 4, 5]. В работе [5] рассматривалась плавная зона перехода, задача решалась методом Ритца. В работах [1, 3] рассматривался ступенчатый переход между цилиндрами, задача решалась методом разделения переменных и сопряжением решений для первого и второго цилиндра.

Ненулевая компонента вектора смещения  $V$  для данной задачи удовлетворяет уравнению [1]

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)V = V_{,rr} + \frac{V_{,r}}{r} - \frac{V}{r^2} + V_{,zz} = 0. \quad (1.4)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений  $\sigma_{z\varphi}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$  задаются соотношениями

$$\sigma_{z\varphi} = 2\mu V_{,z}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu \left( V_{,r} - \frac{V}{r} \right), \quad (1.5)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига.

Граничные условия задачи имеют вид

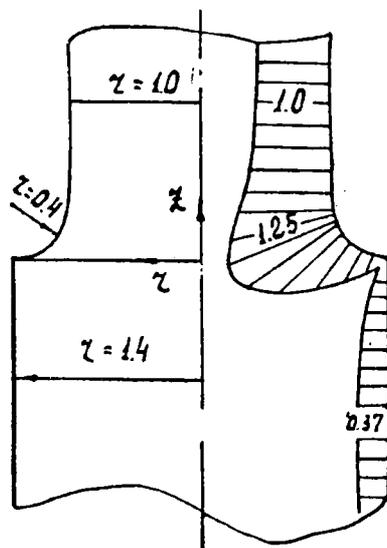


Рис 1

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} = 0, \quad r=1, \quad 0.4 < z < \infty; \quad (1.6)$$

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} \cos \varphi + \sigma_{z\varphi} \sin \varphi = 0, \quad r=1.4-0.4-0.4 \cos \varphi, \quad z=0.4-0.4 \sin \varphi; \quad (1.7)$$

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} = 0, \quad r=1.4; \quad -\infty < z < 0; \quad (1.8)$$

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{2}{\pi} N \cdot r, \quad z \rightarrow \infty; \quad (1.9)$$

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{2}{\pi} N \frac{r}{(1.4)^4}, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.10)$$

Решение данной второй краевой задачи удобнее вести путем введения вспомогательной функции напряжений  $\Phi$  [1], для которой эта задача является первой краевой.

Функция  $\Phi$  связана со смещением  $V$  дифференциальными соотношениями

$$\Phi_{,z} = -r^2 V_{,r} + rV, \quad \Phi_{,r} = r^2 V_{,z}. \quad (1.11)$$

Функция напряжений удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{,rr} - \frac{3}{r} \Phi_{,r} + \Phi_{,zz} = 0. \quad (1.12)$$

Момент  $N$ , действующий на произвольной дуге области от касательных усилий, равен с точностью до слагаемого и множителя функции напряжений.

$$N = 2\pi \int_{M_0}^M r^2 [\sigma_{z\varphi} \cos nr + \sigma_{r\varphi} \cos nz] ds = 4\pi\mu [\Phi(M) - \Phi(M_0)]. \quad (1.13)$$

Задание касательных усилий на границе области определяет с точностью до константы значение функции напряжений. Граничные условия задачи для функции напряжений, эквивалентные условиям (1.6) — (1.10), будут

$$\Phi = N/4\pi\mu \quad \text{на границах (1.1), (1.2), (1.3)}. \quad (1.14)$$

$$\Phi = Nr^4/4\pi\mu \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

$$\Phi = Nr^4/4\pi\mu \cdot (1.4)^4 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (1.16)$$

2. Метод решения задачи основан на использовании специальных решений  $\delta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  следующих уравнений

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) \psi = 0. \quad (2.1)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\rho z}} \cdot K, \quad (2.2)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\rho r}} \left[ \left( \frac{2}{\omega} - 1 \right) K - \frac{2}{\omega} E \right],$$

$$\delta_3 = \frac{\xi - z}{\rho + r} \delta_1 + \frac{1}{\pi\rho} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \cdot \frac{|r - \rho|}{r - \rho} H_0 + \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \left[ \frac{\rho - r}{|\rho - r|} - 1 \right] \frac{1}{2\rho},$$

$$\delta_4 = -\frac{\rho}{r} \delta_3 - \frac{z-\xi}{r} \delta_1,$$

$$\delta_5 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\alpha + \sqrt{1 - \omega \cos^2 \varphi}}{-\alpha + \sqrt{1 - \omega \cos^2 \varphi}} d\varphi - \frac{|z-\xi|}{z-\xi} \left[ \frac{r-\rho}{|r-\rho|} + 1 \right] \frac{1}{2} \ln \frac{r}{\rho},$$

$$\delta_6 = \frac{1}{2} [r \delta_3 + \rho \delta_4 - (z-\xi) \delta_2],$$

$$\delta_7 = \rho \delta_1 - r \delta_2 - (z-\xi) \delta_3,$$

$$\delta_8 = r \delta_1 - \rho \delta_2 - (z-\xi) \delta_4, \quad \delta_9 = (z-\xi) \delta_5 - r \delta_8 - \rho \delta_7,$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{3} [\rho \delta_8 + r \delta_7 - (z-\xi) \delta_6], \quad \delta_{11} = \frac{1}{2} [\rho \delta_5 - r \delta_6 - (z-\xi) \delta_7],$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2} [r \delta_5 - \rho \delta_6 - (z-\xi) \delta_8].$$

Здесь

$$H_0 = \frac{\pi}{2} - K \cdot E(\beta, 1-\omega) - E \cdot F(\beta, 1-\omega) + KF(\beta, 1-\omega).$$

$K=K(\omega)$ ,  $E=E(\omega)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода,  $\omega = \frac{4\rho r}{(\rho+r)^2 + (z-\xi)^2}$  — квадрат модуля эллиптического интеграла.

$$F(\beta, 1-\omega) = \int_0^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1-\omega) \sin^2 \varphi}}, \quad E(\beta, 1-\omega) = \int_0^{\beta} \sqrt{1 - (1-\omega) \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Неполные эллиптические интегралы первого и второго рода.

$$\beta = \arcsin \frac{|r-\rho|}{r+\rho} \sqrt{\frac{(r+\rho)^2 + (z-\xi)^2}{(r-\rho)^2 + (z-\xi)^2}}, \quad \alpha = \frac{z-\xi}{\sqrt{(r+\rho)^2 + (z-\xi)^2}}.$$

Функции  $\delta_k$  зависят от цилиндрических координат  $r$ ,  $z$  и параметрической точки  $M(\rho, \xi)$ . По переменным  $r$ ,  $z$  функции  $\delta_k$  с нечетным индексом являются решениями уравнения  $\Delta\varphi=0$ , а с четными индексами — решениями уравнения  $\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) \psi=0$ . Функции  $\delta_k$  образуют систему следующих  $p$ -аналитических функций ( $p=r$ ) [2].

$$\begin{aligned} \delta_1 + ir \delta_4, \quad \delta_3 + ir \delta_2, \quad \delta_5 + ir \delta_8, \quad \delta_7 + ir \delta_6, \\ \delta_9 + ir \delta_{12}, \quad \delta_{11} + ir \delta_{10}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Мнимые и действительные части  $p$ -аналитической функции  $u+iv$  удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (2.4)$$

Если в (2.4) положить  $p=r$  и подставить функции (2.3), то для функции  $\delta_k$  получается ряд дифференциальных зависимостей.

Функции  $\delta_k$  либо их производные в точке  $M(\rho, \xi)$  имеют полюс либо точку ветвления. Некоторые из этих функций многозначны в плоскости  $r, z$ , в формулах (2.2) даны однозначные ветви этих функций, получаемые проведением разреза плоскости  $r, z$  по лучу  $r > \rho, z = \xi$ . Функции  $\delta_k$  с четным индексом удовлетворяют уравнению (1.4) и, следовательно, их можно брать в качестве частных решений для смещения.

На основе функций  $\delta_k$  можно получить частные решения уравнения (1.12) для функции напряжений  $\Phi$ , используя зависимости (2.4). Каждому решению (1.4) соответствует некоторое решение (1.12).

Ниже приведена табл. 1, в которой некоторым решениям уравнения (1.4) ставится в соответствие решение уравнения (1.12).

Таблица 1

| $V$                                    | $\Phi$   |
|--|--|
| $\delta_2$                             | $r(z-\xi)\delta_2 - r\rho\delta_4$   |
| $\delta_4$                             | $2\rho r\delta_2 - r^2\delta_1 + 2r(z-\xi)\delta_4$  |
| $\delta_6$                             | $\frac{r}{3}(2\rho^2 - r^2 - (z-\xi)^2)\delta_2 - \frac{\rho r^3}{3}\delta_1 + \rho r(z-\xi)\delta_4$                                    |
| $\delta_8$                             | $r^2(z-\xi)\delta_1 - \frac{3}{2}\rho r(z-\xi)\delta_2 + \frac{r^2\rho}{2}\delta_3 + z\left[\frac{\rho^2}{2} - (z-\xi)^2\right]\delta_4$ |
| $\delta_{10} - \frac{\rho}{2}\delta_8$ | $\frac{1}{24}\{(z-\xi)(3\rho^3 - \rho r^2)\delta_1 + (z-\xi)r[2(z-\xi)^2 + 5(\rho^2 + r^2)]\delta_2 + 3(\rho^4 - r^4)\delta_3\}$         |
| $rz$                                   | $\frac{r^4}{4}$  |
| $\frac{1}{r}$                          | $z$  |

При решении задач используется ряд свойств функций  $\delta_k$ , их асимптотика в особой точке и при большом удалении от особой точки.

Решение задачи начинается с получения «эскизного» решения, которое точно удовлетворяет соответствующим дифференциальным уравнениям, является непрерывным в области со своими частными производными, а граничным условиям удовлетворяет в основном на наиболее характерных участках области. Такими характерными участками области являются бесконечно продолженные части области, участки, прилегающие к границе, где заданы разрывные граничные условия или сосредоточенные силы, участки в конечной области, для которых известна асимптотика решения.

Оставшаяся невязка в удовлетворении граничных условий является непрерывной со своими производными по дуге контура, близка к нулю на характерных участках границы и ликвидируется последовательным суммированием фундаментальных решений соответствующих уравнений. Для уравнений (1.4), (1.12) такими фундаментальными решениями являются соответственно следующие функции:

$$V_0 = \delta_2(M, M_0), \quad \Phi_0 = \frac{\rho r^2}{6}\delta_1 - \frac{r}{3}[\rho^2 + r^2 + (z-\xi)^2]\delta_2. \quad (2.5)$$

Фундаментальные решения являются аналогами логарифмического потенциала для уравнения Лапласа в декартовых координатах, имеют ло-

гарифмическую особенность в полюсе  $M_0(\rho, \xi)$ , при удалении от полюса монотонно убывают, оставаясь везде непрерывными и ограниченными со своими производными.

Линии уровня фундаментальных решений представляют собой замкнутые выпуклые кривые, близкие около полюса к окружностям с центром в полюсе.

Эти геометрические свойства фундаментальных решений означают, что если разместить полюс фундаментального решения  $M_0(\rho, \xi)$  вблизи какого-либо участка границы области, имеющего радиус кривизны больший, чем расстояние от этого участка до полюса, то значения фундаментального решения на границе будут следующими.

В точке границы  $Q$ , находящейся на кратчайшем расстоянии  $d$  от полюса  $M_0(\rho, \xi)$ , граничное значение фундаментального решения имеет максимум, при удалении от этой точки по границе граничные значения будут монотонно убывать, стремясь к нулю на бесконечности.

Быстрота убывания граничных значений зависит от расстояния. Чем меньше расстояние  $d$ , тем быстрее убывают граничные значения при удалении от точки  $Q$ , тем острее пик максимума в точке  $Q$ .

Вся невязка при удовлетворении граничных условий может быть разбита на ряд примыкающих друг к другу элементарных невязок, каждая из которых занимает участок контура длиной  $\lambda$ . На этом участке имеется точка  $Q$ , где невязка максимальна по отношению ко всем остальным значениям на этом участке. При удалении от точки  $Q$  невязка монотонно уменьшается.

Границами участка  $\lambda$  являются точки, где невязка меняет знак либо снова возрастает. Каждую элементарную невязку в удовлетворении граничных условий характеризует величина максимума в точке  $Q$  (амплитуда невязки), длина участка  $\lambda$ , степень убывания при удалении от максимума.

Таким образом, если на каком-то участке границы области имеется элементарная невязка с максимумом в точке  $Q$ , то можно взять в качестве решения, ликвидирующего в основном эту невязку, фундаментальное решение, полюс которого  $M_0(\rho, \xi)$  выбирается вне заданной области на прямой, перпендикулярной к контуру в точке  $Q$  на таком расстоянии  $d$  от точки  $Q$ , при котором граничное значение фундаментального решения имело бы поведение, близкое к поведению элементарной невязки. Заданием расстояния варьируется форма кривой граничного значения, даваемого фундаментальным решением, а не его амплитуда. Задание нужной амплитуды осуществляется соответствующим выбором постоянного коэффициента перед фундаментальным решением.

Процесс ликвидации невязок строится следующим образом. На границе области выбирается одна, две элементарные невязки, имеющие наибольший максимум, и в качестве решения записываются фундаментальные решения, для которых полюса и коэффициенты выбираются описанным выше способом. Если убираются две элементарные невязки, близко стоящие друг к другу, коэффициенты перед фундаментальными решениями можно находить из совместной системы уравнений.

При ликвидации наибольшей элементарной невязки невязка на всей границе несколько изменится, однако останется меньшей, чем была до ликвидации максимальной невязки в связи с тем, что граничные значения фундаментального решения монотонно убывают при удалении от своего максимума. После просчета новой граничной невязки на ЭВМ выбираются следующие наиболее крупные невязки и убираются описанным выше способом.

Процесс производится до тех пор, пока невязка в выполнении граничных условий не станет меньше некоторой заданной величины, а решение, убирающее невязку, представится в виде суммы фундаментальных решений, в которых суммирование производится по полюсам, а постоянные коэффициенты и полюса находятся последовательно.

3. Решение задачи начинается с удовлетворения граничных условий на бесконечности, которое осуществляется следующим частным решением для смещения  $V$ :

$$V_1 = \frac{N}{2\pi\mu} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{(1.4)^4} \right) [2\rho\delta_{10}(\rho, \xi, r, z) - \rho^2\delta_8(\rho, \xi, r, z)] + 0.74rz \right\}, \quad (3.1)$$

Полюс  $M_0(\rho, \xi)$  выбирается вне заданной области, в районе сопряжения цилиндров.

Напряжения, соответствующие смещению (3.1), имеют следующее асимптотическое разложение на бесконечности:

$$(\sigma_{z\varphi})_1 = \frac{2}{\pi} N \cdot r + 0 \left( \frac{1}{|z-\xi|} \right), \quad (\sigma_{r\varphi})_1 = 0 \left( \frac{1}{(z-\xi)^2} \right), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (3.2)$$

$$(\sigma_{z\varphi})_1 = \frac{2}{\pi} N \cdot \frac{r}{(1.4)^4} + 0 \left( \frac{1}{|z-\xi|} \right), \quad (\sigma_{r\varphi})_1 = 0 \left( \frac{1}{(z-\xi)^2} \right), \quad z \rightarrow -\infty, \quad (3.3)$$

Функция напряжений  $\Phi$ , соответствующая частному решению (3.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{N}{2\pi\mu} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{(1.4)^4} \right] \left[ \frac{\rho}{12} (z-\xi)(3\rho^3 - \rho r^2) \delta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\rho}{12} [2(z-\xi)^3 r + 5(z-\xi)r(r^2 + \rho^2)] \delta_2 + \frac{\rho}{4} (\rho^4 - r^4) \delta_3 \right] + \right. \\ \left. + 0.74 \cdot \frac{r^4}{4} \right\}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Функция  $\Phi_1$  имеет предельные значения на бесконечности

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= N/4 \pi\mu \Big|_{z \rightarrow \infty, r=1}; \\ \Phi_1 &= N/4 \pi\mu \Big|_{z \rightarrow -\infty, r=1.4}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Граничным условиям (1.14)  $\Phi_1$  не удовлетворяет. Для полюса  $\rho=1.4$ ;  $\xi=0.4$  значение функции  $\frac{4}{N} \pi\mu \cdot \Phi_1$  было просчитано на границе области. Максимальная невязка достигла величины 50% в районе закругления границы; при переходе к бесконечно удаленным точкам контура ошибка в выполнении граничных условий стремится к нулю. Ликвидация невязки в удовлетворении граничных условий производится суммированием фундаментального решения

$$\Phi_0 = \frac{\rho r^2}{6} \delta_1 - \frac{r}{3} [\rho^2 + r^2 + (z-\xi)^2] \delta_2.$$

Для удовлетворения граничных условий с точностью 1,5% потребовалось взять 13 членов в сумме. Таким образом, полное решение записывается в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{N}{2\pi\mu} \sum_{k=1}^{13} a_k \Phi_0(M_k, M). \quad (3.6)$$

Коэффициенты и полюса решения (3.6) даны в табл. 2.

Таблица 2

| $\kappa$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6      |        |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $\rho_k$ | 1,15  | 1,6   | 1,15  | 1,08  | 1,05  | 1,15   |        |
| $\xi_k$  | 0,35  | 0,0   | 0,4   | 0,4   | 0,5   | 1,05   |        |
| $a_k$    | -1,45 | 1,69  | -1,68 | 0,94  | 0,067 | -0,183 |        |
| $k$      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12     | 13     |
| $\rho_k$ | 1,5   | 1,094 | 1,01  | 1,32  | 1,5   | 1,5    | 1,15   |
| $\xi_k$  | 0,0   | 0,25  | 0,4   | 0,035 | 0,08  | -0,08  | 0,20   |
| $a_k$    | 0,05  | 0,076 | -0,02 | 0,071 | 0,446 | -0,446 | -0,126 |

Напряжения  $\sigma_{z\varphi}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ , соответствующие функции напряжений  $\Phi$ , имеют вид

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{N}{\pi} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{(1,4)^4} \right) [\rho(z-\xi) \delta_2 - r \rho \delta_3] + 0,74 \cdot r + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{13} a_k \left[ -\delta_2(\rho_k \xi_k r, z) - \frac{\rho_k}{2} \delta_{1,r}(\rho_k, \xi_k, r, z) \right] \right\}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{N}{\pi} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{(1,4)^4} \right) \left[ \frac{\rho^2}{3} \delta_1 - \frac{2}{3} \frac{\rho}{r} [r^2 + \rho^2 + (z-\xi)^2] \delta_2 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{13} a_k \left[ \frac{z-\xi_k}{r} \cdot \delta_2(\rho_k, \xi_k, r, z) + \frac{\rho_k}{2} \delta_{1,z}(\rho_k, \xi_k, r, z) \right] \right\}. \quad (3.8)$$

На фигуре дана эпюра максимального касательного напряжения  $\frac{2\pi}{N} \sqrt{\sigma_{z\varphi}^2 + \sigma_{r\varphi}^2}$  по контуру области, рассчитанная по формулам (3.7), (3.8). В зоне закругления возникает концентрация напряжений. Максимальное касательное напряжение превосходит на 25% номинальное напряжение, рассчитываемое для цилиндра с радиусом  $r=1$  и подвергнутого кручению под действием момента  $N$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Х. Арутюнян, Б. П. Абрамян. Кручение упругих тел. М., 1963.
2. Г. Н. Положий. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд. Киевского университета. 1965.
3. Б. А. Костандян. О кручении полого ступенчатого вала.— «Изв. АН Арм. ССР. Серия физ-мат»: 1956, IX, № 3.
4. Б. А. Розовская. Концентрация напряжений в некоторых валах переменного сечения при кручении.— Сб. «Исследования по вопросам устойчивости и прочности». Киев, АН УССР, 1956.
5. Б. А. Соколов. О кручении вала переменного сечения.— ПММ, 1939, т. III, вып. 2.

## ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ОТНОШЕНИЯ ТОКОВ

П. А. БУКОВ, Г. С. РАТАНОВ

При различных физических измерениях, связанных с измерением ослабления ионизирующего или оптического излучения в большом диапазоне значений, необходимо для повышения точности измерений логарифмическое преобразование отношения неослабленного и ослабленного сигналов.

В настоящей работе для автоматического измерения величины

$$\tau = \ln \frac{I_1}{I_2}. \quad (1)$$

предложено устройство повышенной точности, построенное на элементах дискретной автоматики. В формуле (1)

$I_1$  — значение тока, соответствующее начальному потоку излучения;

$I_2$  — значение тока, соответствующее ослабленному излучению.

Принцип действия прибора заключается в измерении времени разряда конденсатора от напряжения  $U_1$  до напряжения  $U_2$ , которое описывается зависимостью

$$U_2 = U_1 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2)$$

В момент достижения напряжения  $U_1$  на периодически разряжающемся через  $RC$ -цепочку конденсаторе срабатывает первая схема сравнения и происходит запуск электронного счетчика. В момент достижения напряжения  $U_2$  срабатывает вторая схема сравнения и останавливает счетчик импульсов, заполняющих интервал времени между срабатываниями схем сравнения.

В итоге регистрируется число импульсов  $N$  или временной интервал  $T$

$$T = N = k \ln \frac{U_1}{U_2},$$

где  $k$  — константа, определяемая параметрами схемы.

Величина  $N$  или  $T$  регистрируется электронно-счетным прибором с выходом на перфоратор, шлейфный осциллограф в виде кодов или цифропечатающее устройство.

Функциональная схема преобразователя состоит из следующих основных узлов:

1. Преобразователь потока излучения в электрический ток (ФЭУ).
2. Ждущий мультивибратор.
3. Усилитель мощности.
4. Генератор эталонного напряжения.
5. Схема сравнения.
6. Усилитель формирователя.
7. Триггер с эмиттерным повторителем.
8. Вентиль.
9. Выходное устройство.

Быстродействие прибора (число измерений в секунду) определяется скоростью работы перфоратора или цифропечатающего устройства. После записи каждой строки схема регистрирующего устройства вырабатывает импульс окончания записи, который запускает ждущий мультивибратор. Мультивибратор формирует прямоугольный импульс, который через усилитель мощности заряжает конденсатор генератора эталонного напряжения до величины  $U_0$ . По окончании импульса начинается разряд конденсатора по экспоненте через  $RC$ -цепь. При  $U_0 = U_1$  на выходе первой схемы сравнения выдается импульс, который затем усиливается и формируется для запуска электронно-счетного прибора. При  $U_0 = U_2$  на выходе второй схемы сравнения вырабатывается по такому же алгоритму второй импульс, останавливающий счетчик.

Разработанная схема реализована в форме малогабаритной приставки к электронно-счетному прибору, смонтированному на платах унифицированного блока-питания типа «Александрит» ( $\pm 12$ в и  $\pm 6$ в).

Основные характеристики прибора:

Диапазон измерений  $\tau = 0 \div 3$ .

Точность измерения  $\tau = 0,2\%$ .

Постоянная  $RC$ -цепи = 2 мсек.

Быстродействие — 20 измерений в секунду.

Вес около 0,5 кг.

Индикация на цифровом табло электронно-счетного прибора, на ленте перфоратора или цифропечатающем устройстве типа МПУ-16.

---

# О ДВИЖЕНИИ АЭРОЗОЛЯ В ЦИКЛОННОМ ПЫЛЕУЛОВИТЕЛЕ

М. В. ВАСИЛЕВСКИЙ

Существующие циклонные аппараты для очистки газов от частиц пыли отличаются большим конструктивным разнообразием. Циклоны ЦН, ЛИОТ, ЦКТИ, батарейные выполняются с цилиндрической частью; СДК, СК, СИОТ — циклоны конического типа.

В цилиндрической части окружные и аксиальные скорости газа распределены равномерно. В конической части происходит перестройка потока по закону  $r\omega_\varphi^n = \text{const}$ , где  $n=0,5$  для внешнего потока и  $n=-1$  — для центральной области ( $r_\tau = 0,4 r_1$ ) [1]. Крупные частицы по инерции проскакивают пограничный слой, за счет упругих сил отскакивают от стенки и за счет центробежных сил снова возвращаются к стенке; мелкие частицы в турбулентном пограничном слое около стенки находятся в динамическом равновесии.

Рассмотрим турбулентное движение аэрозоля в зазоре между коаксиальными цилиндрами.

Для случая, когда  $C \frac{\rho_r}{\rho} \ll 1$ , можно считать, что частицы пассивны, т. е. не влияют на движение газа и на движение других частиц. Поэтому уравнение движения частиц определенного размера совпадает с уравнением движения для одиночной частицы [2]. Значение коэффициента турбулентного перемешивания примем постоянным и его среднее значение примем в соответствии с [3]. Положим, что окружные и аксиальные осредненные скорости частиц и газа совпадают, потоки частиц в осредненном движении в окружном и аксиальном направлениях много больше, чем диффузионные потоки при турбулентном движении в тех же направлениях.

Уравнения установившегося движения и переноса для частиц определенной фракции запишутся

$$\frac{\omega_\varphi^2}{r} = \frac{v_r}{\tau} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r (\bar{c} \bar{v}_x + \overline{c' v_x'}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{c} \bar{v}_\varphi + \overline{c' v_\varphi'}) + \frac{\partial}{\partial r} r (\bar{c} \bar{v}_r + \overline{c' v_r'}) = 0.$$

Свяжем систему координат с движущимся газом. Уравнение сохранения массы частиц определенного размера для замкнутого объема в этой системе

$$\oint \vec{n} ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{j} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} d\Omega, \quad (2)$$

где  $\vec{j}$  — поток частиц за счет турбулентного переноса и за счет центробежных сил через поверхность  $S$ ,  $n$  — нормаль к поверхности  $S$ . Положим в (1)  $c^r v^r = -\varepsilon \frac{\partial c}{\partial r}$ , где  $\varepsilon$  — коэффициент диффузии. Тогда (2) с учетом принятых допущений в цилиндрической системе координат запишется

$$r \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} r \left( c v_r - \varepsilon \frac{\partial c}{\partial r} \right) = 0. \quad (3)$$

Учитывая первое уравнение в (1) и заменяя переменные  $r = \tilde{r} r_2$ ;  $t = \tilde{t} \frac{r_2^2}{\varepsilon}$ ;  $v_r = \frac{\alpha}{\tilde{r}} \frac{\varepsilon}{r_2} = \frac{1}{\tilde{r}} \operatorname{Stk} \omega_{Bx}$ , запишем (3) в безразмерном виде

$$\tilde{r} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r} \left( \alpha \frac{\tilde{c}}{\tilde{r}} - \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} \right) = 0.$$

Поскольку на границах потока нет переноса частиц (непроницаемая стенка), суммарный поток частиц за счет центробежных сил и диффузионного переноса должен быть равен нулю.

Граничное и начальное условия в безразмерном виде запишутся

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \tilde{c}(\tilde{r}_1, \tilde{t})}{\partial \tilde{r}} + \alpha \frac{\tilde{c}(\tilde{r}_1, \tilde{t})}{\tilde{r}_1} &= 0; & - \frac{\partial \tilde{c}(\tilde{r}_2, \tilde{t})}{\partial \tilde{r}} + \alpha \frac{c(\tilde{r}_2, \tilde{t})}{\tilde{r}_2} &= 0; \\ \tilde{c}(\tilde{r}, 0) &= \tilde{c}_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Решение (3) есть

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} &= \left( \frac{r}{r_2} \right)^{2\nu} \frac{\left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]^{(\nu+1)}}{1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{2(\nu+1)}} + \left( \frac{r}{r_2} \right)^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \pi^2}{2} \times \\ &\times \frac{\left[ \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{\nu-1} W_{\nu-1} \left( \lambda_n \frac{r_1}{r_2} \right) - W_{\nu-1}(\lambda_n) \right] I_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{I_{\nu+1}^2 \left( \lambda_n \frac{r_1}{r_2} \right) - I_{\nu+1}^2(\lambda_n)} \exp(-\lambda_n \tilde{t}) W_\nu \left( \lambda_n \frac{r}{r_2} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь

$$\nu = \frac{\operatorname{Stk} \omega_{Bx} r_2}{2\varepsilon}; \quad \tilde{t} = \frac{t \cdot \varepsilon}{r_2^2};$$

$$W_\nu(\lambda_n \tilde{r}) = I_\nu(\lambda_n \tilde{r}) Y_{\nu+1}(\lambda_n \tilde{r}_1) - Y_\nu(\lambda_n \tilde{r}) I_{\nu+1}(\lambda_n \tilde{r}_1);$$

$\lambda_n$  — корни уравнения  $I_{\nu+1}(\lambda \tilde{r}_1) Y_{\nu+1}(\lambda \tilde{r}_2) - I_{\nu+1}(\lambda \tilde{r}_2) Y_{\nu+1}(\lambda \tilde{r}_1) = 0$ .

Наиболее просто рассчитать (4) при  $\nu = \frac{2p+1}{2}$ ;  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$  Ряд

в (4) при  $\bar{t}=0$  сходится медленно. Но уже при  $\bar{t}=0,002$  можно ограничиться пятью членами ряда, а при  $\bar{t}=0,01$  — одним. Анализ (4) показывает, что стационарный режим наступает довольно быстро и при  $\bar{t}=0,05$  можно считать, что процесс переноса практически не отличается от стационарного.

Для ламинарного движения аэрозоля уравнение переноса

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \text{Stk} \bar{c}) + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = 0,$$

где  $\bar{t} = \frac{t \omega_{\text{вх}}}{r_2}$ ;  $\bar{r} = \frac{r}{r_2}$  с начальным условием  $\bar{c} = \bar{c}_0 \cdot e(\bar{r} - \bar{r}_1)$ , где  $e(\bar{r} - \bar{r}_1)$  — единичная функция, такая, что  $e(+)=1$ ;  $e(-)=0$ . Решение этой задачи имеет вид

$$\bar{c} = \bar{c}_0 e\left(\sqrt{2 \text{Stk} \left(\frac{\bar{r}^2}{2 \text{Stk}} - \bar{t}\right)} - \bar{r}_1\right). \quad (5)$$

Будем считать, что все частицы, находящиеся в области  $(r_1, r_2)$ , уловятся в пылеотделителе на 100%. Тогда фракционная эффективность разделения аэрозоля в цилиндрической части может быть определена следующим образом:

$$\eta(\delta) = 1 - \frac{G_{\text{вн}}^\delta}{G_{\text{вк}}^\delta} = 1 - \frac{c_{\text{вн}}^\delta}{c_0^\delta} = 1 - \frac{2}{c_0^\delta} \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} c^\delta r dr. \quad (6)$$

На рис. 1 представлены кривые распределения концентрации частиц по сечению цилиндрической сепарационной камеры в зависимости от времени при турбулентном и ламинарном движении аэрозоля при

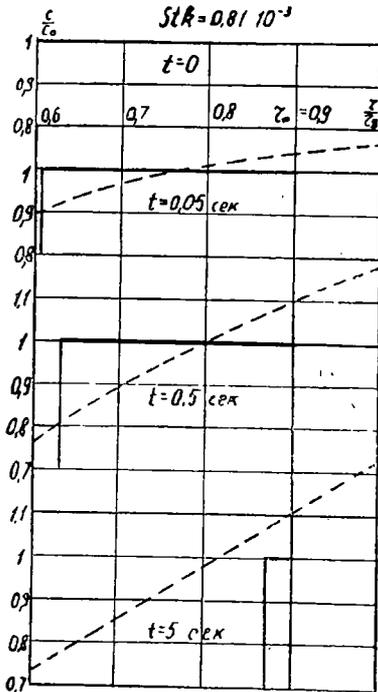


Рис. 1. Распределение концентрации частиц по радиусу во времени. — ламинарное течение, --- турбулентное течение.

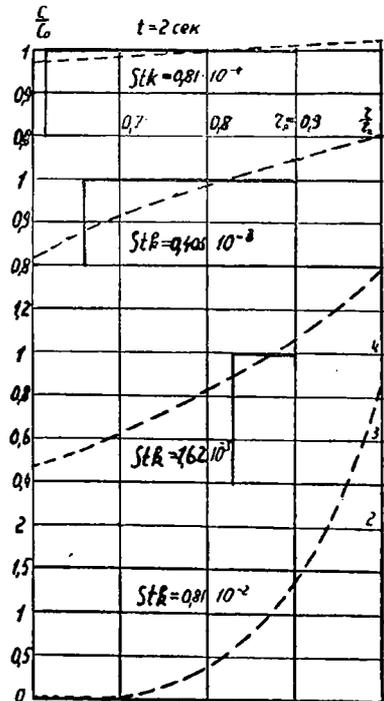


Рис. 2. Распределение концентрации частиц различного диаметра по радиусу. — ламинарное течение, --- турбулентное течение.

$w_{вх} = 20$  м/сек;  $r = 0,4$  м;  $r_1 = 0,24$  м,  $\varepsilon = 6,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/сек;  $Stk = 0,81 \cdot 10^{-3}$ ;  $r_* = 0,9$ . Из рисунка видно, что при  $t = 0,5$  сек при турбулентном движении аэрозоля процесс переноса близок к стационарному, тогда как при ламинарном течении концентрация меняется со временем.

На рис. 2 показано распределение концентрации по радиусу в зависимости от размера частиц при  $t = 2$  сек., при ламинарном и турбулентном движении аэрозоля.

На рис. 3 показаны зависимости эффективности разделения от времени для  $Stk = 0,81 \cdot 10^{-3}$  и от размера частиц (величины  $Stk$ ) при  $t = 2$  сек. Кривая  $\eta = \eta(Stk)$  для турбулентного течения аэрозоля гораздо лучше соответствует экспериментальным данным испытания циклонов ЛИОТ [4], чем для ламинарного.

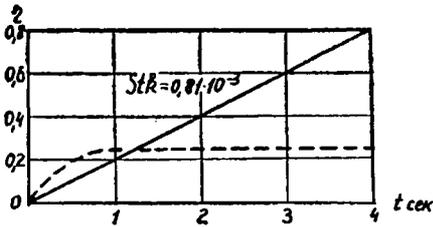


Рис. 3. Зависимость эффективности разделения от времени. — ламинарное течение, - - - турбулентное течение.

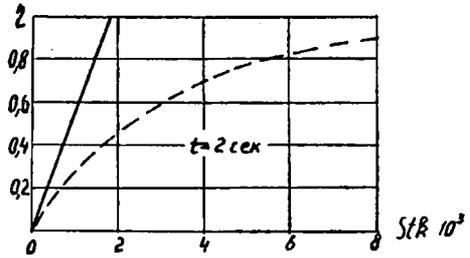


Рис. 4. Зависимость эффективности разделения от размера частиц. — ламинарное течение, - - - турбулентное течение.

Рассмотрим течение аэрозоля в конической части циклонного, пылеуловителя.

В конической части за счет противоточного движения газа осуществляется интенсивный диффузионный перенос частиц. Используя осредненное значение коэффициентов турбулентного перемешивания в плоском течении при стоке газа к центру, в [5] рассматривается турбулентное движение газа в циклоне как результат обобщения задачи вязкого движения. Можно обнаружить аналогию между рассмотренным течением в [5] и течением газа в конусе циклона, так как в результате нисходяще-восходящего движения также осуществляется перенос газа к центру, который и определяет интенсивность перемешивания.

Определим распределение концентрации в сечении входа внутреннего цилиндра циклонного аппарата как при стационарном течении в цилиндрическом канале с диаметром, равным диаметру циклона.

Система уравнений, описывающая стационарный перенос частиц при сложном распределении окружных скоростей, запишется в безразмерном виде ( $\sim$  опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r \left( \frac{\alpha_1 c_2}{r^2} - \frac{dc_2}{dr} \right) &= 0; & r_1 < r < r_2; \\ \frac{d}{dr} r \left( \frac{\alpha_1 c_1}{r^3} - \frac{dc_1}{dr} \right) &= 0; & 0 < r < r_T; \\ c_2 \frac{\alpha_1}{r_2^2} - \frac{dc(r_2)}{dr} &= 0; & c_1 \frac{\alpha_1}{r_T} - \frac{dc(r_T)}{dr} &= c_2 \frac{\alpha_1}{r_T^2} - \frac{dc_2(r_T)}{dr}; \\ c_1(r_T) &= c_2(r_T); & \frac{dc(0)}{dr} &= 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_0^1 2\pi r c dr = \pi r_2^2; \quad \eta(\text{Stk}) = 1 - \frac{1}{\pi r_1^2} \int_0^{r_1} 2\pi r c dr,$$

где в размерных величинах  $\alpha_1 = B \cdot \frac{\omega_{\text{вх}} \cdot r_2}{\varepsilon}$ ,

$$\varepsilon = \frac{1}{n+1} r \omega_r = \frac{1}{n+1} \frac{a \cdot b \cdot \omega_{\text{вх}}}{2\pi h_{\kappa}},$$

$B = A \text{Stk}$ , где  $A$  определяется из уравнений

$$\omega_{\text{вх}}(r_2 - r_1) \cos \xi = \int_{r_1}^{r_2} \omega_{\varphi} dr; \quad \omega_{\varphi} r^n = A$$

$$B = \left[ \frac{1 - r_1}{1 - r_1^{-n+1}} (-n+1) \cos \xi \right]^2 \text{Stk}.$$

Решение (7) в безразмерном виде есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0} = & \exp\left(\alpha_1 \frac{3}{2} \frac{1}{r_{\tau}}\right) \left\{ (1 - \alpha_1) \exp(-\alpha_1) - (r_{\tau} - \alpha_1) \exp\left(-\frac{\alpha_1}{r_{\tau}}\right) + \right. \\ & \left. + \alpha_1^2 \left[ -\text{Ei}(-\alpha_1) + \text{Ei}\left(-\frac{\alpha_1}{r_{\tau}}\right) \right] \right\} + \frac{2r_{\tau}^3}{\alpha_1} \left[ \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{r_{\tau}}\right) - 1 \right]; \\ \eta = & 1 - \frac{c_0}{r_1^2} \left\{ \frac{2r_{\tau}^3}{\alpha_1} \left[ \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{r_{\tau}}\right) - 1 \right] + \exp\left(\alpha_1 \frac{3}{2} \frac{1}{r_{\tau}}\right) \left\{ r_1(r_1 - \alpha_1) \exp\left(-\frac{\alpha_1}{r_1}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - r_{\tau}(r_{\tau} - \alpha_1) \exp\left(-\frac{\alpha_1}{r_{\tau}}\right) + \alpha_1^2 \left[ -\text{Ei}\left(-\frac{\alpha_1}{r_1}\right) + \text{Ei}\left(-\frac{\alpha_1}{r_{\tau}}\right) \right] \right\} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

При  $\alpha > 1$  верна следующая приближенная формула

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_1^2} \frac{r_1(r_1 - \alpha_1) \exp\left(-\frac{\alpha_1}{r_1}\right) + \alpha_1^2 \text{Ei}\left(-\frac{\alpha_1}{r_1}\right)}{(1 - \alpha_1) \exp(-\alpha_1) + \alpha_1^2 \text{Ei}(-\alpha_1)},$$

где  $\text{Ei}(-x)$  — интегральная показательная функция.

Для ламинарного течения, согласно гипотезе Бутакова С. Е. [6], в области нисходящего движения можно приближенно считать  $\omega_r = \text{const}$ ;  $\omega_x = \text{const}$ .

Частицы отсепарированы, если они не пересекут коническую поверхность, имеющую своим основанием вход внутренней трубы.

Уравнение переноса для частиц определенной фракции можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x r c) + \frac{\partial}{\partial r}(r v_r c) = 0;$$

или

$$r v_r c = \psi; \quad v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_r \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

Характеристическое уравнение  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dr}{v_r}$  есть уравнение линии тока для частиц монодисперсного аэрозоля.

Если  $\psi_*$  — линия тока, проходящая через вершину конуса, то  $G_{ун}^{\delta} = c_{вк}^{\delta}(r) v_x(r) \pi (r_*^2 - r_1^2)$ , где  $r_*$  — радиус линии тока  $\psi_*$  в основании конуса.

Интегрируя уравнение линии тока, найдем значение из выражения ( $n=0,5$ ).

$$\frac{\tilde{h} \tilde{\omega}_r}{\tilde{\omega}_x} = 1 = \tilde{r}_* - \tilde{r}_T - \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\tilde{r}_* + \gamma \tilde{r}_T - \gamma}{\tilde{r}_* - \gamma \tilde{r}_T + \gamma} - \frac{\tilde{r}_T^3}{\gamma^2} \ln \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{\tilde{r}_T^2} \right]; \quad \gamma^2 = \frac{B}{\tilde{\omega}_r}.$$

Эффективность разделения

$$\eta = 1 - \frac{r_*^2 - r_1^2}{1 - r_1^2}. \quad (9)$$

На рис. 5 представлены кривые эффективности разделения, рассчитанные по (8) и (9) для мелких частиц. Видно, что при ламинарном течении эффективность быстро стремится к единице. Кривая эффективности разделения с учетом перемешивания частиц больше соответствует данным испытания циклонов при малых  $Stk$ .

На рис. 6 представлена кривая эффективности разделения  $\eta = \eta(\alpha)$  для циклонов ЦН, а также обозначено значение эффективности разделения в соответствии с экспериментальными кривыми циклонов ЦН-15, ЦН-11, ЦН-24 [7].

Таким образом, диффузионная модель лучше дает приближение к результатам экспериментального исследования циклонных аппаратов и

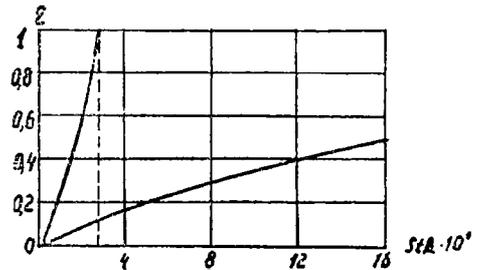


Рис. 5. Эффективность разделения для малых  $Stk$ . 1 — [6], 2 — перемешивание.

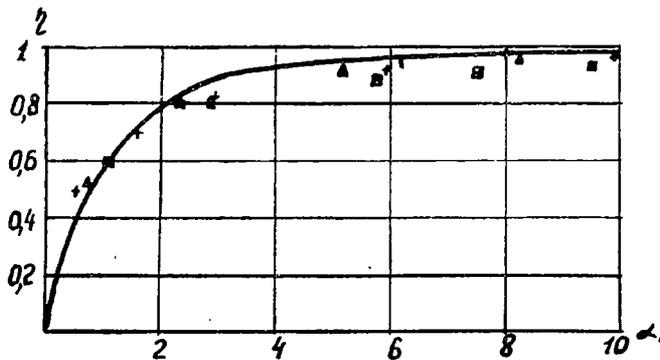


Рис. 6. Эффективность разделения по формуле (8). +, □, Δ — значения, соответствующие экспериментальным кривым разделения для циклонов, ЦН-15, ЦН-11, ЦН-24.

позволяет оценить влияние различных конструктивных факторов на эффективность разделения.

Обозначения:  $w_{вх}$ ,  $w_{\varphi}$ ,  $w_r$ ,  $w_x$ ;  $v_{\varphi}$ ,  $v_r$ ,  $v_x$  — скорости входная, окружная, радиальная, аксиальная для газа и частиц;  $c$  — концентрация;  $G_{ун}^{\delta}$  — вес унесенных частиц с диаметром  $\delta$ ;  $\rho_r$ ,  $\rho$  — плотность частицы и газа;  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  — радиусы переменного, внутреннего и внешнего цилиндров;  $r_T$  — радиус границы перехода от квазитвердого вращения к вращению по закону  $w_{\varphi} r^n = A$ ;  $\xi$  — угол наклона входного патрубка циклона;  $a \times b$  — площадь сечения патрубка на входе в циклон;  $h_k$  — высота конической части циклона;  $h$  — высота конуса (расстояние от вершины до основания) циклона;  $\epsilon$  — коэффициент диффузии;  $\tau = \frac{\rho_r \delta^2}{\rho_{11} 8 \nu}$  — время релаксации;  $Stk = \frac{\tau w_{вх}}{r_2}$  — критерий Стокса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Кизин. Методы расчета и рекомендации по газовым циклонным аппаратам. Владимир, 1970.
2. А. Фортье. Механика суспензий. Пер. с франц. М. Изд. «Мир», 1971.
3. Д. А. Нусупбекова, Б. П. Устименко. Экспериментальное исследование гидродинамики плоского криволинейного канала. — В сб.: Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Вып. 2. Алма-Ата, «Наука», Каз. ССР, 1965.
4. П. А. Коузов. Очистка воздуха от пыли в циклонах. — ЛИОТ, 1938.
5. В. А. Шваб. — ИФЖ, 1963, т. VI, № 2.
6. С. Е. Бутаков. Аэродинамика систем промышленной вентиляции. Профиздат, 1949.
7. Циклоны НИИ ОГАЗ. Руководящие указания по проектированию, монтажу и эксплуатации. Ярославль, 1971.

# О ВЛИЯНИИ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ НА ХАРАКТЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КРАТКОВРЕМЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ

В. А. ГРИДНЕВА, М. Д. МИХАЙЛОВ

В настоящее время существует ряд конечно-разностных методов, которые успешно применяются при решении задач механики сплошной среды. Среди них используются методы, выделяющие особенности в решении: ударные волны, волны разгрузки и другие специфические особенности решения. Реализация таких методов, в частности, метода характеристик, связана с определенными трудностями, вызванными их нестандартностью. Используются также так называемые методы «сквозного счета», не выделяющие ни ударных волн, ни слабых разрывов. Эти методы просты и с успехом применяются для численного решения ряда задач.

В настоящей работе для решения задачи о кратковременных импульсных нагрузках [1] используется метод введения псевдовязкости Рихтмайера—Неймана [2]. Выбор данного метода объясняется тем, что рассматриваемый процесс характеризуется внутренними разрывами, которые требуют выполнения специальных граничных условий. Эти условия обеспечиваются уравнениями Ренкина-Гюгонио, но их применение на практике затруднительно, так как поверхности, на которых должны выполняться эти условия, сами движутся в веществе. Это движение неизвестно заранее и должно определяться с помощью дифференциальных уравнений и упомянутых выше условий на скачке. Чтобы обойти эти трудности, Нейман и Рихтмайер предложили приближенный метод решения задач гидродинамики, в котором скачки учитываются автоматически, где бы и когда они ни возникали. Идея метода состоит во введении псевдовязкости такого рода и такой величины, чтобы поверхность раздела заменялась тонким переходным слоем, в котором все величины меняются резко, но без разрывов.

## 1. Постановка задачи

Ударник в форме плоской пластины, высота которой  $l_0$ , много меньше диаметра  $d_0$  в момент встречи с мишенью, которую считаем массивной, неподвижной, имеет скорость  $V_0$ , направленную по нормали к поверхности взаимодействующих тел. Предположим, что скорость взаимодействия  $V_0$  такова, что прочностными эффектами материалов ударника и мишени можно пренебречь и решать задачу в так называемой гидродинамической постановке. Для описания процесса взаимодействия

Двух тел в одномерном приближении используем систему уравнений в массовых лагранжевых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= u, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial q}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial q}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -P \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнение состояния возьмем в виде, предложенном Осборном [3].

$$P = \frac{1}{\rho_0 E + \varphi_0} \{ \xi (a_1 + a_2 |\xi|) + E \rho_0 [b_0 + \xi (b_1 + b_2 \xi)] + E (c_0' + c_1 \xi) \}, \quad (1.1')$$

где  $\rho_0$  — плотность материала в недеформированном состоянии,  $P$  — давление,  $u$  — массовая скорость,  $v = \frac{1}{\rho}$  — удельный объем,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $R(q, t)$  — координата малого элемента жидкости в момент времени  $t$ ,  $q$  — массовая лагранжева координата частицы,  $\zeta = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}$  — характеризует сжимаемость материала,  $\varphi_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_0'$ ,  $c_1$  — постоянные, значения которых зависят от выбранного материала. Для системы уравнений (1.1) — (1.1') ставится краевая задача:

$$\begin{aligned} u(R, 0) &= \begin{cases} V_0 & \text{при } R_0 \leq R \leq R_1, \\ 0 & \text{при } R_1 < R < R_2; \end{cases} \\ \rho(R, 0) &= \begin{cases} \rho_0^y & \text{при } R_0 \leq R \leq R_1, \\ \rho_0^x & \text{при } R_1 < R < R_2; \end{cases} \\ E(R, 0) &= 0 \text{ при } R_0 \leq R < R_2; \\ P(R, 0) &= 0 \text{ при } R_0 \leq R < R_2; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$P(R, t) = 0$  для любого  $t > 0$  — граничное условие на свободной поверхности, где  $\rho^y$ ,  $\rho^x$  — плотности недеформированных материалов ударника и мишени;  $R_0$  — координата частицы жидкости, лежащей на свободной поверхности первого тела;  $R_1$  — координата частицы жидкости контактной поверхности, разделяющей два тела;  $R_2$  — координата тыльной свободной поверхности неподвижного тела, причем в нашей задаче  $R_2$  как угодно велика.

## 2. Метод решения.

Как уже говорилось выше, задача (1.1) — (1.2) решается численно методом искусственной вязкости Рихтмайера—Неймана, который состоит в добавлении в системе (1.1) к давлению  $P$  дополнительного слагаемого  $\omega$ . Этот дополнительный член берется в виде

$$\omega = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{V} \cdot \Delta q \frac{\partial u}{\partial q} & \text{при } \frac{\partial u}{\partial q} < 0, \\ 0 & \text{при } \frac{\partial u}{\partial q} \geq 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

или

$$\omega = \begin{cases} \frac{\mu_1}{V} (\Delta q)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 & \text{при } \frac{\partial u}{\partial q} < 0, \\ 0 & \text{при } \frac{\partial u}{\partial q} \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь  $\mu_0$  и  $\mu_1$  — безразмерные постоянные. Приведем систему уравнений (1.1) — (1.1'), а также соответствующие краевые условия к безразмерному виду. Безразмерные величины вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} R &= l_0 \cdot \bar{R}, \quad u = c_0 \bar{u}, \quad t = \frac{l_0}{c_0} \bar{t}, \quad P = \rho_0 c_0^2 \bar{P}, \quad \omega = \rho_0 c_0^2 \bar{\omega}, \quad E = c_0^2 \bar{E}, \quad a_1 = \\ &= (\rho_0 c_0^2)^2 \bar{a}_1, \quad a_2 = (\rho_0 c_0^2)^2 \bar{a}_2, \quad b_0 = \rho_0 c_0^2 \bar{b}_0, \quad b_1 = \rho_0 c_0^2 \bar{b}_1, \quad b_2 = \rho_0 c_0^2 \bar{b}_2, \quad c'_0 = \\ &= \rho_0 \bar{c}'_0, \quad c_1 = \rho_0 \bar{c}_1, \quad \varphi_0 = \rho_0 c_0^2 \bar{\varphi}_0. \end{aligned}$$

Система уравнений (1.1) — (1.1') в безразмерных величинах примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} &= \bar{u}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{P} + \bar{\omega})}{\partial \bar{q}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{q}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} + (\bar{P} + \bar{\omega}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} &= 0, \\ \bar{P} &= \frac{1}{\beta \bar{E} + \bar{\varphi}_0} \{ \xi (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 |\xi|) + \beta \bar{E} [ \bar{b}_0 \xi (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 \xi) + \bar{E} (c'_0 + \bar{c}_1 \xi) ] \}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В случае, когда система (2.3) описывает процессы, происходящие в ударнике,  $\beta = \frac{\rho_0^y}{\rho_0^m}$  и коэффициенты уравнения состояния вычисляются по формулам:

$$\bar{a}_1^y = \frac{a_1^y}{(\rho_0^m c_0^{2m})^2}, \quad \bar{a}_2^y = \frac{a_2^y}{(\rho_0^m c_0^{m^2})^2}, \dots$$

Если система (2.3) описывает течение процесса в мишени, то  $\beta = 1$  и коэффициенты уравнения состояния получаются по формулам:

$$\bar{a}_1^m = \frac{a_1^m}{(\rho_0^m c_0^{m^2})^2}, \quad \bar{a}_2^m = \frac{a_2^m}{(\rho_0^m c_0^{m^2})^2}, \dots$$

Краевые условия в безразмерных величинах принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{R}, 0) &= \begin{cases} \bar{V}_0 & \text{при } \bar{R}_0 \leq \bar{R} \leq \bar{R}_1, \\ 0 & \text{при } \bar{R}_1 < \bar{R} < \bar{R}_2; \end{cases} \\ \rho(\bar{R}, 0) &= \begin{cases} \beta & \text{при } \bar{R}_0 \leq \bar{R} \leq \bar{R}_1, \\ 1 & \text{при } \bar{R}_1 < \bar{R} < \bar{R}_2; \end{cases} \\ \varepsilon(\bar{R}, 0) &= 0 \text{ при } \bar{R}_0 \leq \bar{R} < \bar{R}_2; \\ \bar{P}(\bar{R}, 0) &= 0 \text{ при } \bar{R}_0 \leq \bar{R} < \bar{R}_2; \\ \bar{P}(\bar{R}, \bar{t}) &= 0 \text{ для любого } \bar{t} > 0, \text{ при } R = R_0, R = R_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В дальнейшем для простоты изложения черточки над безразмерными величинами будем опускать.

Для численного решения задачи (2.3) — (2.4) система дифференциальных уравнений (2.3) заменяется явной конечно-разностной схемой, предложенной в [2]:

$$\begin{aligned} \frac{R_j^{n+1} - R_j^n}{\tau} &= u_j^{n+1} \text{ для } j = 1, 2, \dots, N; \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{(\delta P_j^n + (\delta \omega)_{j,j}^n)}{\Delta q} \text{ для } j = 1, 2, \dots, m, \beta = \frac{\rho_0^y}{\rho_0^x}; \text{ для } j = m+1, \dots, N, \beta = 1; \\ \frac{v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j+1/2}^n}{\tau} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta q} &\leq 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, m-1, \beta = \frac{\rho_0^y}{\rho_0^x}; \text{ для } j = m, m+1, \dots, \\ N-1, \beta &= 1; \\ \frac{E_{j+1/2}^{n+1} - E_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\bar{P}_{j+1/2}^{n+1} + \bar{P}_{j+1/2}^n}{2} \cdot \frac{v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j+1/2}^n}{\tau} &\text{ для } j = 1, 2, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} P_{j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\beta E_{j+1/2}^{n+1} + \varphi_0} \{ (\rho_{j+1/2}^{n+1} - 1)(a_1 + a_2 |\rho_{j+1/2}^{n+1} - 1|) + \beta E_{j+1/2}^{n+1} [b_0 + \\ &+ (\rho_{j+1/2}^{n+1} - 1)(b_1 + b_2(\rho_{j+1/2}^{n+1} - 1)) + E_{j+1/2}^{n+1} \cdot (c_0 + c_1(\rho_{j+1/2}^{n+1} - 1))] \}, \end{aligned}$$

для

$$j = 1, 2, \dots, m-1, \beta = \frac{\rho_0^y}{\rho_0^x}, a_1 = \bar{a}_1^y, \dots, \varphi_0 = \bar{\varphi}_0^y; \text{ для } j = m, m+1, \dots, N-1,$$

$$\beta = 1, a_1 = \bar{a}_1^x, a_2 = \bar{a}_2^x, \dots, \varphi_0 = \bar{\varphi}_1^x;$$

$$\omega_{j+1/2}^n = \begin{cases} -\frac{\mu}{v_{j+1/2}^n} (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{при } u_{j+1}^n - u_j^n < 0, \\ 0 & \text{при } u_{j+1}^n - u_j^n \geq 0; \end{cases}$$

или

$$\omega_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{2\mu_1}{v_{j+1/2}^n + v_{j+1/2}^{n-1}} (u_{j+1}^n - u_j^n)^2 & \text{при } u_{j+1}^n - u_j^n < 0, \\ 0 & \text{при } u_{j+1}^n - u_j^n \geq 0, \end{cases}$$

где  $N$  — конечная точка разбиения рассматриваемой области.

В [2] показано, что если поверхность раздела двух сред совпадает с узлом сетки, отмеченным индексом  $j = m$ , то в этой точке при вычислениях второе уравнение системы (2.5) заменяется следующим:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{3[(\delta P)_m^n + \delta \omega)_m^n] - \frac{1}{3} \cdot [(P_{m+3/2}^n - P_{m-3/2}^n) + (\omega_{m+3/2}^n - \omega_{m-3/2}^n)]}{\Delta^2 q + \Delta^4 q}$$

Устойчивость конечно-разностной схемы (2.5) проверялась аналогично [1], и был получен соответствующий критерий устойчивости.

Численная реализация метода псевдовязкости проводилась на ЭВМ М-220. Счет велся по временным шагам с выбором временного шага из критерия устойчивости. По известным значениям  $u$ ,  $V$ ,  $\varepsilon$ ,  $P$  на нулевом слое определялись значения этих величин на первом временном слое ( $t_1 = t_0 + \tau$ ).

Кроме того, на этом же слое для каждой точки проверялось условие устойчивости. Если для данного  $\tau$  оно не выполнялось хотя бы в одной точке, то шаг по времени  $\tau$  уменьшался до тех пор, пока это условие не было справедливо для всех точек.

Далее аналогично, по известным значениям этих величин на следующем временном слое. Для удобства численных расчетов на нулевом слое вначале бралось небольшое число точек. Но так как с течением времени скачок двигался вправо, то через каждые 40 временных слоев машина автоматически прибавляла по 10 узлов сетки с параметрами невозмущенной среды. Таким образом, движение скачка могло проследиваться неопределенно долго.

### 3. Результаты счета

Результаты счета, проведенного по методу псевдовязкости Рихтмайера-Неймана, показали, что параметр  $\mu$ , входящий в выражение псевдовязкости, существенно влияет на характер решения в случае линейной (1.2) и в случае квадратичной (2.2) вязкостей. Для приемлемого описания изменения величин  $u$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $P$ , характеризующих течение процесса, проводился подбор оптимальных значений  $\mu$  для обоих типов вязкости. Под оптимальным понимается значение  $\mu$ , при котором осцилляционные эффекты, по возможности, сведены к минимуму, а число ячеек, на которое происходит размазывание ударной волны, также, по возможности, сведено к минимуму (3—4 ячейки)..

Для облегчения подбора коэффициента искусственной вязкости  $\mu$  на печать выдавались ее значения вместе со значениями  $u$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $P$ . Было замечено, что на ударной волне псевдовязкость имеет наибольшее значение — пик, а во всех остальных расчетных точках ее значения близки к нулю. На рис. 1 построена зависимость оптимального значения  $\mu$  от массовой скорости  $u$  (равной в случае взаимодействия тел с одинаковыми плотностями половине скорости встречи  $V_0$ ). Вышеуказанная зависимость получена для случая столкновения одноплотных тел из Al, Fe, Cu и плексигласа для различных скоростей  $V_0$ , как для линейной, так и квадратичной вязкостей. Построенная на рис. 1 зависимость облегчает подбор оптимального значения  $\mu$  в случае, когда  $V_0$  меняется в диапазоне от 0,2 до 1,0 см/мксек.

На рис. 2 приведены графики изменения массовой скорости  $u$  и давления  $P$ , представляющие результат численного счета для случая взаимодействия Al → Al со скоростью 0,92404 в безразмерном виде (вязкость использовалась линейная и квадратичная,  $\mu$  бралось равным 0,7 и 1,48 соответственно от момента времени  $t = 0,05$  мксек, до  $t = 0,28$  мксек, ( $t_0 = 0,2$  см).

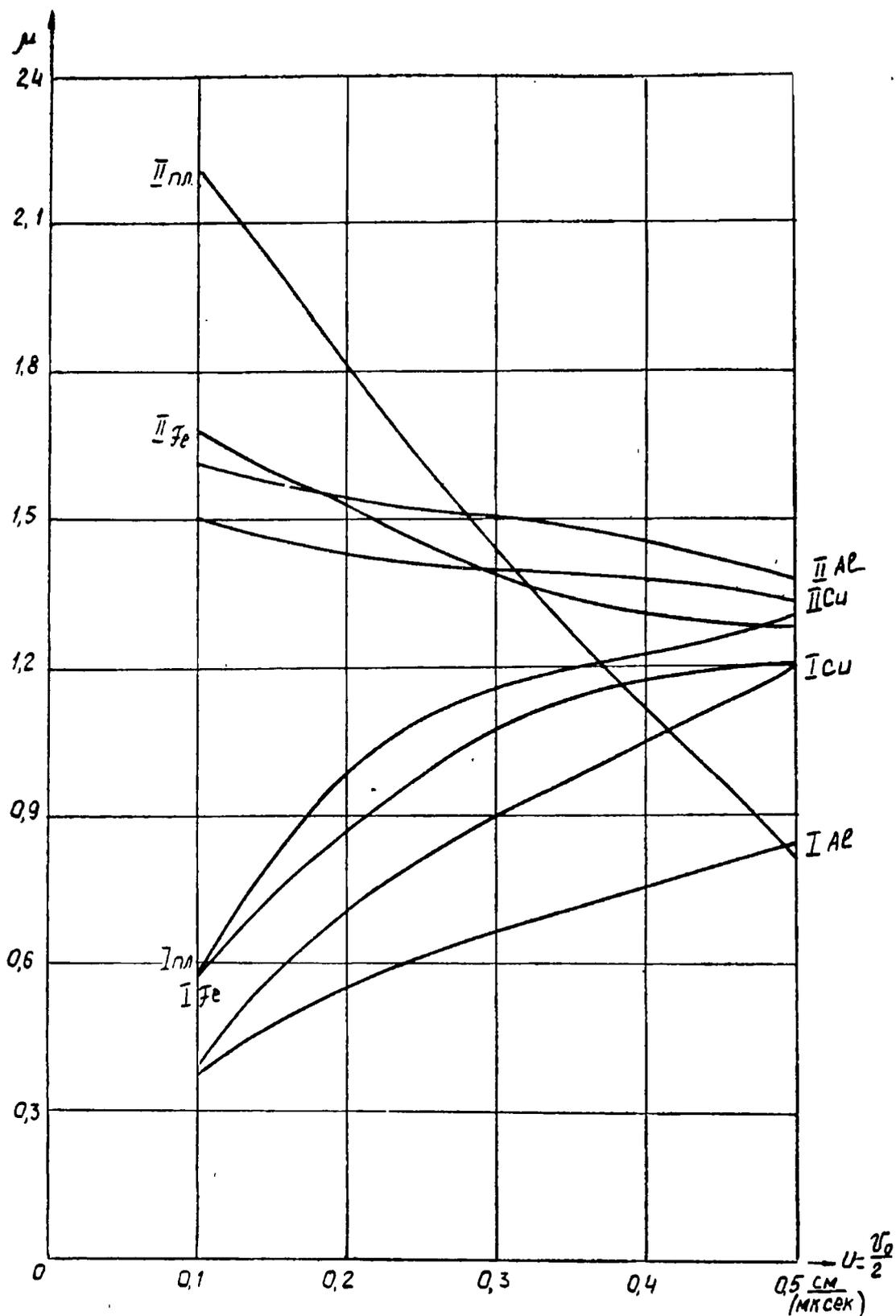


Рис. 1. I — кривая для линейной вязкости; II — кривая для квадратичной вязкости.

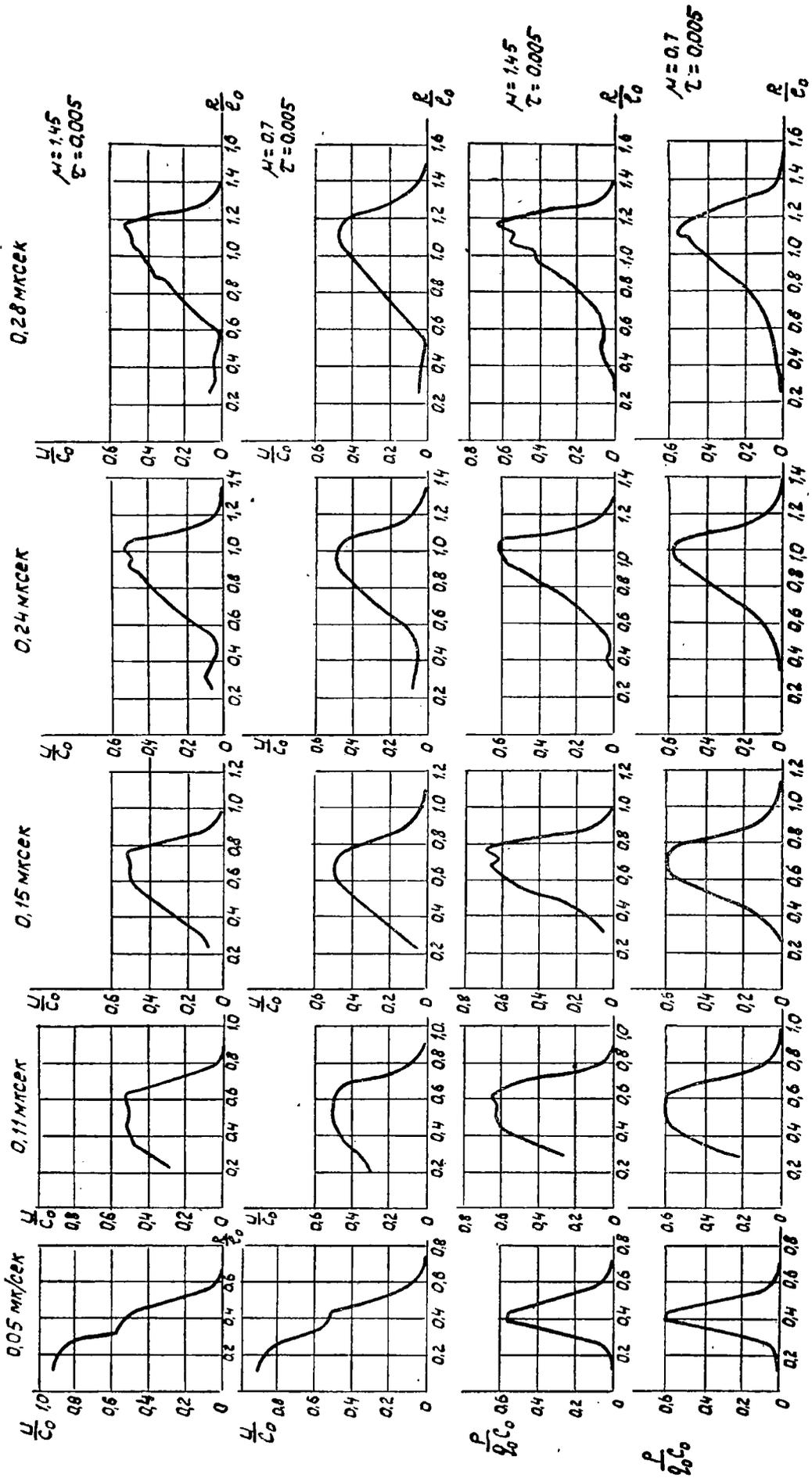


Рис. 2.

Анализ рис. 2 показывает, что непосредственно после столкновения от контактной поверхности в ударник и мишень распространяются плоские ударные волны, в результате чего в деформированной области, заключенной между плоскими ударными фронтами, образуется площадка, на которой значение массовой скорости равно  $\approx \frac{V_0}{2}$ .

К моменту  $t \approx 0,13$  мксек ударная волна в ударнике достигнет его свободной поверхности и отразится от последней в виде волны разрежения. Волна разрежения, распространяясь в ударнике, а затем в мишени, будет уменьшать значения параметров, характеризующих процесс взаимодействия. В некоторый момент времени волна разгрузки догонит ударную волну, и процесс разгрузки пойдет интенсивнее.

Как видно из того же рис. 2, сравнением графиков, показывающих распределение давления  $P$ , а также массовой скорости  $u$  для одинаковых моментов времени для линейной и квадратичной вязкостей: профиль ударной волны для случая квадратичной вязкости получается круче, хотя при этом имеют место небольшие осцилляции. В случае линейной вязкости осцилляционные эффекты отсутствуют, но профиль ударной волны размывается сильнее. Следовательно, если необходимо, чтобы профиль ударной волны был круче, приходится мириться с некоторыми осцилляциями, и наоборот.

Аналогичная картина наблюдалась при численном решении задачи о кратковременных импульсных нагрузках в случае, когда два взаимодействующих тела были разноплотными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Гриднева, Р. М. Махаловская, М. Д. Михайлов. Решение задачи о кратковременных импульсных нагрузках методом псевдовязкости.— Труды НИИ ПММ. Т. 3, 1973.
  2. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. Москва, 1960.
  3. Т. Райни, Д. Халда. Об эффективности метеорной защиты. РТК. Т. 6, № 2, 1968, с. 177—184.
  4. Я. Б. Зельдович, Ю. Л. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Москва, 1963.
-

## РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА ПРИ ВЫСОКОНАПОРНОМ ПНЕВМОТРАНСПОРТЕ ПОРШНЕВОГО ТИПА

В. М. ЕГОРОВ, Б. Б. КВЕСКО

Разработан метод численного расчета нестационарного движения совокупности поршней сыпучего материала в период выхода на режим установки высоконапорного пневмотранспорта поршневого типа. Результаты расчетов позволили выявить влияние изменения начальных параметров на характер движения поршней. Данный метод может быть рекомендован как способ расчета внутризаводских установок высоконапорного пневмотранспорта поршневого типа.

При решении задач внутризаводского транспорта поршневого типа количество поршней в трубопроводе обычно ограничено, как показал опыт экспериментальных исследований, на 100 м приходится 2—4 поршня при малых диаметрах трубопровода, а при больших диаметрах количество поршней на 100 м, очевидно, уменьшится. Кроме того, в трубопроводе из-за дискретного характера ввода и вывода поршней в разные моменты времени находится различное число поршней, а это, при малом количестве поршней в трубопроводе, приводит к резким изменениям массы системы, т. е. совокупности поршней и воздушных промежутков. В связи с этим нельзя не считаться с нестационарностью процесса движения. Предлагаемый метод, учитывающий нестационарность процесса, в частности, и тот факт, что масса системы непостоянна, позволяет рассчитать процесс поршневого движения сыпучего материала применительно к следующей схеме процесса (рис. 1). Из бункера 1 в трубопровод 2 подается сыпучий материал под действием давления  $P_0$ . В сечении 1—1 трубопровода с помощью электромагнитного клапана 3 производится периодический выпуск сжатого воздуха с давлением  $P_0$ . Входящая порция сжатого воздуха разделяет сыпучий материал в сечении 1—1 на две части. Одна часть сыпучего материала, связанная с бункером, при этом останавливается, а другая, т. е. образовавшийся поршень, под воздействием воздушного потока начинает с ускорением перемещаться по трубопроводу. После закрытия электромагнитного клапана давление в образовавшемся воздушном промежутке падает и через какое-то время перепад давления на запорном участке трубопровода, т. е. на участке между сечениями 0—0 — 1—1 достигает величины, достаточной для преодоления сопротивления трения сыпучего материала на этом участке, после чего вновь начинается перемещение сыпучего материала из бункера, после нового открытия электромагнитного клапана образуется второй поршень и второй воздушный промежуток.

Дальше процессы образования поршней и воздушных промежутков повторяются и через определенное время весь трубопровод заполнится поршнями сыпучего материала с промежутками сжатого воздуха между ними. Таким образом, задача сводится к рассмотрению движения совокупности поршней и газовых промежутков. При этом учитываются процессы входа каждого поршня в трубопровод и его выхода из трубопровода. При решении задачи сделаны следующие допущения:

1) плотность смеси сыпучего материала с воздухом в поршне постоянна в течение всего периода движения его по трубопроводу;

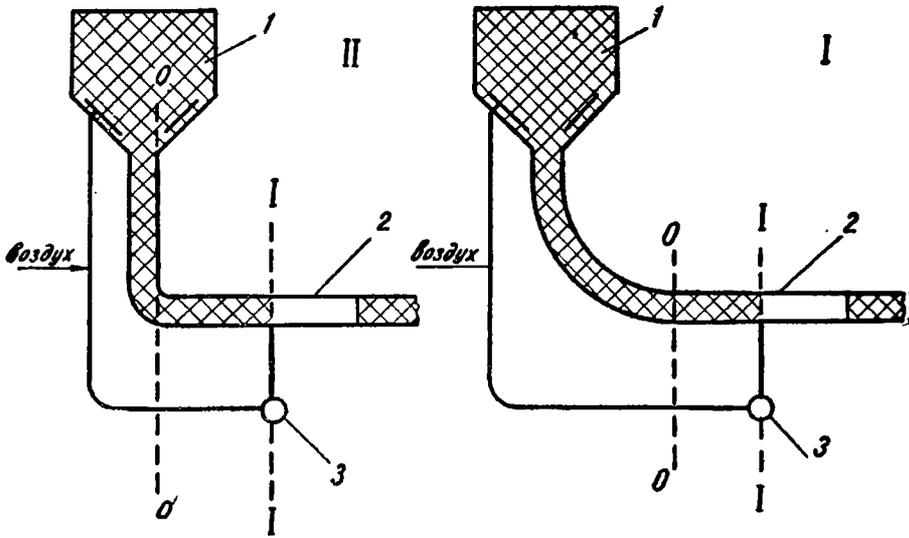


Рис. 1. Принципиальные схемы установок поршневого пневмотранспорта.

2) рассматриваются предельные случаи расширения воздушных промежутков — адиабатический и изотермический;

3) фильтрация воздуха через поршень не учитывается;

4) трубопровод принимается прямолинейным и горизонтальным;

5) рассматривается два крайних случая присоединения массы материала, поступающего из бункера, к образующемуся поршню, когда скорость присоединения равна скорости движения поршня и скорость присоединения равна нулю, эти случаи относятся соответственно к схемам установок I и II на рис. 1;

6) при выходе поршня из трубопровода принимается, что скорость отсоединения равна скорости движения поршня.

При сделанных допущениях получаем уравнения движения поршня по трубопроводу. Уравнения движения формирующегося и выходящего поршней выведем исходя из теоремы об изменении количества движения, согласно которой

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \Sigma \bar{F}e,$$

где  $\Sigma \bar{F}e$  — сумма внешних сил, действующих на систему.

Рассмотрим систему, состоящую из движущейся порции материала (поршня) и присоединяющейся к ней массы материала. Пусть в некоторый момент времени  $t$  отдельно двигаются две порции материала, одна имеет массу  $M$  и скорость относительно некоторой неподвижной системы координат  $\bar{U}$ , другая — массу  $\Delta M$  и скорость  $\bar{V}$  относительно этой

же системы координат. В этот момент времени количество движения  $Q_1$  данной системы будет

$$Q_1 M \bar{U} + \Delta M \bar{V}. \quad (2)$$

Через некоторое время  $\Delta t$  происходит присоединение массы  $\Delta M$  к массе  $M$ . Количество движения

$$Q_2 = (M + \Delta M)(\bar{U} + \Delta \bar{U}), \quad (3)$$

где  $\Delta U$  — приращение скорости, вызванное присоединением массы. Изменение количества движения за время  $\Delta t$  можно записать в следующем виде:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = (\Delta M + M)(\bar{U} + \Delta \bar{U}) - M \bar{U} - \Delta M \bar{V}. \quad (4)$$

Пренебрегаем малой второго порядка  $\Delta M \cdot \Delta \bar{U}$  и, сокращая подобные члены, получаем

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \Delta M \bar{U} + M \Delta \bar{U} - \Delta M \bar{V} = M \Delta \bar{U} + \Delta M(\bar{U} - \bar{V}). \quad (5)$$

Рассматривая данное изменение за бесконечно малый промежуток времени и используя теорему об изменении количества движения, получим

$$\frac{dQ}{dt} = M \frac{d\bar{U}}{dt} + \Delta M(\bar{U} - \bar{V}) = \Sigma Fe. \quad (6)$$

Аналогичным образом выводится уравнение движения в случае отсоединения (излучения) массы ( $-\Delta M$ ) телом с массой  $M$ , в результате чего имеем

$$M \frac{d\bar{U}}{dt} \pm \frac{dM}{dt}(\bar{U} - \bar{V}) = \Sigma Fe. \quad (7)$$

Таким образом, движение тела переменной массы описывается следующим уравнением:

$$M \frac{d\bar{U}}{dt} \pm \frac{dM}{dt}(\bar{U} - \bar{V}) = \Sigma Fe, \quad (8)$$

где (+) — присоединение массы, (—) — излучение массы. В данной постановке на систему действуют только две силы: сила, вызываемая перепадом давления на ней, и сила трения, т. е.

$$\Sigma Fe = S \Delta \bar{P} + \bar{F}_{mp},$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения трубопровода;  $\Delta P$  — перепад давления на системе;  $F_{mp}$  — сила трения. В проекции на ось ординат (для одномерного случая) получим

$$M \frac{dU}{dt} \pm \frac{dM}{dt}(\bar{U} - \bar{V}) = S \Delta P - F_{mp}. \quad (9)$$

Согласно допущения (5) имеем:

1) для формирующегося поршня

$$\text{а) } M \frac{dU}{dt} + \frac{dM}{dt} U = S \Delta P - F_{mp} \text{ при } \dot{V} = 0, \quad (10)$$

$$\text{б) } M \frac{dU}{dt} = S \Delta P - F_{mp} \text{ при } U = V; \quad (11)$$

2) для выходящего из трубопровода поршня:

$$M \frac{dU}{dt} = S \Delta P - F_{mp}. \quad (12)$$

При этом в уравнениях (10—12)  $M$  является функцией времени.

При движении сформировавшегося поршня до начала его выхода из трубопровода масса поршня остается все время постоянной и согласно второму закону Ньютона

$$M \frac{dU}{dt} = \Sigma Fe = S \Delta P - F_{mp}, \text{ где } M = \text{const}. \quad (13)$$

Распространим систему (10—13) на совокупность  $n$  одновременно движущихся поршней и запишем ее в виде, удобном для численного расчета.

Введем, согласно рис. 2, следующие обозначения:  
 $l_i$ ,  $U_i$ ,  $M_i$  — длина, скорость, масса  $i$ -го поршня.  
 $x_i$  — путь, пройденный  $i$ -м поршнем.

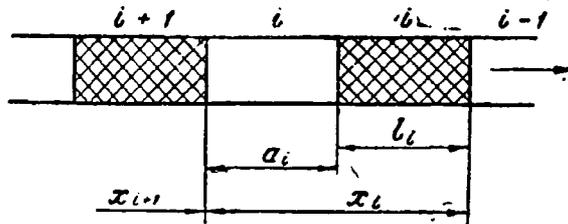


Рис. 2. Схема поршневого движения.

$P_i$ ,  $\rho_i$  — давление, плотность воздуха в  $i$ -м воздушном промежутке.

$a_i$  — длина  $i$ -го воздушного промежутка.

$i = m, \dots, k$ , где  $m$  — номер выходящего поршня,  $k$  — номер входящего поршня.

С учетом принятых обозначений система (10—13) запишется в виде.

$$M_k \frac{dU_k}{dt} + \frac{dM_k}{dt} U_k = S \Delta P_k - F_{mpk}, \quad (10-1)$$

$$M_k \frac{dU_k}{dt} = S \Delta P_k - F_{mpk}, \quad (11-1)$$

$$M_m \frac{dU_m}{dt} = S \Delta P_m - F_{mpm}, \quad (12-1)$$

$$M_i \frac{dU_i}{dt} = S \Delta P_i - F_{mpi}, \quad i = m+1, \dots, k-1 \quad (13-1)$$

$$\begin{aligned}
 M_k &= E\rho_u \cdot Sx_k + m^*, \\
 M_m &= E m_m^0 - E\rho_u S(x_m - L_{mp}), \\
 M_i &= E\rho_u S l_{ni}, \\
 \Delta P_i &= P_i - P_{i-1}, \quad i=m, \dots, k, \\
 P_{k-1} &= P_a; \quad P_m = P_0, \\
 \frac{dM_k}{dt} &= E\rho_u \cdot S \frac{dx_k}{dt} = E\rho_u S U_k,
 \end{aligned}$$

где  $E$  — объемная концентрация материала в поршне.

$\rho_u$  — истинная плотность материала.

$m^*$  — масса запорного участка.

Запишем систему (10—1) — (13—1) в виде одного уравнения

$$M_i \frac{dU_i}{dt} = \beta \rho_u E S U_i^2 = S(P_i - P_{i-1}) - F_{mp}; \quad (14)$$

где  $\beta = 1$  для входящего поршня при  $V = 0$ . Во всех остальных случаях  $\beta = 0$ .

$$M_i = \begin{cases} m + \rho_u S E x_i & \text{— для входящего поршня,} \\ \rho_u E S l_i & \text{— для сформировавшегося поршня до выхода,} \\ m_i^0 - E\rho_u S(x_m - L_{mp}) & \text{— для выходящего поршня.} \end{cases}$$

Расстояние, пройденное поршнем, находим из соотношения

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i. \quad (15)$$

Пусть  $a_i^0$  — длина  $i$ -го воздушного промежутка в конце выпуска воздуха, тогда, учитывая

$$P_i = P_0 \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\kappa}$$

и имея в виду допущение 3, получим

$$P_i = P_0 \left( \frac{a_i^0}{a_i} \right)^{\kappa}. \quad (16)$$

Во время движения длина воздушного промежутка, как это следует из рис. 2, равна

$$a_i = x_i - x_{i+1} - l_i. \quad (17)$$

Система уравнений (14—17) решается при следующих начальных условиях:

$$U_i = x_i = 0; \quad l_i = Z_0; \quad P_i = P_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (18)$$

Здесь  $Z_0$  — длина запорного участка,  $t_i$  — время движения  $i$ -го поршня.

При решении задачи о нестационарном движении в трубопроводе совокупности поршней сыпучего материала были рассмотрены вопросы определения или выбора начальной длины воздушного промежутка,

длины самого поршня, а также определение длины трубопровода при заданном значении начального давления.

Исходя из анализа результатов расчетов и опыта экспериментальных исследований, длину поршня рекомендуется задавать в качестве исходной величины, полагаясь при этом на результаты, полученные из экспериментальных исследований и в особенности при определении длин коротких поршней. Из экспериментальных исследований известно [2], что для большинства сыпучих материалов выбор длины поршней меньше 1—2 м нецелесообразен в силу их малой стабильности.

Верхний предел длины поршня определяется и теоретически. Действительно, при формировании поршня его скорость растет до определенного предела и, когда при некоторой длине, которую назовем предельной, сила сопротивления трения поршня становится больше приложенной к нему движущей силы сжатого воздуха, скорость поршня начинает убывать. Очевидно, что выбирать длину поршня больше этой предельной величины нецелесообразно, поскольку скорость такого поршня сразу после его формирования начинает убывать, вследствие чего дальность транспортирования оказывается весьма незначительной.

Вместо длины поршня можно задавать время формирования поршня, также используя результаты экспериментальных исследований. Однако, как показали расчеты, при использовании времени формирования поршней несколько увеличивается период выхода пневмотранспортной установки на стабильный режим.

Определение длины воздушного промежутка рекомендуется проводить либо из условия постоянства времени впуска воздуха, либо из условия постоянства значения расходной концентрации.

Постоянное время впуска воздуха целесообразно задавать в том случае, когда и длина поршня определяется из условия постоянства времени его формирования. Если задается длина поршня, то величина воздушного промежутка определяется выбранным значением расходной концентрации  $\mu$  и выражается в виде

$$a_i = \frac{\rho_u E - \mu(1-E)\rho_i}{\mu\rho_i} l_m \quad (19)$$

Длина трубопровода или дальность транспортирования определяется из условия

$$(P_0 - P_a) S \leq \sum_{i=1}^k F_{mpi} \quad (20)$$

Здесь  $F_{mpi}$  — сила сопротивления трения  $i$ -го поршня.  $k$  — число поршней, одновременно находящихся в трубопроводе. Как только достигается условие (20), т. е. движущая сила сжатого воздуха становится равной силе трения совокупности всех поршней, одновременно находящихся в трубопроводе, начинается расчет выхода  $i$ -го поршня. При таком методе определения длины транспортного трубопровода процесс выхода на режим занимает достаточно большой период времени и добиться строгой периодичности процесса движения, т. е. постоянной длины трубопровода, постоянного значения скорости поршня на выходе не удается, поскольку эти параметры колеблются около некоторого условного среднего значения. Причем величина амплитуды этих колебаний растет с возрастанием количества поршней, находящихся в трубопроводе. В связи с этим пользоваться условием (20) для определения длины транспортного трубопровода становится затруднительным. Поэтому при

большом количестве поршней в трубопроводе рекомендуется задавать дальность транспортирования исходя из соображений опыта экспериментальных исследований и затем уточнять длину трубопровода путем последовательных приближений к оптимальному режиму транспортирования, достигая при заданной производительности и расходной концентрации максимальной дальности транспортирования, а при заданной дальности — минимального значения начального давления.

Проведенные расчеты позволили исследовать как процесс выхода пневмотранспортной установки на рабочий режим, так и особенности поршневого движения после установления рабочего режима.

Установлено, что при транспортировании на заданное расстояние (т. е. при строго постоянной длине трубопровода) процесс выхода на режим происходит сравнительно быстро и определяется количеством поршней, одновременно находящихся в трубопроводе. Так, при движении одиночного поршня выход на режим заканчивается после формирования второго поршня, при движении двух поршней — после выхода третьего поршня, а при одновременном движении в трубопроводе шести поршней режим устанавливается после выхода из трубопровода седьмого поршня. После установления рабочего режима каждый последующий поршень полностью повторяет движение предыдущих, причем при малом количестве поршней (1—3) как скорость, так и давление изменяются вдоль трубопровода плавно. Для одного и того же перепада давления при малых значениях расходной концентрации имеет место непрерывный рост скорости, при больших значениях расходной концентрации скорость поршня в конце трубопровода обычно убывает.

Увеличение числа поршней, одновременно находящихся в трубопроводе, приводит к колебательному изменению давления и скорости поршней при их движении по трубопроводу. Увеличение длины поршня при постоянном значении расходной концентрации приводит к уменьшению числа поршней в трубопроводе и стабилизации их движения. Скорость поршней при этом уменьшается, несколько уменьшается и производительность установки.

На рис. 3 показан характер изменения скорости поршней вдоль трубопровода при разных значениях расходной концентрации и различной длине поршня. В качестве транспортируемого материала выбран цемент, начальное абсолютное давление составляет  $20000 \text{ н/м}^2$ . Процесс расширения воздушных промежутков принят адиабатическим.

Рассмотренный метод расчета нестационарного движения совокупности поршней может быть использован в качестве основы при разработке технического метода расчета установок поршневого пневмотранспорта.

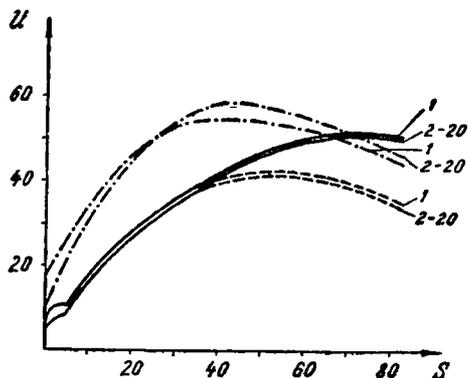


Рис. 3. Изменение скорости движения поршня вдоль трубопровода при различных концентрациях  $\mu$  и длинах поршней  $l_p$ . —  $\mu=30$ ;  $l_p=5 \text{ м}$ ; — · — ·  $\mu=40$ ;  $l_p=3 \text{ м}$ ; — — —  $\mu=40$ ;  $l_p=5 \text{ м}$ ; 1 — выход на режим; 2—20 — установившееся движение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Шваб. Высоконапорный пневматический транспорт импульсного типа с поршневой структурой движения транспортируемой среды. Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов. Томск. Изд-во ТГУ, 1972.
  2. В. М. Егоров, Б. Б. Квеско, В. А. Смолвик. Выход на рабочий режим при поршневом пневмотранспорте. Томск. Изд-во ТГУ, 1972.
  3. А. А. Космодемьянский. Курс теоретической механики. М., 1955.
  4. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной техники. М 1963.
-

## СТУПЕНЧАТЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЫСОКОНАПОРНОГО ТРАНСПОРТА

А. Ф. ВАХГЕЛЬТ, В. М. ЕГОРОВ, В. А. СМОЛОВИК

Разработан метод расчета установок высоконапорного пневмотранспорта поршневого типа. В рассматриваемом методе исходные параметры рассчитываются в основном по эмпирическим зависимостям. Величина начального давления и начальной скорости потока находится на основе приближенного аналитического решения системы уравнений, описывающей движение пылегазовой среды.

В известных методах расчета установок высоконапорного пневмотранспорта поршневого типа [1, 2, 3] решение системы уравнений, описывающих поршневое движение, производится численно с помощью ЭВМ. В настоящей работе предлагается приближенный аналитический метод расчета установок поршневого пневмотранспорта, основанный на условном делении трубопровода на отдельные участки. Благодаря этому можно положить изменение основных параметров на каждом участке линейным. Методика расчетов при этом упрощается и они могут быть выполнены с помощью более простых вычислительных устройств, например, малых ЭВМ типа «Найри», «Проминь» или даже электронных клавишных вычислительных машин.

При построении метода расчета известными предполагаются: дальность транспортирования, производительность установки, а также некоторые характеристики транспортируемого материала. Все остальные величины и в том числе параметры потока, режим работы установки определяются в процессе расчета.

Расход воздуха  $G$ , величина расходной концентрации  $\mu$ , диаметр трубопровода  $D$ , время впуска в трубопровод одной порции материала  $t_m$  и воздуха  $t_g$ , а также коэффициенты трения аэросмеси поршня  $\lambda_1$  и воздуха  $\lambda$  определяются на основе обобщения результатов экспериментальных исследований.

Расход воздуха определяется по следующей обобщенной зависимости:

$$G_1 = G_{1\text{ст}} \sqrt{\frac{L_{\text{ст}}}{L}}, \quad (1)$$

где  $G_{1\text{ст}}$  и  $L_{\text{ст}}$  — удельная производительность и дальность транспортирования, принятые за стандартные. За стандартную длину принята длина трубопровода, равная 83 м, одной из опытных установок, на которой проведены широкие экспериментальные исследования.

Используя соотношение между заданной и стандартной производительностью, определяем диаметр трубопровода

$$G_1 = G_{1\text{ст}} \cdot \frac{\pi D^2}{4}, \text{ отсюда}$$

$$D = \sqrt[4]{1,27 \frac{G_1}{G_{1\text{ст}}}}. \quad (2)$$

Для расчета времени впуска в трубопровод сыпучего материала рекомендуется следующее соотношение:

$$t_m = 3,3 \cdot \tau \left( \frac{D}{L} \right)^{0,22} \quad (3)$$

Соотношение (3) справедливо при изменении дальности транспортирования от 50 до 300 м и диаметра от 25 до 75 мм., величина  $\tau = t_m + t_b$  изменяется от 4 до 7 сек., изменяясь пропорционально дальности транспортирования.

Значение весовой расходной концентрации определяется по эмпирической формуле

$$\mu = 334 \cdot \sqrt[4]{\frac{D}{L}}. \quad (4)$$

Требуемый расход воздуха определяется по соотношению

$$G_b = \frac{G_1}{\mu}. \quad (5)$$

Формулы (1), (2), (3), (4) могут быть рекомендованы при поршневом пневмотранспорте материалов, близких по своим физическим свойствам к исследованным (каолин, хлористый калий, цемент и др.), истинная плотность которых лежит в пределах 2000—3000 кг/м<sup>3</sup>. Кроме того, для расчета установок с дальностью транспортирования  $L > 300$  м и диаметре  $D > 75$  мм требуется дополнительная экспериментальная проверка справедливости этих формул.

Расчет коэффициента сопротивления трения аэросмеси поршня проводится по обобщенной зависимости

$$\lambda_m = \frac{m}{\varepsilon_1 \text{Fr}} (a + b v_*) (\varepsilon + c) d + e v_*, \quad (6)$$

где  $m$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$  — некоторые константы, зависящие от физических свойств транспортируемого материала. В частности, для цемента:  $m = 0,018$ ,  $a = 43,13$ ,  $b = -1,91$ ,  $c = -0,06$ ,  $d = 0,5$ ,  $e = 0,012$ .

Критерий Фруда составлен по скорости движения поршня и диаметру трубопровода

$$\text{Fr} = \frac{u^2}{gD}. \quad (7)$$

Значение статического давления на выходе из трубопровода выбирается в соответствии с сопротивлением пылеочистителя приемного устройства.

Величина начальной термодинамической температуры транспортируемого материала и воздуха выбирается из конкретных условий работы установки.

После расчета основных исходных параметров, определяющих работу пневмотранспортной установки, проводится расчет характеристик пылегазового потока на выходе из трубопровода: скорости потока, плотности и температуры воздуха.

Для этого совместно решается следующая система уравнений:

$$c_p T_k = \frac{1}{k} \left[ B - (1 + \mu) \frac{u_k^2}{2} \right] \quad (8)$$

$$p_k = \rho_k R T_k \quad (9)$$

$$\varepsilon \rho_k u_k S = G \quad (10)$$

$$\varepsilon_m \rho_m u_k S = G_m \quad (11)$$

$$\varepsilon + \varepsilon_m = 1. \quad (12)$$

Здесь постоянная уравнения энергии

$$B = c_p T_0 + c_m \theta + (1 + \mu) \frac{u_0^2}{2}, \quad (13)$$

$k$  — безразмерный комплекс, характеризующий степень теплообмена между сыпучим материалом и транспортирующим воздухом

$$k = 1 + \mu \frac{c_m \theta}{c_p T},$$

$c_m$  и  $c_p$  — удельные теплоемкости сыпучего материала и воздуха, а  $\theta$  и  $T$  — значения их температур.

При этом рассматривается два предельных случая, когда имеет место идеальная тепловая изоляция материала поршня от воздуха и, следовательно, адиабатическое расширение последнего ( $k=1$ ), и случай с максимально интенсивным теплообменом, когда  $\theta_i = T$  ( $k = 1 + \mu \frac{c_m}{c_p}$ ).

Совместное решение уравнений (8—12) дает следующие значения выходных скоростей пылегазового потока:

$$u_k = -\frac{1}{1 + \mu} \frac{c_p \rho_k S}{R G} + \sqrt{\left( \frac{1}{1 + \mu} \frac{c_p \rho_k S}{R G} \right)^2 + \frac{2}{1 + \mu} \left( B + \frac{\mu c_p \rho_k}{R \rho_m} \right)} \quad (14)$$

при  $k=1$ ;

$$u = -\frac{1}{1 + \mu} \frac{(c_p + c_m \mu) \rho_k S}{R G} + \sqrt{\left[ \frac{1}{1 + \mu} \frac{(c_p + \mu c_m) \rho_k S}{R G} \right]^2 + \frac{2}{1 + \mu} \left[ B + \frac{(c_p + \mu c_m) \mu \rho_k}{R \rho_m} \right]} \quad (15)$$

при  $k = 1 + \mu \frac{c_m}{c_p}$ .

После вычисления скорости из уравнения расхода находится плотность воздуха

$$\rho_k = \frac{G \rho_m}{\rho_k = u_k S - G_m} \quad (16)$$

Используя полученное значение плотности и уравнение состояния, получаем выражение для определения выходного значения температуры

$$T_k = \frac{p_k (\rho_m u_m \cdot S - G_m)}{R \rho_m G} \quad (17)$$

После определения значения выходных параметров пылегазового потока решается задача по определению величины исходного давления  $p_0$ , необходимого для транспортирования сыпучего материала на заданное расстояние и с заданной производительностью. При этом проводится совместное решение уравнений (8—12) и уравнения движения пылегазового потока записываемого в виде

$$(\varepsilon \rho + \varepsilon_m \rho_m) u \frac{du}{dx} = - \frac{dp}{dx} - (\lambda \varepsilon \rho - \lambda_m \varepsilon_m \rho_m) \frac{u^2}{2D} \quad (18)$$

Как показал сравнительный анализ, использование в системе уравнений уравнения движения в дифференциальной форме при большом количестве поршней не приводит к существенной разнице с результатами расчетов, выполненных по системе уравнений, с уравнением движения в дифференциально-разностной форме. Аналитическое решение системы уравнений (8), (12), (18) без дополнительных упрощений затруднительно, поэтому сделано предположение, что ряд параметров потока, в том числе плотность и давление воздуха, коэффициенты трения воздуха и материала изменяются линейно. Однако допущение о линейном изменении этих параметров в пределах всего участка транспортирования могло бы привести к большим погрешностям, поэтому трубопровод был условно разбит на ряд таких сравнительно коротких участков, в пределах каждого из которых погрешность от использования линейной аппроксимации не превышала бы любой заранее заданной величины. Таким образом, вместо истинного распределения того или иного параметра мы получаем приближенное распределение, которое графически представляется в виде ломаной линии.

С учетом сделанных допущений может быть найдено аналитическое решение системы уравнений (8—12, 18). При этом решение проводится последовательно для каждого участка, начиная от выходного сечения трубопровода.

Принимая во внимание вышесказанное, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho u &= c_1; \quad \varepsilon_m \rho_m u = c_2 \\ \frac{\lambda}{2D} \varepsilon \rho &= c_3; \quad \frac{\lambda_m}{2D} \varepsilon_m \rho_m = c_4 \end{aligned} \quad (19)$$

и проинтегрируем уравнение движения (18) по длине первого участка

$$(c_1 + c_2)(u_1 - u_k) = -(p_1 - p_k) - (c_3 + c_4) \int_0^{l_1} u^2 dx \quad (20)$$

Здесь  $l_1$  — длина первого участка,  $u_1$  и  $p$  — скорость и давление в конце первого участка.

Для определения интеграла  $\int_0^{l_1} u^2 dx$  используем совместно уравнение энергии и состояния, откуда получим

$$\int_0^{l_1} u^2 dx = \frac{2 B \rho R - k C_p (p_k + p_1)}{(1 + \mu) \rho R} l_1. \quad (21)$$

Подставляя (21) в правую часть уравнения движения (20), получаем

$$(c_1 + c_2)(u_1 - u_k) = -(p_1 - p_k) - (c_3 + c_4) \frac{2 B \rho R - k C_p (p_k + p_1)}{(1 + \mu) \rho R} l_1. \quad (22)$$

Связь между  $p_1$  и  $u_1$  можно получить и из совместного решения системы уравнений (8—12)

$$p_1 = \frac{G_m \rho_m (x - 1) \left[ B - (1 + \mu) \frac{u_1^2}{2} \right]}{\mu x k (\rho_m u_1 S - G_m)}, \quad (23)$$

Исключая с помощью (23) давление  $p_1$  в уравнении движения (22) и проводя дополнительные преобразования, получаем квадратное уравнение относительно скорости

$$a u_1^2 + b u_1 + c = 0. \quad (24)$$

Здесь

$$a = (1 + \mu)(c_1 + c_2) \mu x k \rho_m S + (c_3 + c_4) k C_p G_m \rho_m (x - 1) \frac{1 + \mu}{2} l_1 - G_m \rho_m (x - 1) \frac{(1 + \mu)^2}{2};$$

$$b = 2(c_3 + c_4) B l_1 \mu x k \rho_m S - (c_1 + c_2) (1 + \mu) u_k \mu x k \rho_m S - (c_1 + c_2) (1 + \mu) \mu x k G_m - (1 + \mu) \mu x k \rho_m S p_k - (c_3 + c_4) \mu x k^2 C_p p_k \rho_m S l_1.$$

$$c = (c_1 + c_2) (1 + \mu) \mu x k G_m u_1 + \mu x k G_m (1 + \mu) p_k + G_m \rho_m (x - 1) (1 + \mu) B + (c_3 + c_4) k^2 C_p \mu x G_m l_1 - 2(c_3 + c_4) B l_1 \mu x k G_m - (c_3 + c_4) k C_p G_m \rho_m (x - 1) B l_1.$$

Определив из решения уравнения (24) значение скорости в конце первого участка, находим затем по уравнению (23) величину  $p_1$ . Аналогично находится значение  $u_2$  и  $p_2$ , при этом за исходные данные принимается  $u_1$  и  $p_1$ . Процесс расчета продолжается до тех пор, пока не находится значение давления и скорости в начальном сечении трубопровода.

На рисунке показано распределение статического давления и изменение скорости вдоль трубопровода при транспортировании цемента с производительностью 4000 кг/час на расстояние 270 м. Исходные данные при этом были рассчитаны по формулам (1—4) и из решения системы уравнений (8—12), при этом оказалось, что  $D = 0,037$  м,  $\mu = 34$ ,  $u_{ii} = 25,30$  м/сек.

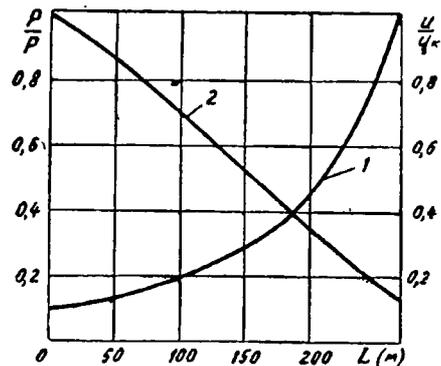


Рис. 1. Зависимость безразмерных скорости (кривая 1) и давления (кривая 2) от дальности транспортирования.

В качестве выходного давления выбрано стандартное атмосферное давление  $p_k = 101325$  кг/м<sup>2</sup>. При расчете трубопровод был условно раз-

бит на 9 равных по длине участков, т. е. длиной по 30 м. На рис. 1 через узловые точки, в которых рассчитаны значения давления и скорости, проведены отрезки прямых, совокупность образует практически плавную кривую.

Предлагаемый технический метод расчета пневмотранспортных установок, работающих в поршневом режиме при значительной простоте расчета, обладает необходимой точностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Шваб. Высоконапорный пневматический транспорт импульсного типа с поршневой структурой движения транспортируемой среды. Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов. Томск, 1972.

2. В. М. Егоров, В. А. Смоленик. Расчет установок высоконапорного пневматического транспорта поршневого типа. Там же.

3. В. А. Шваб, А. В. Шваб. Оптимальный принцип пневматического перемещения диспергированных твердых материалов. «Изв. вузов. Физика». Томск. Изд. ТГУ, 1973, № 3.

---

## ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ ПРИ ВЫСОКОНАПОРНОМ ПНЕВМОТРАНСПОРТЕ ПОРШНЕВОГО ТИПА

В. М. ЕГОРОВ, Л. Ф. МЕЛЬНИК, А. Т. СЕВОСТЬЯНОВ  
В. А. СМОЛОВИК, А. В. ШВАБ

Установлена зависимость сопротивления трения аэросмеси (диспергированный материал—воздух) от величины истинной объемной концентрации твердой фазы и от скорости движения аэросмеси. Разработан метод расчета коэффициента сопротивления трения по определяемому из опыта распределению вдоль трубопровода статического давления.

Затраты энергии потока на перемещение транспортируемого материала в основном определяются сопротивлением трения аэросмеси о стенки трубопровода, поэтому их правильный учет является наиболее важной и вместе с тем сложной задачей при расчете установок высоконапорного поршневого пневмотранспорта.

При поршневом пневмотранспорте сыпучих материалов имеют место существенные особенности в механизме сопротивления трения, определяемые высокой объемной концентрацией материала в поршне, обычно превосходящей на начальном участке трубопровода эти значения при перемещении сыпучего материала в режиме плотного слоя, а также и более высокими скоростями движения поршней.

Для выявления влияния на величину сопротивления трения аэросмеси истинной объемной концентрации твердой фазы и скорости перемещения поршня были проведены экспериментальные исследования, при которых за счет изменения режимов транспортирования в достаточно широком диапазоне изменялась скорость движения поршней и концентрация сыпучего материала в поршне. Значение сопротивления трения аэросмеси обычно выражается через касательное напряжение на стенке трубопровода и может быть определено из уравнения движения поршня

$$mU \frac{dU}{dx} = S \cdot \Delta P - \tau_m \pi D l_m. \quad (1)$$

Здесь  $S \Delta P$  — сила, действующая на поршень при полном перепаде давления  $\Delta P$ ,  $S$  — площадь поперечного сечения поршня, которая считается равной площади поперечного сечения трубопровода;  $m$ ,  $l_m$ ,  $U$ ,  $D$  — соответственно масса, длина, скорость и диаметр поршня;  $\tau_m$  — величина касательного напряжения трения аэросмеси;  $x$  — координата цент-

ра тяжести поршня вдоль оси прямолинейного и горизонтального трубопровода.

Величина касательного напряжения трения выражается из уравнения (1) в виде

$$\tau_m = \frac{S \Delta P}{\pi D l_m} \cdot \frac{m U \frac{dU}{dx}}{\pi D l_m} \quad (2)$$

Значения входящих в уравнение величин: перепада давления на поршне  $\Delta P$ , скорости его движения « $U$ », градиента скорости  $\frac{dU}{dx}$ , массы поршня и его длины  $l_m$  находились экспериментально. Методика их измерения изложена в работе [2]. Таким образом, были определены значения касательных напряжений для ряда тонкодисперсных материалов: цемента, золы-унос, угольной пыли.

Поскольку в процессе транспортирования изменяется не только скорость, но и истинная объемная концентрация дисперсного материала в поршне, то удалось определить большую совокупность значений касательного напряжения трения при разных значениях скорости и истинной объемной концентрации диспергированного материала в поршне.

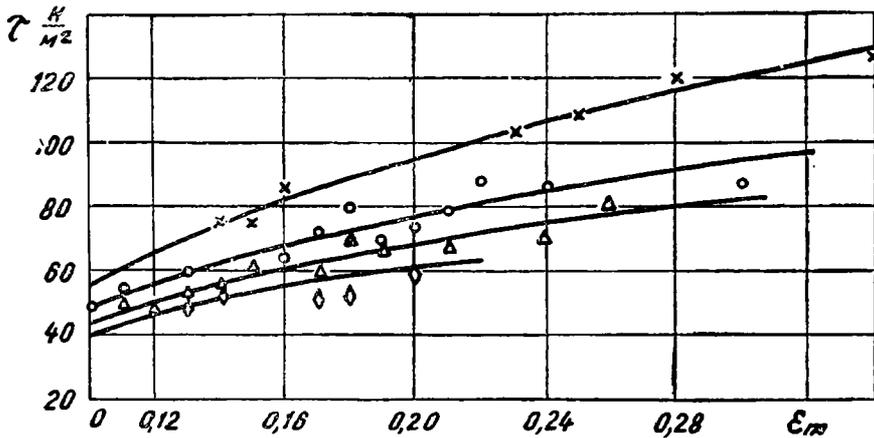


Рис. 1. Зависимость касательного напряжения от величины объемной концентрации при различной скорости движения цемента: X —  $U = 5 \frac{M}{сек}$ ; O —  $U = 10 \frac{M}{сек}$ ; Δ —  $U = 14 \frac{M}{сек}$ ; ◊ —  $U = 18 \frac{M}{сек}$ ;

Для установления зависимости касательного напряжения трения от величины истинной объемной концентрации материала в поршне вся совокупность значений  $\tau$  была разделена на несколько групп таким образом, чтобы в пределах каждой из них значение скорости поршня изменялось в узком интервале.

По полученным таким способом значениям  $\tau_m$  и  $\epsilon_m$  в каждой из выделенных групп были получены зависимости  $\tau_m = f(\epsilon_m)$ . На рис. 1 представлена зависимость  $\tau_m = f(\epsilon_m)$  для случая поршневого пневмотранспорта цемента. Через  $\tau_0$  на графике обозначена величина касательного напряжения внутреннего трения цемента, определяемая с помощью трибометра [6] и равная 75.

Как видно из рис. 1, величина касательного напряжения трения с увеличением истинной объемной концентрации материала в поршне существенно возрастает. Это увеличение имеет простую физическую ин-

терпретацию: с увеличением концентрации материала в поршне растет число частиц, участвующих в трении на стенке трубопровода.

Аппроксимирующая зависимость имеет вид

$$\tau_m = a(\epsilon_m + d)^b \tau_0. \quad (3)$$

Здесь  $a$ ,  $b$  и  $d$  — некоторые константы, в частности, при изменении скорости поршня цемента в интервале от 10 до 14 м/сек.

$$a = 24,27; \quad b = 0,38; \quad d = 0,06.$$

Характер зависимости касательного напряжения трения от скорости движения поршня при пневмотранспорте цемента показан на рис. 2. Как видно из рисунка, с ростом скорости поршня значение касательного напряжения трения уменьшается, аналогичный характер зависимости касательного напряжения от скорости получен и для других тонкодиспергированных материалов.

Уменьшение значения касательного напряжения трения происходит особенно интенсивно при высоких значениях истинной объемной концентрации материала в поршне. Последнее может быть объяснено с точки зрения характера сухого трения сыпучего материала, когда с увеличением скорости перемещения значение касательного напряжения трения уменьшается.

Зависимость касательного напряжения трения от скорости аппроксимирована выражением

$$\tau_m = c U_*^e \tau_0. \quad (4)$$

Здесь  $c$  и  $e$  — некоторые постоянные величины.

Совокупное влияние на величину касательного напряжения трения скорости движения поршня и значение истинной объемной концентрации учитывает обобщенная зависимость вида

$$\tau_m = (a_1 - b_1 U_*)(\epsilon_m - c_1)^{d_1 - e_1 U_*}, \quad (5)$$

где  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$  и  $e_1$  — некоторые константы, величина которых определяется физическими свойствами транспортируемого материала, в частности, для цемента  $a_1 = 43,13$ ;  $b_1 = 1,91$ ;  $c_1 = 0,06$ ;  $d_1 = 0,5$ ;  $e_1 = 0,012$ .

Используя известное соотношение между величиной касательного напряжения трения  $\tau$  и безразмерным коэффициентом гидравлического сопротивления трения  $\lambda$  [7]

$$\lambda = \frac{8 \tau}{\rho U^2}, \quad (6)$$

получаем выражение для  $\lambda_m$  в зависимости от  $\epsilon_m$  и  $u_*$ .

$$\lambda_m = \frac{k}{\epsilon_m} (a_1 - b_1 U_*)(\epsilon_m - c_1)^{d_1 - e_1 U_*}, \quad (7)$$

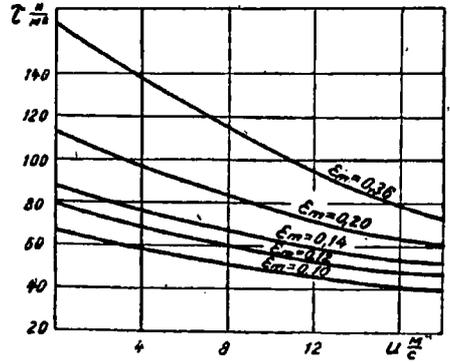


Рис. 2. Изменение касательного напряжения в зависимости от скорости движения и концентрации цемента в поршне.

где

$$k = \frac{\tau_0}{\rho_u U^2},$$

$\rho_u$  — истинная плотность транспортируемого материала.

Анализ выражения (7) показал, что в имевших место при транспортировании пределах  $\varepsilon_m$  приближенно (с погрешностью, не превышающей 11%) можно считать  $\lambda$  от  $\varepsilon_m$  независимым, поскольку  $\lambda_m$  обратно пропорционально плотности аэросмеси  $\rho_m$ . С увеличением  $\varepsilon_m$  растет не только  $\tau_m$ , но и  $\rho_m$  и их взаимное влияние на величину  $\lambda_m$  приближенно компенсируется.

На основании изложенного представляется ошибочным вывод о прямой пропорциональности  $\lambda_m$  величине объемной концентрации твердых частиц аэросмеси, полученный в работе [5].

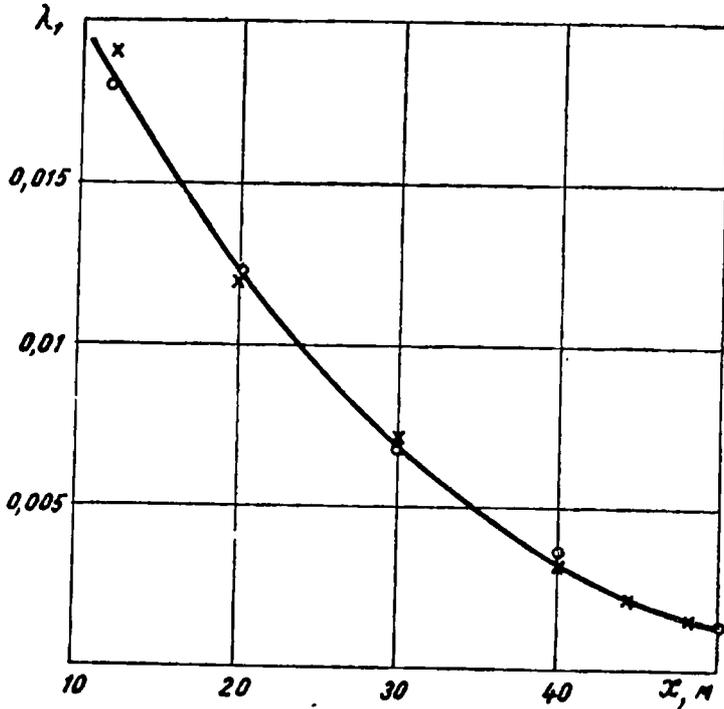


Рис. 3. Изменение коэффициента трения вдоль прямого участка горизонтального трубопровода при различной расходной концентрации цемента.  
o —  $\mu=35$ ; x —  $\mu=48$ .

Значение  $\lambda$ , полученное по формуле (7), приближенно (с погрешностью, не превышающей 1%) может интерпретироваться и как коэффициент гидравлического сопротивления трения аэросмеси, и как коэффициент сопротивления трения твердой компоненты аэросмеси. Действительно,

$$\lambda_m = \frac{8 \tau_m}{\rho_m U^2}; \quad (8)$$

$$\lambda_1 = \frac{8 \tau_1}{\rho_1 U^2}. \quad (9)$$

Здесь индекс «1» указывает, что характеристики относятся к твердой компоненте аэросмеси. Поскольку  $\tau_m$  и  $\rho_m$  можно представить в виде

$$\tau_m = \varepsilon\tau + \varepsilon_1\tau_1,$$

$$\rho_m = \rho\varepsilon + \rho_1\varepsilon_1,$$

где  $\rho$  и  $\varepsilon$  — плотность и концентрация воздуха, то

$$\lambda_m = \frac{8(\varepsilon\tau + \varepsilon_1\tau_1)}{(\rho\varepsilon + \rho_1\varepsilon_1)U^2}.$$

Составляя отношение  $\frac{\lambda_m}{\lambda_1}$ , получим

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_1} = \frac{\varepsilon\tau + \varepsilon_1\tau_1}{\tau_1} \cdot \frac{1}{\frac{\rho\varepsilon + \rho_1\varepsilon_1}{\rho_1}} = \left( \varepsilon_1 + \varepsilon \frac{\tau}{\tau_1} \right) \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon \frac{\rho}{\rho_1}} \quad (10)$$

Поскольку  $\tau \ll \tau_1$ , а  $\rho \ll \rho_1$  и  $\varepsilon < 1$ , то отношение

$$\frac{\lambda_{см}}{\lambda_1} \approx 1.$$

Характер изменения коэффициента сопротивления  $\lambda_1$  вдоль горизонтального прямолинейного участка трубопровода может быть установлен на основании использования распределения по трубопроводу статического давления, полученного опытным путем.

Эта методика расчета коэффициента сопротивления трения основывается на решении системы дифференциально-разностных уравнений [1], описывающих течение аэросмеси в поршневом режиме. Данная система уравнений в предельном случае, когда длина поршня  $l_m$  много меньше дальности транспортирования  $L$ , переходит в дифференциальную систему уравнений [1].

$$(G + \mu G) \frac{dU}{dx} = -S \frac{dP}{dx} - \frac{U}{2D} (G\lambda + \mu G\lambda_1), \quad (11)$$

$$h = c_p T = \frac{1}{k} \left[ B - (1 + \mu) \frac{U^2}{2} \right], \quad (12)$$

$$P = \frac{x-1}{x} \rho h, \quad (13)$$

$$G = \frac{G_m}{\mu} = \varepsilon \rho S U = \frac{1}{\mu} \varepsilon_m \rho_m S U, \quad (14)$$

$$\varepsilon + \varepsilon_m = 1, \quad (15)$$

где  $\lambda$  — коэффициент сопротивления трения несущей среды,

$P$  — статическое давление,  $h$  — энтальпия несущей среды,

$D$ ,  $S$  — диаметр и площадь сечения транспортирующего трубопровода,  $G$  и  $G_m$  — расход газа и твердых примесей,  $\mu$  — расходная концентрация,  $c_m$  и  $c_p$  — теплоемкости,  $\rho$  и  $\rho_m$ ,  $T$  и  $\Theta$  — плотности и температуры газа и частиц, индекс «0» относится к условиям на входе в трубопровод. Постоянная уравнения энергии

$$B = c_p T_0 + c_m \theta \mu + (1 + \mu) \frac{U_0^2}{2}$$

и

$$k = 1 + \mu \frac{c_m \theta}{c_p T}$$

Решение уравнения (12) относительно скорости  $U$  с учетом зависимости (13) будет

$$U = \alpha [\sqrt{P^2 + \beta P + \gamma} - P], \quad (16)$$

где

$$\alpha = \frac{x k S}{(x-1)G(1+\mu)}; \quad \beta = \frac{2b}{\alpha}; \quad \gamma = \frac{2B}{(1+\mu)\alpha^2}; \quad b = \frac{\mu G}{\rho_m S}$$

Определяя производную  $\frac{dU}{dx}$  из уравнения (16), получим

$$\frac{dU}{dx} = \alpha \frac{(2P + \beta - q)}{2q} \frac{dP}{dx}$$

Подставляя  $U$  и  $\frac{dU}{dx}$  в уравнение (11), где  $g = \sqrt{P^2 - \beta P - \gamma}$ , и решая его относительно  $\lambda_1$ , получим

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu G} \left\{ \frac{[x(G + \mu G)(2P + \beta - q) + 2Sq]D}{(q^2 - qP)} \frac{dP}{dx} + G\lambda \right\}. \quad (17)$$

Экспериментальные данные, характеризующие статическое давление установившегося течения в поршневом режиме транспортирования, можно представить в виде зависимости  $P = P(x)$ . Подставляя в уравнение (17) значения  $P(x)$  и  $\frac{dP}{dx}$ , получим зависимость коэффициента  $\lambda_m$  от координаты  $x$ .

Метод расчета коэффициента сопротивления трения может быть также построен без аппроксимации кривой распределения давления на основе задания таблицы экспериментальных данных статических давлений  $P_i(x_i)$ .

Для этого можно использовать готовое аналитическое решение [4], записывая его для двух соседних произвольных значений  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , в которых измерялось статическое давление. Составляя разность этих уравнений, получим

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(x-1)B}{x k b^2(1+\mu)} - 1 \right] \ln \frac{U_{i+1}}{U_i} - \frac{x-1}{x k} \left( \frac{B}{b^2(1+\mu)} - \frac{1}{2} \right) \left[ \ln \frac{U_{i+1}-b}{U_i-b} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{b}{U_0-b} \left( \frac{U_{i+1}-U_0}{U_{i+1}-b} - \frac{U_i-U_0}{U_i-b} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2D(1+\mu)} \left[ \int_0^{x_{i+1}} (\lambda + \mu \lambda_m) dx - \int_0^{x_i} (\lambda + \mu \lambda_m) dx \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Учитывая допущения о линейном характере изменения  $\lambda_1$  в пределах участка трубы  $l_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ , правая часть уравнения (18) преобразуется к виду

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{2D(1+\mu)} \left[ \lambda + \mu \frac{\lambda_{1(i+1)} + \lambda_{1i}}{2} \right]. \quad (19)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_{1(i+1)} = & -\lambda_{1i} + \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{2D(1+\mu)}{(x_{i+1}-x_i)} \left[ \frac{(x-1)B}{xkb^2(1+\mu)} - 1 \right] \ln \frac{U_{i+1}}{U_i} - \right. \\ & - \frac{x-1}{xk} \left( \frac{B}{b^2(1+\mu)} - \frac{1}{2} \right) \times \left( \ln \frac{U_{i+1}-b}{U_i-b} - \frac{b(U_{i+1}-U_0)}{(U_0-b)(U_{i+1}-b)} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{b(U_i-U_0)}{(U_0-b)(U_i-b)} \right) - \lambda \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $U_i$  и  $U_{i+1}$  определяется по зависимости (16).

На рис. 3 показан характер изменения коэффициента сопротивления трения вдоль трубопровода, полученный по данной методике для случая пневмотранспорта цемента по прямолинейному, горизонтальному участку трубопровода при значениях расходной концентрации  $\mu=35$  и  $\mu=48$ .

Из рисунка видно, что значение  $\lambda$  вдоль трубопровода резко падает, причем как характер изменения, так и численные значения  $\lambda$  от величины расходной концентрации в указанном диапазоне ее изменения зависят слабо.

Таким образом, проведенные исследования позволили установить характер изменения величины касательного напряжения трения при поршневой структуре движения аэросмеси; при изменении концентрации твердой компоненты в поршне и изменении скорости движения поршня установлено также, что в приближенных расчетах коэффициент сопротивления трения от величины истинной объемной концентрации материала в поршне  $\epsilon$  и его расходной концентрации  $\mu$  можно принимать независимым. При проведении полных расчетов целесообразно использовать зависимость (7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Шваб. Высоконапорный пневматический транспорт импульсного типа с поршневой структурой движения транспортируемой среды.—Сб. «Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов». Томск, 1972.

2. В. М. Егоров, Л. Ф. Мельник, В. А. Смолвик, В. А. Шваб. Экспериментальное исследование сопротивления трения при высоконапорном поршневом пневмотранспорте. Там же.

3. В. М. Егоров, А. Т. Севостьянов, В. А. Смолвик, В. Н. Пачин. Измерение параметров потока при поршневом пневматическом транспорте дисперсных материалов. Там же.

4. В. А. Шваб, А. В. Шваб. Оптимальный принцип пневматического перемещения диспергированных твердых материалов. «Изв. вузов. Томск. Изд. ТГУ. Физика», 1973, № 3.

5. А. М. Гаспарян, Р. Е. Акопян. Усовершенствованный способ пневматического транспорта и централизованная раздача материалов. «Промышленность Армении», 1963, № 8.

6. Р. Л. Зенков. Механика насыпных грузов. Москва, 1964.

7. Л. Н. Лойцянский. Механика жидкости и газа. Москва, 1972.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫСОКОНАПОРНОГО ПНЕВМОТРАНСПОРТА ПОРШНЕВОГО ТИПА

В. М. ЕГОРОВ, А. Г. СЕВОСТЬЯНОВ, В. А. СМОЛОВИК, В. А. ШВАБ

Приводятся основные результаты экспериментального исследования, полученные на опытных установках высоконапорного пневмотранспорта поршневого типа, опыт эксплуатации которых показал большую надежность их работы и высокую эффективность.

Предпринятые за последние годы экспериментальные исследования поршневого пневмотранспорта проводились на установках с длиной транспортного трубопровода от 74 до 256 м и диаметрами 36,7 и 50 мм. Установки были снабжены камерными питателями со специальными дозирующими устройствами для организации поршневого режима движения транспортируемого материала [1], [2]. В качестве транспортируемых материалов использовались цемент, угольная пыль, зола, хлористый калий, каолин, мел, аммиачная селитра.

При опытном исследовании поршневого пневмотранспорта указанных материалов проводились измерения статического давления по длине трубопровода и во времени, скорости движения поршней вдоль магистрали, расхода воздуха и материала, температуры, времени впуска в трубопровод материала и воздуха, измерения длины поршней при их движении по магистрали.

Периодическая выдача материала питателем в последних вариантах установок осуществляется пневматическим делителем, работа которого регламентируется реле времени.

Экспериментальные исследования преследовали цель выяснить возможность транспортирования исследованных материалов поршневым способом, а также установить для каждого из них целесообразные режимы транспортирования. Для решения этих задач требовалось провести большое количество опытов с запланированными вариантами изменения основных параметров: давления в начале транспортного трубопровода, расхода воздуха, начальной длины поршня и примыкающего к нему воздушного промежутка с учетом их взаимосвязи, поскольку, например, при прочих равных условиях с увеличением длины поршня требуется увеличение начального давления, иначе уменьшится скорость движения поршней, а при значительном увеличении их длины без увеличения воздушных промежутков энергии сжатой несущей среды окажется недостаточно и произойдет закупорка трубопровода. Расход воздуха также связан с начальным давлением: при неизменной длине формирующихся поршней и воздушных промежутков между ними с увели-

чением давления растет расход воздуха, скорость движения, а вместе с этим и производительность установки. Однако увеличение скорости ограничивается критическим ее значением, экономическими соображениями и возможностью нарушения структуры потока.

Наблюдения через прозрачные участки, установленные в начале, середине и конце магистрали, а также осциллограммы статического давления показывают, что при определенных режимах, как отмечено выше, может нарушиться поршневой режим движения. Устойчивость поршневого движения определяется физическими свойствами материала, длиной поршня, его скоростью, истинной объемной концентрацией материала. Наиболее устойчивые поршни получаются из материалов с высоким внутренним напряжением сдвигу. Это условие удовлетворяется для всех малосыпучих и практически для всех материалов с повышенной влажностью. Часто такое свойство связывают с плохой аэрируемостью материалов и справедливо считают их труднотранспортируемыми. Действительно, при пневмотранспорте во взвешенном состоянии частиц при их высокой «слипаемости» друг с другом достичь равномерного взвешенного движения практически невозможно. При этом неизбежны местные большие скопления частиц с дальнейшей возможностью образования пробок и закупорки трубопровода. Что же касается транспорта таких материалов сплошным потоком в так называемой «плотной фазе», то здесь при давлении за счет расширения сжатого воздуха происходит расслоение сплошного потока на отдельные, различной длины поршни, которые, имея различное сопротивление, начинают перемещаться хаотично, с разрушением одних порций и образованием других. Это приводит к неустойчивому режиму движения, образованию отдельных весьма уплотненных порций — пробок, следствием чего может явиться непредусмотренное возрастание сопротивления и недостаточность энергии сжатого воздуха для последующего перемещения материала.

По этой причине, как показали экспериментальные исследования, единственно надежным способом пневматического транспортирования материалов с высокой связью между частицами оказался высоконапорный поршневой транспорт при регулярном, строго регламентированном поршневом режиме. Здесь важно лишь техническое решение вопроса о надежном способе подачи материала питателем в трубопровод. Не менее важным является выяснение возможности поршневого транспорта таких распространенных сыпучих материалов, как цемент, угольная пыль, зола и другие. Опыт эксплуатации упомянутых выше экспериментальных установок показывает, что транспортирование этих материалов в поршневом режиме возможно, но в определенном диапазоне начальных параметров, определяющих производительность и расход несущей среды. Для ряда исследованных материалов зоны существования устойчивого поршневого движения представлены на рис. 1,

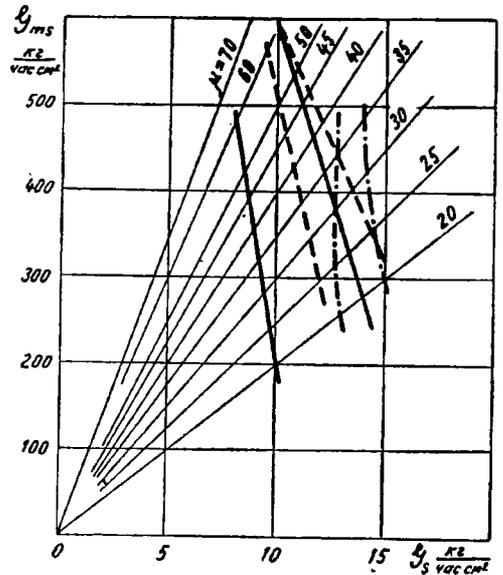


Рис. 1. Зона устойчивого поршневого движения различных материалов: ——— цемент, мел, угольная пыль; - - - зола-унос; — · — хлористый калий.

По этой причине, как показали экспериментальные исследования, единственно надежным способом пневматического транспортирования материалов с высокой связью между частицами оказался высоконапорный поршневой транспорт при регулярном, строго регламентированном поршневом режиме. Здесь важно лишь техническое решение вопроса о надежном способе подачи материала питателем в трубопровод.

Не менее важным является выяснение возможности поршневого транспорта таких распространенных сыпучих материалов, как цемент, угольная пыль, зола и другие. Опыт эксплуатации упомянутых выше экспериментальных установок показывает, что транспортирование этих материалов в поршневом режиме возможно, но в определенном диапазоне начальных параметров, определяющих производительность и расход несущей среды. Для ряда исследованных материалов зоны существования устойчивого поршневого движения представлены на рис. 1,

откуда видно, что мел, цемент и угольная пыль могут быть объединены в одну группу (зона между сплошными линиями). Наибольшие удельные расходы воздуха  $G_s$  требуются для транспортирования хлористого калия, для которого увеличение удельного расхода  $G$  а следовательно, и весовой расходной концентрации  $\mu$  достигается преимущественно увеличением соотношения между длиной поршня и примыкающего к нему воздушного промежутка. Указанный рост ограничен максимальной производительностью установки, которая может быть достигнута при транспортировании данного материала без нарушения поршневого движения. Указанные на рис. 1 удельные расходы получены на установке с длиной транспортирования 256 м и диаметром трубопровода 36,7 мм. С увеличением длины транспортирования  $G_{ms}$  и  $\mu$  уменьшаются, а с увеличением диаметра трубопровода — возрастают. Опытная зависимость для определения расходной концентрации, полученная для пределов длин  $L$  и диаметров трубопровода  $D$  экспериментальных установок, имеет вид

$$\mu = A \sqrt[4]{\frac{D}{L}},$$

где  $A$  — коэффициент, зависящий от физических свойств транспортируемого материала.

Расходная концентрация при поршневом транспорте в основном определяется соотношением между длинами поршня и воздушного промежутка. С увеличением длины транспортирования это соотношение уменьшается, несмотря на рост длины поршня. Увеличение воздушного промежутка в этом случае необходимо для предотвращения возможного объединения поршней, так как с повышением дальности транспортирования уменьшается значение истинной объемной концентрации материала в поршне, что приводит к увеличению скорости фильтрации воздуха через него и некоторому «размыву». Формирование требуемой длины поршней и воздушных промежутков осуществляется заданным временем впуска в трубопровод материала  $t_m$  и воздуха  $t$ , сумма которых определяет время одного такта  $T$ . Соотношение между временем впуска материала и полным тактом зависит, как и для расходной концентрации, от физических свойств транспортируемого материала, диаметра трубопровода и длины транспортирования. Для исследованных пределов изменения  $D$  и  $L$  эта зависимость может быть определена по формуле

$$\frac{t_m}{T} = B \left( \frac{D}{L} \right)^{0,22},$$

где  $B$  — коэффициент, определяемый опытным путем для каждого из транспортируемых материалов.

Для некоторых материалов рекомендации по выбору  $T$ ,  $A$ ,  $B$  в приведенных выше формулах даны в работе [3].

Оптимальный режим поршневого движения зависит не только от рационального выбора времени впуска материала и воздуха, но и выбора целесообразной скорости движения поршней. Так, завышенная скорость по сравнению с ее оптимальным значением приводит к повышенному сопротивлению трения материала и воздуха о стенку трубопровода, повышенной степени расширения несущей среды и, как следствие этого, к повышенной степени расширения газа в поршне,

быстрому уменьшению объемной концентрации материала, увеличению фильтрации и уменьшению времени существования поршня с появлением волнового движения материала. С другой стороны, недостаточная скорость влечет к появлению сдвига между слоями материала в поршне. При этом нижние слои имеют малую скорость или даже нулевую, верхние слои скользят по нижним и в результате поршень растягивается по дну трубопровода. Подошедший следующий поршень увлечет часть материала вдоль трубопровода по «подстилающему» слою, затем происходит новый прорыв газа через верхнюю часть поперечного сечения трубопровода и процесс повторяется до накопления большого количества материала с появлением весьма длинной пробки, преодолеть сопротивление которой за счет заданного начального давления воздуха уже невозможно.

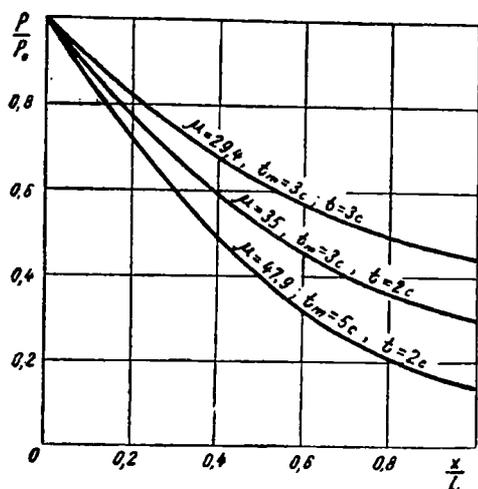


Рис. 2. Характерное для поршневого режима движения распределение статического давления (материал — цемент).

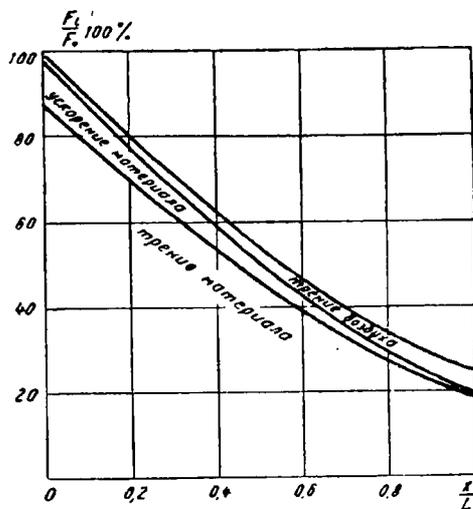


Рис. 3. Элементы затраты общей силы при оптимальном режиме транспортирования цемента ( $\mu=39,3$ ; масса поршня — 6,74 кг).

Для данного транспортируемого материала при определенных начальных значениях длины поршней и интервала между ними скорость их движения будет определяться величиной выбранного начального давления, которое соответствует и определенному расходу воздуха. Дальнейшее изменение по трубопроводу статического давления также связано со скоростью перемещения поршней. Характерная картина распределения среднегеометрического по такту статического давления вдоль прямолинейного горизонтального трубопровода представлена на рис. 2. Здесь ордината представляет собой отношение текущего давления к начальному, а абсцисса — отношение текущей координаты, совпадающей с осью трубопровода, к его длине. Осциллографическая запись статического давления вдоль трубопровода при проведении экспериментального исследования с различными материалами позволила построить графики, подобные изображенным на рис. 2, и использовать их для определения величины коэффициента сопротивления трения вдоль трубопровода для каждого из опытов [4].

Как показывают опытные данные, в пределах зоны поршневого режима движения данного материала может быть определенное отклонение от оптимального режима транспортирования, который определяется минимальными затратами энергии сжатого газа, отнесенными к удельной производительности установки. Поэтому для выявления

наивыгоднейших режимов транспортирования важна правильная оценка и анализ элементов полной силы  $F$ , действующей на единицу массы аэросмеси.

Как известно, для горизонтального положения трубопровода эта сила складывается из отдельных элементов  $F_i$ : сил сопротивления трения и инерционных сил как по материалу, так и по несущей среде. Имея опытные кривые распределения по длине трубопровода статического давления, скорости, концентрации материала в поршне, плотности воздуха и его температуры, а также зная массу поршня и расходную концентрацию, можно найти доли перечисленных сил  $F_i$  от общей силы  $F$ . Для большей наглядности картины распределения этих сил вдоль прямолинейного горизонтального трубопровода на рис. 3 приведена зависимость отношения  $F_i$  к общей силе  $F_0$  в начале трубопровода от безразмерной координаты  $x/L$ . Представленное распределение сил на единицу массы аэросмеси наглядно показывает, что большая часть энергии сжатого газа расходуется на преодоление силы сопротивления трения материала. Что же касается силы на ускорение воздуха, то она составляет для представленного на рис. 3 случая в начале трубопровода 0,224%, а в конце всего лишь 0,0234% от общей силы  $F_0$ .

Результаты экспериментальных исследований могут быть использованы для расчета и проектирования установок, а также позволяют сделать вывод о целесообразности внедрения высоконапорного поршневого пневмотранспорта ряда материалов в различных отраслях народного хозяйства страны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Смолоник, В. А. Шваб. Исследование пробкового пневматического транспорта на установке с длинной транспортирующей магистралью.— Труды НИИ ПММ при ТГУ. Т. 1. Томск, 1972.

2. В. М. Егоров, А. Т. Севостьянов, В. А. Смолоник, В. А. Шваб. Экспериментальное исследование поршневого пневматического транспорта.— Сб. «Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов». Томск, 1972.

3. В. М. Егоров, В. А. Смолоник. Расчет установок высоконапорного пневматического транспорта поршневого типа. Там же.

4. В. М. Егоров, Л. Ф. Мельник, В. А. Смолоник, А. В. Шваб. Исследование сопротивления трения при высоконапорном пневмотранспорте поршневого типа.— Настоящий сборник. Т. 6.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПОРШНЯ ПРИ ВЫСОКОНАПОРНОМ ПНЕВМОТРАНСПОРТЕ

В. М. ЕГОРОВ, В. А. СМОЛОВИК

Предложен метод расчета величины начальной скорости поршня при высоконапорном пневмотранспорте поршневого типа. Исследовано влияние основных параметров на значение начальной скорости поршня.

При решении задач по расчету движения пылегазового потока в поршневом режиме [1, 2] необходимо знать величину начальной скорости поршня. Обычно ее определяют на основании каких-либо практических соображений, а поскольку величина начальной скорости является достаточно сложной функцией ряда параметров и, в особенности, значения статического давления на выходе из бункера, времени формирования поршня, длины запорного участка, то при этом возможны значительные ошибки.

Принципиальная схема установки, применительно к которой проведено исследование, показана на рис. 1.

В соответствии со схемой сыпучий материал из бункера 1 под действием давления сжатого воздуха  $p_0$  в какой-то момент времени  $t_0$  начинает вытесняться в трубопровод 2. При этом предполагается, что часть трубопровода между сечениями 0—0 и 1—1 уже заполнена сыпучим материалом.

В период вытеснения материала его масса, движущаяся по трубопроводу на участке между сечениями 0—0 и II—II, непрерывно возрастает. Причем скорость, которую имеет дополнительная масса в момент присоединения в сечении 0—0, в общем случае может изменяться от нуля до значения скорости движения основной массы материала между сечениями 0—0 и II—II.

Таким образом, в период формирования поршня по трубопроводу перемещается переменная масса сыпучего материала, движение центра масс такой системы описывается обобщенным уравнением Мещерского

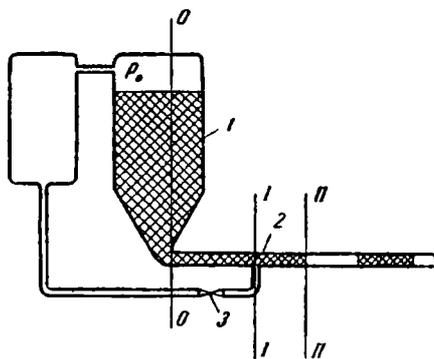


Рис. 1. Схема установки поршневого пневмотранспорта. 1 — питатель; 2 — транспортный трубопровод; 3 — магнитный клапан.

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM_1}{dt} (\bar{u}_1 - \bar{v}) + \frac{dM_2}{dt} (\bar{u}_2 - \bar{v}). \quad (1)$$

Здесь  $M$  — некоторая первоначальная масса тела,  $\vec{v}$  — вектор скорости тела  $dM_2$  — масса, излучаемая телом за время  $dt_1$ ,  $\vec{u}_2$  — вектор скорости излучаемых частиц;  $dM_1$  — масса присоединяемых телом частиц за время  $dt_1$ , а  $\vec{u}_1$  — вектор их скорости,  $\vec{F}$  — равнодействующая внешних сил, приложенных к данному телу.

Поскольку в рассматриваемом случае излучение отсутствует, то уравнение (1) упрощается

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dM_1}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{v}). \quad (2)$$

Внешние силы в уравнении (2) включают в себя силу, действующую на формирующийся поршень вследствие перепада давления на нем

$$F_1 = (p_0 - p_k) \frac{\pi D^2}{4} \quad (3)$$

(здесь  $p_k$  — давление воздуха впереди поршня,  $D$  — диаметр поршня), и силу, действующую на поршень вследствие сопротивления трения

$$F_2 = 8 \lambda \frac{\pi D^2}{4} \frac{l^* + l}{2D} v^2. \quad (4)$$

Здесь  $l^*$  — длина запорного участка трубопровода, т. е. расстояние между сечениями  $0-0$  и  $I-I$ ,  $l$  — текущая длина формирующегося поршня, т. е. расстояние между сечением  $I-I$  и  $II-II$ ,  $\rho$  — плотность смеси сыпучий материал — воздух.

Величина давления впереди «поршня»  $p_k$  определена экспериментально. Установлено, что в достаточно широком диапазоне изменения начального давления  $p_0$  (от 25000 до 50000 н/м<sup>2</sup>), значение расходной концентрации  $\mu$  от 30 до 60 единиц и изменение времени такта  $\tau$ , т. е. времени впуска в трубопровод материала и воздуха, в интервале 3—7 сек, величина давления впереди поршня уменьшается во времени по линейному закону и может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$p_k = p_0 (1 - kt_*). \quad (5)$$

Здесь  $t_* = \frac{t}{\tau}$ ;  $k$  — постоянная, величина которой определяется в основном режимом транспортирования и, как показал анализ широких экспериментальных исследований, изменяется в пределах

$$0,5 \leq k \leq 0,7.$$

При решении уравнения Мещерского (2) с учетом соотношений (3—5) сделаны следующие допущения:

1) смесь материала и воздуха, входящего в трубопровод, принимается несжимаемой, т. е.  $\rho = \text{const}$ ;

2) скорость материала во входном сечении  $0-0$  принимается либо равной скорости движения материала на начальном участке трубопровода, либо равной нулю, т. е. рассматриваются предельные случаи;

3) сопротивление трения учитывается по формуле, аналогичной Дарси-Вейсбаха, коэффициент сопротивления трения  $\lambda$  выбирается на

основании экспериментальных исследований и принимается постоянным.

С учетом изложенного получается следующее уравнение движения формирующегося поршня:

$$M \frac{dv}{dt} = Skp_0 \frac{t}{\tau} - \lambda \frac{\pi \rho D(l^* + l)}{8} v^2 + \frac{dM}{dt}(u - v). \quad (6)$$

Имея в виду, что  $v = \frac{dl}{dt}$ , и рассматривая как наиболее близкий к практике предельный случай  $u = v$ , уравнение (6) получим в виде

$$(m^* + \rho Sl) \frac{d^2 l}{dt^2} = Sk_1 p_0 t - \frac{\pi}{8} \lambda D \rho (l^* + l) \left( \frac{dl}{dt} \right)^2. \quad (7)$$

Здесь  $m^*$  — масса сыпучего материала в запорном участке длиной  $l^*$

$$k_1 = \frac{k}{\tau}.$$

Уравнение движения (7) решается при начальных условиях

$$t = 0, l_0 = 0, \frac{dl_0}{dt} = 0. \quad (8)$$

Полученное уравнение (7) является неоднородным, нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка и получение аналитического решения в общем случае затруднительно, поэтому уравнение решалось численно на ЭВМ БЭСМ-4.

При численном решении в достаточно широких пределах изменялись все основные параметры, входящие в уравнение (7): величина начального давления  $p_0$ , коэффициент сопротивления трения  $\lambda$ , диаметр трубопровода  $D$ , длина запорного участка  $l$ , коэффициент пропорциональности  $k$ , плотность смеси  $\rho$ .

На рис. 2 показано изменение скорости и длины поршня в зависимости от времени впуска в трубопровод сыпучего материала, длины запорного участка и коэффициента сопротивления трения.

Как видно из графиков, для скорости характерен интенсивный рост в начальный период формирования поршня, причем эта интенсивность возрастает с уменьшением длины запорного участка. При малом значении  $l^*$  скорость быстро достигает максимума и затем медленно убывает, в то время как при больших его значениях скорость растет в течение всего реального времени впуска материала, не достигая максимума. Существенно уменьшается величина скорости и с увеличением коэффициента сопротивления трения.

Длина поршня  $l_m$  при малых длинах запорного участка растет от времени линейно, при  $l^* > 1$  м, зависимость  $l$  от  $t$  нелинейная, что особенно заметно в начальный период формирования поршня.

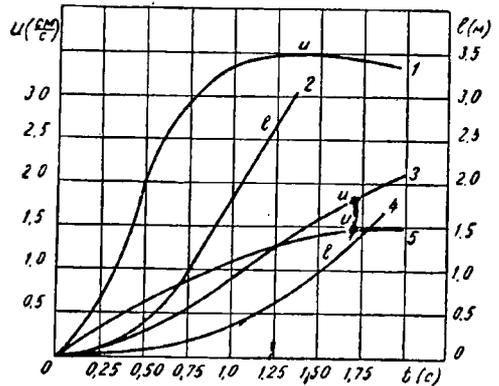


Рис. 2. Изменение скорости и длины поршня в зависимости от времени впуска материала, длины запорного участка и коэффициента трения. 1 — при  $l^* = 0,5$  м,  $\lambda = 0,04$ ; 2 — при  $l^* = 0,5$  м,  $\lambda = 0,04$ ; 3 — при  $l^* = 5$  м,  $\lambda = 0,04$ ; 4 — при  $l^* = 5$  м,  $\lambda = 0,04$ ; 5 — при  $l^* = 2$  м,  $\lambda = 0,2$ .

Как видно из рисунка, длина поршня быстро растет с уменьшением коэффициента сопротивления трения.

Установленный характер зависимости от времени, длины запорного участка и величины коэффициента сопротивления трения имеет следующую физическую интерпретацию. В начальный момент формирования поршня его масса еще мала и ускоряется под действием возрастающего перепада давления, что и ведет к резкому нарастанию скорости;

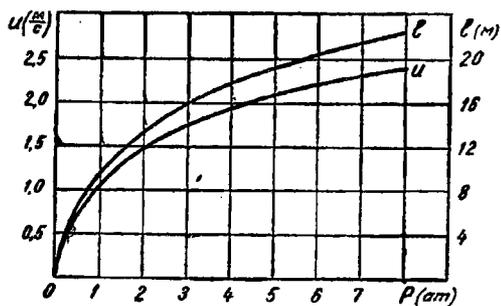


Рис. 3. Зависимость длины и скорости поршня от давления.

длина же поршня, наоборот, в первый момент времени растет медленно, поскольку еще мало значение скорости, а затем, когда величина скорости приближается к своему предельно максимальному значению, растет почти линейно. Большая длина запорного участка существенно увеличивает массу материала, и ускорение в начальный период формирования поршня вследствие этого значительно меньше. Аналогично влияние запорного участка

на длину формирующегося поршня: при больших  $l$  — медленнее нарастает скорость, медленнее растет и длина поршня. Характер влияния величины коэффициента сопротивления трения на величину скорости и длину формирующегося поршня очевиден.

Зависимость скорости и длины поршня от величины исходного давления показана на рис. 3. Из этого графика видно, что характер изменения скорости и длины поршня от давления аналогичен: интенсивное их нарастание на начальном этапе увеличения давления и резкое

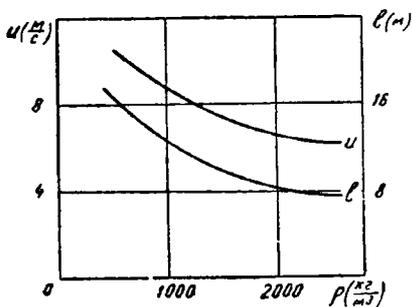


Рис. 4. Зависимость скорости и длины поршня от плотности аэросмеси.

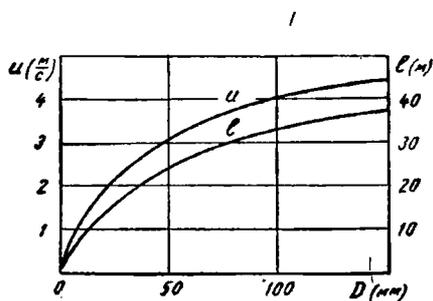


Рис. 5. Изменение скорости и длины поршня от диаметра трубопровода.

уменьшение производных  $u_p'$  и  $l_p'$  при его дальнейшем росте. При некотором давлении указанные производные становятся постоянными. Такое изменение скорости и давления объясняется интенсивным нарастанием сопротивления трения. Действительно, с увеличением начального давления растет скорость формирующегося поршня, и сопротивление трения возрастает более интенсивно — пропорционально квадрату скорости.

Существенное влияние на скорость и длину поршня оказывает плотность смеси, с ростом которой как длина поршня, так и его скорость уменьшаются (рис. 4), так как затрата энергии потока на перемещение аэросмеси с более высокой плотностью возрастает. Большой практический интерес представляет изменение  $u$  и  $l$  в зависимости от диаметра трубопровода. Как видно из графика (рис. 5), как скорость, так и длина с ростом диаметра увеличиваются.

Таким образом, проведенный анализ зависимости значения начальной скорости от величины исходных параметров показывает существенное влияние величины начального давления, длины запорного участка и времени формирования. Определенное влияние на величину начальной скорости оказывает и плотность аэросмеси, коэффициент сопротивления трения и диаметр трубопровода, что подтверждает необходимость при выборе начальной скорости ее расчета по изложенной методике. При этом, как показал анализ результатов экспериментальных исследований, значение коэффициента  $k$  изменяется в достаточно узких пределах  $0,5 \leq k \leq 0,7$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Цв а б. Высоконапорный пневматический транспорт импульсного типа с поршневой структурой движения транспортируемой среды. Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов. Томск. Изд. Томского университета, 1972.

2. В. М. Егоров, В. А. Смол ов и к, Ф. К. Кл а ш а н о в. Определение начальной скорости двухфазного потока при высоконапорном пневмотранспорте импульсного типа. Материалы 2-й Всесоюзной конференции «Механика сыпучих материалов». Одесса, 1971.

---

## МЕТОД ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ ПРИ ПОРШНЕВОМ ПНЕВМОТРАНСПОРТЕ

В. М. ЕГОРОВ, В. А. СМОЛОВИК

Рассмотрен метод прямого измерения силы сопротивления трения с помощью устройства с подвижным участком трубопровода. Использование этого устройства при экспериментальном исследовании поршневого пневмотранспорта позволило определить зависимость величины касательного напряжения смеси от скорости и концентрации материала в поршне.

Затраты энергии несущей среды при пневматическом транспорте на взаимодействие частиц между собой и со стенкой трубопровода обычно учитывают некоторой одной величиной, называемой силой сопротивления трения. Однако условия движения смеси у стенки канала и в ядре потока существенно различны. У стенки трубопровода как несущая среда, так и твердые частицы взаимодействуют с ограждающей поверхностью, причем скорость среды на стенке равна нулю, а скорость частиц претерпевает значительные скачкообразные изменения. Сложность механизма этого взаимодействия до сих пор не позволила учесть влияние стенок канала, вследствие чего обычно пренебрегают различиями условий в пристеночной области и в ядре потока [1].

С этой точки зрения большой интерес представляет непосредственное измерение силы трения материала о стенку трубопровода. Сила трения может быть выражена через касательное напряжение смеси  $\tau$  и рассматриваемую поверхность трубопровода длиной  $l$

$$T = \tau l D l. \quad (1)$$

Для высокой истинной объемной концентрации материала, как показано в работе [2], сила трения воздуха весьма мала по сравнению с силой трения транспортируемого в поршневом режиме материала, поэтому с достаточной степенью точности можно полагать полную измеренную силу  $T$  при движении поршня, равной силе трения твердых частиц о стенку трубопровода.

Непосредственное измерение силы трения осуществлялось с помощью устройства, схема которого представлена на рис. 1. Рабочим органом устройства является подвижный участок трубопровода  $l$  длиной  $l = 1$  м, закрепленный в специальных резиновых манжетах 2, которые выполняют роль уплотнений, соединительных и упругих элементов. Сила, возникающая при перемещении поршня через подвижный участок, стремится переместить его вдоль оси трубопровода. На неподвижной

части трубопровода 3 расположен кронштейн 4, с жестко закрепленным с одного конца элементом 5. Последний представляет собой тонкую пластину из бериллиевой бронзы с наклеенным на нее тензорезистором. Свободный конец пластины соединен с подвижным участком 1 через кронштейн 6, который верхним зажимом закрепляет стержень пластины, а нижним фиксируется на трубопроводе 1. К стержню пластины, проходящему через отверстие кронштейна 5 и паз зажима кронштейна 6, крепится стальная струна 7, с помощью которой для одинаковой степени сжатия уплотнений производится предварительное натяжение пластин и уплотнений, после чего стержень зажимается на кронштейне 6.

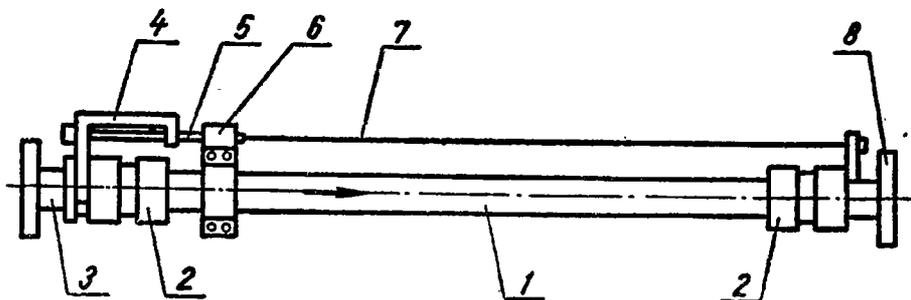


Рис. 1. Схема устройства для измерения силы трения.

При прохождении поршня через подвижный участок усилие от трения смеси о стенку передается на пластину, работающую на растяжение. Одновременно деформируется и тензорезистор. Происходящее при этом увеличение электрического сопротивления приводит к разбалансу моста, в одно из плеч которого включен тензорезистор. Появляющийся сигнал усиливается тензостанцией и регистрируется на ленте шлейфового осциллографа.

При тарировке устройства производилась запись сигналов при известных, искусственно прилагаемых к подвижному участку нагрузках, которые фиксировались с помощью индикатора перемещения И7-10 с ценой деления 0,001 мм. Тарировочный график зависимости отклонения луча осциллографа от соответствующей ему нагрузки имеет вид прямой. С помощью этого же индикатора контролировалось нулевое положение показания датчика. Чувствительный элемент рассчитан для работы в диапазоне возможного изменения силы трения при чувствительности прибора 25 г.

Устройство по непосредственному измерению силы трения устанавливалось с помощью фланцев 8 на горизонтальной части магистрального трубопровода в 20 м от питателя. Во избежание влияния на измерения вибраций эта часть трубопровода имеет жесткое крепление.

Экспериментальные исследования с регистрацией силы трения проводились при поршневом транспортировании хлористого калия, цемента и угольной пыли. В процессе эксперимента фиксировались все необходимые данные для определения скорости движения и истинной объемной концентрации материала в поршне, проходящих через подвижный участок. С этой целью до описанного устройства и после него располагаются датчики для измерения статического давления и скорости поршня [3]. Таким образом, одновременно с записью сигналов от прибора для измерения силы трения фиксировались все необходимые другие параметры.

При известной из опыта величине силы трения по зависимости (1) определяется касательное напряжение  $\tau$ , которому соответствуют вполне определенные величины скорости движения поршня и истинной объемной концентрации и материала  $\epsilon_m$ . На рис. 2 приведена опытная зави-

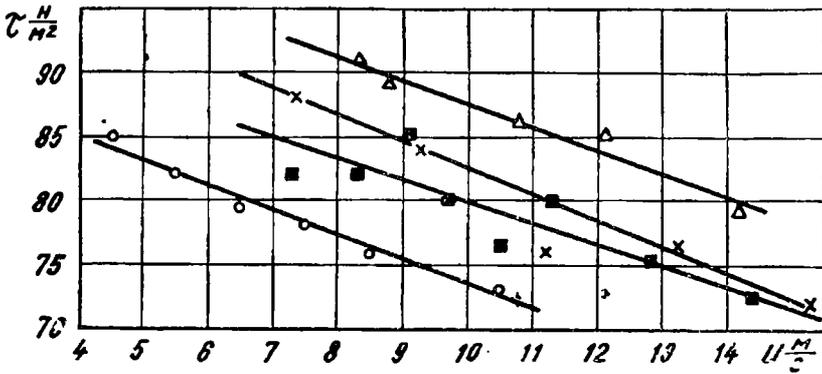


Рис. 2. Зависимость касательного напряжения от скорости движения поршня. Для цемента при  $\epsilon_m=0,20$ :  $\circ$  — при прямом измерении силы трения,  $\times$  — рассчитано по опытным параметрам потока; для угольной пыли при  $\epsilon_m=0,28$ :  $\blacksquare$  — при прямом измерении,  $\triangle$  — рассчитано по опытным параметрам.

симость  $\tau$  от скорости поршня  $u$  для цемента при  $\epsilon_m = 0,20$  и угольной пыли при  $\epsilon_m = 0,28$ . Для выявления более точного характера этой зависимости было проведено осреднение опытных точек с интервалом по скорости в 1 м/сек. Как видно из графика, для обоих материалов касательное напряжение с ростом скорости уменьшается. Большие значения  $\tau$  для угольной пыли в данном случае в основном объясняются более высокой истинной объемной концентрацией материала в поршне. Более высоким значениям концентрации соответствует большее статическое давление на нижнюю часть стенки трубопровода, приводящее к росту силы трения. Аналогичное воздействие оказывает и увеличение плотности материала. Кроме того, с повышением концентрации увеличивается количество взаимодействующих со стенкой трубопровода частиц, что также влияет на величину силы трения.

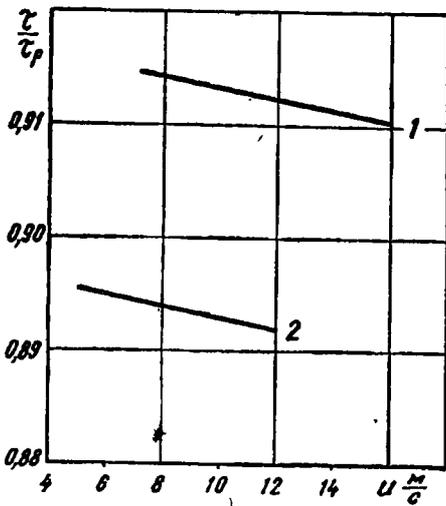


Рис. 3. Изменение от скорости поршня отношения касательных напряжений, полученных прямым методом измерения и рассчитанным по опытным параметрам потока. 1 — угольная пыль при  $\epsilon_m=0,28$ , 2 — цемент при  $\epsilon_m=0,20$ .

Касательное напряжение можно определить и косвенным методом, определяя его из уравнения движения поршня или совместного решения системы дифференциальных уравнений двухфазного потока [2]. Для этого необходимо знать входящие в уравнение параметры потока, которые определялись экспериментальным путем [3]. Полученные таким образом касательные напряжения для цемента при  $\epsilon_m = 0,2$  и угольной пыли при  $\epsilon_m = 0,28$  представлены на рис. 2. Для более простого количественного сравнения касательных напряжений, найденных расчетом и пря-

70

мым измерением, через усредненные по интервалам опытные точки проведены прямые.

Как и следовало ожидать, найденные по параметрам потока напряжения, учитывающие не только взаимодействие материала со стенкой трубопровода, но и твердых частиц между собой, оказались выше измеренных. На рис. 3 для цемента ( $\epsilon_m = 0,20$ ) и угольной пыли ( $\epsilon_m = 0,28$ ) представлено изменение от скорости поршня отношения касательных напряжений, полученных прямым методом измерения и рассчитанным по опытным параметрам потока. Из этого графика следует, что большие расхождения в касательных напряжениях принадлежат цементу (в интервале скоростей от 5 до 12 м/сек, в среднем около 10,6%), для угольной пыли среднее расхождение меньше — около 8,8%.

Механизм взаимодействия частиц со стенкой и между собой до сих пор изучен недостаточно, чтобы можно было дать детальный анализ вышеуказанных расхождений, но, несомненно, они зависят от физических свойств транспортируемого материала, концентрации его в потоке, скорости движения, состояния поверхности стенки трубопровода, наличия электростатического электричества.

Как для цемента, так и для угольной пыли на рис. 3 наблюдается уменьшение отношения  $\tau/\tau_p$  с увеличением скорости, причем с одинаковым темпом: 0,1% на 1 м/сек.

Опыт эксплуатации описанного устройства для измерения силы трения показал вполне удовлетворительную его работу и целесообразность использования в тех случаях, когда исследователя удовлетворяют средние на некоторой длине трубопровода (в данном случае 1 м) значения касательного напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Бабуха, А. А. Шрайбер. Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. Киев. Изд. «Наукова думка», 1972.
  2. В. М. Егоров, Л. Ф. Мельник, А. Т. Севостьянов, В. А. Смолоник, А. В. Шваб. Исследование сопротивления трения при высоконапорном пневмотранспорте поршневого типа.— Настоящий сборник. Т. 6.
  3. В. М. Егоров, А. Т. Севостьянов, В. А. Смолоник, В. Н. Пачин. Измерение параметров потока при поршневом пневматическом транспорте дисперсных материалов.— Сб. «Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов». Томск, 1972.
-

## К ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ АЛЮМИНИЯ

В. А. ЖДАНОВ, В. Ф. КОНУСОВ, А. В. ЖУКОВ

Разрушение реального материала тесно связано с поведением его кристаллической решетки в условиях сложных систем напряжений, поэтому расчет поведения кристаллической решетки в этих условиях является необходимым шагом при построении физически обоснованной теории прочности. Нами был разработан метод расчета критических характеристик решеток металлов, находящихся в условиях сложных систем напряжений, и применен к некоторым простым случаям. В настоящей работе мы провели расчет критических характеристик механического разрушения алюминия — металла, изучению которого посвящено большое количество экспериментальных работ, имеющего большое техническое значение.

Расчет предельных характеристик, значений компонент тензора напряжений, плотности, энергии деформации проведен на основе общего термодинамического подхода к проблеме устойчивости кристаллической решетки [1—3]. Согласно методике, развитой в указанных работах, для расчета предельных характеристик разрушения кристаллической решетки необходимо знание функции энергии связи решетки. В данной работе мы не рассматриваем влияние температуры на процесс разрушения решетки, ограничиваясь обсуждением разрушения алюминия в условиях температур, далеких от температуры плавления, когда, как показывают соображения качественного характера, температура слабо влияет на механизм разрушения. Заметим, что последовательный учет температуры связан со значительными затруднениями как принципиального, так и вычислительного характера.

Функция энергии связи металла в соответствии со статистическим приближением в квантовой теории твердого тела может быть представлена, в расчете на одну частицу, в виде

$$E = U_c + \chi(v) + \frac{1}{2} \sum_l \varphi(|a^l|, v) + \dots, \quad (1)$$

где  $U_c$  — кулоновская энергия взаимодействия точечных положительных ионов, находящихся в узлах кристаллической решетки, и компенсирующего отрицательного заряда распределенного с постоянной плотностью [4].  $\chi(v)$  — функция, связанная с наличием валентных электронов, зависящая от объема элементарной ячейки.  $\varphi(|a^l|, v)$  — так называемая функция парного перекрытия ионных оболочек, зависящая

от расстояния между атомами, и, вообще говоря, от объема элементарной ячейки.

Так как последовательное построение функции энергии связи для алюминия невозможно, мы получили ее привлекая экспериментальный материал. С этой целью представили функцию  $\chi(v)$  в виде ряда

$$\chi(v) = \sum_{i=1}^6 \frac{c_i}{v^{\frac{i}{3}}}, \quad (2)$$

а функцию  $\varphi(|\alpha'|, v)$  — пренебрегая сравнительно слабой зависимостью от  $v$  в виде

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^4} + \frac{B}{r^6}. \quad (3)$$

Вводя относительную плотность  $\rho = \frac{v_0}{v}$ , где  $v_0$  — объем свободной недеформированной ячейки, энергию деформированной решетки  $E$ , компоненты тензора напряжений  $X_{ik}$  и модули упругости  $C_{ik, i' k'}$  можем записать в виде

$$E = v_0 \left( \sum_{n=1,4,6} \frac{b_n [0]_n}{n [11]_n^0} \rho^{\frac{n}{3}} + 3 \sum_{n=1}^6 \frac{a_n}{n} \rho^{\frac{n}{3}} \right) \quad (4)$$

$$-X_{ik} = \sum_{n=1,4,6} \frac{[ik]_n}{[11]_n^0} b_n \rho^{\frac{n}{3}+1} + \sum_{n=1}^6 \delta_{ik} a_n \rho^{\frac{n}{3}+1} \quad (5)$$

$$C_{ik, i' k'} = \sum_{n=1,4,6} \frac{(n+2)[iki'k']_n}{[11]_n^0} b_n \rho^{\frac{n}{3}+1} + \sum_{n=1}^6 \left( \frac{n}{3} \delta_{ik} \delta_{i'k'} + \delta_{ii'} \delta_{kk'} + \delta_{ik'} \delta_{i'k} \right) a_n \rho^{\frac{n}{3}+1}, \quad (6)$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронеккера, скобочные символы  $[ik\dots]_n$ , так называемые решеточные суммы, входящие в уравнения (4), (5), (6), зависят от формы элементарной ячейки и не зависят от ее размеров; вычислялись нами по методу Эвальда.  $[11]_n^0$  — значение скобочных символов для свободной решетки. Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  — параметры уравнений — подбирались нами по экспериментальным значениям модулей упругости и уравнению гидростатического сжатия [5]; их численные значения приведены в табл. 1 в единицах модуля сдвига  $C_{44}$ , там же приведено значение модуля  $C_{44}$  в единицах  $10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>.

Таблица 1

| Величина | Значение | Величина | Значение |
|----------|----------|----------|----------|
| $a_1$    | 5,8977   | $b_1$    | -9,0     |
| $a_2$    | 30,5576  | $b_4$    | -87,5533 |
| $a_3$    | -83,3748 | $b_6$    | 24,6722  |
| $a_4$    | 171,2108 | $C_{44}$ | 0,285    |
| $a_5$    | -32,0990 |          |          |
| $a_6$    | -20,3112 |          |          |

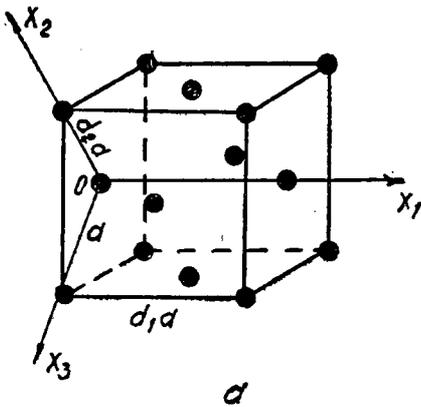
Система тензорных уравнений (5) дает возможность рассмотреть механические свойства алюминия в условиях сложных систем напряжений, произвольных по величине. Критические значения напряжений, приводящие к механическому разрушению решетки, могут быть определены из условий положительной определенности квадратичной формы с коэффициентами (6).

Используя симметрию кристаллической решетки алюминия, мы выделили такие типы напряженных состояний, при которых разрушающие напряжения должны принимать экстремальные значения. Такими типами напряжений являются:

1. Напряжения, сохраняющие кубическую симметрию решетки  $O_h$ ; это напряжение всестороннего сжатия или растяжения. В этом случае единственным параметром, определяющим деформацию решетки, будет плотность  $\rho$ . Компоненты тензора напряжений запишутся в виде  $X_{ik} = -\delta_{ik}P$ , где  $P$  — давление. Отличными от нуля модулями упругости в обозначениях Фохта, будут  $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ ,  $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ ,  $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ . Условия устойчивости решетки сводятся к трем неравенствам:

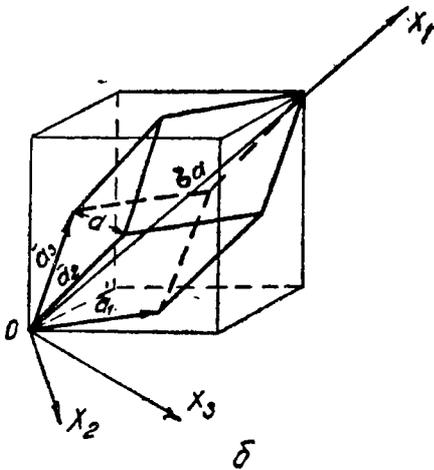
$$(C_{11} + 2C_{12}) > 0, C_{11} - C_{12} > 0, C_{44} > 0.$$

2. Напряжения, сохраняющие тетрагональную симметрию  $D_{4h}$ . Эта система напряжений включает такой важный случай напряженного состояния, как одноосное растяжение или сжатие вдоль ребра элементарного куба. Элемент периодичности в этом случае может быть выбран



в виде прямоугольной гранецентрированной призмы с квадратным основанием. Направляя ось декартовой системы координат  $ox_1$  вдоль высоты призмы, а оси  $ox_2$  и  $ox_3$  вдоль диагоналей основания этой призмы, получим отличные от нуля компоненты тензора напряжений  $X_{11}$ ,  $X_{22} = X_{33}$  и модули упругости  $C_{11}$ ,  $C_{22} = C_{33}$ ,  $C_{12} = C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55} = C_{66}$ ; условия устойчивости в этом случае сведутся к неравенствам:

$$(C_{22} + C_{23}) C_{11} - 2C_{12}^2 > 0, \\ C_{22} - C_{23} > 0, C_{44} > 0, C_{55} > 0.$$



Суммы  $[ik\dots]_n$  будут функциями одного параметра  $\alpha$  — меры тетрагональности призмы, определенной как отношение высоты призмы к половине диагонали основания; для свободной кубической решетки  $\alpha^2 = 2$ . Таким образом, деформация решетки определяется в данном случае двумя параметрами:  $\alpha$  и  $\rho$ .

3. Напряжения, сохраняющие ромбоэдрическую симметрию решетки  $D_{3d}$ . Данный тип напряжений включает в себя одностороннее растяжение или сжатие вдоль пространственной диагонали элементарного куба. Элемент периодичности может быть выбран в виде ромбоэдра, построенного на трех основных векторах:  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_3$ , как это изображено на рис. 1, б. Выбирая ось декартовой системы координат  $ox_1$  вдоль пространственной диагонали ромбоэдра, оси симметрии третьего порядка  $C_3$ , ось  $ox_3$  вдоль оси симметрии второго порядка  $C_2$ , перпендикулярной к оси  $C_3$ , а ось  $ox_2$  в перпендикулярном к ним направлении

Рис. 1.

тарного куба. Элемент периодичности может быть выбран в виде ромбоэдра, построенного на трех основных векторах:  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_3$ , как это изображено на рис. 1, б. Выбирая ось декартовой системы координат  $ox_1$  вдоль пространственной диагонали ромбоэдра, оси симметрии третьего порядка  $C_3$ , ось  $ox_3$  вдоль оси симметрии второго порядка  $C_2$ , перпендикулярной к оси  $C_3$ , а ось  $ox_2$  в перпендикулярном к ним направлении

(рис. 1, б), получим отличными от нуля компоненты тензора напряжений  $X_{11}$ ,  $X_{22}=X_{33}$  и модули упругости  $C_{11}$ ,  $C_{22}=C_{33}$ ,  $C_{13}=C_{12}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{55}=C_{66}$ ,  $C_{44}=1/2 (C_{33}-C_{23})$ ,  $C_{34}=C_{35}=-C_{36}$ . В этом случае условия устойчивости сведутся к двум неравенствам:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (C_{33}-C_{23})C_{66}-2C_{35}^2 > 0. \\ \Delta_2 &= (C_{33}+C_{23})C_{11}-2C_{13}^2 > 0.\end{aligned}$$

Суммы  $[ik\dots]_n$  будут функциями одного параметра  $\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ , где  $\sigma$  — отношение пространственной диагонали ромбоэдра к кратчайшему расстоянию между частицами в плоскости  $ox_2x_3$ ,  $\sigma_0 = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$  — значение

этого отношения для свободной решетки. Таким образом, деформация и в этом случае определяется двумя параметрами:  $\gamma$  и  $\rho$ .

4. Напряжения, не меняющие орторомбической симметрии  $D_{2h}$ . В этом случае можно рассматривать деформации с сохранением симметрий  $\Gamma_0^V$  и  $\Gamma_0^f$ . В данной работе мы рассмотрели первый случай. В этом случае, элемент периодичности решетки может быть выбран в виде прямой гранецентрированной призмы с ромбом в основании. Направим ось  $ox_1$  вдоль высоты призмы, а оси  $ox_2$  и  $ox_3$  — вдоль диагоналей ромба основания; определим параметр деформации  $\alpha_1$  как отношение высоты призмы к половине диагонали основания вдоль оси  $ox_3$  и параметр деформации  $\alpha_2$  — как отношение диагонали основания вдоль оси  $ox_2$  к диагонали вдоль оси  $ox_3$  (рис. 1, а), тогда суммы  $[ik\dots]_n$  будут функциями двух параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для свободной решетки имеем  $\alpha_1^2=2$ ,  $\alpha_2^2=1$ . Отличными от нуля компонентами тензора напряжений будут компоненты  $X_{11}$ ,  $X_{22}$ ,  $X_{33}$ , а модули упругости, отличные от нуля, будут  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$ ,  $C_{66}$ . Условия устойчивости сводятся к следующим неравенствам:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} > 0, C_{44} > 0, C_{55} > 0, C_{66} > 0.$$

Данная задача является трехпараметрической, что обуславливает значительные трудности как вычислительного характера, так и трудности, связанные с наглядной интерпретацией результатов. Мы ограничились поэтому рассмотрением касательных напряжений, представляющих наибольший интерес. В этом случае

$$\sum_i X_{ii} = 0.$$

Это условие позволило выразить  $\rho$  как функцию от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , что привело снова к двухпараметрической задаче.

Программа расчета строилась следующим образом: рассчитывались компоненты тензора напряжений и условия устойчивости, как функции параметров деформации; находились графическим способом критические значения параметров деформации в точках обращения в нуль одного из условий устойчивости, затем графическим способом по известным критическим значениям параметров деформации рассчитывались критические значения компонент тензора напряжений. Вся расчетная часть, связанная с вычислением суммы  $[ik\dots]_n$  и определением критических параметров разрушения, была реализована на ЦЭВМ.

Перейдем теперь к анализу полученных результатов. Приведем сначала результаты расчета для напряжений, сохраняющих тетраго-

нальную симметрию решетки. На рис. 2 в плоскости  $X_{11}$ ,  $X_{22}$  сплошными кривыми выделена область напряжений, включающая точку  $O$ , при которых решетка является устойчивой. Величины  $X_{11}$  и  $X_{22}$  отложены в единицах модуля сдвига  $C_{44}$ . На границе области устойчивости решетка теряет сопротивление сдвигам ( $C_{55}=0$  и  $C_{22}-C_{23}=0$ ). Прямая  $BB'$  на

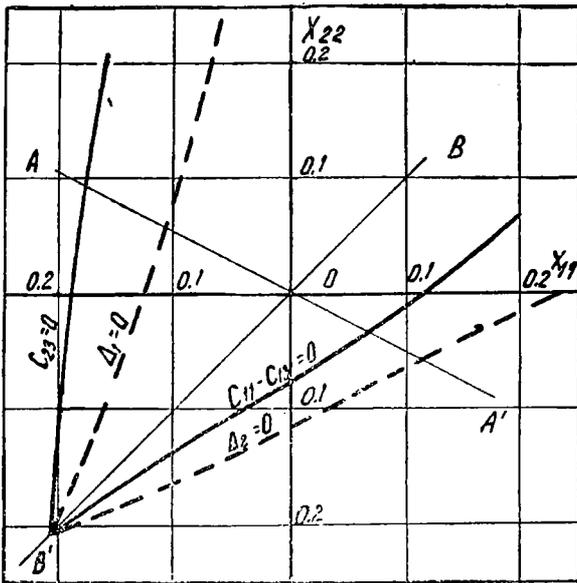


Рис. 2.

этом рисунке соответствует случаю всестороннего напряжения, прямая  $AA'$  — случаю касательных напряжений. Как видно из этого рисунка, при всестороннем сжатии (направление  $OB$ ) решетка не разрушается, при всестороннем растяжении (напр.,  $OB'$ ) решетка разрушается при напряжениях, соответствующих точке  $B'$ . Точки пересечения прямой  $AA'$  с границами области устойчивости определяют критические значения компонент тензора напряжений при касательных напряжениях. Рис. 2 можно рассматривать как диаграмму анизотропии прочности при данном типе напряжений. Хотя сравнение по величине напряжений, носящих тензорный характер, и затруднительно, тем не менее можно сказать, что критические значения напряжений при всестороннем растяжении являются максимальными относительно соседних типов напряжений, а критические значения при касательных напряжениях (направление  $OA'$ ) принимают наименьшее по величине значение среди всех систем напряжений, сохраняющих тетрагональную симметрию решетки. Отметим случай одноосного напряжения вдоль ребра куба ( $X_{22}=0$ ). Из рисунка видно, что величина критического напряжения при сжатии приблизительно в 2 раза меньше при растяжении.

На рис. 3 изображена полярная диаграмма энергии разрушения решетки (сплошная кривая). Полярный угол  $\varphi$  на этой диаграмме определяется по формуле  $\varphi = \text{arctg}(X_{22}/X_{11})$ . Из рисунка следует, что энергия разрушения очень сильно зависит от типа напряженного состояния, причем не существует заметной корреляции между величиной критического напряжения и величиной критической энергии деформации. Действительно, хотя при всестороннем растяжении энергия и принимает экстремальное (максимальное) значение, тем не менее при сдвигах

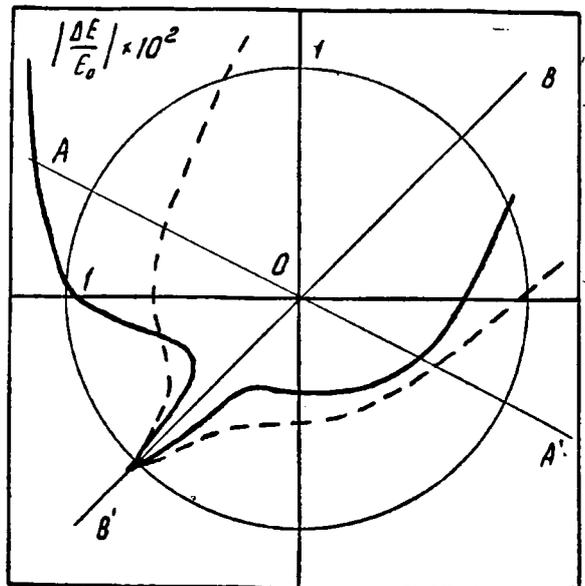


Рис. 3.

энергия не является экстремальной. Наименьшая энергия разрушения наблюдается при двустороннем растяжении в плоскости, перпендикулярной к оси четвертого порядка (вдоль ребер элементарного куба).

На рис. 4 изображена полярная диаграмма для критической плотности решетки для этого же типа напряжений (сплошная кривая). Величина  $(1-\rho) \times 10$  откладывается по радиусу по направлению к центру от окружности с индексом 0. Как видно из этого рисунка, наименьшая критическая плотность отмечается в случае всестороннего растяжения решетки; при напряжениях сдвига (направление  $OA'$ ) изменение плотности очень мало, причем  $\rho < 1$ , то есть при деформации сдвига наблюдаются некоторые увеличения объема решетки.

На рис. 5 для этого же случая напряжений сплошной кривой в переменных  $\rho$  и  $\alpha^2$ , определяющих размер и форму элементарной ячейки решетки, выделена та же область устойчивых состояний решетки, что и на рис. 2. Как видно из рис. 5, при  $\alpha^2 > 2$  (вытянутая гранецентрированная решетка вдоль одного из ребер) нарушаются условия устойчивости  $C_{55} > 0$ , а при  $\alpha^2 < 2$  (сжатие вдоль одного из ребер) нарушается условие  $C_{22} - C_{23} > 0$ .

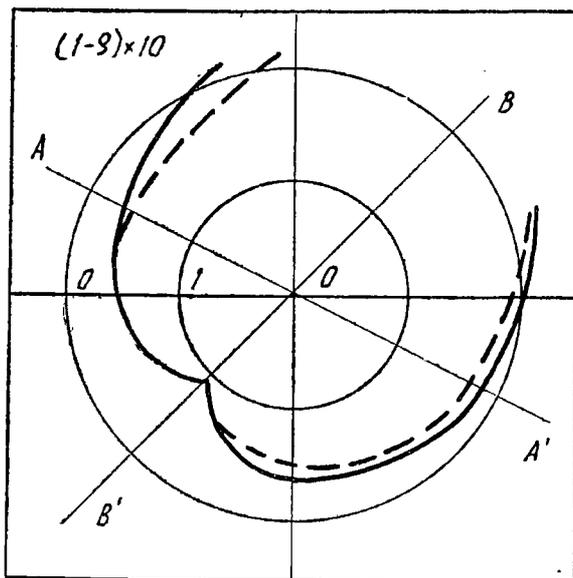


Рис. 4.

При всестороннем растяжении нарушаются оба условия устойчивости, что свидетельствует о разрушении путем сдвига в плоскости ромбического додекаэдра, но с неопределенным направлением сдвига.

Результаты расчета для случая напряжений, сохраняющих ромбоэдрическую симметрию  $D_{3d}$ , изображены также на рис. 2—5 штриховыми линиями. Поведение решетки алюминия в этом случае весьма похоже на ее поведение при напряжениях, не меняющих тетрагональной симметрии решетки. Отметим только, что в отличие от предыдущего случая наименьшее значение

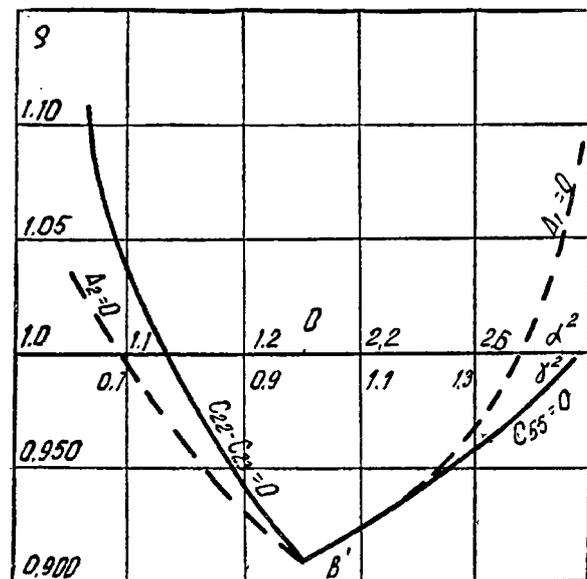


Рис. 5.

прочности имеет место при напряжениях сдвига, как в направлении  $OA'$ , так и в обратном направлении  $OA$ , а при одноосном напряжении вдоль диагонали куба прочность при сжатии в 2 раза больше, чем при растяжении. На рис. 5 для случая напряжений типа  $D_{3d}$  форма элемен-

тарной ячейки определяется параметром  $\gamma^2$ . Как видно из рис. 5, при растяжении решетки вдоль главной диагонали куба разрушение решетки происходит за счет нарушения условия устойчивости  $\Delta_1 > 0$ , а при сжатии — за счет условия  $\Delta_2 > 0$ .

Рассмотрим теперь случай касательных напряжений, сохраняющих симметрию  $D_{2h}$ . На рис. 6 на плоскости параметров  $\alpha^2_1, \alpha^2_2$  приведена замкнутая область устойчивых состояний решетки, включающая точку  $O$ , соответствующую свободной решетке, для этого случая напряжений. Эта область ограничена кривой  $FA'C$ , на которой нарушается условие устойчивости  $\Delta > 0$  и кривой  $FAC$ , где нарушается условие устойчивости  $C_{66} > 0$ . Свободной объемноцентрированной решетке соответствует точка  $O'$ . Прямая  $AOA'$  соответствует рассмотренному выше случаю сдвигов, сохраняющих тетрагональную симметрию решетки.

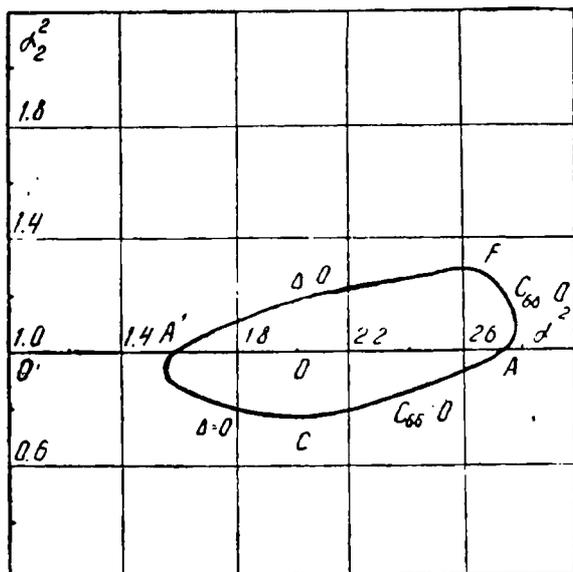


Рис. 6.

На рис. 7 на плоскости  $X_{11}, X_{22}$  для этого случая изображена диаграмма анизотропии прочности. Как видно из

этого рисунка, наименьшее значение прочности имеет место в случае сдвигов, близких к направлению  $OM$ , не имеющих наглядного геометрического смысла.

На рис. 8 представлена полярная диаграмма для критических энергий деформации и критических значений плотности решетки. Из рисунка следует, что при любых касательных напряжениях рассматриваемого типа критические значения плотности весьма мало зависят от типа напряжения и всегда меньше единицы. Анизотропия критической энергии деформации весьма значительна, наименьшая энергия соответствует сдвигам, определяемым направлением  $OM$ .

На рис. 9 изображена энергия деформации решетки для случая сдвигов в направлении  $AA'$ , как функция от параметра формы элементарной ячейки  $\alpha^2_1$ . Крестиком отмечены точки, в которых решетка теряет устойчивость. Этот рисунок дает возможность объяснить, почему в направлении  $OA'$  решетка разрушается при меньшем критическом напряжении, чем в противоположном направлении

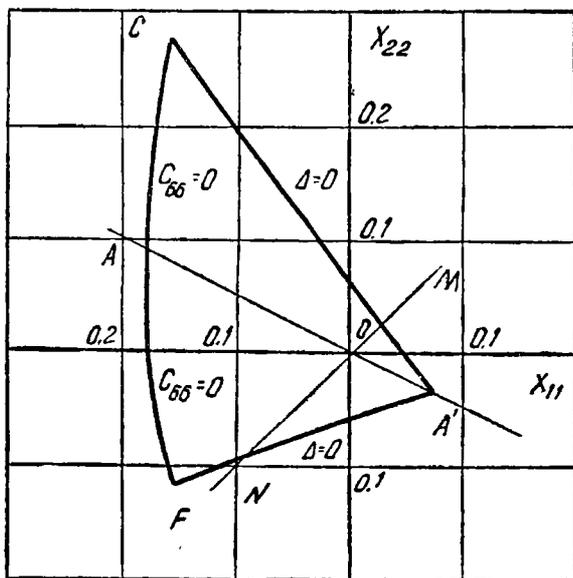


Рис. 7.

Таблица 2

| Вид напряжения  | Величина                           | Значение                           | Вид напряжения                             | Величина  | Значение                           |                                    |         |
|---|------------------------------------|------------------------------------|--|---|------------------------------------|------------------------------------|---------|
| Всестороннее растяжение   | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 1,1                                | $X_{33} = -X_{33}$<br>$X_{11} = 0, D_{2h}$ | $X_{22}$  | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,27                               |         |
|   | $\rho$                             | в ед. $C_{11}$                     |  |   | -0,21                              | в ед. $C_{44}$                     | 0,06    |
|   |                                    | в кбар.                            |  |   | -60                                |                                    | в кбар. |
|   | $\rho$                             |                                    |  |   | 0,908                              | $\rho$                             |         |
| Одноосное, $X_{22} = 0$<br>$D_{4h}$                               | $< 0$                              | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 1,02                                       | $\frac{1}{2} X_{11} = -X_{22} = -X_{33}$<br>$D_{2h} = D_{4h}$ | $X_{11}$                           | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 1,25    |
|   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | -0,19                                      |   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | -0,182  |
|   |                                    |                                    | в кбар.                                    |   |                                    |                                    | -54     |
|   | $\rho$                             |                                    | 0,955                                      |   | $\rho$                             |                                    | 0,970   |
|   | $> 0$                              | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,71                                       |   | $X_{11}$                           | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,51    |
|   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | 0,12                                       |   |                                    | в ед. $C_{11}$                     | 0,07    |
|   |                                    |                                    | в кбар.                                    |   |                                    |                                    | 32      |
|   | $\rho$                             |                                    | 1,005                                      |   | $\rho$                             |                                    | 0,989   |
| Одноосное, $X_{22} = 0$<br>$D_{3d}$                               | $< 0$                              | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,67                                       | $X_{22} = 0, X_{11} = -X_{33}$<br>$D_{2h}$                    | $X_{11}$                           | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 1,13    |
|   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | -0,12                                      |   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | -0,18   |
|   |                                    |                                    | в кбар.                                    |   |                                    |                                    | -34     |
|   | $\rho$                             |                                    | 0,955                                      |   | $\rho$                             |                                    | 0,970   |
|   | $> 0$                              | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,90                                       |   | $X_{11}$                           | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,23    |
|   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | 0,23                                       |   |                                    | в ед. $C_{11}$                     | 0,045   |
|   |                                    |                                    | в кбар.                                    |   |                                    |                                    | 65      |
|   | $\rho$                             |                                    | 0,985                                      |   | $\rho$                             |                                    | 0,990   |
| Двустороннее растяж.<br>$X_{11} = 0, X_{22} = X_{33}$<br>$D_{4h}$ | $< 0$                              | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,41                                       | $X_{22} = -X_{33}$<br>$D_{3d}$                                | $X_{11}$                           | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,67    |
|   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | -0,079                                     |   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | -0,103  |
|   |                                    |                                    | в кбар.                                    |   |                                    |                                    | -22     |
|   | $\rho$                             |                                    | 0,974                                      |   | $\rho$                             |                                    | 0,965   |
| $X_{11} = X_{22} = -\frac{1}{2} X_{33}$<br>$D_{2h}$               | $> 0$                              | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,18                                       | $\frac{1}{2} X_{11} = -X_{22} = -X_{33}$<br>$D_{3d}$          | $X_{11}$                           | $\frac{\Delta E}{E_0} \times 10^2$ | 0,66    |
|   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | 0,025                                      |   |                                    | в ед. $C_{44}$                     | 0,112   |
|   |                                    |                                    | в кбар.                                    |   |                                    |                                    | 7,1     |
|   | $\rho$                             |                                    | 0,985                                      |   | $\rho$                             |                                    | 0,970   |

нии  $OA$ . Как видно из рисунка, это обстоятельство связано с наличием на пути деформации в направлении  $OA'$  свободной объемноцентрированной кубической решетки, хотя энергия объемноцентрированной кубической решетки весьма велика и имеет характер максимума, тем не менее наличие экстремума значительно уменьшает крутизну наклона, приводя к сравнительно малому значению прочности.

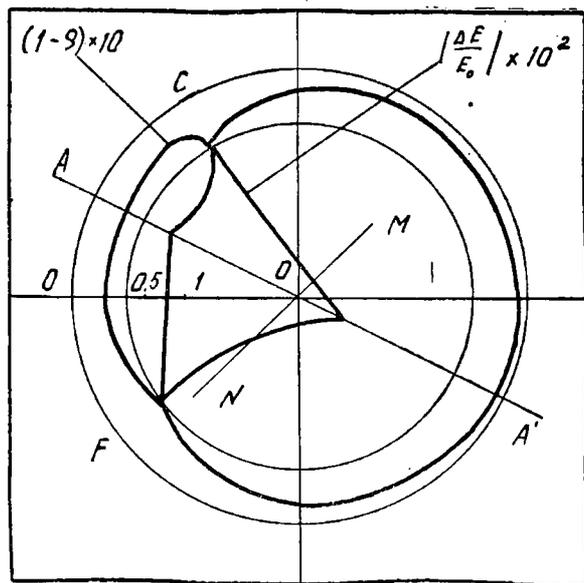


Рис. 8.

В табл. 2 приведены предельные значения характеристик кристаллической решетки алюминия для ряда наиболее интересных систем напряжений. Как видно из таблицы, относительная энергия деформации меняется примерно от 0,2% до 1%, критические значения компонент тензора напряжений лежат в пределах от 7 кбар (сдвиг  $X_{11} = X_{22} = -1/2 X_{33} > 0$  направление  $OM$  рис. 7) до 60 кбар (всестороннее растяжение). Критическое значение плотности лежит в пределах от 1 до 10 процентов от недеформированной решетки.

Сравнение различных напряженных состояний по величине между собой затруднено тензорным характером величин напряжений. Можно ввести лишь некоторую косвенную характеристику по энергии деформации. Энергетически наиболее выгодным является сдвиг  $X_{11} = X_{22} = -1/2 X_{33} > 0$ , для которого  $X_{11} = 7,1$  кбар.

Прямое сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными для монокристаллов алюминия не представляется возможным ввиду их отсутствия. Имеющийся экспериментальный материал для поликристаллов весьма противоречив и неполон. Отметим, что данные по динамическому нагружению дают величину прочности по порядку, совпадающую с данными табл. 2. Так, например, в [6] дается значение прочности поликристалла алюминия — 52 кбар — величина, близкая к среднему значению напряжений из табл. 2. Это обстоятельство показывает, что выбранная нами модель является качественно правильной.

Большой интерес представляет разработка экспериментальных методов проверки наших результатов, особенно выделение системы напряжений, наиболее опасной для решетки алюминия.

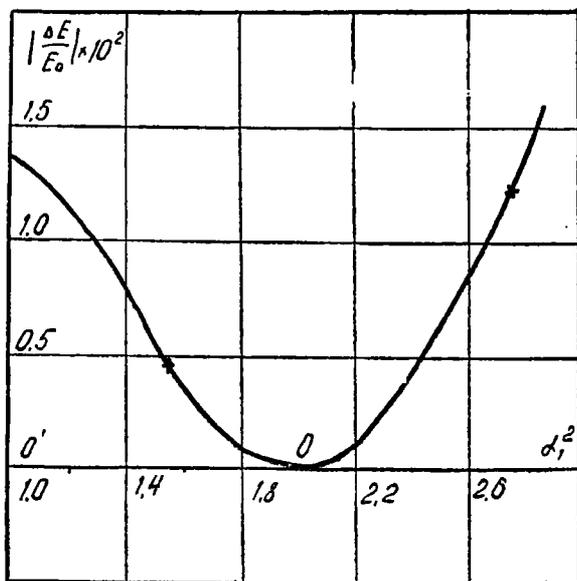


Рис. 9

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Жданов, В. Ф. Конусов.— «Изв. вузов СССР, Физика». 3, 105, 1967.
  2. В. А. Жданов, В. Ф. Конусов.— ЖЭТФ. 20, 1, 1950.
  3. В. А. Жданов, В. Ф. Конусов.— ЖЭТФ. 22, 3, 1952.
  4. В. Ф. Конусов.— «Изв. вузов СССР, Физика». 4, 113, 1964.
  5. С. Б. Кормер, В. Д. Урлин, Л. Г. Попова.— ФТТ 3, 2131, 1961.
  6. И. Скидмор. Механика сб. перев. стат. 4 (110) 129, 1968.
-

## К РАСЧЕТУ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОВ

В. А. ЖДАНОВ, В. Ф. КОНУСОВ, В. В. ПОЛЯКОВ

Уравнения состояния металлов строятся на основе уравнения состояния Ми-Грюнайзена, имеющего вид

$$P = P_x + \frac{\gamma(V)}{V}(E - E_x), \quad (1)$$

где  $E$  — полная энергия;  $E - E_x$  — энергия тепловых колебаний;  $P$  — полное давление;  $P_x$  — соответствующее  $E_x$  давление, которое выражается как производная от  $E_x$  по объему  $V$ ;  $\gamma$  — коэффициент Грюнайзена. Однако форма этих уравнений состояния не является достаточно удобной при практических расчетах, поэтому представляется целесообразным придать уравнению (1) форму, которая была бы лишена этого недостатка.

Если воспользоваться формулой Слэтера-Ландау [1]

$$\gamma(V) = -\frac{V}{2} \frac{\partial^3 E_x / \partial V^3}{\partial^2 E_x / \partial V^2} - \frac{2}{3}, \quad (2)$$

то основная задача нахождения теоретической зависимости  $P = P(E, V)$  сведется к получению удобного выражения для  $E_x$ .

Если  $E_x$  представить в виде

$$E_x(\sigma) = \sum_{k=1}^n a_k \sigma^{k/3}, \quad (3)$$

где  $\sigma = V_0/V$  — степень сжатия ( $V_0$  — объем при  $P = 0$ ,  $T = 0^\circ K$ ),  $a_k$  — известные коэффициенты, то давление  $P_x$  и коэффициент Грюнайзена  $\gamma$  выразятся через  $\sigma$  и  $a_k$ . Отсюда получаем уравнение состояния в виде

$$P(E, \sigma) = \sum_{k=1}^n A_k \sigma^{k/3+1} + \frac{\sum_{k=1}^n B_k \sigma^{k/3+3}}{\sum_{k=1}^n C_k \sigma^{k/3}} \left( E - \sum_{k=1}^n D_k \sigma^{k/3} \right), \quad (4)$$

где

$$A_k = ka_k/3V_0, B_k = ka_k(6+5k+k^2), C_k = 2V_0ka_k(3+k), D_k = a_k.$$

Энергия  $E_x$  для металлов может быть найдена из теории или эксперимента. Для щелочных металлов по статистической теории [2]  $E_x$  может быть представлена в виде

$$E_x = \frac{kV}{V_0^{1/3}} + b_1 \sigma^{1/3} + b_2 \sigma^{2/3} + b_3 \sigma. \quad (5)$$

Данное выражение совпадает с (3) при  $n=3$ ,  $a_1 = k_v/V_0 + b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $a_3 = b_3$ . Коэффициенты  $b_k$  приведены в атомных единицах в таблице согласно [3].

Таблица 1

| Металл | $b_1$  | $b_2$  | $b_3$ |
|--------|--------|--------|-------|
| Na     | -0,114 | 0,069  | 0,067 |
| K      | -0,113 | 0,054  | 0,063 |
| Rb     | -0,039 | -0,033 | 0,101 |
| Cs     | -0,118 | 0,077  | 0,053 |

Для большого ряда металлов, в том числе железа, алюминия и свинца,  $E_x$  в виде (3) приведена на основе экспериментальных данных в [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, К. П. Станюкович.— ДАН СССР, 46. 399, 1945.
2. В. А. Жданов, В. Ф. Конусов.— «Изв. вузов СССР, Физика», 1964, № 3.
3. Э. А. Богемская. Исследование механических свойств щелочных и щелочно-земельных металлов. Дисс. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Томск, 1966.
4. С. Б. Кормер, М. В. Синицын, А. И. Фунтиков, В. Д. Урлин, А. В. Блинов.— ЖЭТФ, 47, 1202, 1964.

## ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБУГЛИВАЮЩИХСЯ АБЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. А. ЛОШКАРЕВ, Н. А. ИГНАТЕНКО

Исследование абляции обугливающих теплозащитных материалов при высоких температурах и скоростях течения представляет большой интерес для широкого круга практических задач. Учитывая сложность прямого изучения этого явления, была проанализирована возможность определения таких характеристик, используя несколько упрощенную постановку задачи в сравнении с экспериментом.

Допустим, что некоторый обугливающийся абляционный материал обтекается бинарной, теплопроводной, вязкой, сжимаемой смесью газов, гомогенные химические реакции незначительны, а на поверхности раздела сред имеет место эффективная гетерогенная реакция, определяющая скорость абляции, тогда полная теоретическая задача, поставленная в [1], значительно упрощается.

Если к тому же известны выражения для градиентов температуры газовой фазы и концентрации окислителя на границе раздела сред, то решение данной задачи сводится к решению уравнения теплопроводности для твердой фазы с соответствующими граничными и начальными условиями

$$\rho_s c_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial t} - v_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где  $v_s$  — линейная скорость разрушения поверхности исследуемого материала;  $c_s$ ,  $\lambda_s$  — плотности, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности твердой фазы соответственно.

Балансовое уравнение энергии в данном случае запишется в виде

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial t} + Uq = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \text{ при } y=0. \quad (2)$$

Здесь  $U$  — скорость эффективной гетерогенной реакции,  $q$  — ее тепловой эффект.

Скорость эффективной гетерогенной реакции записывается в виде

$$U = \delta q k_0 (\rho c)_w^n \exp \left( - \frac{E}{RT_w} \right). \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \delta q k_0 (\rho c)_w^n \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right) = \lambda \frac{\partial T_s}{\partial y} \text{ при } y=0. \quad (4)$$

Здесь  $n$  — порядок реакции, а  $\delta = \frac{M}{aM_r}$ , где  $M$  — молекулярный вес продукта реакции,  $M_r$  — молекулярный вес набегающего потока газа,  $a$  — стехиометрический коэффициент рассматриваемой реакции,  $E$ ,  $k_0$  — энергия активации и предэкспонент соответственно,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности газа.

$$aA + B = kC. \quad (5)$$

Здесь  $A$  — твердый компонент,  $B$  — газообразный,  $C$  — продукт реакции. Скорости образования (или поглощения)

$$\omega_B = a\omega_A. \quad (6)$$

Следовательно, в выражении для скорости реакции  $U$  должен стоять множителем параметр  $\delta$ .

Уравнение сохранения массы на границе раздела сред в данном случае записывается в виде

$$-\rho D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} + (\rho v)_w c_w = -\delta k_0 (c\rho)_w^n \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right). \quad (7)$$

Здесь  $(\rho v)_w$  — выражение, характеризующее массовую скорость вдува продуктов реакции в пограничный слой, а именно массовую скорость абляции  $\dot{m}_w$  г/см<sup>2</sup>сек. В данном случае

$$\dot{m}_w = (\rho v)_w = \frac{M_r}{aM} k_0 (\rho c)_w^n \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right). \quad (8)$$

Кроме того,

$$T_s|_{y=\infty} = T_s|_{t=0} = T_{s0}. \quad (9)$$

И, наконец, уравнение баланса массы

$$(\rho v)_w = \rho_s v_s. \quad (10)$$

В качестве выражений для  $\frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0}$  и  $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$  удобно воспользоваться выражениями, полученными Г. А. Тирским [4]

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = c_p \sqrt{\beta_x \mu_e \rho_e} (T_c - T_w) [0,7638 Pr^{-0,6} + 0,67 \alpha (1 + 0,2 \alpha)], \quad (11)$$

$$\rho D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} = \sqrt{\beta_x \mu_e \rho_e} (c_e - c_w) [0,7638 Sm^{-0,6} + 0,6 \alpha (1 + 0,2 \alpha)], \quad (12)$$

где  $\alpha = -\frac{\rho_w v_w}{\sqrt{\beta_x \mu_e \rho_e}}$  — параметр, характеризующий вдув,  $Pr$  — число

Прандтля,  $Sm$  — число Шмидта,  $\beta_x = \frac{du_e}{dx} \Big|_{y=0}$ .

Если ввести безразмерные переменные и параметры в виде

$$\Theta = \frac{(T-T_*)E}{RT_*^2}; \quad \bar{y} = \frac{y}{r_0} \sqrt{\frac{x_e}{x_1}}, \quad x = \frac{\lambda}{c_p}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{\rho_e c_{pe}}{\lambda_e} r_0^2,$$

$$r_0 = \frac{RT_*^2 \lambda_e}{\rho_e q E k_0 c_e} \exp\left(\frac{E}{RT_*}\right), \quad a_x = \frac{r_m}{u_\infty} \left. \frac{du_e}{dx} \right|_{y=0}, \quad \Delta = \frac{u_\infty t_0}{r_m}, \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{c_{pe} RT_*^2}{c_e q E}, \quad \Theta_e = \frac{(T_e - T_*)E}{RT_*^2}, \quad \Theta_\kappa = \frac{(T_{s0} - T_*)E}{RT_*^2},$$

$$k_\xi = \sqrt{\frac{\lambda_e \rho_e c_{pe}}{\lambda_s \rho_s c_{ps}}}, \quad \Pi_{p,x} = \frac{\rho_e}{\rho_s} \sqrt{\frac{x_e}{x_s}}, \quad \beta = \frac{RT_*}{E},$$

где  $T_*$  — некоторая характерная температура,  $c_e$  — концентрация окислителя во внешнем потоке,  $\Theta$  — безразмерная температура, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial \tau} - \gamma \Pi_{p,x} \bar{m}_w \frac{\partial \Theta_s}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial \bar{y}^2}, \quad (14)$$

$$\bar{m} = \delta c_w^n \exp\left(\frac{\Theta_w}{1 + \beta \Theta_w}\right), \quad \dot{m}_w = \bar{m}_w \rho_e^n k_0 \left(\frac{1 + \beta \Theta_e}{1 + \beta \Theta_w}\right)^n \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \quad (15)$$

Граничные и начальные условия в новых переменных записываются следующим образом:

$$\Theta_s|_{\bar{y}=\infty} = \Theta_\kappa; \quad \Theta_s|_{\bar{y}=0} = \Theta_w. \quad (16)$$

$$k_\xi \left. \frac{\partial \Theta_s}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} = \delta c_w^n \exp\left(\frac{\Theta_w}{1 + \beta \Theta_w}\right) - b_1 \sqrt{\Delta} (\Theta_e - \Theta_w) \left[ b_2 - b_4 \frac{\gamma \delta}{\sqrt{\Delta}} A \left( 1 - b_5 \frac{\gamma \delta}{\sqrt{\Delta}} A \right) \right], \quad (17)$$

$$- b \sqrt{\Delta} (1 - c_w) \left[ b_3 - b_4 \frac{\gamma \delta}{\sqrt{\Delta}} A \left( 1 - b_5 \frac{\gamma \delta}{\sqrt{\Delta}} A \right) \right] + \delta \gamma c_w^{2n+1} \exp\left(\frac{\Theta_w}{1 + \beta \Theta_w}\right) + \delta \gamma c_w^n \exp\left(\frac{\Theta_w}{1 + \beta \Theta_w}\right) = 0, \quad (18)$$

$$A = \frac{1 + \beta \Theta_e}{1 + \beta \Theta_w} c_w^n \exp\left(\frac{\Theta_w}{1 + \beta \Theta_w}\right), \quad (19)$$

$$b_1 = \sqrt{a_x Pr}, \quad b_2 = 0,7638 Pr^{-0,6}, \quad b_3 = 0,7638 Sm^{-0,6}, \quad b_4 =$$

$$= \frac{0,67}{\sqrt{a_x Pr}}, \quad b_5 = \frac{0,2}{\sqrt{a_x Pr}}.$$

Надо отметить, что уравнение для определения  $c_w$  является алгебраическим относительно  $c_w$  степени  $2n+1$ .

Для решения краевой задачи (14—18) применимы различные разностные методы, но, на наш взгляд, лучшим методом для уравнений теплопроводности вида (14) является итерационно-интерполяционный метод [2], использование этого метода требует значительных затрат машинного времени.

Рассмотрим уравнение (14) в стационарном случае

$$\frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial \bar{y}^2} + \gamma \Pi_{p,x} \bar{m} \frac{\partial \Theta_s}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (20)$$

Решая уравнение (20) с граничными условиями (16), получим

$$\Theta_s = (\Theta_w - \Theta_n) \exp(-\bar{y} \Pi_{p,x} \bar{m}_w) + \Theta_n. \quad (21)$$

Подставляя (21) в граничные условия (17), получим трансцендентное уравнение для определения  $\Theta_{w*}$

$$-\gamma k_\xi \Pi_{p,x} \bar{m}_w (\Theta_w - \Theta_n) = c_w^n \exp\left(\frac{\Theta_w}{1 + \beta \Theta_w}\right) - b_1 \sqrt{\Delta} (\Theta_e - \Theta_w) \left[ b_2 - b_4 \frac{8\delta}{\sqrt{\Delta}} A \left( 1 - b_5 \frac{\gamma\delta}{\sqrt{\Delta}} A \right) \right]. \quad (22)$$

Уравнение (22) необходимо решать совместно с алгебраическим относительно  $c_w$  уравнением (18). Решая (22) и (18), получим искомые  $\Theta_{w*}$ ,  $c_{w*}$ , после чего легко определяется стационарная скорость абляции

$$\bar{m}_w = \delta c_w^n \exp\left(\frac{\Theta_{w*}}{1 + \beta \Theta_{w*}}\right) \quad (23)$$

или в размерном виде

$$\bar{m} = \frac{M_r}{aM} k_0 (\rho_e c_{w*})^n \left( \frac{1 + \beta \Theta_e}{1 + \beta \Theta_{w*}} \right)^n \exp\left(-\frac{E}{RT_{w*}}\right). \quad (24)$$

Таким образом, для нахождения неизвестных кинетических постоянных, по сути дела, необходимо решать совместно 6 трансцендентных уравнений: два уравнения вида (24), составленных для двух экспериментальных значений  $\bar{m}_w$ , два уравнения вида (22) — для нахождения  $\Theta_{w*}$ , поскольку для разных условий получаются различные  $\Theta_{w*}$ , и два уравнения для определения соответствующих данным эксперимента  $c_w$ .

Интересная возможность получения явного выражения для  $\bar{m}_w$  получается, если в качестве характерной температуры  $T_*$  взять

$$T_* = T_w.$$

В этом случае к кинетическим постоянным  $E$  и  $k_0$  прибавляется третье неизвестное  $T_w$ , но зато уравнения (18), (23) и (24) значительно упрощаются, поскольку  $\Theta_w = 0$ .

Действительно, в случае  $n = 1$  получаем

$$\gamma k_\xi \Pi_{p,x} \bar{m}_w \Theta_n = \delta c_w - b_1 \sqrt{\Delta} \Theta_e \left[ b_2 - b_4 \frac{\gamma\delta}{\sqrt{\Delta}} A \left( 1 - b_5 \frac{\gamma\delta}{\sqrt{\Delta}} A \right) \right],$$

$$A = (1 + \beta \Theta_e) c_w, \quad (25)$$

$$-b_1 \sqrt{\Delta} (1 - c_w) \left[ b_3 - b_4 \frac{\gamma\delta}{\sqrt{\Delta}} A \left( 1 - b_5 \frac{\gamma\delta}{\sqrt{\Delta}} A \right) \right] + \delta \gamma c_w^{n+1} + \delta \gamma c_w = 0, \quad (26)$$

$$\bar{m}_w = \delta c_{w_*}, \quad \dot{m}_w = \frac{M_r}{aM} k_0 \rho_e c_{w_*} (1 + \beta \Theta_e) \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right). \quad (27)$$

Уравнение (25) используется для определения неизвестной величины  $T_w$ .

Надо отметить, что параметр  $v \ll 1$ , в этом случае

$$c_{w_*} = 1,$$

а для определения  $T_w$  получаем уравнение

$$b_1 b_2 \sqrt{\Delta} \Theta_e = \delta, \quad (28)$$

или в размерной форме

$$\sqrt{\frac{u_\infty}{r_{m^*e}} \frac{(T_e - T_w) \lambda_e}{\rho_e q k_0 c_e} \exp\left(\frac{E}{RT_w}\right)} = \frac{\delta}{b_1 b_2}, \quad (29)$$

но

$$k_0 = \frac{\dot{m}_w}{\rho_e (1 + \beta \Theta_e) \delta} \exp\left(\frac{E}{RT_w}\right) \quad \text{или} \quad k_0 = \frac{Ma T_w \dot{m}_w}{M_r T_e \rho_e} \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right). \quad (30)$$

Выражение для массовой скорости абляции с учетом, что  $c_{w_*} = 1$ , имеет вид

$$\dot{m}_w = \frac{M_r}{aM} k_0 \rho_e \frac{T_e}{T_w} \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right). \quad (31)$$

Подставляя (30) в (29), получаем

$$\sqrt{\frac{u_\infty}{r_{m^*e}} \frac{(T_e - T_w) T_e \lambda_e}{q T_w \dot{m}_w c_e}} = \frac{1}{\sqrt{a_x Pr \cdot 0,76 Pr^{-0,6}}}, \quad (32)$$

откуда

$$T_w = \frac{0,76 \sqrt{\frac{a_x u_\infty}{r_{m^*e}} Pr^{-0,1} T_e \lambda_e}}{0,76 \sqrt{\frac{a_x u_\infty}{r_{m^*e}} Pr^{-0,1} T_e \lambda_e + q \dot{m}_w c_e}}, \quad a_x = \frac{3}{2}. \quad (33)$$

Если учесть член уравнения (25), стоящий в левой части, то

$$T_w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (34)$$

где

$$a = c_s \dot{m}_w, \quad b = -0,76 \sqrt{\frac{3u_\infty}{2r_{m^*e}} Pr^{-0,1} T_e \lambda_e} - c_s \dot{m}_w T_w - q \dot{m}_w c_e,$$

$$c = 0,76 \sqrt{\frac{3u_\infty}{2r_{m^*e}} Pr^{-0,1} T_e \lambda_e}.$$

Однако ввиду простоты будем использовать для  $T_w$  выражение (33).

Имея два экспериментально определенных значения для  $\dot{m}_w$ , легко определяются кинетические постоянные  $E$  и  $k_0$ , предварительно вычислив по формуле (33) значения  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  по данным эксперимента. Действительно, составив уравнение вида (31), получаем для определения энергии активации уравнение

$$\frac{\dot{m}_{w1}}{\dot{m}_{w2}} = \frac{\rho_{e1} T_{e1} T_{w2}}{\rho_{e2} T_{e2} T_{w1}} \exp\left(\frac{E}{RT_{w1}} - \frac{E}{RT_{w2}}\right), \quad (35)$$

где индекс «1» относится к данным одного эксперимента, индекс «2» — к данным другого.

Из (34) получаем

$$E = R \frac{T_{w1} T_{w2}}{T_{w1} - T_{w2}} \ln\left(\frac{\dot{m}_{w1}}{\dot{m}_{w2}} \frac{\rho_{e2} T_{e2} T_{w1}}{\rho_{e1} T_{e1} T_{w2}}\right). \quad (36)$$

После определения энергии активации легко определяется предэкспонент по формуле (30). Для проверки выражений воспользуемся результатами эксперимента [5]. Для обугливающегося материала на основе бутилкаучука и эпоксидной смолы имеется по 3 значения экспериментальных данных для различных температур и скоростей набегающего потока. Обозначим индексом «1» значения параметров при  $T_e = 2700^\circ \text{K}$  и  $u_\infty = 97,5$  м/сек. и индексом «2» — при  $T_e = 1800^\circ \text{K}$  и  $u_\infty = 40,1$  м/сек., индексом «3» — при  $T_e = 2400^\circ \text{K}$  и  $u_\infty = 77$  м/сек. Индексы «Б» и «Э» относят параметры к экспериментам с материалом на основе бутилкаучука и эпоксидной смолы соответственно.

Из эксперимента получено

$$\begin{aligned} \dot{m}_{w1}^{\text{Б}} &= 0,0057 \text{ г/см}^2 \text{ сек.}, & \dot{m}_{w1}^{\text{Э}} &= 0,009 \text{ г/см}^2 \text{ сек.}, \\ \dot{m}_{w2}^{\text{Б}} &= 0,0035 \text{ г/см}^2 \text{ сек.}, & \dot{m}_{w2}^{\text{Э}} &= 0,006 \text{ г/см}^2 \text{ сек.}, \\ \dot{m}_{w3}^{\text{Б}} &= 0,0041 \text{ г/см}^2 \text{ сек.}, & \dot{m}_{w3}^{\text{Э}} &= 0,007 \text{ г/см}^2 \text{ сек.} \end{aligned} \quad (37)$$

Для получения теплофизических параметров набегающего потока (80%  $\text{O}_2$ ) использовали [3].

Используя формулу (33), получаем

$$\begin{aligned} T_{w1}^{\text{Б}} &= 2000^\circ \text{K}, & T_{w1}^{\text{Э}} &= 1700^\circ \text{K}, \\ T_{w2}^{\text{Б}} &= 950^\circ \text{K}, & T_{w2}^{\text{Э}} &= 800^\circ \text{K}, \\ T_{w3}^{\text{Б}} &= 1600^\circ \text{K}, & T_{w3}^{\text{Э}} &= 1240^\circ \text{K}. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя формулу (36) и два экспериментальных значения для массовой скорости абляции, обозначенных индексами «1» и «2», получаем значения энергии активации для покрытий «Б» и «Э»

$$E^{\text{Б}} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ кал/моль}, \quad E^{\text{Э}} = 0,36 \cdot 10^4 \text{ кал/моль}. \quad (39)$$

Используя (30), получаем значения предэкспонентов для обугленного слоя

$$k_0^{\text{Б}} = 0,95 \cdot 10^8 \quad k_0^{\text{Э}} = 4,1 \cdot 10^8. \quad (40)$$

Следовательно, в формуле для  $\dot{m}_w$  (31) определены 2 неизвестных из трех, а именно кинетические постоянные  $E$  и  $k_0$ . Для определения

$T_w$  через известные  $E$  и  $k_0$  подставим выраженное из (33) значение  $\dot{m}_w$  в (31), тогда для определения  $T_w$  получим трансцендентное уравнение

$$0,76 \sqrt{\frac{\alpha_x u_\infty}{r m x_e}} \rho_r^{-0,1} \lambda_e (T_e - T_w) = \frac{M_r}{\alpha M} \rho_e k_0 q c_e \exp\left(-\frac{E}{RT_w}\right). \quad (41)$$

Таким образом, последовательность вычислений следующая: по двум экспериментальным значениям для  $\dot{m}_w$  (например, для разных температур или скоростей набегающего потока, или радиусов закругления исследуемой модели), используя формулы (30), (33) и (36), находим кинетические постоянные  $E$  и  $k_0$ . Затем для любых значений параметров определяется  $T_w$  из трансцендентного уравнения (41), где  $E$  и  $k_0$  известные величины. После этого  $\dot{m}_w$  определяется по формуле (31).

Приближенно уравнение (41) можно решить следующим образом. Диапазон  $T_w$  для рассматриваемых экспериментальных данных известен и равен для покрытия «Б»  $950^\circ - 2000^\circ \text{K}$  при диапазоне  $T_e = 1800^\circ - 2700^\circ \text{K}$ , для покрытия «Э» от  $800^\circ$  до  $1600^\circ \text{K}$  при  $T_e$  — от  $1800^\circ$  до  $2700^\circ \text{K}$ , тогда можно интерполировать

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{5000}{RT_w}\right) &\approx 7,5 \cdot 10^{-8} T_w^2, \\ \exp\left(-\frac{3600}{RT_w}\right) &\approx 1,6 \cdot 10^{-8} T_w^2 \end{aligned} \quad (42)$$

для указанного диапазона с погрешностью не выше 12%.

Тогда для стационарной температуры абляции имеем выражение

$$T_w = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 3\alpha \frac{M_r}{\alpha M} c_e q k_0 \rho_e m \cdot 10^{-8}}}{15\alpha \cdot 10^{-8} \frac{M_r}{\alpha M} \rho_e c_e q k_0}, \quad m = 0,76 \sqrt{\frac{\alpha_x u_\infty}{r m x_e} \frac{\lambda_e}{\rho_r^{0,1}}} \quad (43)$$

Причем для покрытия «Б»  $\alpha = 1$ , а для покрытия «Э»  $\alpha = 2$  и выбирается соответствующим материалу по (40). Таким образом, после вышеописанного определения  $E$  и  $k_0$ , подставив эти значения вместе с явным выражением (43) для  $T_w$  в выражение для  $\dot{m}_w$  (31), будем иметь явную формулу для массовой скорости абляции.

Используя (43) для  $T_e = 2400^\circ \text{K}$  и  $u_\infty = 77 \text{ м/сек.}$ , получаем следующие значения для стационарной температуры

$$T_w^B = 1520^\circ \text{K}, \quad T_w^E = 1190^\circ \text{K}. \quad (44)$$

Используя (39), (40) и (44), а также формулу (31), получаем значения

$$\dot{m}_w^B = 0,0045 \text{ г/см}^2 \text{ сек.}, \quad \dot{m}_w^E = 0,0066 \text{ г/см}^2 \text{ сек.} \quad (45)$$

Сравнение (44) с третьей строкой (38) и (45) с третьей строкой (37) показывает, что предлагаемый полуэмпирический метод расчета эрозионно-абляционных характеристик обугливающих покрытий обладает погрешностью, не превышающей 12%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Алексеев. Пограничный слой с химическими реакциями. Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
  2. А. Ш. Гришин, В. И. Зинченко, Н. А. Игнатенко, А. Я. Кузин. Сб. «Тепло- и массоперенос». Минск, 1972.
  3. Н. Б. Варгафтик. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 1965.
  4. Г. А. Тирский. ПМТФ, 1965, № 1.
  5. В. А. Лошкарев, В. А. Шваб. О явлениях механического разрушения при исследовании процессов абляции в высокотемпературных газовых потоках.— Сб. «Тепло- и массоперенос». Минск, 1972.
-

## ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ С ТУННЕЛЬНЫМ ДИОДОМ В КАЧЕСТВЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

А. И. КОНОВАЛЕНКО, А. М. МАЛЮТИН, Г. С. РАТАНОВ, Г. А. ЦЫБА

Вольт-амперная характеристика туннельного диода относится к классу характеристик  $N$ -типа. Эта характерная особенность туннельного диода, несмотря на простоту устройства и технологию процесса изготовления, позволяет выполнять операции, которые ранее осуществлялись более сложными приборами.

Туннельные диоды с успехом применяются в измерительной технике для построения высокочувствительных и быстродействующих преобразователей [1].

Известно [2], что вольт-амперная характеристика туннельного диода изменяется при воздействии давления на  $p$ - $r$  переход. В частности, меняется ток максимума вольт-амперной характеристики. Это свойство туннельного диода было использовано нами для создания малогабаритного датчика давления с частотным выходом.

Схематический чертеж одной из конструкций датчика для измерения больших давлений показан на рис. 1.

Давление воспринимается туннельным диодом 1, который свободно подвешен в измерительном объеме корпуса датчика. Один вывод диода соединен с конусным латунным электродом 2, а через него с корпусом. Другой вывод соединен с электродом 3, изолированным от корпуса стеклотекстолитовой втулкой 4. Изолированный электрод непосредственно подсоединен к высокочастотному разъему 5. Корпус датчика имеет установочную резьбу  $M14 \times 1$

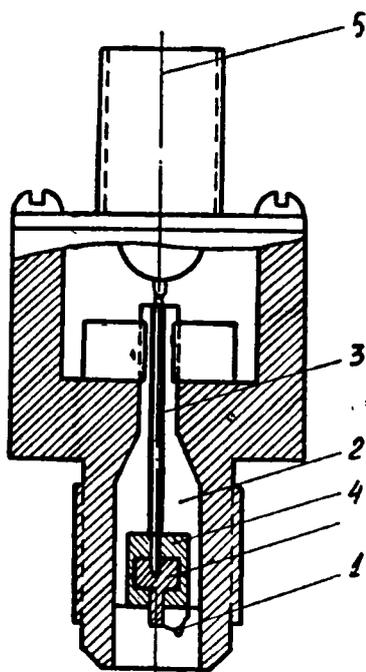


Рис. 1.

На диод действует измеряемое давление, вызывая его изотропное сжатие, и, как следствие этого, уменьшение тока максимума. Диод включен через высокочастотный разъем в схему релаксационного генератора (рис. 2), и изменение тока максимума диода вызывает изменение частоты генератора. Частота регистрируется электронно-счетным цифровым частотомером, например, ЧЗ-24, либо, после частотного

детектирования, стрелочным прибором или шлейфовым осциллографом.

Изготовленный нами датчик позволяет измерять статическое и медленно меняющееся давление в диапазоне 0—5000 атм. при температуре измеряемой среды  $-30 \div +100^\circ \text{C}$ . Точность отсчета по цифровому частотомеру (ЧЗ-24) не превышает  $\pm 1$  гц. Частота релаксационного генератора выбрана 2,5 мгц.

Испытания показали отсутствие гистерезиса датчика и его практическую безынерционность.

Чувствительность датчика давления по частоте 200—300 гц/атм. и зависит от применяемого диода.

Испытания датчика проводились на масляном прессе, позволяющем создавать давление до 8000 атм. Компримирующей жидкостью была смесь керосина и трансформаторного масла в пропорции 6:4. Отсчет давления производился по образцовому манометру ОМ-10000 класса 1.

При испытаниях на масляном прессе диод дополнительно ничем не защищался, так как компримирующая жидкость не агрессивна и неэлектропроводна. При измерении давления в агрессивных средах диод необходимо дополнительно изолировать специальной мастикой. Нами использовалась мастика из натурального воска и минерального масла, имеющая малую теплопроводность и хорошие электроизоляционные свойства.

В качестве чувствительного элемента испытывались разгерметизированные диоды АИ301Г, а также диоды из арсенида галлия, изготовленные в СФТИ в планарном и меза-сплавном исполнении.

Испытания показали, что датчики давления с туннельным диодом, включенным в схему релаксационного генератора, имеют высокую чувствительность и хорошую линейность в широком диапазоне давлений.

Более надежными показали себя туннельные диоды из арсенида галлия в планарном исполнении.

На точность измерения наиболее существенное влияние оказывает температура среды, в которую помещен туннельный диод. Однако, меняя концентрацию примесей, вводимых в полупроводник при изготовлении p-n переходов туннельных диодов, можно температурный коэффициент сделать незначительным. Так, специальные туннельные диоды, изготовленные в СФТИ, практически не меняют свои параметры в пределах  $-25 \div +80^\circ \text{C}$ . Температурная погрешность датчиков давления с такими диодами не превышала 0,1% при изменении температуры компримирующей жидкости от  $+10$  до  $+70^\circ \text{C}$ .

Описанный датчик может найти применение при измерении статических и переменных давлений в жидких и газообразных средах.

Конструкция корпуса датчика давления с туннельным диодом определяется конкретными условиями применения.

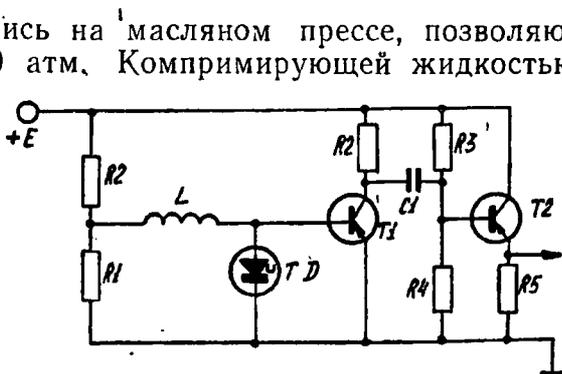


Рис. 2.

## ЛИТЕРАТУРА

В. В. Климов, В. М. Черемихин. Туннельный диод-датчик давления.— ПТЭ. 1968, № 2.

W. Paul. J. Phys Chem Solids, 1959, № 8, с. 196.

## ЭЛЕКТРОННО-СЧЕТНЫЙ ЦИФРОВОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ ВРЕМЕНИ ИВИ-2

В. А. КРЫЛОВ, Г. С. РАТАНОВ, Г. А. ЦЫБА

Электрические методы измерения коротких интервалов времени, которые могут быть отнесены к аналоговым, не очень многочисленны. В основе большинства из них лежит принцип интегрирования электрического сигнала, проходящего через регистрирующий прибор за измеряемый интервал времени. Суммарная максимальная ошибка измерения у лучших промышленных приборов такого типа может составлять в лучшем случае  $\pm 0,1\%$  при измерении интервалов времени порядка 50 мксек.

Электронно-счетные цифровые измерители времени, которые получают широкое распространение в последнее время, имеют значительно большую точность измерения. Они обеспечивают непосредственный отсчет результатов измерения без внесения субъективных ошибок.

Таким образом, автоматизация процесса измерения в сочетании с высокой точностью, быстродействием и представлением результатов измерения в форме, удобной для наблюдения и их дальнейшей обработки, наиболее полно обеспечивается цифровыми измерительными приборами.

Нами изготовлен электронно-счетный цифровой прибор для измерения интервалов времени до 1000 мксек. с последующей записью на ЦПМ или на шлейфный осциллограф.

Измеритель временных интервалов (ИВИ-2) позволяет регистрировать как в однократном режиме измерения, так и при непрерывном или автоматическом. При малых скоростях поступления информации или при постоянной величине измеряемого интервала можно пользоваться цифровой индикацией. Результаты измерений указываются в мксек.

За счет сокращения времени, необходимого для обработки информации, и применения в блоке автоматики узлов с высокой разрешающей способностью достигнуто высокое быстродействие прибора. Он позволяет производить до 10000 измерений в секунду и определяется величиной измеряемого интервала.

Регистратор времени построен по типу временной интервал—код. Для преобразования временного интервала в код нами использована классическая схема последовательного счета, при котором преобразуемый интервал заполняется импульсами от тактового генератора. Ча-

стота генератора 10 мгц стабилизирована кварцем. Величина временного интервала определяется подсчетом числа импульсов, укладываемых в измеряемом интервале.

Блок-схема измерителя временных интервалов с делителем приведена на рис. 1.

Запуск прибора осуществляется импульсами отрицательной полярности амплитудой от 0,5 до 10 вольт, длительностью от 0,1 мксек и более. Импульсы больше 10 вольт ограничиваются амплитудным дискриминатором.

Входные сигналы с помощью формирующего устройства и схем управления преобразуются в строб-импульс, длительность которого равна измеряемому интервалу.

Нами применена задержка строб-импульса до 20 мксек, по отношению к стартовому, что позволяет произвести сброс показаний счетчика стартовым импульсом и подготовить прибор к измерению длительности строб-импульса. Это обеспечивает в режиме однократного измерения длительное хранение информации на цифровом табло.

После формирующего блока строб-импульс наступает на блок временной селекции.

Схему селектора составляют два высокочастотных транзистора, включенных последовательно и имеющих общую коллекторную нагрузку. Транзисторы работают в ключевом режиме и в исходном состоянии заперты напряжением смещения.

Напряжение на выходе селектора возникает только при одновременном действии импульсов с тактового генератора и строб-импульса.

Количество импульсов, прошедших через селектор, равно:

$$N = \tau f,$$

где  $\tau$  — время измерения (длительность строб-импульса), а

$f$  — частота следования импульсов тактового генератора.

Счет импульсов производится пересчетными десятичными декадами. Количество декад в ИВИ-2 — четыре. Декада младшего разряда имеет быстроедействие до 20 мгц. Это достигается применением в декаде высокочастотных транзисторов типа ГТ-311 и импульсных диодов. Остальные декады собраны на транзисторах типа П416Б. Декады на частоту 1 мгц имеет схему, аналогичную схеме декад на 100 кгц. Схему декад составляют четыре триггерных ячейки. Для осуществления пересчета на десять в декаде введена отрицательная обратная связь. Счетные декады работают по схеме 1—2—4—8. Они имеют цифровую индикацию на лампах ИН-1 и шифратор на сопротивлениях для перевода числа в напряжение.

Пропорционально напряжению генератор опроса данных формирует импульсы, которые после усиления по току подаются на выходы прибора для управления шлейфовым осциллографом. Величина тока на шлейф регулируется в пределах от 1 до 50 ма.

На рис. 2 приведена осциллограмма с записью информации на шлейфовом осциллографе типа Н-115, ИВИ-2 работал в режиме «самоконтроль». Способ расшифровки осциллограммы понятен из рисунка 2.

Для ЦПМ информация в двоично-десятичном коде выведена с коллекторных цепей триггеров счетных декад на специальный разъем.

После очередного измерения прибор приводится в состояние готовности кнопкой «сброс» или автоматически импульсом «переполнение». Импульс переполнения приводит прибор в состояние готовности и в том случае, если стоповый импульс не зарегистрирован в течение 10000 мксек. Это необходимо для повышения надежности измерения

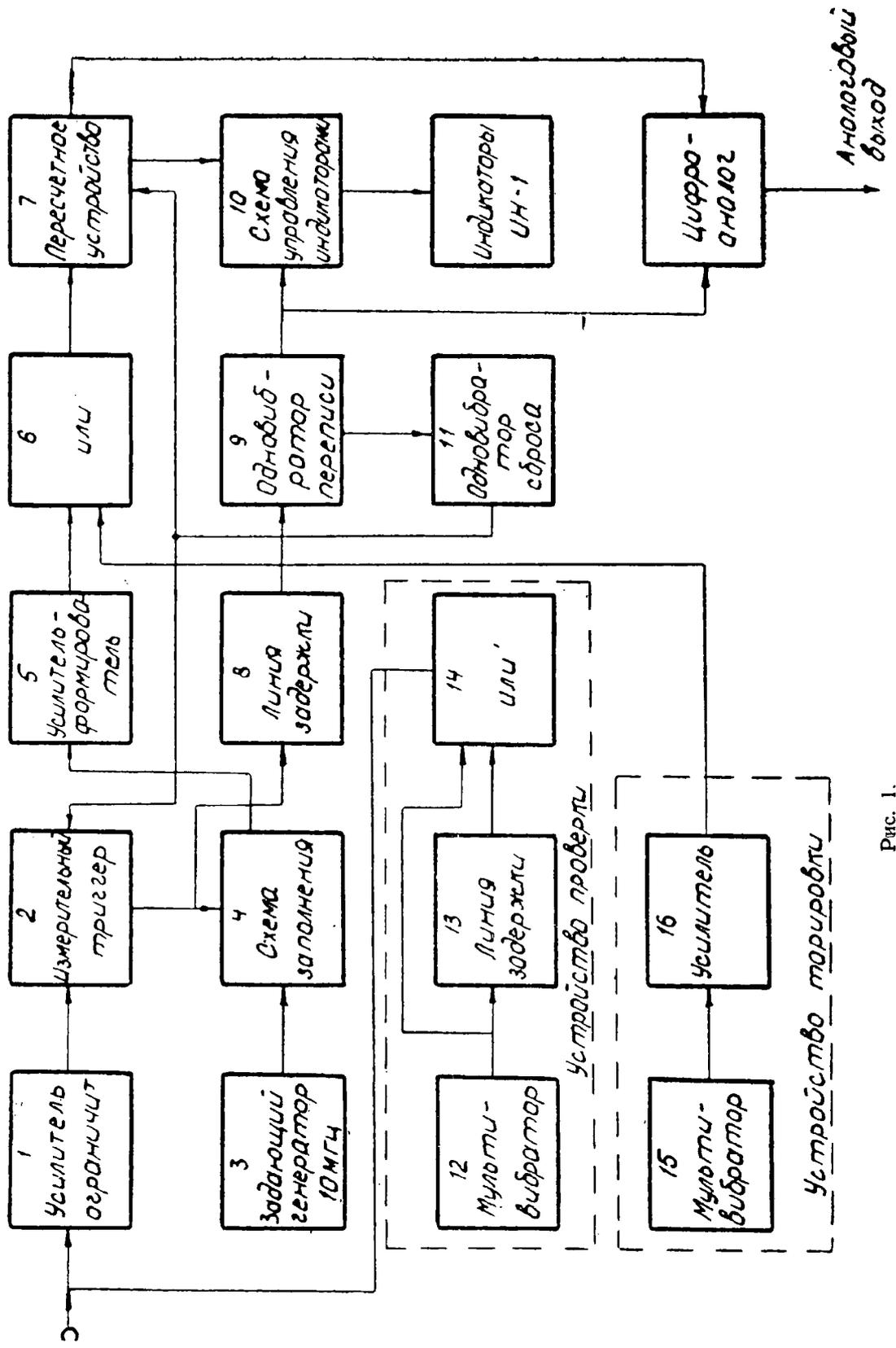


Рис. 1.

при регистрации серии временных интервалов, т. е. чтобы исключить «сбой» при «пробросе» одного из входных управляющих сигналов.

Вместе с ИВИ-2 изготовлена приставка «Делитель». С приставкой измеритель временных интервалов позволяет регистрировать среднеарифметическое значение интервала в целой серии измерений. При этом регистрируется число измеренных интервалов.

На вход «Делитель» импульсы подаются через контакты разъема ИВИ-2 непосредственно с выхода селектора и поступают на пересчетное устройство приставки.

Принципиальная схема счетной части приставки «Делитель» аналогична счетным декадам измерителя временных интервалов. Длительная эксплуатация прибора показала хорошие эксплуатационные качества при высокой точности измерения.

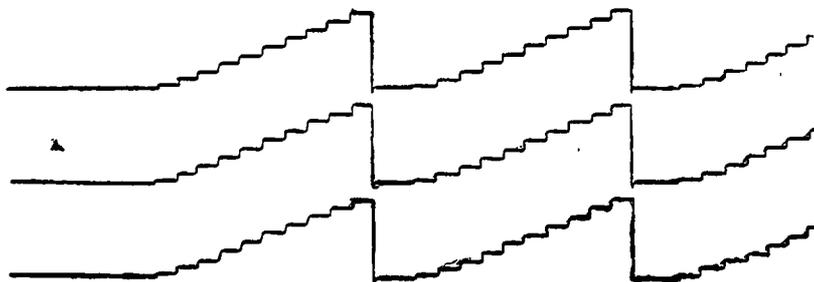


Рис. 2.

Основной составляющей погрешности измерителя временных интервалов является нестабильность порога срабатывания входного формирующего устройства. Причиной этой нестабильности служат как внутренние, так и внешние помехи. Для обеспечения величины составляющей погрешности порядка 0,05%, обусловленной формирующим устройством, уровень помех не должен превышать 1,5 мв. Это весьма жесткое и практически трудно выполнимое требование. Ввиду относительно малых значений временного интервала, для измерения которого предназначен ИВИ-2, погрешность измерения, обусловленная нестабильностью порога срабатывания из-за низкочастотных помех как по цепи питания, так и по входу, мала.

При поступлении на вход импульсов с крутизной фронта не хуже 10 в/мксек, абсолютная погрешность прибора не превышает единицы младшего разряда ( $\pm 0,1$  мксек).

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИБЛИЖЕННОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЛОТКА

В. С. ЛАДЫСЕВ

В теории линейных индукционных насосов, используемых для транспортировки проводящих сред, наиболее часто используется модель в виде слоя затвердевшего металла, движущегося в поле непрерывно меняющегося токового слоя [1].

При расчетах линейных индукционных насосов приходится учитывать конечность длины индуктора. Это делается двумя способами. Первый способ заключается в том, что ищется поле от индуктора конечной длины в предположении, что проводимость всех сред равна нулю. В такой постановке исследуется продольный краевой эффект, имеющий место при холостом ходе машины. Второй способ заключается в следующем: ищется поле в предположении, что конечный индуктор состоит из дискретных линейных токов. Найдя поле от одиночного тока, с учетом скинн-эффекта, методом суперпозиции ищется поле от всех проводников, составляющих индуктор.

В данной работе используется модель в виде бесконечного слоя затвердевшего металла, находящегося в поле одностороннего индуктора, представляющего распределение дискретных проводников с током  $I = I_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi n}{m})}$ , где  $m$  характеризует фазность тока,  $n$  — целое положительное число [2].

Вначале рассмотрим движение проводящего полупространства в поле одиночного линейного тока (рис. 1). Предположим, что движущаяся металлическая среда изотропна, величина напряженности поля не влияет на параметр среды, движение металлической среды происходит с постоянной скоростью.

Ранее нами рассматривался случай, когда полупространство двигалось в поле линейных постоянных токов [3]. В рассматриваемых системах электродинамическое взаимодействие происходит в конечной области, именно при входе и выходе про-

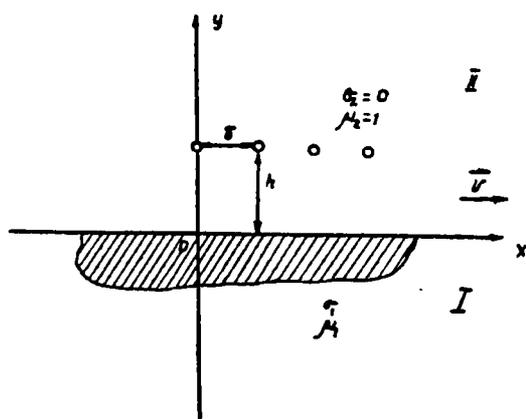


Рис. 1.

водящей среды в область взаимодействия. Случай, рассмотренный в [3], отвечал получению максимальной тормозящей силы. Рассмотрим область малых значений скорости  $v$  и область больших частот  $\omega$ , где силы электромагнитного взаимодействия направлены в сторону движения проводящего пространства и ускоряют движение последнего.

Решение поставленной задачи относительно вектор-потенциала имеет вид

$$A_z = \frac{\mu_0 \mu I_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(h|\alpha| + k_1 y)} e^{i\alpha x}}{k_1 + |\alpha| \mu} d\alpha, \quad (1)$$

где

$$k_1 = +\sqrt{\alpha^2 + i\mu_0\mu\sigma\omega - i\alpha\mu_0\mu\sigma v}.$$

Компоненты поля находятся как  $H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$ ;  $H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$ , плотность потоков

$$j_z = \sigma \left( -\frac{\partial A}{\partial t} + v B_y \right),$$

средняя плотность силы в области  $I$

$$f_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(j_z \cdot B_y^*); \quad f_y = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(j_z \cdot B_x^*),$$

где  $B_x^*$ ;  $B_y^*$  — комплексно сопряженные величины.

В качестве безразмерных величин аналогично [3] берутся:

$$\bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{y} = \frac{y}{h}; \quad \bar{\omega} = \mu\mu_0 \sigma v h; \quad \bar{\omega} = \mu\mu_0 \sigma \omega h^2.$$

Все искомые величины имеют вид функций от несобственных интегралов. Для нахождения численных результатов производилось численное интегрирование на ЭВМ. В основу построения исходного алгоритма счета была положена работа [4]. Подынтегральные функции сильно осциллируют, поэтому находились корни этих функций и интегрирование велось от одного корня до последующего, чтобы общая ошибка не превышала  $10^{-2}$  от истинного значения интеграла. Ввиду того, что в состав подынтегральных выражений входят экспоненциальные функции, то для достижения поставленной точности требуется вычисление трех-четырёх корней. При таком подходе к счету интегралов типа (1) целесообразно пользоваться интерполяционными формулами Ньютона-Котеса, которые упрощают вид рабочих программ для ЭВМ. Наиболее экономичными все же получаются программы с использованием квадратурных формул Гаусса.

На рис. 2 приведены результаты численного счета компонент магнитного поля  $|B_x|$ ;  $|B_y|$ , на поверхности полупространства при  $\mu = 100$ ;  $\bar{h} = 1$ ;  $\bar{\omega} = 0$ ; 32; 128 (соответственно кривая 1, 2, 3) для различных значений обобщенного параметра частоты: а) —  $\omega = 1$ ; б) —  $\omega = 3$ ; в) —  $\omega = 7$ ; г) —  $\omega = 14$ .

Наблюдаемое смещение максимумов можно объяснить, представив пульсирующее поле в виде одного периода бесконечной синусоиды с соответствующим полюсным делением, аналогично [5].

Если рассмотреть силу реакции, действующую на нить, которая

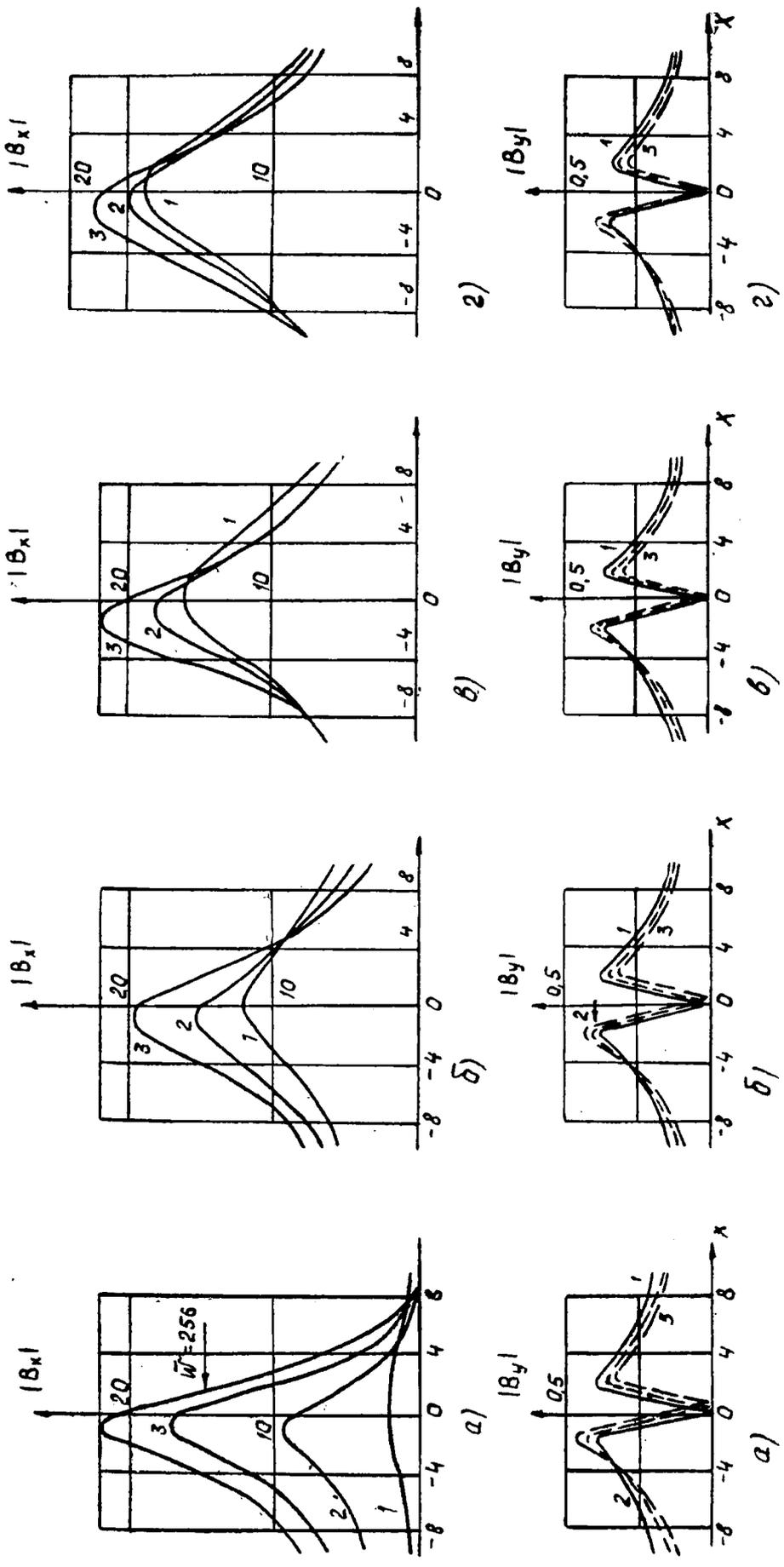


Рис. 2.

по своей величине равна интегральной силе, но имеет противоположный знак, можно увидеть, что последняя уменьшается с увеличением частоты, что обусловлено скинн-эффектом. При увеличении скорости начинает сказываться скинн-эффект индуцированных токов, область взаимодействия уменьшается. Таким образом, в некотором диапазоне скоростей от 0 до  $\bar{\omega}_{кр}$  при больших частотах  $\omega > 10$  среда ускоряется. Последнее согласуется с экспериментальными результатами [1].

В теории дефектоскопии иногда нужно отстроиться от влияния униполярных токов. При контроле листовой стали, цилиндрических заготовок, движущихся через систему проходных или накладных датчиков, нужно знание динамических характеристик, последнее в случае накладных датчиков трудно рассчитать. Исходя из вышеизложенного, можно рекомендовать увеличением частоты питающего поля отстроиться от влияния униполярных токов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Круминь. Взаимодействие бегущего магнитного поля с проводящей средой. Рига, изд. «Знание», 1969.
  2. Я. Я. Валдманис, А. И. Везе, И. М. Зусман.— «Магнитная гидродинамика». 1971, № 4, с. 87.
  3. Г. А. Бюлер, В. С. Ладысев, М. А. Тынкевич, Е. Ф. Ткаченко. Научный отчет НИИ ПММ. Томск, 1971.
  4. В. И. Крылов. Приближенные вычисления интегралов. Москва, изд. «Наука», 1967.
  5. А. И. Везе, Л. Я. Улманис.— Сб. Движение проходящих тел в магнитном поле. Рига, изд. «Знание», 1966, с. 15.
-

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОБУГЛИВАЕМЫХ АБЛЯЦИОННЫХ ЭКРАНОВ В СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

В. А. ЛОШКАРЕВ, Г. Г. ТИВАНОВ.

Актуальность исследований движения жидкостей и газов в пористых средах определяется их большим практическим значением. Надо отметить, что по теории фильтрации опубликовано большое количество работ как экспериментального, так и теоретического характера. Однако до настоящего времени нет надежного метода определения проницаемости среды, которая, как известно, является важнейшей характеристикой процесса транспирации.

В частном случае при изучении фильтрации обугливаемых экранов аблирующих тел возникает необходимость определения проницаемости системы скелет-газ. Заметим, что работ, касающихся непосредственно исследования проницаемости коксового остатка в условиях абляции, не обнаружено. В связи с этим авторами предлагается метод для изучения указанной выше проблемы.

## Экспериментальная установка и методы исследования

В работе использовался метод ультразвукового анализа. Сущность его при исследовании проницаемости обугливаемых абляционных экранов заключается в следующем:

Во-первых, четко установленным экспериментальным фактом [3, 4, 5] является существование зависимостей скорости распространения и других характеристик упругих звуковых волн от внутренней структуры тела, в которой они распространяются.

Во-вторых. Имея количественные данные о распространении таких волн в эталонных образцах, можно определить проницаемость интересующих нас материалов.

Исходя из сказанного, предположим, что в жидкой среде в определенном направлении распространяются упругие акустические колебания с известной частотой. Если теперь поместить в направлении этих возмущений пористые исследуемые экраны, то эффективная скорость распространения волны на участке, включающем пористое тело, исходя из [1, 3], будет зависеть от следующих параметров:

$$\bar{k}; \rho_c; \rho_{ж}; V_{п}; K; l; \nu.$$

По основной теореме теории размерности и подобия имеем:

$$\frac{K}{l^2} = \Psi \left[ \frac{m_{ж}}{\rho_c l^3}; \frac{\bar{k} l^2}{m_{ж}}; \frac{l^3}{V_{п}}; \frac{c_{эф} \cdot l}{\nu} \right].$$

После очевидных преобразований получим

$$\frac{K}{l^2} = \Psi \left[ \frac{\rho_{ж} \pi R^2 [L - l(1 - \varepsilon)]}{\rho_c l^3}; \frac{\bar{k} l^2}{\rho_{ж} \cdot \pi R^2 [L - l(1 - \varepsilon)]}; \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{l}{R} \right)^2; \frac{c_{эф} \cdot l}{\nu} \right].$$

Вводя для удобства обозначения

$$A_0 = \frac{K}{l^2}; A_1 = \frac{\rho_{ж} \pi R^2 [L - l(1 - \varepsilon)]}{\rho_c l^3}; A_2 = \frac{\bar{k} l^2}{\rho_{ж} \cdot \pi R^2 [L - l(1 - \varepsilon)]};$$

$$A_3 = \frac{1}{\pi \varepsilon} \left( \frac{l}{R} \right)^2; \bar{R}e = \frac{c_{эф} \cdot l}{\nu},$$

приходим к уравнению

$$A_0 = \Psi [A_1; A_2; A_3; \bar{R}e]. \quad (1)$$

С целью определения зависимостей между  $A_0; A_1; A_2; A_3; \bar{R}e$  в качестве эталонных образцов выбирались тела с цилиндрическими капиллярами. Проницаемость для этой идеализированной модели определяется по формуле Козени-Кармана [2]

$$K = \frac{\varepsilon^3}{5 S_0^2 (1 - \varepsilon)^2}. \quad (2)$$

Эффективную скорость, скорость распространения волн  $C_{эф}$ , геометрические характеристики  $L, l, R$ , параметры пористого тела и жидкости  $\rho_c; \rho_{ж}; K; \nu$ , очевидно, можно легко определить.

Получив эталонные зависимости, найдем проницаемость исследуемого тела, внутренняя структура которого более или менее точно описывается выбранной моделью.

Пусть функциональная зависимость между  $A_0; A_1; A_2; A_3; \bar{R}e$  в реальных образцах описывается функцией

$$A_0 = f(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e). \quad (3)$$

На основании метода относительного соответствия [6, 7] выразим реальную функциональную зависимость (3) через модельную (1).

Составим функции

$$\varphi(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e) = \frac{f(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e)}{f_0(A_1^0; A_2^0; A_3^0; \bar{R}e^0)}, \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e) = \frac{\Psi(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e)}{\Psi_0(A_1^0; A_2^0; A_3^0; \bar{R}e^0)}. \quad (5)$$

Здесь же  $\Psi_0$  и  $f_0$  — значения функций при фиксированных одних и тех же значениях  $A_1^0; A_2^0; A_3^0; \bar{R}e^0$ .

Проводя соответствующие преобразования, получим

$$f(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e) = \frac{\Psi(A_1; A_2; A_3; \bar{R}e)}{\Psi_0(A_1^0; A_2^0; A_3^0; \bar{R}e^0)} f_0(A_1^0; A_2^0; A_3^0; \bar{R}e^0).$$

Или прямо для проницаемости

$$A_0^P = \frac{A_0^M}{A_0^{M_0}} A_0^{P_0} \quad (6)$$

Очевидно, что ограничения на метод ультразвукового анализа носят в основном эмпирический характер, накладывающий определенные условия на длину волны  $\lambda$ ; длину образца  $l$ , минимальные и максимальные размеры капилляров и т. д. [1].

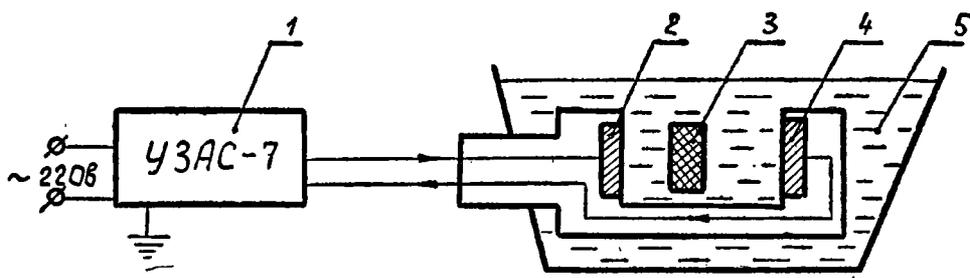


Рис. 1. Принципиальная схема ультразвуковой установки для исследования проницаемости обугленных экранов (здесь 1 — ультразвуковая установка, 2 — пьезопластины, 3 — исследуемый пористый материал, 4 — приемник ультразвуковых колебаний, 5 — модельная жидкость)

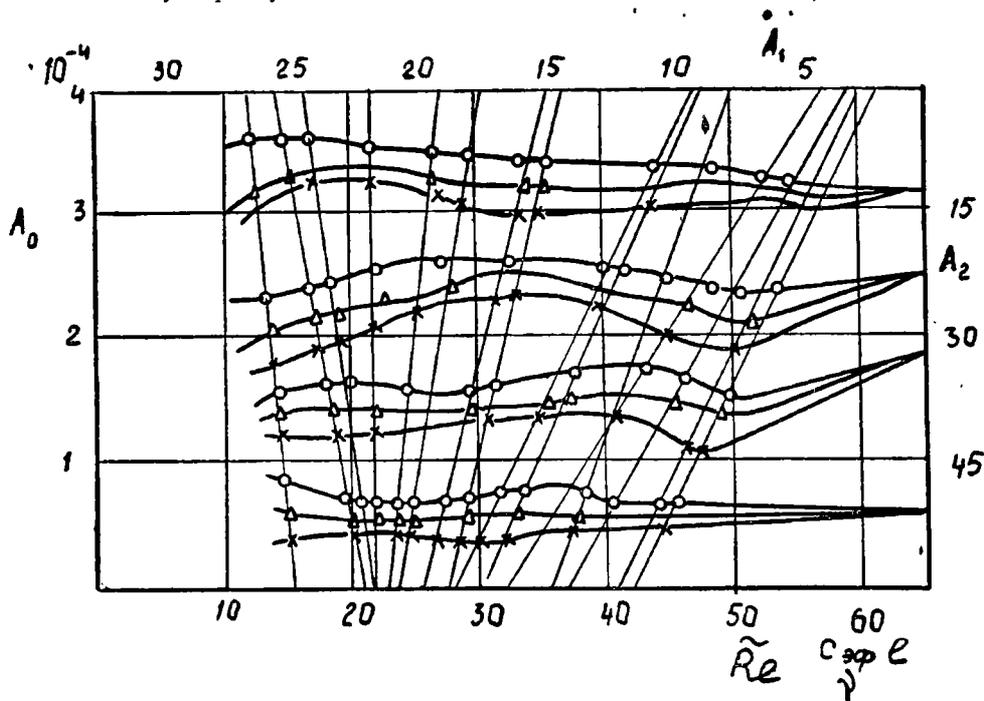


Рис. 2. Номограмма расчета  $A_0$  от  $A_1, A_2, A_3, \tilde{R}e$  (здесь  $A_3 = \frac{1}{\pi \epsilon} \left(\frac{l}{R}\right)^2$  рассчитывалась для значений  $\circ - 1,2; \triangle - 1,5; \times - 1,8$ )

При непосредственном определении проницаемости авторами были выбраны эталонные образцы в виде цилиндров из винипласта, органического стекла, дерева с определенными по диаметру и длине капиллярами, в качестве же исследуемых материалов брались обугленные экраны, которые представляют собой продукты термоокислительной деструкции, полученные в условиях дробления авторами в работе [10]. Принималось во внимание, что данные пористые экраны в грубом приближении описываются моделью с цилиндрическими капиллярами.

При экспериментальных исследованиях использовался ультразвуковой импульсный анализатор скорости УЗАС-7 и двухщуповой датчик, которые позволяют определять эффективную скорость распространения ультразвуковых колебаний с частотой  $600 \text{ кгц} \div 2 \text{ Мгц}$  в пределах  $500 \div 6500 \text{ м/сек.}$  с погрешностью не более  $1,0\%$ . Общая схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.

В целях уменьшения погрешностей эксперимента учитывались вышеперечисленные ограничения [1].

Значение пористости  $\epsilon$ , плотности пористого скелета  $\rho_c$  исследуемых материалов находились из следующей системы уравнений:

$$\epsilon = 1 - \frac{\rho'_a}{\rho_c};$$

$$\epsilon = \frac{\rho''_a - \rho_c}{\rho_{ж} - \rho_c}.$$

Плотности  $\rho_a, \rho'_a$  соответствуют значениям эффективной плотности в легком газе и в тяжелой жидкости.

Средний модуль объемной упругости среды  $\bar{k}$  брался из [8, 9].

Полученные зависимости  $A_0$  от  $A_1; A_2; A_3; \bar{k}e$  для эталонных образцов приведены в виде монограммы на рис. 2.

Отметим, что в целях экономии времени и средств при проведении подобного рода эксперимента целесообразно первоначально определить  $A_1; A_2; A_3; \bar{k}e$  для реальных экранов, а затем уже изготавливать эталонные образцы с критериями, которые бы включали в своих пределах варьирования критерии исследуемого материала.

Исходя из формулы (6) были получены значения проницаемости для абляционных экранов ТЗП на основе бутилкаучука и эпоксидной смолы, равные  $3,12 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$  и  $4,09 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$  соответственно.

Предлагаемый экспериментальный метод позволяет достаточно быстро и точно проводить все необходимые измерения.

Обозначения:  $\bar{k}$  — средний модуль объемной упругости;  $\rho$  — плотность,  $V$  — объем;  $K$  — проницаемость;  $l$  — длина образца,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $\epsilon$  — пористость;  $S_0$  — уд. поверхность,  $c_{эф}$  — эффективная скорость волны;  $L$  — длина акустич. базы.

Индексы: ж; с; э — жидкость, скелет, эффективный — соответственно, р; м — реальный, модельный.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бергман. Ультразвук. ИЛ, 1956.
2. «Развитие исследований по теории фильтрации в СССР», М., 1969.
3. В. А. Красильников. Звуковые волны в воздухе, воде и твердых телах. М., 1954.
4. И. Б. Сафронова. АН СССР. Сектор физ.-техн. горн. проблем Ин-та физ. Земли. М., 1971.
5. Б. Н. Стаднюк, М. Ф. Казанский, А. Н. Белый.— ИФЖ, 1972. т. 22, № 5.
6. В. П. Мотулевич.— ИФЖ, 1963, № 4.
7. В. П. Мотулевич.— ИФЖ, 1960, № 5.
8. «Конструкционные материалы». М., 1969.
9. «Материалы в машиностроении». М., 1969.
10. В. А. Лошкарев, Г. Г. Тиванов. Тезисы докладов III конференции по мат. и мех. Томск, 1973.

## ИМПУЛЬСНЫЙ ЦИФРОВОЙ РЕГИСТРАТОР

А. М. МАЛЮТИН, Г. С. РАТАНОВ, Г. А. ЦЫБА

При измерении импульсных или быстропеременных давлений существует задача измерить их максимальное значение в каждом импульсе и знать среднее значение максимальных давлений в серии импульсов.

Характерной особенностью подавляющего большинства приборов, регистрирующих давление, является то, что они имеют аналоговый выход с регистрацией на стрелочном приборе или на шлейфовом осциллографе. Эта задача может быть решена с помощью импульсного электронно-счетного цифрового вольтметра. В этом случае нет надобности проводить трудоемкие работы по обработке фотоматериалов, исключаются ошибки, связанные с геометрическими построениями при снятии информации с фотопленки.

Нами разработан и изготовлен прибор — автоматизированный измеритель максимального давления (ИМД). Он позволяет регистрировать максимальное давление как при одиночных измерениях, так и при поступлении на вход целой серии импульсов.

ИМД имеет режим измерения среднего значения амплитуды давления серии импульсов.

В измерителе импульсных давлений использован принцип преобразования амплитуды импульса напряжения во временной интервал с числоимпульсным кодированием.

Устройство с амплитудно-временной трансформацией производит линейное преобразование исследуемых сигналов во временной интервал, пропорциональный амплитуде выходного сигнала. Далее эта длительность выражается в виде числа импульсов, следующих с определенной частотой. Поэтому входной сигнал преобразуется в серию импульсов, число которых пропорционально амплитуде входного сигнала.

Увеличивая число квантов, мы добиваемся уменьшения погрешности преобразования. Но число знаков на цифровом табло прибора нецелесообразно увеличивать больше необходимой точности отсчета, которая должна соответствовать точности измерения.

Преобразователи, в которых временной интервал, пропорциональный преобразуемому напряжению, формируется путем сравнения измеряемого напряжения с эталонным, рассмотрены в литературе. Они отличаются друг от друга в основном схемными решениями элементов, обеспечивающими требуемые характеристики преобразования.

Блок-схема разработанного нами прибора приведена на рис. 1. Входное устройство и цепь коррекции позволяют настроить прибор для



## О ВЛИЯНИИ ЧИСЛА $M$ НА ФОРМУ ОПТИМАЛЬНОЙ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

В. Д. МЕРЗЛЯКОВ, И. Т. СКОРОДИНСКИЙ

Обозначения:

$M$  — числа Маха;

$x$  — безразмерная абсцисса;

$y$  — безразмерная ордината;

$\dot{y}$  — производная  $\frac{dy}{dx}$ ;

$\alpha$  — угол между касательной к образующей головной части и осью абсцисс;

$\beta$  — угол наклона ударной волны местного конуса;

$C_p$  — коэффициент давления;

$l$  — длина головной части;

$d$  — калибр;

$\tau = \frac{d}{l}$ ;

$F$  — сила лобового сопротивления;

$q$  — скоростной напор;

$\gamma$  — показатель адиабаты для воздуха;

$$a = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 3};$$

$$b = \frac{2}{\gamma + 3};$$

$$e = \gamma - 1;$$

$$m = 2(\gamma + 1);$$

$$n = \frac{4}{\gamma + 1}.$$

Индексы:

$0$  — начальные значения;

$k$  — конечные значения.

### Постановка задачи

В процессе движения тела вращения по траектории его скорость может меняться в значительных пределах. Поэтому представляет интерес выявить влияние  $M$  на оптимальную форму с тем, чтобы перейти

к выбору формы головной части тела вращения, обладающей минимальным сопротивлением в широком диапазоне  $M$ .

В работе рассматривается осесимметричное обтекание тела вращения идеальным газом с  $\gamma=1,4$ ;  $5 \leq M \leq 25$ ;  $\frac{1}{9} \leq \tau \leq \frac{1}{3}$ . В качестве приближенного метода расчета коэффициента давления принят метод касательных конусов (по равенству давлений), который для заданных интервалов изменения  $M$  и  $\tau$  дает удовлетворительные результаты [1]; [2].

Выражение для  $C_p$  имеет вид:

$$C_p = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{4}{\gamma+1} (K_c^2 - 1) + 2(K_c - K)^2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1 + \frac{2}{K_c^2}} \right], \quad (1)$$

$$K = M\alpha; \quad K_c = M\beta.$$

Для тонких тел вращения [1]

$$\frac{K_c}{K} = \frac{\gamma+1}{\gamma+3} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\right)^2 + \frac{2}{\gamma+3} \frac{1}{K^2}}. \quad (2)$$

С учетом (2) после несложных преобразований (1) примет вид:

$$C_p = n \left( 2a^2\alpha^2 + \frac{b-1}{M^2} + 2\alpha a \sqrt{a^2\alpha^2 + \frac{b}{M^2}} \right) + m \left[ \alpha^2(1+2a^2-2a) + 2\alpha(a-1) \sqrt{a^2\alpha^2 + \frac{b}{M^2} + \frac{b}{M^2}} \right] \cdot \frac{2a^2\alpha^2 + \frac{b}{M^2} + 2\alpha a \sqrt{a^2\alpha^2 + \frac{b}{M^2}}}{e \left( 2a^2\alpha^2 + \frac{b}{M^2} + 2\alpha a \sqrt{a^2\alpha^2 + \frac{b}{M^2}} \right) + \frac{2}{M^2}}.$$

В общем виде

$$C_p = \Phi(\alpha, \gamma, M).$$

Связь  $\alpha$  и  $\dot{y}$  выражается соотношением

$$\sin^2 \alpha = \frac{\dot{y}^2}{1 + \dot{y}^2}. \quad (3)$$

Поскольку мы рассматриваем тонкие тела, то

$$\dot{y} \ll 1; \quad \sin^2 \alpha \simeq \alpha^2.$$

Поэтому с учетом (3) можно принять

$$\alpha \simeq \dot{y}. \quad (4)$$

Это, вообще говоря, может быть несправедливо вблизи носовой части. Однако можно считать, что площадь поверхности головной части, для которой (4) несправедливо, мала по сравнению с полной площадью

поверхности головной части. Таким образом, ошибка в определении силы сопротивления будет незначительной.

С учетом (4)

$$C_{\bar{p}} = \Phi(\dot{y}, y, M).$$

Задача определения оптимальной образующей сводится к задаче о минимуме функционала:

$$I = \frac{F}{4 \pi q} = \int_{x_0}^{x_k} \Phi(\dot{y}, y, M) \cdot y \cdot \dot{y} dx. \quad (5)$$

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$\dot{y}^2 \cdot y \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} = c, \quad (6)$$

где  $c$  — постоянная.

Обозначим  $y = p$ .

Интегрируя  $dx = \frac{1}{p} \cdot dy$ , получим

$$x(p) - x_0 = \frac{y(p)}{p} \Big|_{p_0}^p + \int_{p_0}^p \frac{y(p)}{p^2} dp. \quad (7)$$

Соотношения (6) и (7) определяют в параметрическом виде образующую тела минимального сопротивления.

Из (6) следует, что если положить  $y_0 = 0$ , то необходимо, чтобы  $p_0 = \infty$  (уравнение  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-1} = 0$  не имеет конечных корней).

В рассматриваемой задаче при заданных  $x_0, y_0, x_k, y_k$  определяются  $p_0$  и  $p_k$ , которые при численной реализации этой задачи должны быть конечными. Поэтому необходимо, чтобы  $y(p_0) \neq 0$ .

Положим

$x(p_0) = x_0 = 0; y(p_0) = y_0 = 0,05; y(p_k) = 1; x(p_k) = x_k$  соответственно 6, 10, 14, 18, т. е. будем рассматривать затупленные тела с диаметром затупления 0,1.

Окончательно система для определения  $p_0$  и  $p_k$  примет вид:

$$\begin{aligned} p_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \Big|_{p_0} \cdot 0,05 &= p_k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \Big|_{p_k}; \\ x_k^{(i)} &= 0,05 p_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \Big|_{p_0} \left[ \left( p^3 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^{-1} \Big|_{p_0}^{p_k} + \int_{p_0}^{p_k} \left( p^4 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^{-1} dp \right]; \\ x_k^{(1)} &= 6; x_k^{(2)} = 10; x_k^{(3)} = 14; x_k^{(4)} = 18. \end{aligned} \quad (8)$$

### Численные результаты

Решение задачи проводилось на ЭВМ БЭСМ-4 по алгоритму:

1) для заданных величин  $M$  и  $x_k^{(i)}$  определялся дискретный набор корней первого уравнения системы (8) ( $p_k^j, p_k^j$ );

2) каждая пара из этого набора подставлялась во второе уравнение системы (8); в качестве корней системы (8) выбиралась пара, дающая минимум выражению

$$\left[ x_k^{(i)} - \left( p_0^j \right)^2 \cdot 0,05 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \Big|_{p_0^j} \left( \left( p^3 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^{-1} \Big|_{p_0^j} + \int_{p_0^j}^{p_k^j} \left( p^4 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^{-1} dp \right) \right]^2;$$

3) на основе параметрической связи  $y(p)$  и  $x(p)$  определялась зависимость  $y(x)$ .

Полученные зависимости  $y(x)$  в виде графиков приведены на рис. 1—2.

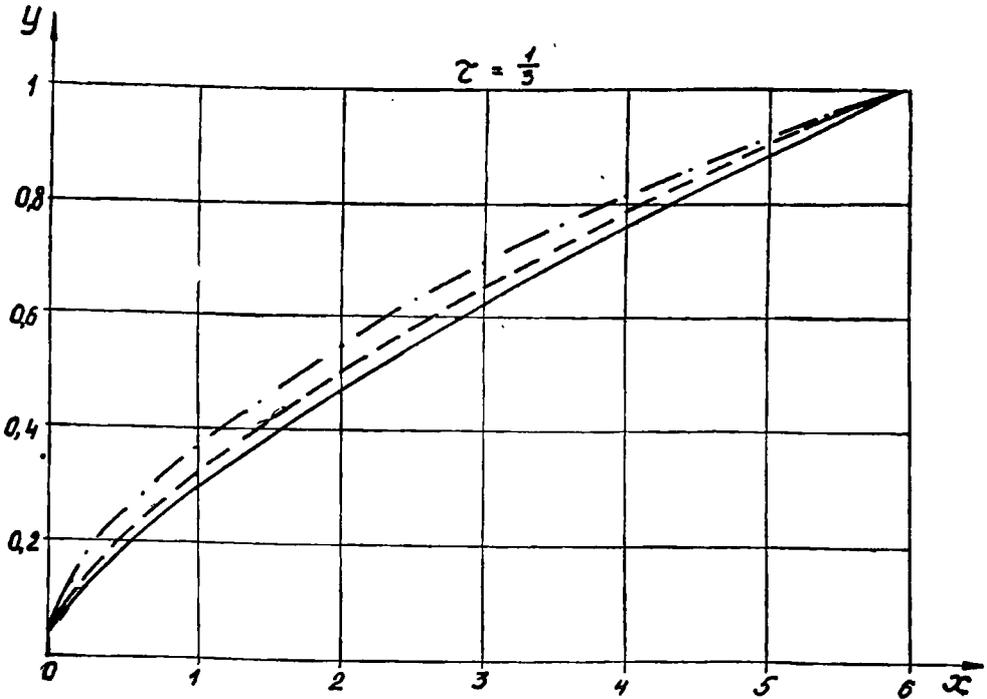


Рис. 1. - · - · - ·  $M=5$ ; - · - -  $M=10$ ; —  $M=25$

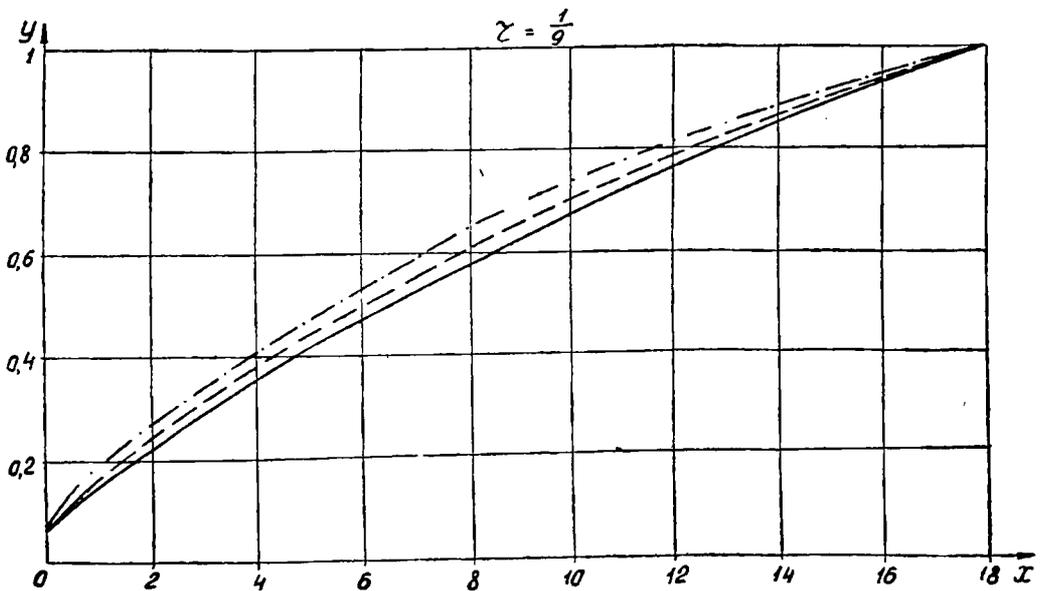


Рис. 2. - · - · - ·  $M=5$ ; - · - -  $M=10$ ; —  $M=25$

На основе анализа численных результатов можно сделать следующие выводы:

а) при увеличении  $M$  имеется тенденция к уменьшению кривизны образующей;

б) с увеличением  $M$  уменьшается его влияние на вид оптимальной образующей;

в) с увеличением  $M$  оптимальная образующая стремится к предельной кривой, которая для заданного интервала изменения  $\tau$  практически достигается при  $M=20-25$ .

### Приближенный метод определения влияния $M$ на оптимальную форму головной части тела вращения

Существование предельной оптимальной формы головной части можно было предсказать заранее, так как при  $M \rightarrow \infty$

$$C_p \rightarrow \frac{2\alpha^2(\gamma+1)(\gamma+7)}{(\gamma+3)^2},$$

т. е. предельная форма есть оптимальная форма, рассчитанная с использованием закона сопротивления Ньютона. Для больших  $M$  оптимальную образующую можно представить в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_* + u; \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_* + \dot{u}, \end{aligned}$$

где

$y_*$  — оптимальная образующая, рассчитанная на основе закона сопротивления Ньютона;

$y_1$  — оптимальная форма, соответствующая заданному  $M$ ;

$u, \dot{u}$  — малые величины относительно  $y_*$  и  $\dot{y}_*$ .

Обозначим  $\Phi(\dot{y}, \gamma, M)$   $\dot{y} = \tilde{\Phi}(y, \gamma, M)$ .

Разложим подинтегральную функцию функционала (5) в ряд Тейлора относительно  $y_*$  и  $\dot{y}_*$  с точностью до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned} I(y_*) &\cong \int_{x_0}^{x_k} \{ \tilde{\Phi}(\dot{y}_*, \gamma, M) y_* + \tilde{\Phi}(\dot{y}_*, \gamma, M) u + \\ &+ \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \right|_{y_*} \cdot y_* \cdot \dot{u} + \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \right|_{y_*} \cdot \dot{u} \cdot u + \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}^2} \right|_{y_*} \cdot y_* \cdot (\dot{u})^2 \} dx, \end{aligned}$$

Если известна  $y_*(x)$ , задача определения  $y_*(x)$  сведется к задаче минимизации следующего функционала:

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \int_{x_0}^{x_k} \{ \tilde{\Phi}(y_*, \gamma, M) u + \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \right|_{y_*} \cdot y_* \cdot \dot{u} + \\ &+ \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \right|_{y_*} \cdot \dot{u} \cdot u + \left( \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}^2} \right|_{y_*} \cdot y_* \right) \dot{u}^2 \} dx. \end{aligned}$$

При граничных условиях:

$$u(x_0) = u(x_k) = 0. \quad (9)$$

В силу условия (9)

$$\int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot u \cdot \dot{u} dx = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_k} u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \right) dx;$$

$$\int_{x_0}^{x_k} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot y_* \right) \cdot \dot{u} dx = \int_{x_0}^{x_k} u \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot y_* \right) dx.$$

Таким образом, окончательно задача сводится к минимизации функционала

$$I_2(u) = \int_{x_0}^{x_k} \left[ (\tilde{\Phi})_{y_*} \cdot u - u \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot y_* \right) - \frac{1}{2} u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \right) + \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}^2} \Big|_{y_*} \cdot y_* \right) \dot{u}^2 \right] dx$$

при граничных условиях (9).

Обозначим

$$z = 2 \dot{u} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}^2} \Big|_{y_*} \cdot y_* \right).$$

Уравнение Эйлера примет вид

$$\dot{z} \simeq (\tilde{\Phi})_{y_*} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot y_* \right) - u \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \right),$$

или

$$\dot{z} = (\tilde{\Phi})_{y_*} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \right) (y_* + u) - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot \dot{y}_*.$$

Так как  $u$  есть величина первого порядка малости относительно  $y_*$ , то

$$\dot{z} \simeq (\tilde{\Phi})_{y_*} - y_* \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \right) - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_*} \cdot \dot{y}_*. \quad (10)$$

После двукратного интегрирования (10) получим:

$$u(x) = c_1 + c_2 \cdot \int_{x_0}^x (2a_1)^{-1} d\zeta + \int_{x_0}^x a_3 (2a_1)^{-1} a \zeta - \\ - \int_{x_0}^x a_2 \cdot (2a_1)^{-1} d\zeta,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные.

$c_1$  и  $c_2$  определим из граничных условий (9).  
 Окончательно выражение для  $u(x)$  примет вид:

$$u(x) = \left[ \int_{x_0}^{x_k} (2a_1)^{-1} d\zeta \right]^{-1} \cdot \left[ \int_{x_0}^{x_k} (2a_1)^{-1} (a_2 - a_3) d\zeta \right] \cdot \int_{x_0}^x (2a_1)^{-1} d\zeta + \quad (11)$$

$$+ \int_{x_0}^x (2a_1)^{-1} (a_3 - a_2) d\zeta,$$

где

$$a_1(x) = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} \Big|_{y_*} \cdot y_*(x);$$

$$a_2(x) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y_*} \cdot y_*(x);$$

$$a_3(x) = \int_{x_0}^x \tilde{\Phi} \Big|_{y_*} \cdot d\zeta.$$

Определив  $y_*(x)$ , нахождение которой является значительно менее трудоемкой процедурой по сравнению с определением  $y_1(x)$  на основе параметрического представления  $y(\rho)$  и  $x(\rho)$ , из (11) определим  $u(x)$  и тем самым  $y_1(x)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Черный. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Н. Ф. Краснов. Аэродинамика ракет. М., Машиностроение, 1968.



# НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА В УСЛОВИЯХ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА

М. Х. МУХАМЕТОВ, В. М. УШАКОВ

Процесс движения поршня в канале<sup>3</sup> под действием расширяющихся нагретых газов сопровождается интенсивным теплообменом между газом и стенкой канала (рис. 1).

В работе на основе ламинарной теории плоского пограничного слоя несжимаемой жидкости рассматриваются особенности теплопередачи в области формирования пограничного слоя в запоршневом пространстве.

## 1. Качественная картина процесса

Теплообмен в запоршневом пространстве между расширяющимся газом и стенками канала протекает в нестационарных условиях. Непосредственно за движущимся поршнем начинает развиваться пограничный слой, толщина которого уменьшается по мере приближения к поршню (рис. 1). Поэтому в области формирования пограничного слоя

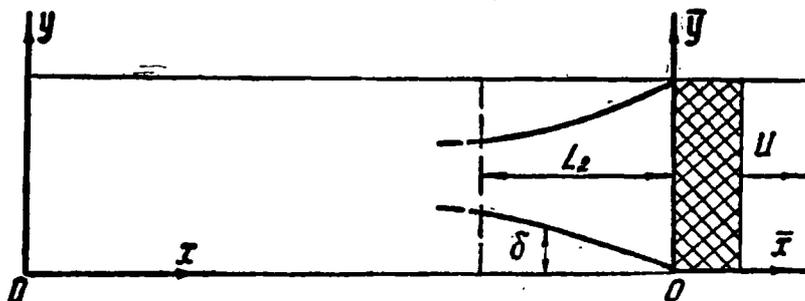


Рис. 1.

происходит особенно интенсивный теплообмен между потоком газа и стенкой канала.

В общем случае нестационарность теплообмена обуславливается изменениями во времени параметров внешнего потока газов, толщины пограничного слоя и температуры омываемой поверхности. Влияние каждого фактора на нестационарность определяется отношением соответствующего характерного времени к времени релаксации возмущений в пограничном слое.

Процесс изменения параметров внешнего потока газа в запоршневом пространстве характеризуется временем

$$t_1 = \frac{L_1}{V_1}, \quad (1)$$

где  $L_1$  — длина канала,

$V_1$  — характерная для данного процесса скорость основного потока.

Время изменения температуры в стенке канала определяется соотношением:

$$t_2 = S \frac{L_2}{V_1}, \quad (2)$$

где

$$S = \frac{\lambda_2 \rho_2 c_2}{\lambda_1 \rho_1 c_1},$$

$\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$  — теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость соответственно (индекс «1» — для газа, индекс «2» — для материала стенки канала);

$L_2$  — протяженность области формирования пограничного слоя (рис. 1).

Физический смысл области формирования заключается в том, что на расстоянии порядка  $L_2$  в пограничном слое происходит наиболее интенсивное торможение газа и резкое изменение продольной составляющей скорости потока. Обычно  $L_2$  принимает значение порядка нескольких диаметров канала.

Изменение толщины пограничного слоя, а также процесс релаксации возмущений в пограничном слое имеют одну и ту же величину и определяются соотношением

$$t_3 = \frac{\delta_1}{V_2} = \frac{L_2}{V_1}, \quad (3)$$

где

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{L_2 \nu}{V_1}} \quad \text{— масштаб толщины пограничного слоя,}$$

$$V_2 = \frac{\delta_1}{L_2} V_1 \quad \text{— масштаб поперечной скорости в пограничном слое.}$$

Так как для большинства газов число Прандтля близко к единице, то время релаксации тепловых возмущений в пограничном слое:  $t_4 = t_3$  (в дальнейшем считается  $P_r = 1$  и  $t_4 = t_3$ ).

Обычно в реальных установках протяженность пути движения поршня бывает намного больше его диаметра. Поэтому можно считать, что и  $L_2 \ll L_1$ . Стенки канала, как правило, изготавливаются из металла и величина  $S$  принимает значение порядка 100 и более. Тогда из сравнения характерных величин времени следует, что  $t_3 \ll t_1$  и  $t_3 \ll t_2$ . Эти неравенства показывают, что в области формирования параметры внешнего потока и температура стенки изменяются квазистационарно по отношению к процессу релаксации возмущений в пограничном слое. Следовательно, в области  $L_2$  нестационарность теплообмена обуславливается преимущественно лишь изменением толщины пограничного слоя.

К этому выводу можно прийти и с точки зрения формального анализа размерностей уравнений пограничного слоя в системе координат, связанной с движущимся поршнем. В этом случае перед нестационарными членами, а также перед градиентом давления появляется безразмерный параметр—число Струхала  $Sh = L^2/t_1 V_1$ . В рассматриваемой области  $Sh \ll 1$ , поэтому в уравнениях пограничного слоя можно пренебречь членами порядка  $Sh$ .

## 2. Решение задачи

На рис. 1 показаны расположения системы координат, связанной с дном канала  $(x, y)$ , и подвижной системы, связанной с поршнем  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Пусть  $x_1$  и  $U$  — соответственно текущее расстояние от дна канала до поршня и текущая скорость поршня. Тогда связь между величинами в двух системах координат запишется в виде

$$x = x_1 + \bar{x}, \quad u = \bar{u} + U, \quad \bar{v} = v, \quad t = \bar{t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} - U \frac{\partial}{\partial \bar{x}},$$

где  $u, v$  — продольная и поперечная компоненты скорости в пограничном слое в неподвижной системе;

$\bar{u}, \bar{v}$  — в подвижной системе;

$t$  — время.

Применяя (4) к уравнениям плоского нестационарного конвективного теплообмена через ламинарный пограничный слой [1] и учитывая малость числа  $Sh$ , можно получить систему, описывающую безградиентное течение в области  $L_2$  в подвижной системе координат:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{u} &= \nu \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \bar{u}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} &= 0, \\ \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} T + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} T &= a_1 \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} T, \\ \bar{y} = 0, \quad \bar{u} = -U, \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \bar{u} &= 0, \quad \bar{v} = 0, \\ T = T_2, \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} T &= 0, \\ \bar{y} = \bar{\delta}, \quad \bar{u} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= 0, \quad T = T_1, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} T &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1}$  — температуропроводность газа,

$\delta$  — толщина динамического пограничного слоя,  
 $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  
 $T_1, T_2$  — температура газа и стенки соответственно,  
 $T$  — температура в пограничном слое.

Система (5) решается известным интегральным методом на основании понятия слоя конечной толщины [1]. Граничные условия удовлетворяются однопараметрическими профилями скорости и температуры, которые имеют вид

$$\frac{\bar{u}}{U} = 1 + \frac{3}{2} \frac{\bar{y}}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{y}}{\delta} \right)^3, \quad (6)$$

$$\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \frac{3}{2} \frac{\bar{y}}{\delta_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{y}}{\delta_2} \right)^3,$$

где  $\bar{\delta}_2$  — толщина теплового пограничного слоя в газе.

Интегрируя уравнение (5) с использованием (6) и переходя к неподвижной системе для  $\delta$  и  $\delta_2$ , получается, что

$$\delta = 3,56 \sqrt{\frac{\nu}{U}(x_1 - x)}, \quad \delta_2 = 2,815 \sqrt{\frac{\nu}{U}(x_1 - x)}. \quad (7)$$

Коэффициент теплообмена через пограничный слой определяется соотношением

$$\alpha = 0,534 \lambda_1 \sqrt{\frac{U}{\nu(x_1 - x)}}, \quad (8)$$

где

$$x_1 = \int_0^t U dt.$$

Из выражения (8) видно, что по мере приближения к поршню коэффициент  $\alpha$  увеличивается до  $\infty$ , что согласуется с приведенной ранее качественной картиной теплообмена в области развития пограничного слоя  $L_2$ .

Приведенное решение может быть использовано для оценки влияния теплообмена в области развития пограничного слоя на нагрев стенок канала, а также на перераспределение газодинамических величин в запоршневом пространстве.

#### ЛИТЕРАТУРА

Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.

# ТЕПЛОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

С. Л. ПАВЛОВ

1. Рассматривается первая краевая задача теплопроводности для вращения, представляющего диск, спаянный с полубесконечным ндром, причем между диском и цилиндром имеется плавная пере-ая часть.

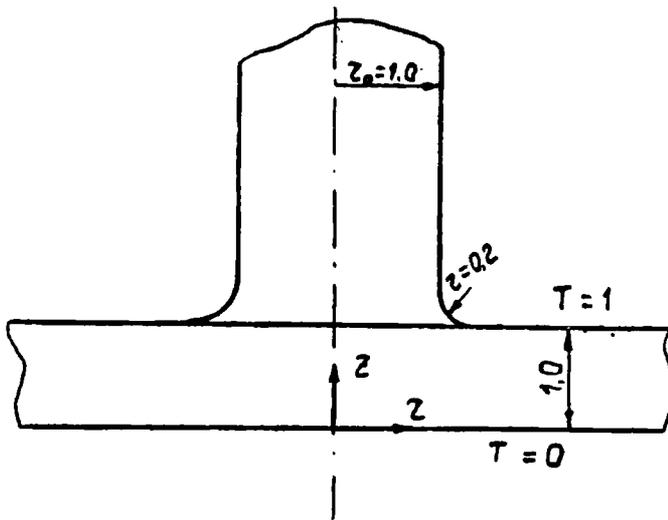


Рис. 1.

Границы области задаются в цилиндрических координатах соотно-иями:

$$r=1, 1,2 < z < \infty, \quad (1.1)$$

$$r=1,2-0,2 \cos \varphi, z=1,2-0,2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.2)$$

$$z=1, 1,2 < r < \infty, \quad (1.3)$$

$$z=0, 0 < r < \infty. \quad (1.4)$$

участках границы (1.1), (1.2), (1.3) задана температура  $T=1$ , а на тке (1.4) задана температура  $T=0$ . Рассматривается стационарное овое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\Delta T \equiv T_{,rr} + \frac{T_{,r}}{r} + T_{,zz} = 0. \quad (1.5)$$

Асимптотика решения на бесконечности для данной задачи на основе граничных условий и уравнения (1.5) является известной

$$T \rightarrow 1, \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

$$T \rightarrow z, \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

2. Решение задачи проводится методом, изложенным в [1, 2, 3].

Сначала ищется «эскизное» решение, которое удовлетворяет уравнению (1.5), является непрерывным и ограниченным со своими производными внутри области и обладает заданной асимптотикой (1.6), (1.7) на бесконечности. Это решение находится в виде

$$T_1 = \frac{\rho}{2} [\rho \bar{\delta}_1 - r \bar{\delta}_2 - (z + \xi) \bar{\delta}_3] - \frac{\rho}{2} [\rho \delta_1 - r \delta_2 - (z - \xi) \delta_3] + \frac{1 - \xi}{2} \rho (\delta_3 + \bar{\delta}_3). \quad (2.1)$$

Здесь  $\delta_1 = \delta_1(\rho, \xi, r, z)$ ,  $\delta_2 = \delta_2(\rho, \xi, r, z)$ ,  $\delta_3 = \delta_3(\rho, \xi, r, z)$  функции, приведенные в [1].

$\bar{\delta}_1 = \delta_1(\rho, -\xi, r, z)$ ,  $\bar{\delta}_2 = \delta_2(\rho, -\xi, r, z)$ ,  $\bar{\delta}_3 = \delta_3(\rho, -\xi, r, z)$ . Функции  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  являются частными решениями уравнений

$$\Delta \delta_1 = 0, \quad \Delta \delta_3 = 0, \quad \left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) \delta_2 = 0. \quad (2.2)$$

По переменным  $r, z$  функция (2.1) является решением уравнения (1.5), а внутри заданной области является непрерывной и ограниченной со своими производными. Функции  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  имеют следующее асимптотическое разложение на бесконечности.

$$\delta_1 = \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \delta_2 = \frac{\rho}{2r^2} + o\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad \delta_3 = -\frac{|z - \xi|}{z - \xi} \cdot \frac{1}{\rho} + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.3)$$

$r \rightarrow \infty$

$$\delta_1 = \frac{1}{|z - \xi|} + o\left(\frac{1}{(z - \xi)^2}\right), \quad \delta_2 = \frac{\rho r}{2|z - \xi|^3} + o\left(\frac{1}{(z - \xi)^4}\right),$$

$$\delta_3 = -\frac{|z - \xi|}{z - \xi} \cdot \frac{1}{\rho} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (2.4)$$

$|z - \xi| \rightarrow \infty$

В силу (2.3), (2.4) решение (2.1) обладает заданной асимптотикой (1.6), (1.7).

Для произвольно выбранного полюса вне области  $\rho = 1,21$  и  $\xi = 1, 21$  функция  $T_1$  была просчитана на границе области.

Граничным условиям (1.1) — (1.3) эта функция не удовлетворяет, однако невязка в удовлетворении граничных условий быстро стремится к нулю на границах (1.1), (1.3) при больших  $z$  или  $r$  соответственно.

Граничному условию (1.4) функция (2.1) удовлетворяет точно в силу нечетности относительно плоскости  $z = 0$ .

Для ликвидации оставшейся невязки в удовлетворении граничных условий к решению (2.1) последовательно добавляются фундаментальные решения уравнения (1.5). Фундаментальным решением уравнения (1.5) является функция  $\delta_1(\rho, \xi, r, z)$  [1, 2]. Эта функция является непрерывной и ограниченной со своими производными везде, кроме полюса  $M_0(\rho, \xi)$ , где она имеет логарифмическую особенность.

Линии уровня фундаментального решения являются выпуклыми замкнутыми кривыми, приближающимися к окружностям около полюса. Эти геометрические свойства фундаментального решения позволяют проводить процесс ликвидации невязки так же, как и в работе [1]. Полное решение записывается в виде

$$T = T_1 + \sum_{k=1}^9 a_k \varphi_1(\rho_k, \xi_k, r, z). \quad (2.5)$$

$$\varphi_1(\rho_k, \xi_k, r, z) = \delta_1(\rho_k, \xi_k, r, z) - \delta_1(\rho_k, -\xi_k, r, z). \quad (2.6)$$

Фундаментальные решения  $\delta_1$  объединяются в пары (2.6), чтобы не нарушалось граничное условие (1.4).

Для удовлетворения граничных условий с точностью 1,3% в сумме (2.5) требовалось взять 9 членов.

Коэффициенты  $a_k$  в (2.5) и полюса  $\rho_k, \xi_k$  даются в табл.

Таблица

| $\kappa$ | 1     | 2     | 3      | 4     | 5      | 6     | 7      | 8      | 9      |
|----------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|
| $\rho_k$ | 1,152 | 6,05  | 1,2    | 1,55  | 1,5    | 2,62  | 1,5    | 1,06   | 1,5    |
| $\xi_k$  | 1,136 | 4,5   | 1,2    | 1,2   | 5,6    | 1,2   | 4,0    | 1,137  | 3      |
| $a_k$    | 0,467 | 7,654 | -0,146 | 0,091 | -0,468 | 0,093 | -0,245 | -0,042 | -0,113 |

На рис. 2 даны кривые 1, 2 распределения температуры по сечениям  $z=0.5, 0 < r < 1.5$  и  $z=1.2, 0 < r < 1.0$  соответственно, рассчитанные по формуле (2.5).

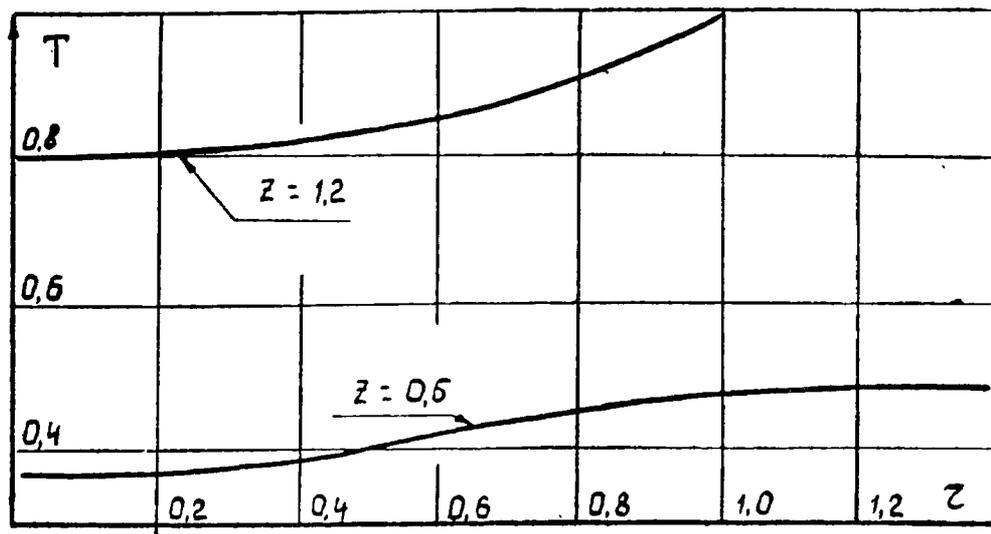


Рис. 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Ахаева, В. И. Тараканов. Кручение вала переменного сечения. Настоящий сборник.

2. В. П. Аленин, В. И. Тараканов. Тепловое осесимметричное поле для одного тела сложной формы. Материалы конференции по математике и механике. Изд. Томского университета, 1970.

3. В. И. Тараканов. Об удовлетворении граничных условий на бесконечности в задачах осесимметричной стационарной теплопроводности для тел сложной формы. Материалы конференции по математике и механике. Изд. Томского университета, 1970.

---

## КРУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И РАДИАЛЬНОЙ ПОЛОСТЯМИ

С. Л. ПАВЛОВ

Решается задача о кручении пространства с вырезанной цилиндрической полостью по оси вращения и щелевой радиальной полостью. Граница области  $S$  задается в цилиндрических координатах следующими уравнениями:

$$r=0.7, 0 \leq z < \infty, S_1; \quad (1)$$

$$r=1, 0 \leq z < 0.35, S_2; \quad (2)$$

$$r=1.15-0.15 \cos \varphi, z=0.35+0.15 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, S_3; \quad (3)$$

$$1.15 < r < \infty, z=0.5, S_4. \quad (4)$$

Момент  $N$  приложен на бесконечности и его направление совпадает с осью  $z$ . Эту задачу можно рассматривать как частный случай задачи о кручении полого вала с глубоким вырезом.

Так как граница свободна от нагрузки, то краевые условия для метрической части границы записываются следующим образом:

$$\sigma_n \equiv -\sigma_{r\varphi} = 0 \text{ при } r=0,7, 0 \leq z < \infty. \quad (5)$$

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} = 0 \text{ при } r=1, 0 \leq z < 0,35 \quad (6)$$

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} \cos \varphi - \sigma_{z\varphi} \sin \varphi = 0 \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ r=1,15-0,15 \cos \varphi, z=0,35+0,15 \sin \varphi. \quad (7)$$

$$\sigma_n \equiv -\sigma_{z\varphi} = 0 \text{ при } z=0,5, 1,15 < r < \infty. \quad (8)$$

Интеграл от напряжений по любой дуге, соединяющей цилиндрическую радиальную полости при  $z > 0$ , должен давать заданный момент кручения  $N$ . На бесконечности должны выполняться асимптотические условия.

$$\sigma_{z\varphi} \rightarrow 0, \sigma_{r\varphi} \rightarrow 0, \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

Вводя вспомогательную функцию напряжения  $\Phi$  [1, 3], переходим второй краевой задачи к первой.  $\Phi$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Phi_{,rr} - 3 \Phi_{,r}/r + \Phi_{,zz} = 0. \quad (10)$$

Разность функции  $\Phi$  в двух точках области совпадает с точностью до множителя с моментом кручения, действующего на произвольную дугу, соединяющую эти точки. Граничные условия, соответствующие условиям (5) — (8), будут иметь вид

$$\Phi_s = N/4\pi\mu \quad \text{на границах 2—4} \quad (11)$$

$$\Phi_s = 0 \quad \text{на границе 1,} \quad (12)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона для данного тела.

Решение задачи производится методом, описанным в [1, 2]. На первом этапе ищется «эскизное» решение, которое удовлетворяет уравнению (10), а граничным условиям (11), (12) в наиболее характерных местах: на бесконечности и в средней части цилиндра  $r=0,7, -0,35 \leq z \leq 0,35; r=1, -0,35 \leq z \leq 0,35$ . Такое решение приведено в [2] и имеет вид

$$\Phi_3(r, z) = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Phi_1 = A[\varphi_1(\rho, \xi; r, z) - \varphi_1(\rho, -\xi; r, z)], \quad (13, 14)$$

$$\Phi_2 = \varphi_2(\rho, \xi; r, z) + \varphi_2(\rho, -\xi; r, z), \quad (15)$$

$$\varphi_1(\rho, \xi; r, z) = \tau(z - \xi)(3\rho^3 - \rho r^2)\delta_1/12 + \rho[2(z - \xi)^3 r + 5(z - \xi) r \times \\ \times (r^2 + \rho^2)]\delta_2/12 + \rho(\rho^4 - r^4)\delta_3/4, \quad (16)$$

$$\varphi_2 = N[0,5 - \sqrt{\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi)^2} + \sqrt{[\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi_0)^2]^2 + 4\rho_0(z - \xi_0)^2}/2\sqrt{2\rho_0} \times \\ \times (1 + 0,5 r^2/\sqrt{[\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi_0)^2]^2 + 4(z - \xi_0)^2\rho_0^2})/4 \pi\mu, \quad (17)$$

$$\delta_1 = \rho_1(\rho, \xi; r, z) = \sqrt{\omega/\rho r} K(\omega)/\pi, \quad (18)$$

$$\delta_2 = \delta_2(\rho, \xi; r, z) = \sqrt{\omega/\rho r} [(2/\omega - 1) K(\omega) - 2E(\omega)/\omega]/\pi, \quad (19)$$

$$\delta_3 = \delta_3(\rho, \xi; r, z) = -(z - \xi)\delta_1/(\rho + r) + (z - \xi)[(r - \rho)(H_0/\pi - 0,5)/|r - \rho| - \\ - 0,5]/\rho|z - \xi|, \quad (20)$$

$$H_0 = \pi/2 - K(\omega) E(\delta, \eta) - E(\omega) F(\delta, \eta) + K(\omega) F(\delta, \eta). \quad (21)$$

Функции  $K(\omega)$ ,  $E(\omega)$ ,  $F(\delta, \eta)$ ,  $E(\delta, \eta)$ ,  $\delta$ ,  $\eta$  приведены в работе [1].

Полюса для «эскизного» решения имели значения:  $\rho = \rho_0 = 1,151$ ,  $\xi = \xi_0 = 0,3514$ . Коэффициент  $A$  выберем следующим:  $A = -0,5N/\pi\mu$ .

Функция  $4\pi\mu(\Phi_1 + \Phi_2)/N$  просчитана на границе области. Граничные значения этой функции при  $r \rightarrow \infty$  или  $z \rightarrow \infty$  обладают заданной асимптотикой, хотя на некоторых участках границы невязка в удовлетворении граничным условиям доходит до 79%.

На втором этапе ликвидируется оставшаяся невязка на границе. Это достигается суммированием фундаментальных решений  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$  для функции напряжений со специально подобранными коэффициентами  $A_k$ . Решения в силу симметрии задачи относительно плоскости  $z=0$  объединены в пары

$$\Phi^0(\rho, \xi; r, z) = \varphi_0(\rho, \xi; r, z) + \varphi_0(\rho, -\xi; r, z), \quad (22)$$

$$\varphi_0(\rho, \xi; r, z) = r\{0,5\rho r\delta_1 + [r^2 + \rho^2 + (z - \xi)^2]\delta_2\}/3. \quad (23)$$

Фундаментальные решения  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; ; r, z)$  выбираются последовательно. На границе тела  $S$  ищутся координаты  $r_m, z_m$  максимальной по модулю невязки, в этой точке определяется кривизна  $K$ , которая является геометрической характеристикой поведения кривой невязки в

этой части границы. Ликвидация этой невязки будет достигаться добавлением к приближенному решению, полученному на предыдущем этапе, нового фундаментального решения  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$ . Полюса  $\rho_k, \xi_k$ , должны быть выбраны так, чтобы модуль  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$  достигал максимального значения на границе  $S$  в точке  $r_m, z_m$ . Значит, фундаментальное решение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)}{dS} \Big|_{\substack{r=r_m \\ z=z_m}} = 0, \quad (24)$$

а также, чтобы кривая  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$  как можно лучше повторяла кривую невязки на  $S$  в этом районе, т. е. модуль кривизны  $K_0$  функции  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$  должен наименьшим образом отличаться от модуля кривизны невязки  $K$  для данного участка границы тела.

Коэффициенты  $A_k$  перед фундаментальными решениями  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$  определяются следующим образом. Составляется квадратичная погрешность  $\varepsilon$  приближенного решения в  $m$  заданных точках  $r_i, z_i$ ; ( $i=1, 2, \dots, m$ ) на границе тела

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^m \left[ \Phi_s - \Phi_{\Xi}(r_i, z_i) - N \sum_{k=1}^L A_k \Phi^0(\rho_k, \xi_k; r_i, z_i) / 4\pi\mu \right]^2. \quad (25)$$

$A_k$  выбирается так, чтобы функция квадратичной невязки  $\varepsilon$  имела минимум, т. е.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, L). \quad (26)$$

Подставляя в (26) значение  $\varepsilon$  из (25), получим систему  $L$  уравнений

$$\begin{aligned} N \sum_{k=1}^L A_k \sum_{i=1}^m \Phi^0(\rho_k, \xi_k; r_i, z_i) \Phi^0(\rho_i, \xi_i; r_i, z_i) / 4\pi\mu = \\ = \sum_{i=1}^m [\Phi_s - \Phi_{\Xi}(r_i, z_i)] \Phi^0(\rho_i, \xi_i; r_i, z_i), \quad j=1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (27)$$

Решая систему (27), определим  $A_k$ , т. е. коэффициенты найдены методом наименьших квадратов [4].

Задача решалась по следующему алгоритму. После нахождения «эскизного» решения определялись координаты  $r_m, z_m$  максимального модуля невязки и модуль кривизны невязки  $|K_0|$ , в этой точке. Затем от точки  $r_m, z_m$  на расстоянии шага  $h$  выбирался полюс  $\rho_k, \xi_k$  фундаментального решения так, чтобы этот полюс обеспечивал выполнение условия (24). Потом определялся модуль кривизны  $|K_1|$  частного решения  $\Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z)$  на границе тела в точке  $r_m, z_m$ . Если  $|K_1| > |K_0|$ , то полюс переносится еще на шаг  $h$  дальше от  $r_m, z_m$  и новый полюс выбирается согласно (24). В силу того, что частные решения имеют особенность при  $r=\rho$  и  $z=\xi$ , а из условия задачи момент кручения, действующий на произвольную дугу тела, должен быть конечен, следует, что все полюса необходимо выбрать вне тела.

Перебор полюсов прекратится при выполнении одного из следующих условий:

$$|K_0| > |K|; \quad \rho_k - h < 0; \quad \xi_k - h < 0. \quad (28)$$

После чего из (27) при  $L=1$  определяем коэффициент  $A_1$ . Полное решение на этом этапе будет

$$\tilde{\Phi} = \Phi_{\partial}(r, z) + A_1 N \Phi^0(\rho_1, \xi_1; r, z) / 4 \pi r. \quad (29)$$

Затем находятся координаты очередного максимального модуля невязки и для ликвидации её в этом районе к решению (29) добавляется фундаментальное решение с полюсом и коэффициентом, выбранными вышеописанным способом. Если после добавления очередного

Таблица

| $\kappa$ | 1       | 2       | 3      | 4      | 5       |
|----------|---------|---------|--------|--------|---------|
| $\rho_k$ | 1,0794  | 1,782   | 0,4259 | 1,3242 | 1,2661  |
| $\xi_k$  | 0,3829  | 0,0019  | 0,1376 | 0,2879 | 0,1342  |
| $A_k$    | -1,9811 | 0,293   | 5,5919 | 1,6665 | -1,7936 |
| $\kappa$ | 6       | 7       | 8      | 9      | 10      |
| $\rho_k$ | 0,5379  | 1,1081  | 0,6539 | 1,2266 | 1,1247  |
| $\xi_k$  | 0,6196  | 0,2905  | 0,3672 | 0,3219 | 0,4194  |
| $A_k$    | 1,6622  | -1,0246 | 0,4019 | 1,0146 | -0,417  |

фундаментального решения максимальная невязка будет меньше, чем наперед заданная величина, то вычислительный процесс обрывается. В противном случае добавляется очередное решение и так до тех пор,

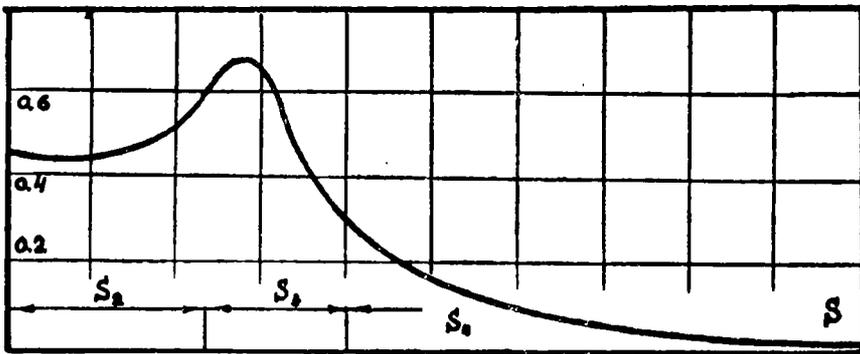


Рис. 1.

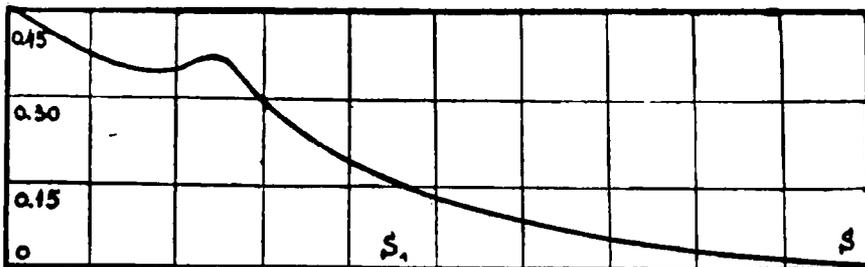


Рис. 2.

пока не будет достигнута заданная точность в удовлетворении граничным условиям. Полученная функция напряжений  $\tilde{\Phi}$  будет иметь вид

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0(r, z) + N \sum_{k=1}^L A_k \Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z) / 4 \mu. \quad (30)$$

Для удовлетворения граничным условиям с точностью 2% берутся 10 фундаментальных решений.

Приведена таблица полюсов фундаментальных решений и коэффициентов при них. Полное решение, удовлетворяющее граничным условиям (11), (12) с точностью 2%, запишется так:

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0(r, z) + N \sum_{k=1}^L A_k \Phi^0(\rho_k, \xi_k; r, z) / 4 \mu. \quad (31)$$

Напряжения выражаются через полученную функцию напряжений (31) по формулам

$$\tilde{\sigma}_{z\varphi} = -2\mu \tilde{\Phi}_{,r} / r^2; \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} = 2\mu \tilde{\Phi}_{,z} / r^2. \quad (32)$$

На рис. 1, 2 приведена эпюра максимальных касательных напряжений  $2\mu \sqrt{\sigma_{r\varphi}^2 + \sigma_{z\varphi}^2} / N$  на границе  $S$ , рассчитанная по формулам (32).

В зоне закругления возникает концентрация напряжений, на 40% превосходящая напряжения в средней части цилиндра  $r=10$ ,  $-0,35 \leq z \leq 0,35$ ;  $r=0,7$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Ахаева, В. И. Тараканов. Кручение вала переменного сечения.— Труды НИИПММ при ТГУ. Т. V, в печати.
2. С. Л. Павлов, В. И. Тараканов. Кручение пространства с вырезанной шелевидной полостью.— Труды НИИПММ при ТГУ. Т. V, в печати.
3. К. В. Соляник-Красса. Кручение валов с кольцевыми выточками.— Труды Ленинградского политехнического института. № 178, 1955.
4. Р. В. Хемминг. Численные методы. Изд. «Наука», 1972.

## КРУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА С ВЫРЕЗАННОЙ ЩЕЛЕВИДНОЙ ПОЛОСТЬЮ

С. Л. ПАВЛОВ, В. И. ТАРАКАНОВ

1. Рассматривается задача о кручении пространства с вырезанной полостью, симметричная часть границы которой задается следующими уравнениями:

$$r=1, 0 \leq z \leq 0,55 \quad (1.1)$$

$$r=1,15-0,15 \cos \varphi, z=0,55+0,15 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.2)$$

$$z=0,7, 1,15 \leq r < \infty. \quad (1.3)$$

На границах (1.1) — (1.3) нагрузка отсутствует, момент  $N$  приложен на бесконечности.

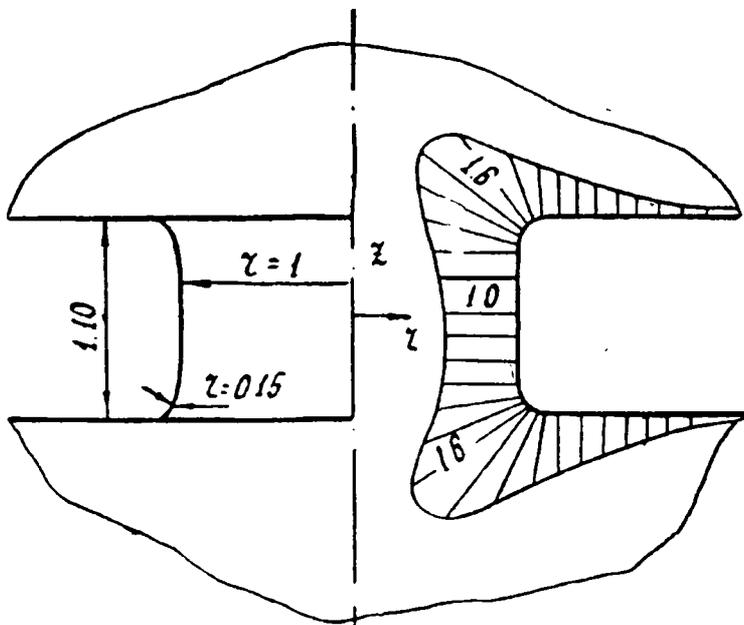


Рис. 1.

Данную задачу можно рассматривать, как частный случай задачи о кручении вала с глубоким вырезом. В аналогичной постановке рассматривалась задача в работе [2], где за границу выемки бралась ги-

пербола, и решение задачи искалось в специальной системе координат разделением переменных. Кручение валов с выточками разной (преимущественно круглой формы) рассматривалось в работах [2, 3, 4, 5], где либо использовались вариационные методы, разностные методы решения, либо решение искалось в специальной системе координат с приближенным удовлетворением граничных условий. Краевые условия для симметричной части границы записываются следующим образом:

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{при } r=1, 0 \leq z \leq 0,55. \quad (1.4)$$

$$\sigma_n \equiv \sigma_{r\varphi} \cos \varphi - \sigma_{z\varphi} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1.5)$$

$$r = 1,15 - 0,15 \cos \varphi, \quad z = 0,55 + 0,15 \sin \varphi; \\ \sigma_n \equiv -\sigma_{z\varphi} = 0 \quad \text{при } z=0,7, 1,15 < r < \infty; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{z\varphi} \rightarrow 0, \quad \sigma_{r\varphi} \rightarrow 0, \quad \text{при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Напряжения на дуге бесконечно большого радиуса при  $z > 0$  должны давать конечный момент кручения.

Напряженное состояние области обладает следующей асимптотикой. В средней части цилиндра  $r=1$ ,  $-0,55 < z < 0,55$  напряженное состояние приближается к деформированному состоянию бесконечного цилиндра, скручиваемого под действием момента, приложенного на бесконечности. На бесконечности должны выполняться асимптотические условия (1.7) с учетом того, что суммарный момент от действия этих напряжений должен давать конечный момент.

Данную вторую краевую задачу удобнее свести к первой краевой задаче введением вспомогательной функции напряжений  $\Phi$  [1, 4], для которой граничные условия, соответствующие условиям (1.4)–(1.7), будут иметь вид

$$\Phi = N : 4\pi\mu \quad \text{на границах (1.1)–(1.3)}. \quad (1.8)$$

При переходе от бесконечно удаленной точки  $z=0,7$ ,  $r \rightarrow \infty$  к точке  $r=0$ ,  $z \rightarrow \infty$  по дуге бесконечно большого радиуса функции  $\Phi$  должна уменьшаться от  $N$  до 0.

2. Решение задачи проводится методом, описанным в [1]. Сначала ищется «эскизное» решение, которое удовлетворяет дифференциальным уравнениям для функции напряжений, а граничным условиям — в наиболее характерных местах; на бесконечности и в средней части цилиндра  $r=1$ ,  $-0,55 \leq z \leq 0,55$ . Такое решение берется в следующем виде:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Phi_1 = A[\varphi_1(\rho, \xi, r, z) - \varphi_1(\rho, -\xi, r, z)], \quad (2.1)$$

$$\Phi_2 = \varphi_2(\rho, \xi, r, z) + \varphi_2(\rho, -\xi, r, z), \quad (2.2)$$

$$\varphi_1(\rho, \xi, r, z) = \frac{\rho}{12}(z-\xi)(3\rho^3 - \rho r^2)\delta_1 + \frac{\rho}{12}[2(z-\xi)^3 \cdot r + \\ + 5(z-\xi)r(r^2 + \rho^2)]\delta_2 + \frac{\rho}{4}(\rho^4 - r^4)\delta_3, \quad (2.3)$$

$$\varphi_2 = \frac{N}{16\pi\mu\rho_0} \left\{ 2\rho_0 \left[ 1 - \sqrt{\frac{\rho_0^2 - r^2 - (z-\xi)^2}{2\rho_0^2}} + \sqrt{\frac{(z-\xi)^2}{\rho_0^2} + \frac{[\rho_0^2 - r^2 - (z-\xi_0)^2]^2}{4\rho_0^4}} \right] \right\}$$

$$\left. - \frac{r^2}{\sqrt{.2}} \frac{\sqrt{\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi_0)^2} + \sqrt{[\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi_0)^2]^2 + 4\rho_0^2(z - \xi_0)^2}}{\sqrt{[\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi_0)^2 + 4(z - \xi_0)^2\rho_0^2]}} \right\}. \quad (2.4)$$

Здесь  $\delta_1 = \delta_1(\rho, \xi, r, z)$ ,  $\delta_2 = \delta_2(\rho, \xi, r, z)$ ,  $\delta_3 = \delta_3(\rho, \xi, r, z)$  приведены в работе [1]. Функции  $\varphi_1(\rho, \xi, r, z)$ ,  $\varphi_2(\rho, \xi, r, z)$  по переменным  $r, z$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям для функции напряжений.

$A$  — постоянный коэффициент.

Функции  $\varphi_2$  в смещениях соответствует функция

$$V_2 = \frac{N}{16 \cdot \pi \mu}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi)^2}{2\rho_0^2} + \sqrt{\frac{[\rho_0^2 - r^2 - (z - \xi)^2]^2}{4\rho_0^4} + \frac{(z - \xi)^2}{\rho_0^2}}} \right\}. \quad (2.5)$$

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что (2.5) удовлетворяет уравнению для смещения

$$\left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) V_2 = 0. \quad (2.6)$$

Функция  $\Phi_2$  обеспечивает заданную асимптотику на бесконечности, а функция  $\Phi_1$  обеспечивает требуемую асимптотику в средней части цилиндра  $r = 1$ ,  $-0,55 \leq z \leq 0,55$ , а на бесконечности удовлетворяет условиям (1.7) и дает нулевой суммарный момент кручения. После просчета граничных значений для функций  $\Phi_1, \Phi_2$  значение постоянного коэффициента  $A$  берется таким, чтобы невязка в удовлетворении граничных условий была минимальна. Полюса  $\rho, \xi, \rho_0, \xi_0$  были выбраны произвольно вне заданной области

$$\rho = 1,151, \xi = 0,51, \rho_0 = 2,5, \xi_0 = 0.$$

При этом значение коэффициента  $A$  получилось следующим:

$A = -1,23 \frac{N}{\pi \mu}$ . Функция  $\frac{4 \pi \mu}{N} (\Phi_1 + \Phi_2)$  была просчитана на границе области. Граничные значения этой функции обладают заданной асимптотикой, однако на отдельных участках границы невязка в удовлетворении граничных условий доходит до 80%.

Ликвидация оставшейся невязки в удовлетворении граничных условий производится суммированием фундаментальных решений для функции напряжений, которые в силу симметрии задачи относительно плоскости  $z = 0$  объединены в пары

$$\Phi^0 = \varphi_0(\rho, \xi, r, z) + \varphi_0(\rho, -\xi, r, z), \quad (2.7)$$

$$\varphi_0(\rho, \xi, r, z) = \frac{\rho r^2}{6} \delta_1 + \frac{r^2 + \rho^2 + (z - \xi)^2}{3} \cdot r \cdot \delta_2.$$

Полюса и коэффициенты перед членами суммы выбираются последовательно способом, описанным в [1].

Для удовлетворения граничных условий с точностью 1,4% берется сумма из 16 фундаментальных решений, причем коэффициенты суммы и полюса задаются таблицей.

Таблица

| $\kappa$ | 1      | 2      | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     |
|----------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|
| $\rho_k$ | 1,2    | 1,15   | 1,073 | 1,05  | 1,23   | 1,11   | 1,05  | 1,05  |
| $\xi_k$  | 0      | 0,3    | 0,6   | 0,15  | 0,6    | 0,634  | 0,564 | 0,47  |
| $a_k$    | 11,59  | 13,88  | -7,6  | 0,868 | 3,27   | -1,29  | -2,36 | 1,045 |
| $\kappa$ | 9      | 10     | 11    | 12    | 13     | 14     | 15    | 16    |
| $\rho_k$ | 2,28   | 1,95   | 4,19  | 3,32  | 1,75   | 2,56   | 2,09  | 3,1   |
| $\xi_k$  | 0,6    | 0,65   | 0     | 0,5   | 0,65   | 0,67   | 0,68  | 0,65  |
| $a_k$    | -0,589 | -0,335 | 0,238 | 0,256 | -0,237 | -0,135 | -0,12 | 0,036 |

Таким образом, полное решение, удовлетворяющее граничным условиям с точностью 1,4%, представляется в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \frac{N}{40\pi\mu} \sum_{k=1}^{16} a_k \Phi^0(\rho_k, \xi_k, r, z). \quad (2.8)$$

Напряжения, соответствующие решению (2.8), даются формулами [1]:

$$\sigma_{z\varphi} = -\frac{2\mu}{r^2} \Phi_{,r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{2\mu}{r^2} \Phi_{,z}. \quad (2.9)$$

На фигуре дана эпюра максимальных касательных напряжений

$\frac{2\pi}{N} \sqrt{\sigma_{r\varphi}^2 + \sigma_{z\varphi}^2}$  на границе области, рассчитанная по формулам (2.9).

В зоне закругления возникает концентрация напряжений, на 60% превосходящая напряжения в средней части цилиндра  $r=1$ ,  $-0,55 < z < 0,55$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Ахаева, В. И. Тараканов. Кручение вала переменного сечения. Настоящий сборник.
2. Г. Нейбер. Концентрация напряжений. М., Гостехиздат, 1947.
3. В. А. Костандян. О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы.— «Изв. АН Арм. ССР». Серия физ.-мат. наук». VII, 1954, № 4.
4. К. В. Соляник-Красса. Кручение валов с кольцевыми выточками.— Тр. Ленинградского политехн. ин-та. № 178, 1955.
5. А. А. Скоробогатыко. О кручении цилиндрических валов с круговыми выточками.— ДАН СССР. 1958, т. 119, № 5.

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ МОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. Г. ПОТЕЙКО, В. М. РОГОВСКИЙ, Б. М. ШТЕРН

1. Рассматривается задача по нахождению рациональных форм моментных оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Решение проводится при допущениях: 1) оболочка работает в упругой области и линейно деформируема; 2) при заданной системе нагрузок опасной является потеря прочности, а не устойчивости.

Примем следующий подход к решению:

Прочностная характеристика, пусть, например, максимальное значение эквивалентного напряжения по условию прочности Треска

$$S = \max \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} \quad (1)$$

и вес  $P$  являются функциями формы очертания меридиана  $r(x)$  и закона изменения толщины  $\delta(x)$ :

$$S = S[r(x), \delta(x)], P = P[r(x), \delta(x)]. \quad (2)$$

Здесь  $r(x)$  — расстояние от оси вращения до срединной поверхности,  $\delta(x)$  — расстояние от срединной поверхности до наружной (внутренней),  $\xi, z$  — меридиональная и нормальная координаты,  $\sigma_1, \sigma_2$  — меридиональное и окружное напряжения.

Ставится задача о нахождении при заданной системе нагрузок таких функций  $r(x), \delta(x)$ , удовлетворяющих некоторым ограничениям

$$\begin{aligned} L_k[r(x)] &\leq q_k \quad (k=1, 2, \dots, K), \\ M_j[\delta(x)] &\leq g_j \quad (j=1, 2, \dots, J), \end{aligned} \quad (3)$$

для которых оболочка имеет наименьшую величину  $S$  или наименьший вес  $P$ . Причем, если минимизируется величина  $S$ , то в (3) должно быть включено ограничение на вес, и наоборот.

Как и в [1], функции  $r(x)$  и  $\delta(x)$  будем отыскивать в виде полиномов достаточно высокой степени

$$r(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i, \quad \delta(x) = \sum_{i=1}^n b_i x^i. \quad (4)$$

На совокупности функций (4) функционалы (2) обращаются в функции многих переменных, а ограничения (3) будут представлять собой алгебраические соотношения между параметрами  $a_i$  и  $b_i$ . Задача, таким образом, сводится к отысканию минимума функции многих переменных при ограничениях, т. е. к задаче математического программирования.

Рассмотрим задачу в более частной постановке, когда варьируется только форма оболочки, а толщина остается постоянной. Оптимальный вариант будем находить из условия, чтобы величина  $S$  была минимальной. В этом случае задача может быть сформулирована так:

В области  $G$ , определяемой условиями  $L_k[r(x)] \geq q_k$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ), требуется найти такой вектор  $\bar{A}(a_i)$ , для которого  $S(\bar{A}) = \min_{A \in G} S(A)$ .

Основной особенностью данной задачи является то, что вид функции цели не известен и вся информация о ней может быть получена только путем вычисления ее для произвольных векторов  $A(a)$ . Определять ее будем методом сканирования в процессе расчета напряженно-деформированного состояния.

Напряженно-деформированное состояние каждой привлекаемой для сравнения формы будем определять из решения основных уравнений осесимметричной теории, которые примем в канонической форме [1].

$$\frac{dV_m}{d\xi} = \sum_{k=1}^6 a_{mk} V_k + f_m \quad (m=1, 2, \dots, 6), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1.$$

$$\sum_{k=1}^6 P_{ik} V_k(\xi_0) = c_i, \quad \sum_{k=1}^6 M_{ik} V_k(\xi_1) = D_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (5)$$

Данная система решалась численно, путем сведения краевой задачи к совокупности начальных. Устойчивость численного процесса обеспечивалась разбиением интервала интегрирования на подынтервалы.

2. Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется найти рациональную форму оболочки сопряжения двух цилиндрических оболочек различных радиусов (рис. 1). Система находится под действием внут-

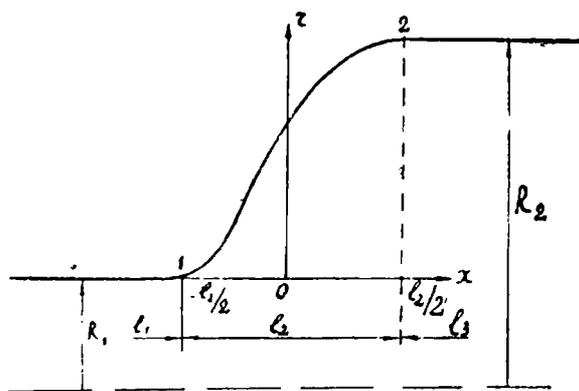


Рис. 1.

реннего давления и осевого растягивающего усилия. В качестве ограничений поставим условия плавного сопряжения в точках 1 и 2 внутренней оболочки с заданными цилиндрическими.

Входные данные следующие:

$$\frac{l_1}{R_1}=0,4; \quad \frac{l_2}{R_1}=0,945; \quad \frac{l_3}{R_1}=1,0;$$

$$\frac{h}{R_1}=0,024; \quad \frac{E}{p}=0,8 \cdot 10^5; \quad \mu=0,22.$$

$p$  — внутреннее давление.

Правый конец оболочки жестко заделан, левый соединен с жестким днищем. Заданное на этом конце растягивающее усилие  $N_1 = p \frac{R_1}{2}$ .

Длины цилиндрических оболочек выбирались такими, чтобы условия закрепления не влияли на напряженное состояние искомой оболочки.

Реализация задачи осуществлялась по схеме метода скорейшего спуска в начальной стадии поиска и по схеме градиентного метода при небольших отклонениях от минимума [2].

Следует отметить, что функция цели  $S(a)$  не является гладкой (очевидно, она будет лишь кусочно-гладкой). В таких случаях градиентные методы не определены и при формальном использовании их аналогов вопрос о сходимости может быть решен для каждой конкретной задачи в большинстве случаев только экспериментальными расчетами. Кроме того, при решении задачи учитывался такой момент: если при некоторой степени полинома найдена форма, то нельзя быть уверенным, что не существует другой, более совершенной формы, для аппроксимации которой требуется полином более высокой степени. Поэтому расчет проводился в такой последовательности. Сначала брался полином невысокой степени  $n$ . Находился для него лучший вариант и запоминалось для него достигаемое значение  $(S_{\min})_n$ . Затем осуществлялась программная настройка на оптимизацию при степени полинома  $n+1$ . Находился лучший полином степени  $n+1$ , и величины  $(S_{\min})_n$  и  $(S_{\min})_{n+1}$  сравнивались.

Если  $|1 - (S_{\min})_n / (S_{\min})_{n+1}| > \varepsilon$ ,

то расчет продолжался для полинома степени  $n+2$  и т. д. Оптимальная форма считалась найденной, если для  $m$  и  $m+1$  степеней полинома выполнялось условие

$$|1 - (S_{\min})_m / (S_{\min})_{m+1}| \leq \varepsilon.$$

Здесь  $\varepsilon$  — некоторая малая величина.

В нашем примере оптимальные формы и достигаемые для них значения  $S$  совпадали с заданной точностью при  $n \geq 5$ . В табл. 1 приведе-

Таблица 1

| $a_i$ | $n=5$    | $n=6$    | $n=7$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $a_0$ | 0,657382 | 0,64854  | 0,66121  |
| $a_1$ | 1,42923  | 1,42829  | 1,50493  |
| $a_2$ | -1,39625 | -1,36151 | -1,41408 |
| $a_3$ | -1,00149 | -0,99318 | -1,61637 |
| $a_4$ | 3,09679  | 3,31061  | 3,02879  |
| $a_5$ | -2,95908 | -2,97750 | -1,97264 |
| $a_6$ | —        | -0,86020 | 0,31801  |
| $a_7$ | —        | —        | 1,115839 |

ны значения коэффициентов полиномов, записанных в безразмерном виде

$$\frac{r}{R_1} = \sum_{i=1}^m a_i \bar{x}^i, \quad \bar{x} = \frac{x}{R_1},$$

для оптимальных форм при  $n=5, 6, 7$ .

На рис. 2 представлено распределение вдоль меридиана величин  $\sigma^* = \frac{1}{\rho} \max_z \sigma_{\text{эКВ}}$  для найденных форм при  $n=3$  (штрих-пунктирная линия),  $n=4$  (пунктирная линия) и  $n=5$  (сплошная линия).

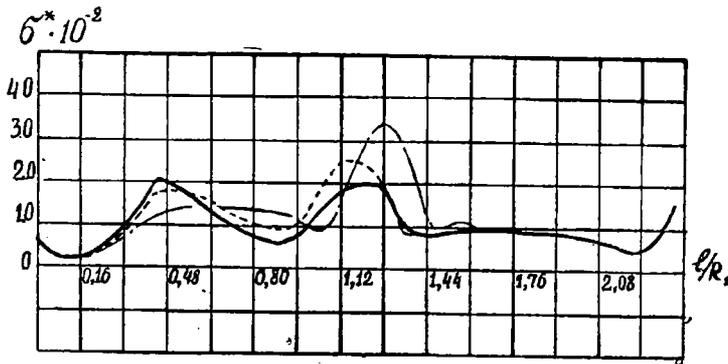


Рис. 1.

Для оптимальной формы ( $n=5$ ), характерно то, что уровень напряжений изгиба в ней минимальный.

В данном примере было исследовано влияние толщины. Оказалось, что найденная форма не зависит от толщины\*, при которой она определялась. От толщины зависит только величина достигаемого  $S$ . И если необходимо найти форму оболочки и толщину, при которой величина  $S$  не превосходит некоторого допустимого значения  $\sigma$ , то можно поступить следующим образом. При некоторой толщине найти форму, а затем, используя график зависимости  $S(h)$  (рис. 3) для этой формы, по заданному  $\sigma$  найти толщину.

При найденной таким образом форме и толщине оболочка будет иметь, очевидно, и наименьший вес по сравнению с другими, равнопрочными по прочности и удовлетворяющими заданным ограничениям.

Для подтверждения этого был рассмотрен другой подход, состоящий в выборе в качестве функции цели веса оболочки  $P(a_i, h)$  и минимизации его как по параметрам формы  $a_i$ , так и по толщине  $h$  при дополнительном ограничении на прочность  $S(a_i, h) - \sigma \leq 0$ .

Оптимизация в этом случае велась по схеме проекционного градиентного метода [3]. Полученные результаты совпали с предыдущими.

Минимизация максимального значения эквивалентного напряжения обеспечивает наиболее равномерное распределение напряжений как вдоль меридиана, так и по толщине в тех пределах, которым позволяют ограничения. Поэтому в данном примере проект оболочки с наи-

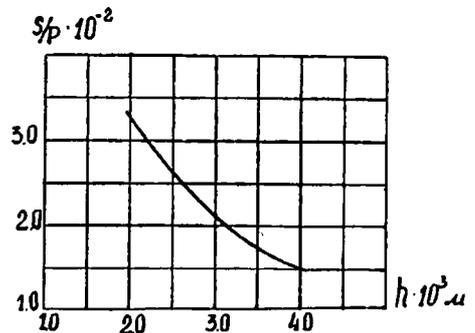


Рис. 2.

\* Имеется в виду диапазон изменения толщин, при котором обеспечивается линейность прямой задачи и выполнение гипотез Кирхгофера—Лява.

более равномерным распределением напряжений имеет и наименьший вес.

В заключение отметим, что выбор в качестве прочностной характеристики величины максимального эквивалентного напряжения по условию прочности Треска сделан лишь для конкретизации задачи.

В качестве такой величины можно было взять максимальное эквивалентное напряжение, определяемое по гипотезе энергии формоизменения, или максимальное значение какого-либо главного напряжения и т. п.

В ряде задач может оказаться целесообразным выбор в качестве функции цели или ограничения какой-либо деформационной характеристики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Потейко. Численное решение одной обратной задачи теории оболочек.— Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М., изд. «Наука», 1970.

2. А. А. Фельдбаум. Автоматический оптимизатор.— «Автоматика и телемеханика», 1958, т. XIX, № 8.

3. Б. М. Каган, Т. М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. М.-Л., изд. «Энергия». 1964.

---

# К ОПИСАНИЮ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

А. А. СВЕТАШКОВ

1. Под разносопротивляющимся растяжению и сжатию материалом в дальнейшем понимается такой материал, для которого соотношения между напряжениями и деформациями зависят от знаков главных напряжений [1].

Рассмотрим элементарное напряженное состояние:

$$\sigma_1(t) > 0, \sigma_2(t) = \sigma_3(t) = 0. \quad (1.1)$$

Предположим, что главные удлинения вязко-упругого изотропного тела в некоторой области  $|\sigma_1(t)| < \sigma_1^*$  линейно зависят от главного напряжения  $\sigma_1(t)$

$$\varepsilon_1(t) = K\sigma(\tau), \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) = -\Gamma\sigma_1(\tau),$$

$$Kf \equiv \int_0^t K(t-\tau)f(\tau) d\tau; \quad \Gamma f \equiv \int_0^t \Gamma(t-\tau)f(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

$$K(t) = 1/E \delta(t) + \tilde{K}(t); \quad \Gamma(t) = \nu/E \delta(t) + \tilde{\Gamma}(t).$$

Здесь  $K(t)$ ,  $\Gamma(t)$ -ядра продольной и поперечной ползучести.

При  $|\sigma_1(t)| \geq \sigma_1^*$  будем иметь область нелинейности механических свойств материала, проявляющуюся как в зависимости ядер от знака  $\sigma_1(t)$ , так и в нелинейности зависимости главных удлинений от главных напряжений:

$$\varepsilon_1(t) = K\sigma_1 + h(|\sigma_1| - \sigma_1^*)[K_1'^+\sigma_1 + K_2^+\sigma_2 + \dots], \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) = -\Gamma\sigma_1 - h(|\sigma_1| - \sigma_1^*)[\Gamma_1'^+\sigma_1 + \Gamma_2^+\sigma_2 + \dots],$$

где

$$K_2^+ f \equiv \int_0^t \int_0^t K_2^+(t-\tau_1, t-\tau_2)f(\tau_1)f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

$$K_2'^+(t) = K_1'^+(t) - K(t); \quad \Gamma_1'^+(t) = \Gamma_1^+(t) - \Gamma(t). \quad (1.5)$$

$$K_1^+(t) = 1/E^+ \delta(t) + \tilde{K}_1^+(t); \Gamma_1^+(t) = \nu^+ / E^+ \delta(t) + \tilde{\Gamma}_1^+(t).$$

Функции  $\tilde{K}_1^+(t)$ ,  $\tilde{\Gamma}_1^+(t)$ ,  $\Gamma_2(t, \tau)$ ,  $K_2(t, \tau), \dots$ , а также константы мгновенной упругости  $E^+$ ,  $\nu^+$ ,  $E_2^+$ ,  $\nu_2^+$ , ... определяются из опытов на ползучесть при растяжении для  $\sigma_1(t) > \sigma_1^*$  (рис. 1). Аналогично для элементарного напряженного состояния

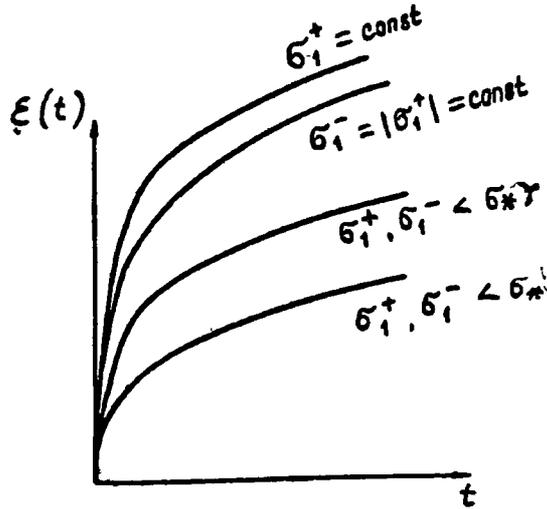


Рис. 1.

$$\sigma_1(t) < 0, \sigma_2(t) = \sigma_3(t) = 0 \quad (1.6)$$

будем иметь определяющие уравнения

$$\varepsilon_1(t) = K \sigma_1 + h(|\sigma_1| - \sigma_1^*) [K_1^- \sigma_1 + K_2^- \sigma_1^2 + \dots]. \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) = -\Gamma \sigma_1 - h(|\sigma_1| - \sigma_1^*) [\Gamma_1^- \sigma_1 + \Gamma_2^- \sigma_1^2 + \dots]$$

$$K_1^-(t) = K^-(t) - K(t); \Gamma_1^-(t) = \nu^- / E^- \delta(t) + \tilde{\Gamma}_1^-(t). \quad (1.8)$$

$$\Gamma_1^-(t) = \Gamma_1^-(t) - \Gamma(t); K_1^-(t) = 1/E^- \delta(t) + \tilde{K}_1^-(t).$$

Переход от линейности к нелинейности в определяющих уравнениях (1.4), (1.6) может описываться как функцией Хевисайда

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \frac{d}{dx} h(x) = \delta(x)$$

$x = |\sigma_1| - \sigma_1^*$ , так и функцией, порождающей функцию Хевисайда [2]:

$$H(\alpha, x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}.$$

Параметр  $\alpha$  определяется из условия наилучшего согласия с экспериментальными кривыми.

Определяющие уравнения (1.4), (1.6) записаны таким образом, что при  $|\sigma_1| > \sigma_1^*$  мы имеем уравнения, не отличающиеся от определяющих уравнения материала, не обладающего областью линейности меха-

нических свойств, предложенные С. А. Амбарцумяном [1]. Обозначим главные уравнения материала, не обладающего областью линейности, через  $\tilde{\varepsilon}_i(t)$  и запишем определяющие уравнения [1] в виде

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) > 0, \quad \sigma_2(t) = \sigma_3(t) = 0. \\ \tilde{\varepsilon}_1(t) = K_1^+ \sigma_1 + K_2^+ \sigma_1^2 + \dots \\ \varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) = -\Gamma_1^- \sigma_1 - \Gamma_2^- \sigma_1^2 - \dots\end{aligned}\quad (1.9)$$

В дальнейшем, согласно [1], принимаем, что ядра поперечной ползучести при растяжении и сжатии (а также константы  $\nu^+/E^+$ ,  $\nu^-/E^-$ ) одинаковы.

Для материалов с определяющими уравнениями типа (1.9) удобно вводить фиктивную область линейности. За линейное ядро продольной ползучести можно взять, например,

$$K(t) = [K_1^+(t) + K_1^-(t)]/2. \quad (1.10)$$

Погрешность в описании поведения материала в момент  $t$  определяющими уравнениями с фиктивной областью линейности и без нее может быть сделана меньше любого наперед заданного малого числа как только  $\sigma_1^* < \sigma_*$

$$\begin{aligned}|\varepsilon_1(t) - \tilde{\varepsilon}_1(t)| &= \left| \frac{1}{2}(K_1^+ + K_1^-) \sigma_1 - K_1^+ \sigma_1 - K_2^+ \sigma_1^2 - \dots \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\sigma_*|^n,\end{aligned}\quad (1.11)$$

где  $\sigma_1^* < \sigma_*$ ,  $a_n$  — максимальные значения модулей интегралов от функций  $[K_1^-(t) - K_1^+(t)]/2$ ,  $K_2^+(t, \tau), \dots$

В силу ограниченности последних заключаем, что

$$\lim_{\sigma_* \rightarrow 0} |\varepsilon_1(t) - \tilde{\varepsilon}_1(t)| = 0. \quad (1.12)$$

2. В общем случае, согласно [1], в вязкоупругом теле возможны следующие четыре вида напряженных состояний:

- I  $\sigma_1(t) \geq 0; \quad \sigma_2(t) \geq 0; \quad \sigma_3(t) \geq 0.$
- II  $\sigma_1(t) \geq 0; \quad \sigma_2(t) \leq 0; \quad \sigma_3(t) \geq 0.$
- III  $\sigma_1(t) \geq 0; \quad \sigma_2(t) \leq 0; \quad \sigma_3(t) \leq 0.$
- IV  $\sigma_1(t) \leq 0; \quad \sigma_2(t) \leq 0; \quad \sigma_3(t) \leq 0.$

Определяющие уравнения для напряженных состояний общего вида можно получить следующим образом. Сделаем круговую замену индексов в соотношениях (1.4), (1.6) и, складывая соответствующие определяющие уравнения для элементарных напряженных состояний, получим для напряженных состояний I—IV следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned}\text{I. } \varepsilon_1(t) &= K \sigma_1 - \Gamma(\sigma_2 + \sigma_3) + h(x) [K_1^+ \sigma_1 - \Gamma_1^-(\sigma_2 + \sigma_3) + \\ &+ K_2^+ \sigma_1^2 - \Gamma_2^-(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \dots].\end{aligned}\quad (2.1)$$

(1, 2, 3)

$$\begin{aligned}
\text{II. } \varepsilon_1(t) &= K \sigma_1 - \Gamma(\sigma_2 + \sigma_3) + h(x) [(K_1^+ \sigma_1 - \Gamma_1'(\sigma_2 + \sigma_3) + \\
&\quad + K_2^+ \sigma_1^2 - \Gamma_2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \dots], \\
\varepsilon_2(t) &= K \sigma_2 - \Gamma(\sigma_1 + \sigma_3) + h(x) [K_1^- \sigma_2 - \Gamma_1'(\sigma_1 + \sigma_3) + \\
&\quad + K_2^- \sigma_2^2 - \Gamma_2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) + \dots], \\
\varepsilon_3(t) &= K \sigma_3 - \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2) + h(x) [K_1^+ \sigma_3 - \\
&\quad - \Gamma_1'(\sigma_1 + \sigma_2) + K_2^+ \sigma_3^2 - \Gamma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \dots]. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } \varepsilon_1(t) &= K \sigma_1 - \Gamma(\sigma_2 + \sigma_3) + h(x) [K_1^+ \sigma_1 - \Gamma_1'(\sigma_2 + \sigma_3) + \\
&\quad + K_2^+ \sigma_1^2 - \Gamma_2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \dots], \\
\varepsilon_2(t) &= K \sigma_2 - \Gamma(\sigma_1 + \sigma_3) + h(x) [K_1^- \sigma_2 - \Gamma_1'(\sigma_1 + \sigma_3) + \\
&\quad + K_2^- \sigma_2^2 - \Gamma_2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) + \dots], \tag{2.3} \\
\varepsilon_3(t) &= K \sigma_3 - \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2) + h(x) [K_1^- \sigma_3 - \Gamma_1'(\sigma_1 + \sigma_2) + \\
&\quad + K_2^- \sigma_3^2 - \Gamma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \dots].
\end{aligned}$$

Символ (1, 2, 3) означает круговую перестановку индексов.

Определяющие уравнения для напряженного состояния типа IV записываются аналогично соотношениям (2.1) с заменой знака плюс на минус и круговой перестановкой индексов у главных напряжений и удлинений. Здесь принято обозначение.

$$x = \max |\sigma_i| - \sigma_* \tag{2.4}$$

Для записи соотношений (2.1) — (2.3) в произвольной системе координат, положение которой относительно главных направлений определяется девятью направляющими косинусами  $l_p, m_p, n_p$ , воспользуемся выражениями тензоров напряжений и деформаций через главные напряжения и деформации [3]

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^0 &= C_p^i C_q^j \sigma_{pq}, \sigma_{pq}^0 = 0 \quad (p \neq q). \\
\sigma_{ij} &= C_i^p C_j^q \sigma_{pq}^0(p, q, i, j = 1, 2, 3) \\
C_i^1 &= l_i, \quad C_i^2 = m_i, \quad C_i^3 = n_i; \tag{2.5}
\end{aligned}$$

выражениями главных напряжений через инварианты девиатора напряжений [4]:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(t) &= 1/\sqrt{3} \sigma_u(t) \sin(\omega(t) + 2\pi/3) + \sigma(t)/3, \\
\sigma_2(t) &= 1/\sqrt{3} \sigma_u(t) \sin \omega(t) + \sigma(t)/3, \tag{2.6} \\
\sigma_3(t) &= 1/\sqrt{3} \sigma_u(t) \sin(\omega(t) - 2\pi/3) + \sigma(t)/3,
\end{aligned}$$

а также формулами для попарных произведений направляющих косинусов  $l_p(t) l_q(t), m_p(t) m_q(t), n_p(t) n_q(t)$  [4]. Ограничимся в дальнейшем определяющими уравнениями, содержащими первую степень главного напряжения. Тогда будем иметь следующую связь между тензором деформации  $\varepsilon_{pq}(t)$  и девиатором напряжения  $s_{pq}(t)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pq}(t) = & \int_0^t K_{11}(\theta) \delta_{pq} \sigma(\tau) d\tau + \int_0^t K_{12}(\theta) s_{pq}(\tau) d\tau + \\ & + h(x) \left[ \int_0^t [\chi(M) + \mu(M) \sigma(\tau)] \delta_{pq}^0 d\tau + \right. \\ & \left. + [\alpha(M) + \beta(M) \sigma(\tau)] s_{pq}(\tau) + [\gamma(M) + \delta(M) \sigma(\tau)] \times \right. \\ & \left. \times s_{pm}(\tau) s_{mq}(\tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $M$  — совокупность  $\Theta = t - \tau$ ,  $\alpha_u(\tau)$ ,  $\Gamma\sigma(\tau)$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma\sigma(t) = & s_{pq}(t) s_{qm}(t) s_{mp}(t), \quad \sigma_u^2(t) = 2I_0^2(t) = \\ = & s_{pq}(t) s_{pq}(t), \quad \sigma(t) = \sigma_{pq}(t) \delta_{pq}, \\ \omega(t) = & \arcsin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Gamma\sigma(t)}{I_0^3(t)} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\delta_{pq}$  — единичная матрица.

Функции  $\alpha(M)$ , ...,  $\chi(M)$  различны для различных видов напряженных состояний.

Для напряженных состояний типа I

$$\begin{aligned} \chi(M) = \beta(M) = \nu(M) = \delta(M) = 0, \\ \mu(M) = K_{II}^+(\theta) - K_{11}(\theta), \alpha(M) = K_{12}^+(\theta) - \\ - K_{12}(\theta), K_{II}^+(\theta) = \frac{1}{3} [K_I^+(\theta) - 2\Gamma_1(\theta)], K_{12}(\theta) = K_I^+(\theta) + \Gamma_1(\theta). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для напряженных состояний типа II

$$\begin{aligned} \chi(M) = \frac{1}{3} R_3(\theta) (1 + 2\varphi_1) \frac{2I_0}{\sqrt{3}} \varphi_2, \\ \mu(M) = \frac{1}{3} R_1(\theta) - R_2(\theta) + \frac{1}{9} (1 + 2\varphi_1) R_3(\theta), \\ \alpha(M) = R_1(\theta) + \frac{2}{3} (\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2 R_3(\theta), \\ \beta(M) = (\varphi_2 - \varphi_3) R_3(\theta) / (3\sqrt{3} I_0(t)), \\ \delta(M) = -\varphi_1 R_3(\theta) / (3 I_0^2(t)), \\ \gamma(M) = -2\varphi_1 \varphi_2 R_3(\theta) / (I_0(t) \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{\cos \omega(t)}{\cos 3\omega(t)}, \quad \varphi_2 = \sin \omega(t), \quad \varphi_3 = \cos \omega(t) \operatorname{tg} 3\omega(t), \\ R_1(\theta) = K_{12}^+(\theta), \quad R_2(\theta) = \Gamma_1(\theta), \\ R_3(\theta) = K_I^-(\theta) - K_I^+(\theta). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для напряженных состояний типа III, IV выражения для  $\alpha(M)$ , ...,  $\chi(M)$  имеют вид, аналогичный (2.9), (2.10) соответственно, с заменой

$K_1^+(\Theta)$  на  $K_1^-(\Theta)$ , причем для напряженных состояний типа III производится замена  $\sin \omega(t)$  на  $\sin(\omega(t) + 2\pi/3)$ ,  $\cos \omega(t)$  на  $\cos(\omega(t) + 2\pi/3)$ .

Соотношения (2.7) являются вариантом главной нелинейной теории вязко-упругости [2]

$$\varepsilon_{pq}(t) = \int_0^t [\delta_{pq} P_1(Q) + \sigma_{pq}(\tau) P_2(Q) + \sigma_{pm}(\tau) \sigma_{mq}(\tau) \times \\ \times P_3(Q)] d\tau. \quad (2.12)$$

$Q$  — совокупность аргументов  $t-\tau$ ,  $\sigma(\tau)$ ,  $\sigma(\tau)$ ,  $\Gamma\sigma(\tau)$ .

Соотношения (2.7) формально могут быть получены разложением функционалов  $P_j(Q)$  в ряды по степеням  $\sigma(\tau)$  и учетом членов с нулевой и первой степенями  $\sigma(\tau)$ . Существенным отличием (2.7) от (2.12) является зависимость структуры первых от вида напряженного состояния I—IV.

3. Для записи (2.7) в виде, разрешенном относительно напряжений, запишем (2.7) в виде

$$E = G(S) \\ E = (\varepsilon_{pq}(t)), S = (\sigma_{pq}(t)), D_\sigma = (S_{pq}(t)), \quad (3.1)$$

причем

$$G(S) = G_1(S)I + G_2(S), (I = (\delta_{pq})). \\ G_1(S) = \mu + (K_{11} + \kappa)\sigma. \\ G_2(S) = (\alpha + K_{12} + \beta\sigma)D_\sigma + (\gamma + \delta\sigma)D_\sigma^2. \quad (3.3)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  — интегральные операторы с ядрами  $\alpha(M), \beta(M), \dots, \gamma(M)$  соответственно. Согласно теоремам Б. Е. Победря [2], для сильно и слабо релаксирующих материалов обратное (2.7) определяющее уравнение записывается в виде

$$S = (E + FR_{11}\varepsilon)I + (A + BR_{11}\varepsilon)R_{12}D_\varepsilon + (C + DR_{11}\varepsilon)R_{12}^2D_\varepsilon^2; \\ Af \equiv \int_0^t A[t-\tau, \varepsilon_u(\tau), D_\varepsilon(\tau)] f(\tau) d\tau, \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_{pq}(t)\delta_{pq}, \varepsilon_u(t) = \frac{1}{2}e_{pq}(t)e_{pq}(t). \quad (3.4)$$

$$e_{pq}(t) = \varepsilon_{pq}(t) - \frac{1}{3}\delta_{pq}\varepsilon, D_\varepsilon(t) = e_{mp}(t)e_{pq}(t)e_{qm}(t).$$

Для отыскивания функций  $A, B, \dots, F$ , применяем метод последовательных приближений

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} - R_{11}[G_1(S^n) - \varepsilon]. \\ D_\sigma^{(n+1)} = D_\sigma^{(n)} - R_{12}[G_2(S^n) - D_\varepsilon]. \quad (3.5) \\ S = D_\sigma + I\sigma.$$

В результате получим следующие выражения  $A, B, \dots, F$  через  $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ , а также через операторы  $R_{11}, R_{12}$  (обратные линейным операторам  $K_{11}, K_{12}$ ):

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \{I - R_{11}[\mu_n - \mu_n R_{11}\mu_{n-1} + \dots + (-1)^n \mu_n R_{11} \dots \mu_1], \\
E_{n+1} &= -R_{11}[x_n - \mu_n R_{11}x_{n-1} + \mu_n R_{11}\mu_{n-1}x_{n-2} + \dots \\
&\quad + (-1)^n \mu_n R_{11}\mu_{n-1}R_{11} \dots \mu_2 R_{11} x_1], \\
A_{n+1} &= I - R_{12}(\alpha_n + \beta_n E_n)A_n, \\
B_{n+1} &= -R_{12}[\alpha_n B_n + \beta_n (E_n B_n + F_n A_n)], \\
C_{n+1} &= -R_{12}[(\alpha_n + \beta_n E_n)C_n + A_n^2(\gamma_n + \delta_n E_n)], \\
D_{n+1} &= -R_{12}[D_n(\alpha_n + \beta_n E_n) + \delta_n F_n A_n^2 + \\
&\quad + \beta_n F_n C_n + 2 A_n B_n(\gamma_n + \delta_n E_n)].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь  $\alpha_n, \beta_n, \dots, x_n$  — известные операторы, ядра которых зависят от  $n$  —  $x$  приближений второго и третьего инвариантов девиатора напряжений, например

$$\alpha_n f \equiv \int_0^t \alpha[t-\tau, \sigma_u^{(n)}(\tau), \Gamma_\sigma^{(n)}(\tau)] f(\tau) d\tau, \tag{3.7}$$

инварианты образуются по формулам

$$\sigma_u^{(n)} = \frac{1}{2} S_{pq}^{(n)} S_{pq}^{(n)*}, \Gamma_\sigma^{(n)} = S_{pm}^{(n)} S_{mq}^{(n)} S_{qp}^{(n)}, \tag{3.8}$$

а  $S_{pq}^{(n)}$  находятся на основании (3.5).

При первом приближении согласно (3.6), (3.3) имеем линейные соотношения вязко-упругости

$$\sigma_{pq}(t) = R_{11}\varepsilon_{pq} + R_{12}e_{pq}. \tag{3.9}$$

Функция  $h(x)$  входит множителем перед операторами  $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ , поэтому в (3.3) она войдет множителем перед членами, зависящими от  $\alpha_n, \beta_n, \dots, x_n$ , то есть перед членами, описывающими физически нелинейное поведение. Соотношение (3.3) распадается на четыре независимых соотношения в областях I—IV. Для видов напряженных состояний I и IV отличны от нуля только операторы  $\alpha, \mu$ , причем, поскольку  $\alpha(M), \mu(M)$ , согласно (2.9), не зависят от инвариантов, для отыскания взаимнообратимых соотношений достаточно двух приближений.

$$\begin{aligned}
F_2 &= I - R_{11}\mu_1, \quad A_2 = I - R_{12}\alpha_1. \\
\alpha_1 &= \alpha, \quad \mu_1 = \mu.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Таким образом, для вида напряженного состояния I будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_{pq}(t) &= \delta_{pq}R_{11}\varepsilon + R_{12}e_{pq} + h(x)[-\delta_{pq}R_{11}K_{11}^+R_{11}\varepsilon + \\
&\quad + \delta_{pq}R_{11}\varepsilon - R_{12}K_{12}^+R_{12}e_{pq} + R_{12}e_{pq}].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Условие перехода из области линейности механического поведения в область физической нелинейности в (3.3) записывается через  $x$ , то есть через главные напряжения. Его можно выразить через деформации, используя построенный процесс последовательных приближений.

В случае, когда  $\sigma_1$  — максимальное по модулю напряжение, будем иметь

$$x^{(n)} = \left| \frac{\sigma_u^{(n)}}{\sqrt{3}} \sin(\omega_\sigma^{(n)} + 2\pi/3) + \sigma^{(n)}/3 \right| - \sigma^*. \quad (3.12)$$

$\sigma_u^{(n)}$ ,  $\sigma^{(n)}$ ,  $\omega_\sigma^{(n)}$  выражаются через деформации по формулам (3.8), (3.5).

Таким образом, введение области линейности механических свойств в соотношениях между напряжениями и деформациями вязко-упругого тела, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, позволяет построить для них обратные соотношения. Кроме того, наличие области линейности механических свойств позволяет применить методы последовательных приближений для решения возникающих краевых задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Амбарцумян. Прикл. мат. и мех. 1971, 35, 1.
2. А. А. Ильюшин, Б. Е. Победра. Основы математической теории термо-вязко-упругости. М., 1970.
3. С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян. Инж. журнал мех. тверд. тела. 1966, 2.
4. М. С. Саркисян. Механика тверд. тела. 1971, 5.
5. В. В. Москвитин. Сопротивление вязко-упругих материалов. М., 1972.
6. А. А. Светашков. Материалы третьей научной конференции по математ. и механике. Томск, 1972.

## УСТРОЙСТВО СОГЛАСОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ СО ШЛЕЙФНЫМ ОСЦИЛЛОГРАФОМ

Н. С. ТАХТАМЫШЕВ, Г. С. РАТАНОВ, Г. А. ЦЫБА

Цифровые измерительные приборы в последние годы получают все большее признание и развитие. Они автоматически осуществляют в процессе измерения операции квантования измеряемой величины, ее цифровое кодирование и представление результатов измерения в цифровой форме непосредственно в виде числа или кода. В настоящее время существует большое количество цифровых вольтметров, аналого-цифровых преобразователей, частотомеров, измерителей временных интервалов и фазометров. Пределы измерений цифровых приборов много шире аналоговых, а точность измерений — более аналоговых. Эти качества и большое разнообразие цифровых приборов, позволяющие выполнять измерения всех электрических параметров с очень высокой точностью, определяют перспективность этих приборов в физических экспериментах и при различных измерениях.

Представление выходной информации в дискретной форме в виде кода или цифровой индикации на табло определяет быстродействие этих приборов, ограниченное возможностями оператора при списывании информации или быстродействием регистрирующих приборов-перфораторов или цифрорепечатающего устройства. Наиболее быстродействующее отечественное цифрорепечатающее устройство позволяет регистрировать не более 30 строк (измерений) в секунду, что в целом ряде случаев, совершенно недостаточно. Кроме того, согласующее устройство между цифровым прибором и ЦПУ, да и ЦПУ — довольно сложные, дорогие и ненадежные устройства.

С целью повышения быстродействия регистрации информации с цифровых измерителей предлагается простое устройство преобразования кода в ток для записи на шлейфном осциллографе. Используя высококачественные шлейфы современных осциллографов типа Н-115, Н-107 и т. п., возможно регистрировать до 1000 измерений в секунду. В случае применения фотобумаги типа УФ нет необходимости ее проявления, и время получения готовой информации сокращается на время проявления и сушки обычных фотоносителей.

Принцип действия устройства заключается в преобразовании кода каждой декады в напряжение, пропорциональное сумме весов кода, и усилении мощности этого сигнала для управления шлейфом. Число каналов преобразователя и шлейфов определяется числом декад цифрового прибора. Принципиальная схема одного канала преобразовате-

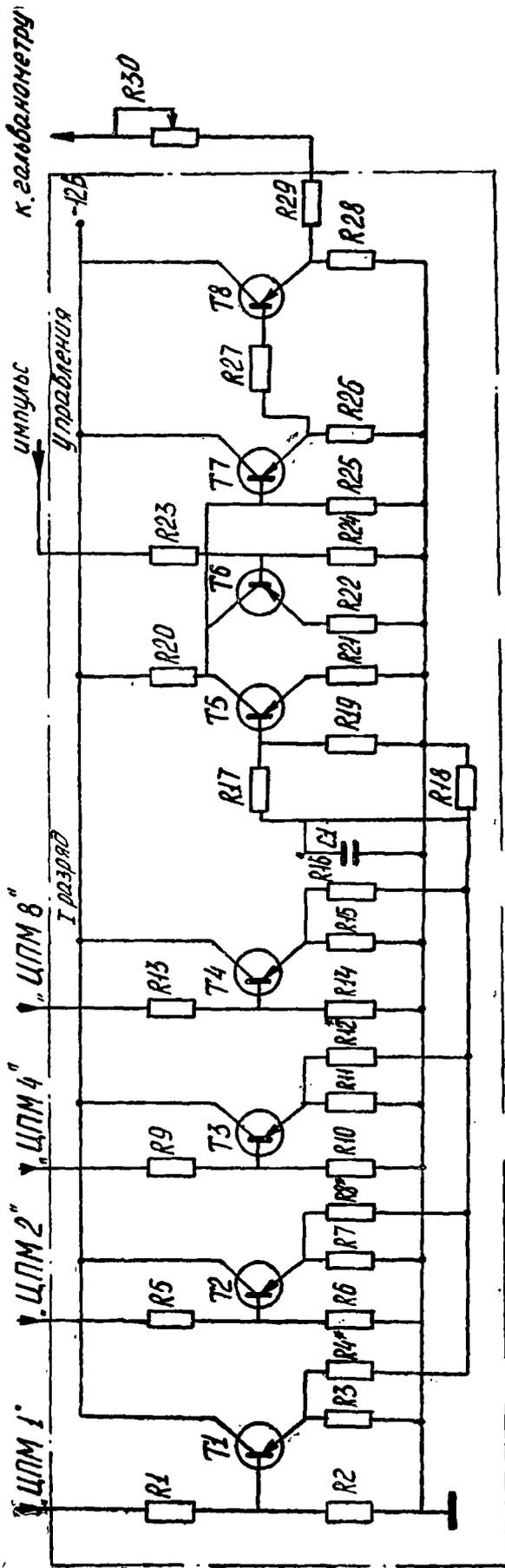


Рис. 1.

ля приведена на рис. 1. На рис. 2 приведен пример записи информации с предлагаемым преобразователем на шлейфном осциллографе. Способ расшифровки записи ясен из рассмотрения рис. 2, где слева—пример записи числа 15740, справа—тарировочные импульсы. Число десятичных разрядов результатов измерения ограничено только особенностями шлейфового осциллографа и возможностью отличить на записи два соседних уровня.

Пятиразрядная приставка для шлейфового осциллографа изготовлена в НИИ ПММ и представляет собой малогабаритный блок, собранный на базе унифицированного блока питания «Александрит» путем установки дополнительной печатной платы с монтажом параллельно стандартной плате блока питания на его же основании. В приборе использовано 45 транзисторов и 160 сопротивлений и конденсаторов, вес его менее 0,5 кг. Прибор может быть использован для согласования шлейфового осциллографа с любым цифровым прибором, имеющим выход на ЦПУ. При кодах, отличных от 8—4—2—1, требуется перепайка весовых сопротивлений кода таким образом, чтобы сумма весов нового кода была пропорциональна выходному напряжению преобразователя.

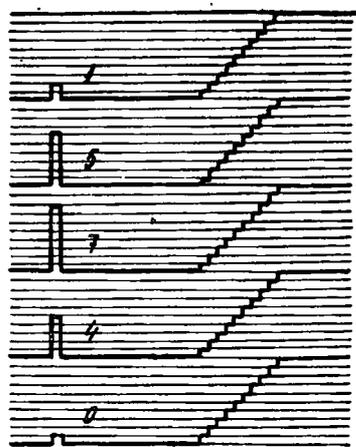


Рис. 2.

# ОБ УДОВЛЕТВОРЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. И. ТАРАКАНОВ

Для некоторых тел вращения сложной формы, имеющих бесконечно продолженные части, находятся частные решения уравнений осесимметричной теории упругости, непрерывные и ограниченные в рассматриваемых областях и удовлетворяющие заданным граничным условиям на бесконечности. Эти решения позволяют сводить краевую задачу для бесконечной области к задаче с нулевыми граничными условиями на бесконечности и, тем самым, упростить ее дальнейшее решение, сделать возможным сведение краевой задачи осесимметричной теории упругости к интегральным уравнениям.

1. Характер поведения задаваемых областей на бесконечности обычно совпадает с поведением областей, показанных на фигуре, где изображены только симметричные части, причем осью симметрии является ось  $z$  цилиндрической системы координат  $r, z$ . Рассматриваемые области  $D_i$   $i=1, 2, \dots, 8$  заштрихованы и ограничены отрезками оси симметрии и одной или несколькими контурными кривыми  $\gamma_i$ , не имеющими общих точек в конечной части плоскости  $z, r$ . При этом внешние к  $D_i$  области разбиваются на несколько подобластей, не связанных между собой. Контурные кривые  $\gamma_i$  при  $|z| \rightarrow \infty$  стремятся к прямым  $r = \text{const}$ . Эти кривые могут быть произвольно деформированы, но так, чтобы они не имели общих точек, точек самопересечения, и сохраняли задаваемое асимптотическое поведение на бесконечности. При осесимметричном деформировании компоненты вектора смещений в радиальном и осевом направлениях  $V, W$  удовлетворяют системе уравнений

$$\left( U_{,r} + \frac{U}{r} + W_{,z} \right)_{,r} + (1-2\nu) \left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) U = 0, \quad (1.1)$$

$$\left( U_{,r} + \frac{U}{r} + W_{,z} \right)_{,z} + (1-2\nu) \Delta W = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ненулевые компоненты тензора напряжений даются формулами

$$\sigma_{rr} = 2G \left[ U_{,r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + W_{,z} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= 2G \left[ W_{,z} + \frac{\vartheta}{1-2\vartheta} \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + W_{,z} \right) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left[ \frac{U}{r} + \frac{\vartheta}{1-2\vartheta} \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + W_{,z} \right) \right], \\ \sigma_{rz} &= G(U_{,z} + W_{,r}).\end{aligned}\quad (1.3)$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига.

Граничные условия на бесконечности выбираются из условия того, что на бесконечности тела осуществляется плоско-напряженное состояние, компоненты тензора напряжений зависят только от координаты  $r$ .

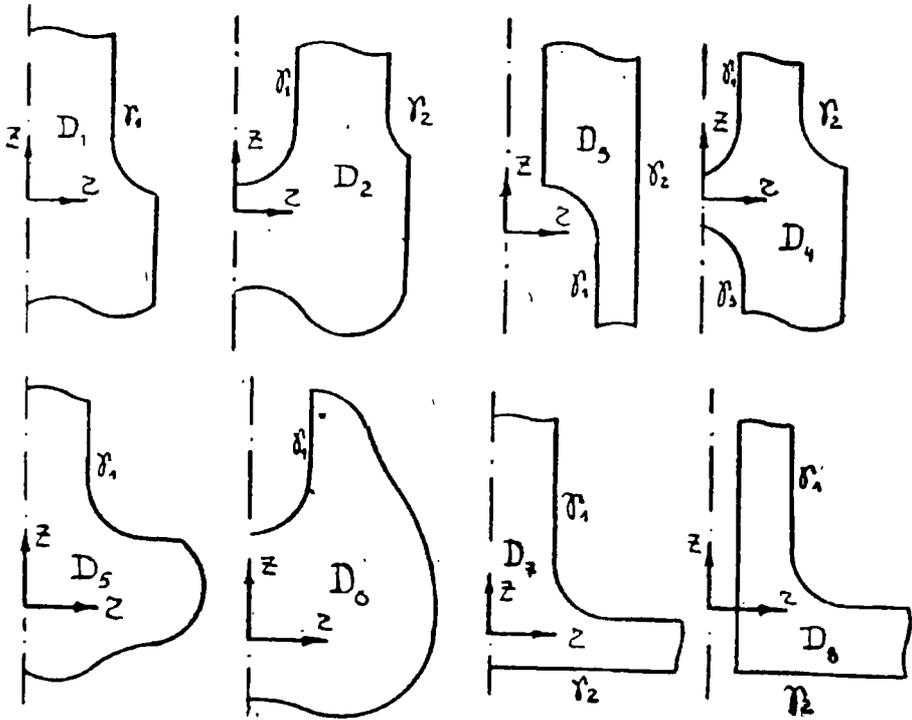


Рис. 2.

При этом физически допустимое и реализуемое поведение компонент тензора напряжений на бесконечности возможно в следующем виде.

Для области  $D_1$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &\rightarrow C_1, \quad \sigma_{rr} \rightarrow C_2, \quad \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), \quad z \rightarrow +\infty \\ \sigma_{zz} &\rightarrow C_3, \quad \sigma_{rr} \rightarrow C_4, \quad \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), \quad z \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Для области  $D_2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &\rightarrow C_1, \quad \sigma_{rr} \rightarrow C_2 + C_5/r^2, \quad \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), \quad z \rightarrow +\infty \\ \sigma_{zz} &\rightarrow C_3, \quad \sigma_{rr} \rightarrow C_4; \quad \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), \quad z \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (1.5)$$

На луче  $r=0$ ,  $z < z_1$  напряжения и смещения должны быть ограничены.

Для области  $D_3$ :

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \quad \sigma_{rr} \rightarrow C_2 + C_5/r^2, \quad \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), \quad z \rightarrow +\infty.$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_3, \sigma_{rr} \rightarrow C_4 + C_2/r^2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow -\infty. \quad (1.6)$$

Для области  $D_4$ :

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \sigma_{rr} \rightarrow C_2 + C_5/r^2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow +\infty. \quad (1.7)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_3, \sigma_{rr} \rightarrow C_4 + C_6/r^2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow -\infty.$$

При этом на отрезке  $r=0, z_1 < z < z_2$  напряжения и смещения должны быть ограничены.

Для области  $D_5$ :

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \sigma_{rr} \rightarrow C_2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow +\infty. \quad (1.8)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow 0, \sigma_{rr} \rightarrow 0, \sigma_{rz} \rightarrow 0, z \leq 0, \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

Для области  $D_6$ :

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \sigma_{rr} \rightarrow C_2 + C_5/r^2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \sigma_{rr} \rightarrow C_2, \sigma_{rz} \rightarrow 0, z < 0, \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

Для области  $D_7$ :

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \sigma_{rr} \rightarrow C_2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_4, \sigma_{rr} \rightarrow C_5, \sigma_{rz} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty.$$

Для области  $D_8$ :

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \sigma_{rr} \rightarrow C_2 + C_5/r^2, \sigma_{rz} = 0(|z|^{-1-\alpha}), z \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_4, \sigma_{rr} \rightarrow C_5, \sigma_{rz} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty,$$

Произвольные постоянные  $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) связаны с внутренним, внешним давлением и растягивающим усилием, действующим на цилиндрические части области в бесконечности. В формулах (1.4) — (1.11)  $0(|z|^{-1-\alpha})$ , ( $\alpha > 0$ ) есть величина, убывающая не медленнее, чем  $|z|^{-1-\alpha}$   $|z| \rightarrow \infty$ . Ограничение на скорость асимптотического приближения к предельным значениям накладывается из условия конечности суммарного вектора усилий, действующего на бесконечную часть области.

2. Решения системы уравнений (1.1) — (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.4) — (1.11), ограниченные и непрерывные в области, берутся в виде линейной комбинации следующих частных решений  $V_k$ , имеющих компоненты смещений  $U_k, W_k$ :

$$U_1(M_0, M) = (6 - 10\vartheta)(r\delta_3 + \rho\delta_4) + (10\vartheta - 11)(z - \xi)\delta_2;$$

$$W_1(M_0, M) = 3r\delta_2 - 3\rho\delta_1 - 2(z - \xi)\delta_3, \quad (2.1)$$

$$U_2(M_0, M) = 3(z - \xi)\delta_2 - 2r\delta_3 - 2\rho\delta_4, \quad (2.2)$$

$$W_2(M_0, M) = (20\vartheta - 19)(\rho\delta_1 - r\delta_2) + (14 - 20\vartheta)(z - \xi)\delta_3, \quad (2.3)$$

$$U_3 = 0, W_3 = z, \quad (2.4)$$

$$U_4 = r, W_4 = 0, \quad (2.5)$$

$$U_5 = 1/r^2, W_5 = 0, \quad (2.6)$$

$$U_0(M_1, M) = \frac{z-h}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}, \quad W_0(M_1, M) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}.$$

Здесь

$$\delta_1(M_0, M) = \sqrt{\frac{\omega}{\rho r}} K(\omega),$$

$$\delta_2(M_0, M) = \sqrt{\frac{\omega}{\rho r}} \cdot \left[ \left( \frac{2}{\omega} - 1 \right) K(\omega) - \frac{2}{\omega} E(\omega) \right],$$

$$\delta_3(M_0, M) = \frac{\xi - z}{\rho + r} \delta_1 + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \cdot \frac{|r - \rho|}{r - \rho} \cdot H + \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \cdot \left[ \frac{\rho - r}{|\rho - r|} - 1 \right] \frac{\pi}{2\rho},$$

$$\delta_4(M_0, M) = \frac{\xi - z}{\rho + r} \delta_1 - \frac{1}{r} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \cdot \frac{|r - \rho|}{r - \rho} \cdot H - \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \left[ \frac{\rho - r}{|\rho - r|} - 1 \right] \frac{\pi}{2r},$$

$$H = \pi/2 - K(\omega)E(\delta, \eta) - E(\omega)F(\delta, \eta) + K(\omega)F(\delta, \eta)$$

$$\eta = 1 - \omega, \quad \omega = \frac{4\rho r}{(\rho + r)^2 + (z - \xi)^2} \delta = \frac{|r - \rho|}{\rho + r} \sqrt{\frac{(\rho + r)^2 + (z - \xi)^2}{(\rho - r)^2 + (z - \xi)^2}}.$$

$K(\omega)$ ,  $E(\omega)$ ,  $F(\delta, \eta)$ ,  $E(\delta, \zeta)$  — полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода.

$$K(\omega) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - \omega x^2)(1 - x^2)}}, \quad E(\omega) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \omega x^2}{1 - x^2}} dx,$$

$$F(\delta, \eta) = \int_0^{\arcsin \delta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \eta \sin^2 \varphi}}, \quad E(\delta, \eta) = \int_0^{\arcsin \delta} \sqrt{1 - \eta \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

$M(r, z)$  — точки плоскости  $r, z$ ,  $M_1(0, h)$ ,  $M_0(\rho, \xi)$  — некоторые фиксированные точки области  $r, z$ . Точки  $M_0(\rho, \xi)$ ,  $M_1(0, h)$  являются особыми для решений  $V_1, V_2, V_6$ . Комплексные функции  $\delta_1 + ir\delta_4$ ,  $\delta_2 + ir\delta_3$  являются  $p$ -аналитическим по переменным  $r, z$  с характеристикой  $p=r$  и совпадают с сопряженными ядрами, введенными в [1, 2]. Выражения для  $\delta_1, \delta_2$  через полные эллиптические интегралы приводятся в [2, 3], а выражения через комбинацию полных и неполных эллиптических интегралов функций, связанных с  $\delta_3, \delta_4$ , приводятся в [3].

Функции  $\delta_3, \delta_4$  определяются через  $\delta_1, \delta_2$  с помощью дифференциальных соотношений

$$\delta_{3,z} = -\delta_{2,r} - \delta_2/r, \quad \delta_{2,r} = \delta_{2,z}, \quad (2.7)$$

$$\delta_{4,z} = \delta_{1,r}, \quad \delta_{4,r} + \delta_4/r = -\delta_{1,z}. \quad (2.8)$$

Выполнение следующих соотношений для  $\delta_1, \delta_2$  можно проверить непосредственно дифференцированием

$$\rho \delta_{1,z} - r \delta_{2,z} + (z - \xi) \delta_{2,r} + \frac{z - \xi}{z} \delta_2 = 0, \quad (2.9)$$

$$\delta \delta_{2,z} - r \delta_{1,z} + (z - \xi) \delta_{1,r} = 0, \quad (2.10)$$

$$r \delta_{2,r} - \rho \delta_{1,r} + (z - \xi) \delta_{2,z} = 0. \quad (2.11)$$

$$r \delta_{1,r} - \rho \delta_{2,r} + (z - \xi) \delta_{1,z} - \frac{\rho}{r} \delta_2 + \delta_1 = 0. \quad (2.12)$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  являются решениями уравнений

$$\Delta\delta_1=0, \Delta\delta_3=0, \left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)\delta_2=0, \left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)\delta_4=0. \quad (2.13)$$

Функции  $\delta_1, \delta_2$  однозначны, непрерывны и ограничены в плоскости  $r, z$ , кроме точки  $r=\rho, z=\xi$ , где имеют логарифмическую особенность, функции  $\delta_3, \delta_4$  ограничены и непрерывны в плоскости  $r, z$  с вырезанным лучом  $z=\xi, r>\rho$ , при переходе через который терпят разрыв  $2\pi/\rho, 2\pi/r$  соответственно. При необходимости изменения направления разреза плоскости  $r, z$ , на котором бы  $\delta_3, \delta_4$  терпели разрыв, к выражению  $\delta_3$  надо прибавить слагаемое  $A_1/\rho$ , а к  $\delta_4$  слагаемое  $A_2/r$  с соответствующим выбором кусочно-постоянных в плоскости  $r, z$  коэффициентов  $A_1, A_2$ .

Используя (2.7), (2.9), (2.13), можно проверить, что смещения (2.1), (2.2) удовлетворяют уравнениям упругости (1.1), (1.2).

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$  для решений (2.1), (2.2) будут соответственно

$$(\sigma_{rr})_1=2G\left[6\delta_3+(10\vartheta-6)\frac{\rho}{r}\delta_4+(6+10\vartheta)\frac{z-\xi}{r}\delta_2-5(z-\xi)\delta_{2,r}\right], \quad (2.14)$$

$$(\sigma_{zz})_1=2G\left[(10\vartheta-2)\delta_3+5(z-\xi)\delta_{2,r}+5\frac{z-\xi}{r}\delta_2\right],$$

$$(\sigma_{rz})_1=2G(10\vartheta-7)\delta_2-5(z-\xi)\delta_{2,z},$$

$$(\sigma_{rr})_2=2G\left[(10\vartheta-2)\delta_3+2\frac{\rho}{r}\delta_4-2\frac{z-\xi}{r}\delta_2-5(z-\xi)\delta_{2,z}\right],$$

$$(\sigma_{zz})_2=2G\left[(14-10\vartheta)\delta_3+5(z-\xi)\delta_{2,r}+5(z-\xi)\frac{\delta_2}{r}\right],$$

$$(\sigma_{rz})_2=2G[(9-10\vartheta)\delta_2-5(z-\xi)\delta_{2,z}]. \quad (2.15)$$

Функции  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  имеют следующее асимптотическое представление при большом удалении от особой точки:

$$\delta_1=\frac{\pi}{|z-\xi|}+O\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right), \quad \delta_2=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\rho r}{|z-\xi|^3}+O\left(\frac{1}{(z-\xi)^4}\right), \quad (2.16)$$

$$\delta_3=\frac{|z-\xi|}{\xi-z}\cdot\frac{\pi}{\rho}+O\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right), \quad \delta_4=\frac{|z-\xi|}{z-\xi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r}{(z-\xi)^2}+O\left(\frac{1}{(z-\xi)^3}\right) \\ |z-\xi|\rightarrow\infty. \quad (2.17)$$

$$\delta_1=\frac{\pi}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \delta_2=\frac{\pi\rho}{2r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (2.17)$$

$$\delta_3=\frac{|z-\xi|}{\xi-z}\cdot\frac{\pi}{\rho}+O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \delta_4=\frac{|z-\xi|}{z-\xi}\cdot\frac{\pi}{r}+O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ r\rightarrow\infty$$

На основании (2.16), (2.17) напряжения (2.14), (2.15), а также напряжения от смещений (2.3) имеют асимптотическое разложение на бесконечности

$$(\sigma_{rr})_1=-12G\frac{\pi}{\rho}\frac{|z-\xi|}{z-\xi}+O\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right), \quad (\sigma_{rz})_1=O\left(\frac{1}{|z-\xi|^3}\right), \quad (2.18)$$

$$(\sigma_{zz})_1 = (4 - 20\vartheta) G \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \frac{\pi}{\rho} + o\left(\frac{1}{(z - \xi)^2}\right),$$

$$(\sigma_{rr})_2 = (4 - 20\vartheta) G \frac{\pi}{\rho} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} + o\left(\frac{1}{(z - \xi)^2}\right), \quad (\sigma_{rz})_2 = o\left(\frac{1}{|z - \xi|^3}\right), \quad (2.19)$$

$$(\sigma_{zz})_2 = (20\vartheta - 28) G \frac{\pi}{\rho} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} + o\left(\frac{1}{(z - \xi)^2}\right),$$

$$(\sigma_{rr})_6 = 2G \frac{|z - h|}{h - z} \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{(z - h)^2}\right), \quad (\sigma_{zz})_6 = o\left(\frac{1}{(z - h)^2}\right),$$

$$(\sigma_{rz})_6 = o\left(\frac{1}{|z - h|^3}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

$$(\sigma_{rr})_1 = -12G \frac{|z - \xi|}{z - \xi} \frac{\pi}{\rho} + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (\sigma_{rz})_1 = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.21)$$

$$(\sigma_{zz})_1 = (4 - 20\vartheta) G \frac{\pi}{\rho} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} + o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

$$(\sigma_{rr})_2 = (4 - 20\vartheta) G \frac{\pi}{\rho} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (\sigma_{rz})_2 = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.22)$$

$$(\sigma_{zz})_2 = (20\vartheta - 28) G \frac{\pi}{\rho} \frac{|z - \xi|}{z - \xi} + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.23)$$

$$(\sigma_{rr})_6 = o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (\sigma_{zz})_6 = o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (\sigma_{rz})_6 = o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

$r \rightarrow \infty$

Смещения (2.14), (2.15) и соответствующие им напряжения ограничены на оси  $r = 0$ .

3. Получение решений, удовлетворяющих уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.4) — (1.11), сводится к составлению линейной комбинации из смещений (2.1) — (2.6), определению постоянных коэффициентов при соответствующих членах и выбору особых точек. Коэффициенты находятся однозначно, а для особых точек указывается только область определения. При этом используются асимптотические разложения (2.18) — (2.23) и условие конечности решения на отрезках оси, ограничивающих область.

Для области  $D_1$  решение получается в виде

$$V = \sum_{k=1}^4 a_k V_k, \quad (3.1)$$

$$a_1 = \frac{\rho}{40\pi G} \frac{(1 - 5\vartheta)(C_1 - C_3) + (7 - 5\vartheta)(C_2 - C_4)}{5\vartheta^2 + \vartheta - 4}, \quad (3.2)$$

$$a_2 = \frac{\rho}{40\pi G} \frac{3(C_1 - C_3) + (1 - 5\vartheta)(C_2 - C_4)}{5\vartheta^2 + \vartheta - 4},$$

$$a_3 = \frac{C_1 + C_3 - 2\vartheta(C_1 + C_3)}{4G(1 + \vartheta)},$$

$$a_4 = \frac{(1 - \vartheta)(C_2 + C_4) - \vartheta(C_1 + C_3)}{4G(1 + \vartheta)}. \quad (3.2)$$

Особая точка  $M_0$  ( $\eta$ ,  $\xi$ ) лежит вне области  $D_1$ .

Для области  $D_2$  решением будет

$$\dot{V} = \sum_{k=1}^6 a_k V_k. \quad (3.3)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  даются соотношениями (3.2):

$$a_5 = a_6 = -c_5/4G. \quad (3.4)$$

Точка  $M_0$  ( $\rho$ ,  $\xi$ ) лежит в области, ограниченной кривой  $\gamma_1$ , а  $M_1$  ( $0, h$ ) — на оси, в области, ограниченной  $\gamma_2$ .

Для области  $D_3$  решением будет

$$V = \sum_{k=1}^6 a_k V_k. \quad (3.5)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  даются формулами (3.2), а для  $a_5, a_6$  получаются выражения

$$a_5 = -(C_5 + C_6)/4G, \quad a_6 = (C_6 - C_5)/4G.$$

Точка  $M_0$  ( $\rho$ ,  $\xi$ ) лежит вне  $D_3$  в области, ограниченной  $\gamma_2$ , а  $M_1$  ( $0, h$ ) лежит на оси.

Для области  $D_4$  решение имеет вид

$$V = \sum_{k=1}^6 a_k V_k - a_7 V_4(M_2, M). \quad (3.7)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  задаются формулами (3.2),  $a_5, a_6, a_7$  — формулами

$$a_5 = -(C_5 + C_6)/4G, \quad a_6 = a_7 = (C_6 - C_5)/8G. \quad (3.8)$$

Точка  $M_0$  ( $\rho$ ,  $\xi$ ) лежит вне  $D_4$ , в области, ограниченной  $\gamma_2$ ,  $M$  ( $0, h$ ) лежит в области, ограниченной  $\gamma_1$ , а  $M_2$  ( $0, h$ ) в области, ограниченной  $\gamma_3$ .

Для области  $D_5$  решение имеет вид

$$V = \sum_{k=1}^4 a_k V_k. \quad (3.9)$$

Коэффициенты  $a_k$  даются формулами (3.2), в которых необходимо положить  $C_3 = C_4 = 0$ .  $M_0$  ( $\rho$ ,  $\xi$ ) лежит вне области  $D_5$ . Для области  $D_6$  решение дается формулой

$$V = a_5 V_5 + a_6 V_6, \quad a_5 = a_6 = -C_5/4G. \quad (3.10)$$

$M_1$  ( $0, h$ ) лежит на оси в области, ограниченной  $\gamma_1$ . Для области  $D_7$  решение будет

$$V = \sum_{k=1}^4 a_k V_k. \quad (3.11)$$

Коэффициенты  $a_k$  даются формулами (3.2), точка  $M_0$  ( $\rho$ ,  $\xi$ ) лежит в области, ограниченной  $\gamma_1$ .

Для области  $D_8$  решением будет

$$V = \sum_{k=1}^5 a_k V_k. \quad (3.12)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  даются соотношениями (3.2),  $a_5 = -C_5/4G$ ;  $M_0(\rho, \xi)$  лежит в области, ограниченной  $\gamma_1$ .

4. Полученные частные решения можно использовать и при решении задач для конечных областей, если эти области имеют характерные участки, где известна асимптотика решений.

Пусть, например, дана область  $D_0$ , представляющая тело вращения, изображенное на рис. 2, у которого боковая поверхность свободна от нагрузок, а к торцам приложена растягивающая сила. При этом в

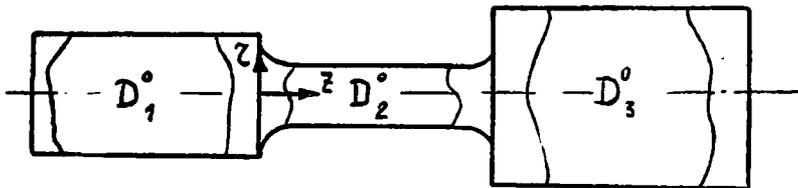


Рис. 3.

области  $D_0$  будут существовать три подобласти  $D_1^0, D_2^0, D_3^0$ , где известна асимптотика решения, соответствующая решению о растяжении бесконечного цилиндра постоянной толщины.

В подобластях  $D_1^0, D_2^0, D_3^0$  решение должно приближаться соответственно к следующим:

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_1, \quad \sigma_{rr} \rightarrow 0, \quad \sigma_{rz} \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_2, \quad \sigma_{rr} \rightarrow 0, \quad \sigma_{rz} \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{zz} \rightarrow C_3, \quad \sigma_{rr} \rightarrow 0, \quad \sigma_{rz} \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3$  известны и различны, так как различны толщины цилиндрических частей в подобластях  $D_1^0, D_2^0, D_3^0$ .

Получение общего решения данной задачи значительно облегчается, если возможно решение следующей частной задачи: требуется найти частное решение осесимметричной теории упругости, непрерывное со своими частными производными любого порядка и имеющее асимптотику (4.1) — (4.3).

Решение этой задачи находится на основе использования того же набора функций, что и для области  $D_1$  (рис. 1), только вне  $D_0$  распределяются два полюса:  $M_0, M_1$ , причем полюс  $M_0$  располагается в районе перехода подобласти  $D_1^0$  в  $D_2^0$ , а полюс  $M_1$  — в районе перехода подобласти  $D_2^0$  в  $D_3^0$ .

Соответствующее решение будет иметь вид

$$V = a_2 \left[ V_1(M_0, M) + \frac{3}{1-5\vartheta} V_2(M_0, M) \right] + a_2 [V_1(M_1, M) + \frac{3}{1-5\vartheta} V_2(M_1, M)] + a_3 [V_3 - \vartheta V_4]. \quad (4.4)$$

Считая подобласти  $D_1^0, D_2^0, D_3^0$  достаточно протяженными, можно использовать асимптотическое разложение функций  $V_k$  при больших значениях аргумента  $z - \xi_k$  и на их основе находить значения коэффициентов  $a_k$ .

Решения (4.4) сконструированы так, что для напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{rz}$ , асимптотика (4.1) — (4.3) уже выполняется, а для удовлетворения асимптотики в напряжении  $\sigma_{zz}$  на коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  необходимо наложить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_2) G \frac{\pi}{\rho} \frac{100 \vartheta^2 - 160 \vartheta - 44}{1 - 5 \vartheta} + a_3 2 G \frac{1 - \vartheta - 2 \vartheta^2}{1 - 2 \vartheta} &= C_1, \\
 (a_2 - a_1) G \frac{\pi}{\rho} \frac{100 \vartheta^2 - 160 \vartheta - 44}{1 - 5 \vartheta} + 2 a_3 G \frac{1 - \vartheta - 2 \vartheta^2}{1 - 2 \vartheta} &= C_2, \\
 -(a_2 + a_1) G \frac{\pi}{\rho} \frac{100 \vartheta^2 - 160 \vartheta - 44}{1 - 5 \vartheta} + 2 a_3 G \frac{1 - \vartheta - 2 \vartheta^2}{1 - 2 \vartheta} &= C_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Решение (4.4) с коэффициентами, найденными из (4.5), является непрерывным со своими производными в  $D_0$  и удовлетворяет асимптотическим условиям (4.1) — (4.3) в подобластях  $D_1^0$ ,  $D_2^0$ ,  $D_3^0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий. О  $p$ -аналитических функциях комплексного переменного.— Докл. АН СССР. Т. 58, № 7, 1947.
2. Г. Н. Положий. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев. Изд. Киевского университета, 1965.
3. Ю. И. Соловьев. Некоторые вопросы, связанные с решением пространственной осесимметричной задачи теории упругости при помощи обобщенных аналитических функций.— Сб. «Строительная механика». Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 62, 1967.

# ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. И. ТАРАКАНОВ

Существующие в настоящее время методы решения задач термоупругости для полупространства в случае осевой симметрии теплового поля основаны на представлении температурного поля в виде двумерного интеграла Фурье—Бесселя, а конкретные решения получены для частных случаев температурных полей, для которых такое интегральное представление известно и является не слишком сложным [1, 2, 3].

Для практических расчетов такое разложение температурного поля является затруднительным, поэтому представляет интерес задача о нахождении термонапряжений без разложения функции распределения температуры в интеграл Фурье—Бесселя.

В данной работе выводятся формулы для нахождения термонапряжений в полупространстве  $z < 0$  с поверхностью, свободной от нагрузки при произвольном, непрерывном, ограниченном, осесимметричном температурном поле на основе теории потенциала применительно к случаю осевой симметрии, причем в конечные формулы входит непосредственно сама функция распределения температур, а не ее интегральное представление.

§ 1. Получение решений задач основано на фундаментальном решении  $\delta(\rho, \xi, r, z)$  гармонического уравнения в цилиндрических координатах.

$$\Delta \delta = \delta_{,rr} + \frac{\delta_{,r}}{r} + \delta_{,zz} = 0. \quad (1.1)$$

Таким фундаментальным решением является функция

$$\delta(\rho, \xi, r, z) = \sqrt{\frac{\rho}{r}} \omega \cdot K(\omega), \quad (1.2)$$

где  $r, z$  — цилиндрические координаты,  $\rho, \xi$  — координаты некоторой точки  $M_0(\rho, \xi)$  в плоскости  $r, z$ .

$$\omega = \frac{4\rho r}{(\rho+r)^2 + (z-\xi)^2}, \quad 0 \leq \omega \leq 1, \quad K(\omega) —$$

полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \omega \cos^2 \varphi}}.$$

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что (1.2) действительно удовлетворяет уравнению (1.1).

Решение (1.2) непрерывно и ограничено вместе со своими производными во всей плоскости  $r, z$ , кроме точки  $r = \rho, z = \xi$ , где оно имеет логарифмическую особенность, причем это решение для задач с осевой симметрией является аналогом логарифмического потенциала для двумерных плоских задач.

Асимптотическое представление (1.2) в особой точке имеет вид

$$\delta(\rho, \xi, r, z) = -\ln \sqrt{(r-\rho)^2 + (z-\xi)^2} \cdot [1 + O(\sqrt{(r-\rho)^2 + (z-\xi)^2})]. \quad (1.3)$$

Интегралы по площади и контурные интегралы от потенциала  $\delta(\rho, \xi, r, z)$  обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам соответствующих интегралов от логарифмического потенциала.

Если в интеграле  $F = -\frac{1}{2\pi} \iint_S f(\rho, \xi) \delta(\rho, \xi, r, z) d s f(\rho, \xi)$  является непрерывной, ограниченной функцией, то интеграл  $F(r, z)$  вне области интегрирования непрерывен вместе со своими производными, которые можно находить, меняя порядок интегрирования и дифференцирования, причем сам интеграл  $F(r, z)$  при этом удовлетворяет уравнению (1.1). В области интегрирования  $F(r, z)$  непрерывен вместе со своими первыми производными, которые можно находить изменением порядка дифференцирования и интегрирования. Вторые производные  $F(r, z)$  также непрерывны, однако при их нахождении нельзя непосредственно менять порядок дифференцирования и интегрирования в связи с отсутствием условий равномерной сходимости интегралов.

Повторяя выкладки, проводимые для интегралов от логарифмического потенциала, можно показать, что интеграл  $F(r, z)$  в том случае, если точка  $M(r, z)$  не лежит в области интегрирования, удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\Delta F(r, z) = f(r, z). \quad (1.4)$$

$$\text{А для интеграла } \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} (f(\rho) \delta(\rho, 0, r, z) d\rho \quad (1.4)$$

получается следующее предельное значение

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} f(\rho) \delta(\rho, 0, r, z) d\rho = \pi f(r). \quad (1.5)$$

§ 2. Решение поставленной задачи термоупругости в полупространстве  $z < 0$  должно удовлетворять уравнениям

$$\Theta_{,r} + (1 - 2\nu) \left( \Delta U - \frac{U}{r^2} \right) = 2(1 + \nu) \alpha T, \quad (2.1)$$

$$\Theta_{,z} + (1 - 2\nu) \Delta W = 2(1 + \nu) \alpha T_{,z}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= 2(\lambda + \mu) [\vartheta \Theta - (1 + \vartheta) \alpha T + (1 - 2\vartheta) \varepsilon_{zz}]_{z=0} = 0, \\ \sigma_{rz} &= 2(\lambda + \mu) (1 - 2\vartheta) \varepsilon_{rz}|_{z=0} = 0.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь  $U$ ,  $W$  — компоненты вектора смещений,  $T$  — температура,  $\Theta = U_{,r} + \frac{U}{r} + W_{,z}$ ,  $\vartheta$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения,  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие коэффициенты Ламэ.

Решение задачи можно получить в виде

$$\begin{aligned}U &= \psi_{,r} + 2z \varphi_{,rz} + (3 - 4\vartheta) \varphi_{,r}, \\ W &= \psi_{,z} + 2z \varphi_{,zz} + (3 - 4\vartheta) \varphi_{,z},\end{aligned}\quad (2.3)$$

где функции  $\psi$  и  $\varphi$  представлены интегралами по области

$$0 < \rho < \infty, \quad -\infty < \xi < 0.$$

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta} \iint_s T(\rho, \xi) \delta_1(\rho, \xi, r, z) ds, \\ \varphi &= -\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{1 + \vartheta}{1 + \vartheta} \iint_s T(\rho, \xi) \delta_2(\rho, \xi, r, z) ds.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Потенциалы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  даются выражениями

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \sqrt{\frac{\rho}{r} \omega_1} \cdot K(\omega_1), \quad \omega_1 = \frac{4\rho r}{(\rho + r)^2 + (z - \xi)^2}, \\ \delta_2 &= \sqrt{\frac{\rho}{r} \omega_2} \cdot K(\omega_2), \quad \omega_2 = \frac{4\rho r}{(\rho + r)^2 + (z + \xi)^2}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

На основании (1.4) в области  $z < 0$  выполняется соотношение

$$\Delta \psi = \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta} \alpha T, \quad \Delta \varphi = 0.\quad (2.6)$$

Из формул (2.6) следует, что смещения (2.3) тождественно удовлетворяют уравнениям термоупругости (2.1) при  $z < 0$ . Смещения по формулам (2.3) можно рассчитывать путем изменения порядка дифференцирования и интегрирования. Для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = 2(\lambda + \mu) [(\vartheta \Theta - (1 + \vartheta) \alpha T) \delta_{ij} + (1 - 2\vartheta) \varepsilon_{ij}]$$

получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}/2(\lambda + \mu) &= (2\vartheta - 1) \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta} \alpha T + (1 - 2\vartheta) [\psi_{,zz} - \varphi_{,zz} + 2z \varphi_{,zzz}], \\ \sigma_{rr}/2(\lambda + \mu) &= (2\vartheta - 1) [\psi_{,zz} + 3\varphi_{,zz} + 2z \varphi_{,zzz} + \frac{\varphi_{,r}}{r} (3 - 4\vartheta) + \\ &\quad + \frac{\psi_{,r}}{r} + 2\frac{z}{r} \varphi_{,rz}],\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}/2(\lambda+\mu) &= (2\vartheta-1) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha T + (1-2\vartheta) \left[ -4\vartheta \varphi_{,zz} + 2 \frac{z}{r} \varphi_{,rz} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi_{,r}}{r} + (3-4\vartheta) \frac{\varphi_{,r}}{r} \right], \\ \sigma_{rz}/2(\lambda+\mu) &= (1-2\vartheta) [\psi_{,rz} + \varphi_{,rz} + 2z \varphi_{,rzz}]. \end{aligned}$$

В формулах (2.7) при расчетах нельзя во вторых производных интеграла  $\psi$ , который имеет особенность при  $z < 0$ , менять порядок дифференцирования и интегрирования. Поэтому после однократного дифференцирования по  $z$  интеграла  $\psi$  сменой порядка интегрирования и дифференцирования интегралы по области заменяются по формуле Грина—Остроградского интегралами по контуру, после чего становится возможным повторное дифференцирование заменой порядка дифференцирования и интегрирования. То же самое проделывается для производных  $\varphi_{,rz}$ ,  $\varphi_{,zz}$ . В результате получают следующие расчетные формулы для тензора напряжения при  $z \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}/2(\lambda+\mu) &= (2\vartheta-1) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha T - \frac{1-2\vartheta}{2\pi} \cdot \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha \left\{ \iint_s T_{,\xi} (\delta_2 - \delta_1)_{,\xi} ds + \right. \\ &\quad \left. + 2 \iint_s T \cdot z \delta_{2,zzz} ds - 2 \int_0^\infty T \cdot \delta(r, \rho, z, 0)_{,z} d\rho \right\}, \\ \sigma_{rr}/2(\lambda+\mu) &= \frac{2\vartheta-1}{2\pi} \cdot \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha \left\{ -2 \int_0^\infty T \delta(\rho, r, z, 0)_{,z} d\rho + \right. \\ &\quad \left. + \iint_s T_{,\xi} (3\delta_{2,\xi} + \delta_{1,\xi}) ds + \iint_s T \left[ \frac{4\vartheta-3}{r} \cdot \delta_{2,r} - \frac{1}{r} \delta_{1,r} - 2 \frac{z}{r} \delta_{2,zr} - 2z \delta_{2,rzz} \right] ds \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}/2(\lambda+\mu) &= (2\vartheta-1) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha T + \frac{2\vartheta-1}{2\pi} \cdot \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha \left\{ -4\vartheta \int_0^\infty T \cdot \delta(r, \rho, z, 0)_{,z} d\rho + \right. \\ &\quad \left. + 4\vartheta \iint_s T_{,\xi} \delta_{2,\xi} ds + \iint_s T \left[ 2 \frac{z}{r} \delta_{2,rz} + \frac{\delta_{,r}}{r} + (3-4\vartheta) \frac{\delta_{2,r}}{r} \right] ds \right\}, \\ \sigma_{rz}/2(\lambda+\mu) &= \frac{2\vartheta-1}{2\pi} \cdot \frac{1+\vartheta}{2\vartheta} \alpha \left\{ \iint_s T_{,\xi} (\delta_2 - \delta_1)_{,r} ds + 2 \iint_s T z \delta_{2,rzz} ds \right\}. \end{aligned}$$

После предельного перехода при  $z \rightarrow -0$ , а также учета (1.5) и предельных равенств

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -0} \delta_2 &= \lim_{z \rightarrow -0} \delta_1 = \delta(r, \rho, \xi, 0) = \delta_0(r, \rho, \xi), \\ \lim_{z \rightarrow -0} \iint_s f(\rho, \xi) z \delta_{2,rzz} ds &= 0, \quad \lim_{z \rightarrow -0} \iint_s f(\rho, \xi) z \delta_{2,zzz} ds = 0 \end{aligned}$$

получаются следующие значения напряжений на границе полупространства

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \\ \frac{\sigma_{rr}}{2(\lambda+\mu)} &= (1-2\vartheta) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha T(r, 0) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi} \alpha(1-2\vartheta) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \left\{ \iint_s T_{,\xi} \delta_{0,\xi} dS - (1-\vartheta) \iint_s T \frac{\delta_{0,r}}{r} dS \right\}, \quad (2.9) \\
& \frac{\sigma^{\varphi\varphi}}{2(\lambda+\mu)} = (2\vartheta-1) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha T(r, 0) - \\
& -\frac{2}{\pi} (1-2\vartheta) \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \alpha \left\{ \vartheta \iint_s T_{,\xi} \delta_{0,\xi} dS + (1-\vartheta) \iint_s T S \frac{\delta_{0,r}}{r} dS \right\}.
\end{aligned}$$

Из (2.9) видно, что граничные условия задачи (2.2) также выполняются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. В. Новацкий. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Я. С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ГАЗА В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ РОТОРОМ И КОЖУХОМ ЦЕНТРОБЕЖНОГО ПЫЛЕОТДЕЛИТЕЛЯ

В. А. ТЕНЕНЕВ, В. А. ШВАБ, М. И. ШИЛЯЕВ

Как известно, уравнения движения двухфазного потока в форме Телетова С. Г. [1, 2] не учитывают взаимодействия между частицами и с достаточным основанием могут быть применимы лишь для потоков с невысоким содержанием твердых примесей. В общем случае система дифференциальных уравнений турбулентного движения оказывается незамкнутой в силу неопределенности тензоров турбулентных напряжений как для газа, так и для частиц. Это обстоятельство требует при решении конкретных задач экспериментальных данных либо введения разумных гипотез. Кроме того, сила взаимодействия между

фазами  $Z$ , проявляющаяся как сила аэродинамического сопротивления частиц с учетом концентрации твердой фазы, по существу, эмпирическая величина.

Однако в некоторых случаях при обоснованном упрощении задачи о движении гетерогенной среды удастся выявить хотя бы качественный характер распределения скоростей.

Представим себе несколько идеализированное течение гетерогенного потока с невысокой концентрацией твердой фазы между дисковым ротором и цилиндрической стенкой в вертикальном центробежном пылеотделителе [3]

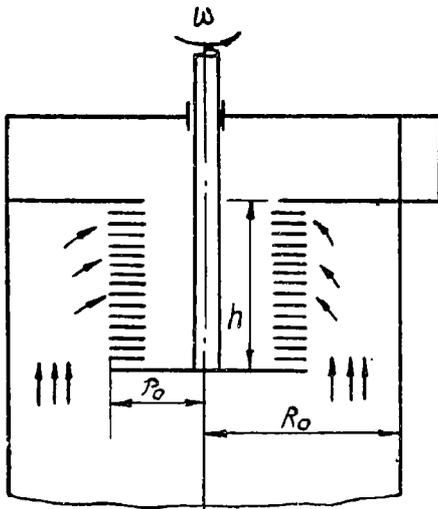


Рис. 1.

(рис. 1). Полагаем поток осесимметричным. Считаем скорость газа и скорость частиц по оси постоянными, независимыми от радиуса и  $c_m = c_m(r)$ . Эти допущения оправдываются тем, что в реальных конструкциях центробежных пылеотделителей с вертикальным расположением оси имеем небольшие длины сепарирующего ротора и достаточно широкие по радиусу зазоры, а следовательно, незначительные по величине аксиальные скорости и их изменения по высоте, составляющие порядок радиальных входных скоростей газа в ротор ( $< 1$  м/сек). Кроме того, предполагаем процесс движения установившимся и газ несжимаемым. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0, v_z = \text{const}, w_z = \text{const}, \rho = \text{const}, \quad (1)$$

$$\rho_m = \text{const}, \cos(\vec{\varphi}, \vec{g}) = 0, \rho \ll \rho_m,$$

и уравнения движения в направлении координаты  $\varphi$  и уравнения неразрывности запишутся в виде

$$c \rho w_r \left( \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{w_\varphi}{r} \right) = \eta \left( \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} - \frac{w_\varphi}{r^2} \right) + \frac{2}{r} (-c \rho \overline{w_r' w_\varphi'}) + \frac{\partial}{\partial r} (-c \rho \overline{w_r' w_\varphi'}) - Z_\varphi, \quad (2)$$

$$c_m \rho_m v_r \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (-c_m \rho_m \overline{v_r' v_\varphi'}) + \frac{2}{r} (-c_m \rho_m \overline{v_r' v_\varphi'}) + Z_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (c w_r)}{\partial r} + c \frac{w_r}{r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial (c_m v_r)}{\partial r} + c_m \frac{v_r}{r} = 0, \quad (5)$$

где  $c_m + c = 1$ ,  $Z_\varphi = B(w_\varphi - v_\varphi)$  — компонента силы сопротивления по  $\varphi$ . Поскольку в сепарационную зону ротора могут проникать только наиболее мелкие фракции частиц, то с достаточным основанием следует предположить, что

$$w_\varphi = v_\varphi, w' = v'. \quad (6)$$

Учитывая (6), умножая (2) на  $\rho/\rho_m$  и складывая с (3), получим

$$c \rho w_r \left( 1 + \mu \frac{\rho}{\rho_m} \right) = \eta \left( \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} - \frac{w_\varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (-\rho \overline{w_r' w_\varphi'}) + \frac{2}{r} (-\rho \overline{w_r' w_\varphi'}), \quad (7)$$

где  $\mu = M_2/M_1 = \mu(r)$  — расходная концентрация материала по радиусу для полидисперсного материала, убывающая к ротору вследствие сепарации частиц на равновесных круговых траекториях;  $M_2$  и  $M_1$  — массовые расходы материала и несущей среды. Накапливающийся на радиусах зазора материал достигает таких предельных концентраций, обусловленных энергетическими возможностями аксиального потока удерживать в зазоре частицы во взвешенном состоянии, превышение которых влечет за собой выпадение материала в бункер. Если в потоке движутся настолько мелкие частицы, что все они не задерживаются центробежным полем ротора, то следует полагать, что  $\mu = \text{const}$  и равна начальной расходной концентрации в зазоре. Таким образом, величина  $\mu$  невысока и либо постоянна, либо в высокоэффективном пылеотделителе убывающая к ободу ротора практически до нуля. Следовательно,

$$\mu \frac{\rho}{\rho_m} \ll 1$$

и уравнение (7) переписывается как

$$c_p \omega_r \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + \frac{\omega_\varphi}{r} \right) = \eta \left( \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\omega_\varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( -\rho \overline{\omega_r' \omega_\varphi'} \right) + \frac{2}{r} \left( -\rho \overline{\omega_r' \omega_\varphi'} \right). \quad (8)$$

Из уравнения неразрывности (4) получим

$$c_p \omega_r r = c_0 \rho \omega_{r0} r_0 = \text{const} = \frac{M_1}{2\pi h}. \quad (9)$$

Так что

$$\frac{C}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + \frac{\omega_\varphi}{r} \right) = (\eta + A_0) \left( \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\omega_\varphi}{r^2} \right), \quad (10)$$

где  $C = \rho q / 2\pi h$  и компонента тензора турбулентных напряжений, согласно Бусенеску,

$$\tau_{r\varphi} = -\rho \overline{\omega_r' \omega_\varphi'} = A \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\omega_\varphi}{r^2} \right).$$

В уравнении (10), как и в работах [4, 5], динамический коэффициент турбулентной вязкости по турбулентному ядру потока положен осредненной величиной

$$A = A_0 = \text{const},$$

вычисляемой на среднеквадратичном радиусе по Прандтлю как

$$A_0 = \rho \left\{ l^2 r \left| \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega_\varphi}{r} \right) \right| \right\}_{r=r_{cp}} \quad (11)$$

Учитывая, что в турбулентном ядре потока  $\eta \ll A_0$ , будем иметь

$$\frac{q}{2\pi h} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + \frac{\omega_\varphi}{r} \right) \approx \varepsilon_0 \left( \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\omega_\varphi}{r^2} \right), \quad (12)$$

или, обозначая  $q/2\pi h \varepsilon_0 = (1 - c_{m0}) r_0 \omega_{r0} / \varepsilon_0 = n$ , получим дифференциальное уравнение второго порядка типа Эйлера для определения скорости  $\omega_\varphi$

$$\frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1-n}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{1+n}{r^2} \omega_\varphi = 0, \quad (13)$$

имеющее общее решение вида

$$\omega_\varphi = C_1 r^{1+n} + C_2 r^{-1}, \quad (14)$$

где постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий.

Из полученного выражения (14) следует, что характер распределения окружных скоростей в гетерогенном потоке с невысоким содержанием тонкодисперсных твердых примесей аналогичен распределению

окружных скоростей для чистого газа. Однако уровень самих скоростей может быть отличным и определяется по граничным условиям, соответствующим гетерогенному течению у стенки и у обода ротора, но для невысоких объемных концентраций материала в зазоре следует ожидать это отличие незначительным.

Для полного определения граничных условий у стенки цилиндрического бункера необходимо знать концентрацию твердой фазы на границе ламинарного подслоя с турбулентным ядром  $c_{мл}$ , что представляет собой предмет специального рассмотрения сложной задачи о распределении концентрации полидисперсного твердого материала в поле центробежных сил. Решение такой задачи с необходимостью требует привлечения достоверных экспериментальных данных, связанных с определением констант  $\kappa$  и  $\alpha$  для гетерогенного потока, в то время как даже для течения чистого газа сведения о решении подобных задач в литературе отсутствуют. Отсутствуют и экспериментальные исследования аэродинамики таких потоков. Аналогично граничное условие на обode дискового ротора центробежного пылеотделителя из-за недостаточной изученности турбулентного движения гетерогенных потоков поставить не удастся, тем более, что даже для гомогенного течения оно может быть определено в настоящее время только экспериментальным путем.

В связи с вышеизложенным на данном этапе имеет смысл решение задачи в вышеизложенной постановке пока для гомогенного течения газа.

Для гомогенного течения при чисто вязком режиме движения газа в зазоре постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в (14) определяются по граничным условиям

$$\omega_\varphi = \omega r_0 \text{ при } r = r_0, \quad \omega_\varphi = 0 \text{ при } r = R_0. \quad (15)$$

Так что

$$\omega_\varphi = \frac{\omega r_0^2}{R_0^{2+n} - r_0^{2+n}} \left( \frac{R_0^{2+n}}{r} - \frac{1}{r^{-(n+1)}} \right), \quad (16)$$

где  $n = \omega r_0 r_0 / \nu$ .

При  $n \rightarrow 0$ , что соответствует большим  $\nu$  либо отсутствию расхода газа  $q = 0$ , из (16) получаем известную в гидромеханике зависимость окружной скорости от радиуса при течении вязкой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами

$$\omega_\varphi = \frac{\omega r_0^2}{R_0^2 - r_0^2} \left( \frac{R_0^2}{r} - r \right). \quad (17)$$

$R_0 \rightarrow \infty$  соответствует потенциальному распределению

$$\omega_\varphi = \frac{\omega r_0^2}{r}. \quad (18)$$

Движение жидкости согласно зависимости (16) возможно лишь для больших значений  $\nu$ . Для газовых потоков в центробежном пылеотделителе все режимы течения, как правило, соответствуют турбулентному движению.

В случае турбулентного течения газа в зазоре положим, как и в работах [4, 5], кинематический коэффициент турбулентной вязкости в ядре потока осредненной величиной  $\varepsilon_0 \gg \nu$ . Тогда (14) при граничных условиях

$$\omega_{\varphi}(r_0) = \psi \omega r_0, \quad \omega_{\varphi}(R_0 - \delta_n) = \omega_{\varphi n}, \quad R_0 \gg \delta_n. \quad (19)$$

перепишется как

$$\omega_{\varphi} = \Phi R_0^{-n} \frac{1}{r} \{(\Gamma - 1)r^{2+n} - \Delta R_0^{2+n}\}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} n &= \omega_{\varphi n} r_0 / \varepsilon_0, \quad \Phi = \psi \omega \rho_0^2 / (1 - \rho_0^{2+n}), \quad \Gamma = \omega_{\varphi n} / \psi \omega r_0 \rho_0, \\ \Delta &= \Gamma \rho_0^{2+n} - 1, \quad \rho_0 = r_0 / R_0, \\ \varepsilon_0 &= A_0 / \rho = \left\{ l^2 r \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\omega_{\varphi}}{r} \right) \right| \right\}_{r=R_0 - \delta_n} \rho_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагая  $l = \kappa(R_0 - r)$  получим

$$\varepsilon_0 = 2\kappa^2 \left| \Phi_0^2 R (\Gamma - 1) \frac{n}{2} \rho_0^{\frac{2+n}{2}} + \Delta \right| \frac{(1 - \sqrt{\rho_0})^2}{\rho_0} \quad (22)$$

При аксиальном подводе газа с невысокими скоростями между бункером и ротором в ламинарном подслое у стенки распределение скорости  $\omega_{\varphi}$  можно принять линейным и провести осрачивание решения (20) на радиусе  $R_0 - \delta_n$  с линейным согласно двухслойной схеме [6]:

Разрыв производных —

$$k \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega_{\varphi}^T}{r} \right)_{R_0 - \delta_n} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega_{\varphi}^n}{r} \right)_{R_0 - \delta_n}, \quad (23)$$

равенство касательных напряжений —

$$\left\{ \rho r^2 l^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega_{\varphi}^T}{r} \right) \right]^2 \right\}_{R_0 - \delta_n} = \eta \left\{ r \left| \left( \frac{\omega_{\varphi}^n}{r} \right) \right| \right\}_{R_0 - \delta_n}, \quad (24)$$

равенство скоростей —

$$\Gamma = \frac{\omega_{\varphi n} (R_0 - \delta_n)}{\omega r_0^2 \psi} \approx \frac{\omega_{\varphi n} R_0}{\psi \omega r_0^2}, \quad (25)$$

где  $\omega_{\varphi n} = \alpha v$ ,  $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ,  $\tau_0$  — напряжение трения на стенке,  $\alpha$  — эк-

спериментальная константа, относящаяся к ламинарному подслою.

Равенство напряжений на границе ламинарного подслоя с турбулентным ядром (24) при распределении скорости  $\omega_{\varphi}^T$  в турбулентном ядре по (20) и линейном распределении в ламинарном подслое

$$\omega_{\varphi}^n = \frac{v_*^2}{\nu} (R_0 - r) \quad (26)$$

дает соотношение с учетом  $R_0 \gg \delta_n$ ,  $l = \kappa(R_0 - r)$

$$\Phi[(\Gamma - 1)n + 2\Delta] = -v_*^2 / \varepsilon_0, \quad (27)$$

откуда

$$v_* = -\frac{1}{2} \frac{\Phi \alpha \varepsilon_0}{\psi \omega r_0 \rho_0} (2\rho_0^{2+n} + n) + \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \frac{\Phi \alpha \varepsilon_0}{\psi \omega r_0 \rho_0} (2\rho_0^{2+n}) \right\}^2 + \Phi(2+n)\varepsilon_0}. \quad (28)$$

Выражая  $\epsilon_0$  через  $n$  как  $\epsilon_0 = \omega_{r_0} r_0 / n$ , из (21) найдем

$$n = \frac{\omega_{r_0} \rho_0^2}{2 \kappa^2 \left| \Phi R_0 (1 - \sqrt{\rho_0})^2 \left[ \frac{n}{2} \rho_0^{1 + \frac{n}{2}} (\Gamma - 1) + \Delta \right] \right|}, \quad (29)$$

где  $\Gamma = \alpha v_* / \psi \omega r_0 \rho_0$ .

Подставляя (28) в (29), получим трансцендентное уравнение для определения величины  $n$  в виде

$$n = f(n), \quad (30)$$

решаемое методом итерации.

Толщина ламинарного подслоя, согласно универсальному закону распределения скорости у стенки, определится из выражения

$$\delta_n = \alpha \nu / v_*. \quad (31)$$

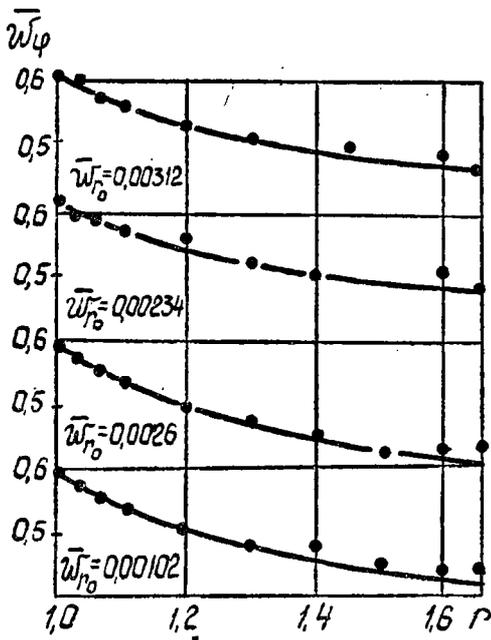


Рис. 2.

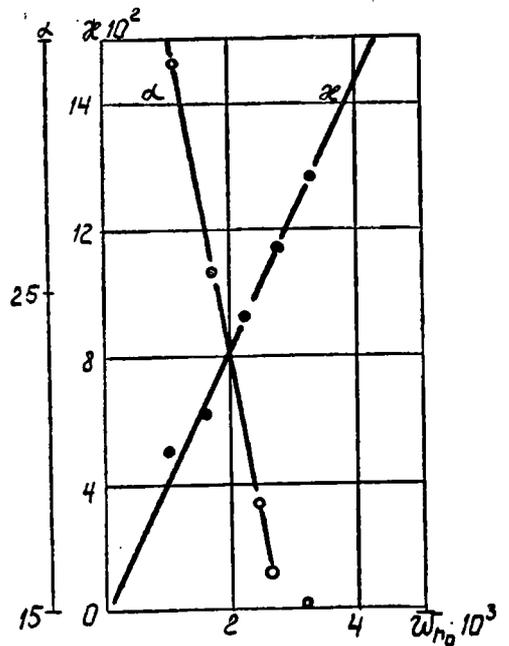


Рис. 3.

Экспериментальные  $\kappa$  и  $\alpha$  могут быть определены следующим образом. Находим из экспериментального распределения скорости, согласно (20), на средней радиусе  $r_{cp} = \sqrt{R_0 r_0} \bar{\omega}_{\varphi cp}$ , равное

$$\bar{\omega}_{\varphi cp} = \frac{\Phi}{\omega \rho_0^{3/2}} \left[ (\Gamma - 1) \rho_0^{1 + \frac{n}{2}} - \Delta \right], \quad (32)$$

где  $\bar{\omega}_{\varphi cp} = \omega_{\varphi cp} / \omega r_0$  — безразмерная окружная скорость газа на радиусе  $r_{cp}$ . Учитывая, что  $(\Gamma - 1) \rho_0^{1 + \frac{n}{2}} - \Delta = (1 + \Gamma \rho_0^{1 + \frac{n}{2}}) (1 - \rho_0^{1 + \frac{n}{2}})$ ,  $\Phi = \psi \omega r_0^2 / (1 - \rho_0^{2+n})$ , получим

$$n = \frac{\left( \ln \frac{1 - \Delta}{1 - \Gamma} \right)^2}{\ln \rho_0} - 2, \quad (33)$$

где  $\Lambda = \bar{\omega}_{\varphi \text{ ср}} / \psi / \bar{\rho}_0$ ,  $\Gamma = \bar{\omega}_{\varphi \text{ л}} / \psi \rho_0$ . Подставляя в (28)  $\alpha = \omega_{\varphi \text{ л}} / v_*$  и  $\varepsilon_0 \omega_{r_0} r_0 / n$ , будем иметь выражение для экспериментального определения  $v_*$  и  $\alpha$

$$v_* = \frac{\omega_{\varphi \text{ л}}}{\alpha} = \sqrt{\Phi \omega_{r_0} r_0 \left( \Gamma - 1 - \frac{2\Delta}{n} \right)}. \quad (34)$$

Константа турбулентности  $\kappa$  определится из (22) как

$$\kappa = \frac{\rho_0}{1 - \sqrt{\rho_0}} \sqrt{\frac{\omega_{r_0}}{2 R_0 n \left| \Phi \left[ \frac{n}{2} \rho_0^{1 + \frac{n}{2}} (1 - \Gamma) + \Delta \right] \right|}}}. \quad (35)$$

Очевидно, что в общем случае  $\kappa$  и  $\alpha$  должны быть функциями  $\omega r_0$ ,  $\omega_{r_0}$ ,  $R_0 - r_0$ , т. е.

$$\kappa = f_1(\omega r_0, \omega_{r_0}, R_0 - r_0).$$

$$\alpha = f_2(\omega r_0, \omega_{r_0}, R_0 - r_0).$$

Из теории размерностей следует

$$1 = \left[ \frac{\text{м}}{\text{сек}} \right]^a \left[ \frac{\text{м}}{\text{сек}} \right]^b \left[ \text{м} \right]^c,$$

откуда  $a + b + c = 0$ ,  $-a - b = 0$ . Так что

$$a = -b, \quad c = 0.$$

Следовательно, единственным параметром, определяющим  $\kappa$  и  $\alpha$ , будет

$\bar{\omega}_{r_0}^{a_1}$  и

$$\kappa = f_1(\bar{\omega}_{r_0}^{a_1}), \quad \alpha = f_2(\bar{\omega}_{r_0}^{a_2}),$$

где

$$\bar{\omega}_{r_0} = \omega_{r_0} / \omega r_0.$$

Результаты расчета иллюстрируются на рис. 2. Экспериментальные  $\kappa$  и  $\alpha$  изображены на рис. 3, где

$$a_1 = a_2 = 1.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Телетов.— ДАН СССР, 50, 99, 1945.
2. С. Г. Телетов.— Вестник МГУ. Серия математики, механики, астрономии, физики, химии. 1958. № 2.
3. В. А. Шваб, М. И. Шиляев.— Сб. «Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов». Томск. Изд. ТГУ, 1972.
4. М. А. Гольдштик.— «Изв. АН СССР», ОТН. «Механика и машиностроение», 1963, № 1.
5. В. А. Шваб.— ИФЖ. 1963, № 2.
6. И. П. Гинзбург. Теория сопротивления и теплопередачи. Изд. Ленинградского университета. 1970.

Обозначения:  $c$  — объемная концентрация;  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты;  $\rho$  — плотность;  $v$  — скорость частиц;  $w$  — скорость несущей среды;  $\eta$  — динамическая вязкость;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $v', w'$  — пульсационные скорости для частиц и несущей среды;  $h$  — высота живого сечения ротора;  $\psi$  — осредненный коэффициент отставания газа от обода ротора по окружной скорости,  $\psi = w_\varphi(r_0)/\omega r_0$ ;  $\delta_{л}$  — толщина ламинарного подслоя;  $\omega$  — угловая скорость вращения ротора;  $r_0$  — радиус ротора;  $R_0$  — радиус кожуха;  $w_{r0}$  — среднерасходная радиальная скорость газа на входе в ротор;  $c_{m0}$  — концентрация твердой фазы на обода ротора;  $q$  — объемный расход газа;  $m$  — индекс, относящийся к твердой фазе.

---

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЕПАРАЦИИ В ЦЕНТРОБЕЖНОМ ПЫЛЕОТДЕЛИТЕЛЕ С ДВУМЯ СТУПЕНЯМИ ГАЗООЧИСТКИ

В. А. ШВАБ, М. И. ШИЛЯЕВ

## 1. Влияние концентрации твердых примесей в очищаемом потоке газа на эффективность центробежного пылеотделителя

В работе [1] показано, что в центробежном пылеотделителе с дисковым ротором и с тангенциальным подводом пылегазовой смеси в цилиндрический корпус аппарата процесс осаждения пыли реализуется практически в две ступени. На первой, так называемой циклонной ступени, за счет предварительной закрутки пылегазовой струи у стенки корпуса осаждаются наиболее крупные фракции частиц. Вместе с ними при высоких входных концентрациях материала  $\mu_0$  вследствие взаимодействия между собой и в основном с крупными частицами осаждаются и наиболее мелкие частицы пыли, которые в силу малости своей инерционности не могут быть задержаны центробежным полем ротора. Этот эффект существенно повышает эффективность аппарата по сравнению с расчетной эффективностью, определяемой по равенству центробежной силы силе аэродинамического сопротивления, действующих на частицы предельного диаметра  $\delta^*$  на эффективном радиусе  $r_*$  с учетом фракционного состава отделяемого материала

$$\varepsilon_T = 1 - G_B(\delta^*). \quad (1)$$

Математически этот эффект можно оценить коэффициентом, зависящим от способности пыли к адгезии, агломерации, весовой расходной концентрации  $\mu_0$  в очищаемом потоке газа, а для конкретной пыли — являющимся функцией только  $\mu_0$  и равным отношению действительной запыленности потока на выходе к теоретическому

$$k(\mu_0) = \frac{c_{\partial}}{c_T}, \quad (2)$$

где

$$c_T = \rho \mu_0 G_B(\delta^*).$$

Экспериментальными исследованиями пылеотделителей на различных по физическим свойствам полидисперсных материалах установлено, что с уменьшением среднего размера частиц способность материала к сли-

паемости, к адгезии при повышенных  $\mu_0$  увеличивается, в результате коэффициент  $k$  ( $\mu_0$ ) уменьшается, увеличивая эффективность аппарата.

$$\varepsilon_0 = 1 - k(\mu_0)G_p(\delta^*) \quad (3)$$

Так например, при  $\mu_0 \approx 0,3$  для талька  $k(\mu_0) \approx 0,005$  ( $G_p(\delta=0 \div 5 \text{ мк}) = 65\%$ ), для цемента  $k(\mu_0) \approx 0,18$  ( $G_p(\delta=0 \div 5 \text{ мк}) = 10\%$ ), для более крупного и сыпучего материала хлористый калий ( $G_p(\delta=0 \div 7 \text{ мк}) = 2\%$ )  $k(\mu_0)$  уже значительно выше [1]. При обработке опытных данных  $\delta^*$  рассчитывалось по формуле

$$\delta^* = \frac{3 \cdot 10^6}{\psi_0 \omega R_0} \sqrt{\frac{q \eta}{\pi h \rho_m}} \text{ (ШКМ)}, \quad (4)$$

соответствующей условию равенства центробежной силы силе аэродинамического сопротивления, действующих на частицу размером  $\delta^*$  на ободу ротора. Здесь  $\psi_0 = \langle V_\varphi(r_0) / \omega r_0 \rangle$  — коэффициент отставания окружной скорости газа от окружной скорости точки на ободу ротора, равный по экспериментальным результатам работы [2] в среднем 0,65. Однако, как следует из эксперимента, при  $\psi_0 = 0,65$  даже для невысоких концентраций  $\mu \approx 0,03 - 0,06$  коэффициент  $k(\mu_0)$ , как правило, ниже 1 (рис. 1). Этот факт объясняется, по-видимому, как результатом дополнительного осаждения частиц размером  $\delta < \delta^*$  за счет сил адгезии вблизи стенки бункера или случайных аэродинамических эффектов в застойных зонах осадительного бункера, так и является следствием значительного повышения средней по высоте зазора окружной скорости газа в междисковом пространстве ротора. Анализ полученных распре-

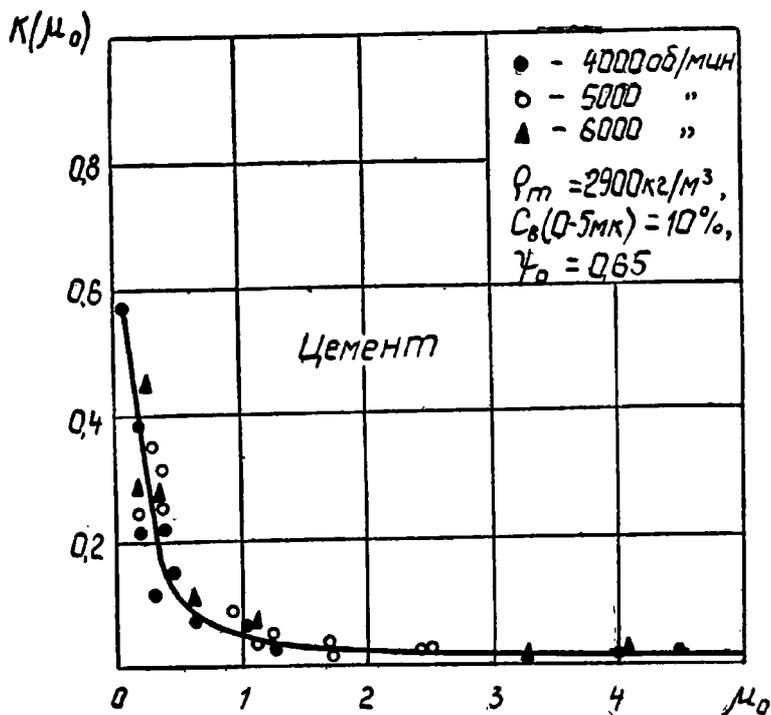


Рис. 1.

делений окружных скоростей между дисками ротора при его радиальном течении к оси [3, 4] позволяет ввести коррективы к определению коэффициента  $\psi_0$  и, следовательно, к определению габаритов ротора при заданном предельном размере частиц  $\delta^*$ .

## 2. Оценка среднего значения коэффициента $\psi$ с учетом распределения скоростей газа между дисками

В названных работах [3, 4] проведены аналитические исследования турбулентного и ламинарного течений газа в междисковом пространстве ротора в режимах работы центробежного пылеотделителя. Турбулентная задача решена для осредненной по высоте зазора между дисками скорости газа численно при коэффициенте трения о диски по Блазиусу как в плоских трубах. Решение для ламинарной задачи получено

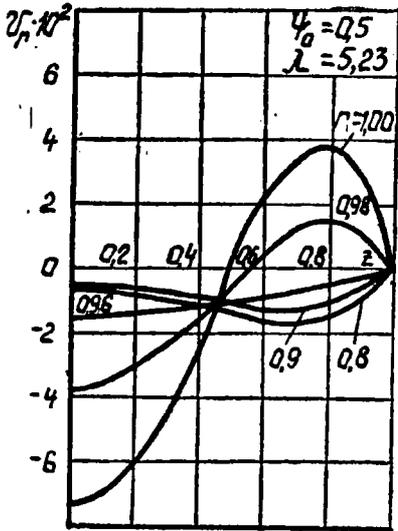


Рис. 2.

аналитически с учетом изменения радиальной, окружной скорости по высоте зазора и наличия осевой составляющей. Из аналитического решения ламинарной задачи следует, что течение между дисками может быть разделено на две области: 1) область входа  $r_a \leq r \leq 1$ , где заметно проявляются начальные параметры газа на ободу ротора и 2) асимптотическую область  $r_1 \leq r \leq r$ , где влияние начальных параметров практически исчезает. Расчет ламинарного движения газа для режимов работы центробежного пылеотделителя показал, что в асимптотической области радиальные скорости выравниваются и с большим основанием могут быть аппроксимированы для общих оценок среднерасходными, окружные скорости в этой области достигают

своих максимальных значений, а возвратные течения, характерные для входной области, отсутствуют (рис. 2). В этой области течения исчезает и аксиальная составляющая скорости газа.

Распределение осредненной по высоте зазора окружной скорости газа в асимптотической области между дисками может быть выражено как

$$\langle v_\varphi \rangle = \int_0^1 v_\varphi(r, z) dz = r + \frac{\Phi}{r}, \quad (5)$$

где

$$v_\varphi = \frac{V_\varphi}{\omega R_0} = r + \frac{3}{2} \Phi \frac{z^2 - 1}{r}, \quad \Phi = \frac{2}{3} L \lambda, \quad L = \frac{q}{2\pi\omega R_0^2 h}, \quad \lambda = \frac{h^2 \omega}{4\nu}, \quad z = \frac{Z}{h/2}. \quad (6)$$

Радиус  $r_*$  достижения максимальной окружной скорости  $\langle v_\varphi \rangle$  между дисками определится из условия экстремума

$$\left. \frac{d\langle v_\varphi \rangle}{dr} \right|_{r=r_*} = 1 - \Phi/r_*^2 = 0,$$

откуда

$$r_* = \sqrt{\Phi}. \quad (7)$$

Внутри ротора на некотором радиусе  $r_{**}$ , вообще говоря не равном  $r_*$ , достигается условие равновесия центробежной силы и силы аэродинамического сопротивления, действующих на частицу предельно малого размера  $\delta^*$ , которую возможно отделить ротором при заданном режиме работы аппарата. Это условие запишем в виде

$$3 \pi \eta \delta^* \langle V_r(r_{**}) \rangle = m \frac{\langle V_\varphi^2(r_{**}) \rangle}{R_{**}}, \quad (8)$$

или

$$\langle V_r(r_{**}) \rangle = \tau_* \frac{\langle V_\varphi^2(r_{**}) \rangle}{R_{**}}, \quad (9)$$

$$\text{где } m = \rho_m \pi \delta^{*3} / 6, \quad \tau_* = \delta^{*2} \rho_m / 18 \eta. \quad (10)$$

Учитывая, что

$$\langle V_\varphi(r_{**}) \rangle = (r_{**} + \Phi) \frac{\omega R_0}{r_{**}}, \quad (11)$$

$$\langle V_r(r_{**}) \rangle = q \cdot 2 \pi R_{**} h, \quad (12)$$

получим

$$r_{**} = \sqrt{\frac{1 - 2\Psi\Phi + \sqrt{1 - 4\Psi\Phi}}{2\Psi}}, \quad (13)$$

где

$$\Psi = \omega \tau_* / \langle v_{r0} \rangle, \quad \langle v_{r0} \rangle = \langle V_r(r_0) \rangle / \omega r_0.$$

Или

$$r_{**} = \sqrt{\frac{1 - 2\Psi r_*^2 + \sqrt{1 - 4\Psi r_*^2}}{2\Psi}}. \quad (14)$$

Положим, что  $r_* = r_{**}$ . Тогда из выражения (14) следует

$$4\Psi\Phi = 1. \quad (15)$$

В работе [4] получен радиус начала асимптотической области течения между дисками в виде

$$r_a = \sqrt{1 - 2,3\Phi \left( 2 + \lg \left| \frac{1 - \psi_0}{\Phi} - 1 \right| \right)}. \quad (16)$$

Математически возможные значения  $r_a$  лежат, в пределах  $0 < r_a \leq 1$ , чему соответствуют реальные пределы для параметра

$$0,2 \div 0,21 < \Phi \leq 0,35 \div 0,45 \quad (17)$$

при  $\psi_0 \approx 0,55 \div 0,65$ . Значение  $\Phi = 0$  ( $r_a = 1$ ), соответствующее движению газа без расхода, опущено. Поскольку крайние значения параметра  $\Phi$  практически нереальны и, следовательно, при наличии между дисками значительной зоны асимптотической области в действительности режим движения газа должен соответствовать некоторым средним зна-

чениям  $\langle \Phi \rangle$ , выбираем для оценки сепарационной способности ротора  $\langle \Phi \rangle$  среднеквадратичным из крайних пределов и равным 0,3. Таким образом, при условии выполнения равенства (15) среднее значение параметра  $\Psi$  должно быть равным 0,835. Практически значение  $\Psi$  в среднем лежит вблизи величины 0,835\* и поэтому приближенно можно полагать, что  $r_* \approx r_{**}$  и из соотношения (15) получим  $\delta^*$  в виде

$$\delta^* = \frac{3 \cdot 10^6}{\psi \omega R_0} \sqrt{\frac{q \eta}{\pi h \rho_m}} \text{ (МК)}, \quad (18)$$

где

$$\psi = 2 \sqrt{\Phi} \approx 1,1. \quad (19)$$

В этом случае коэффициент  $\psi$  учитывает суммарное влияние повышения окружной скорости газа в междисковом пространстве ротора на процесс пылеотделения и оказывается значительно выше, чем  $\psi = 0,65$

$$\psi = 1,7 \psi_0.$$

Из рис. 1 следует, что для входной концентрации цементной пыли в очищаемом потоке газа, равной  $\mu_0 \approx 0,05 \div 0,06$ ,  $k(\mu_0) \approx 0,58$ . Следовательно, учитывая (2), (18) и полагая для мелких частиц  $\delta < \delta^*$   $G_b(\delta) = a\delta$ , получим

$$\delta_{0,65}^* = 1,7 \delta_{1,1}^*, \quad k(\mu_0)_{1,1} = 1,7 k(\mu_0)_{0,65} \quad (21)$$

и

$$k \approx 0,990, \quad (22)$$

величину, близкую к 1, что и следовало ожидать при отсутствии влияния частиц друг на друга при невысоких расходных концентрациях  $\mu_0$ . Таким образом, для инженерных расчетов дискового ротора центробежного пылеотделителя можно с уверенностью рекомендовать формулу (18), полагая

$$\psi = 1.$$

### 3. Наименьший размер улавливаемых ротором частиц

Наименьший размер улавливаемых ротором частиц определялся расчетом из экспериментально полученных эффeктивности модельного пылеотделителя при невысоких входных запыленностях потока ( $\sim 40-50 \text{ г/м}^3$ ), когда можно предположить, что взаимодействие между частицами пренебрежимо мало и  $k(\mu_0) \approx 1$ . Из формул (1) и (3) будем иметь  $\epsilon_T = \epsilon_\partial$ , а формула (2) позволяет связать для данного материала эффeктивность пылеотделения  $\epsilon$  с комплексом  $X = \omega R_0 / \sqrt{2\rho R_0 \langle v_r(r_0) \rangle}$ .

\* Заметим, что  $r_* = r_{**}$  и соотношение (15) для среднеинтегральных по зазору значений скоростей выполняются точно. Действительно, если  $r \langle v_r \rangle = \text{const}$ , то условие экстремума для  $\langle v_\varphi \rangle$  совпадает с условием экстремума для  $\delta^*$  и максимальному значению  $\langle v_\varphi \rangle$  соответствует минимальное значение  $\delta^*$

$$\frac{d\delta^{*2}}{dr} = 2\delta^* \frac{d\delta^*}{dr} = A \frac{d}{dr} \left( \frac{r \langle v_r \rangle}{\langle v_\varphi \rangle^2} \right) = -\frac{2A \text{const}}{\langle v_\varphi \rangle^3} \frac{d\langle v_\varphi \rangle}{dr} = 0,$$

или  $d\delta^*/dr = d\langle v_\varphi \rangle/dr = 0, \quad \eta/\omega\rho_m.$

Обработка результатов эксперимента на каолине иллюстрируется рис. 3. Из графика видно, что максимальная эффективность 98% достигается при значениях  $X$  в интервале 220—240, что соответствует минимальному размеру частиц  $\delta^* \approx 2$  мк. Результаты расчета предельных размеров частиц дублировались микроскопическим анализом уноса пыли из аппарата. Измеренные максимальные размеры частиц в уносе удовлетворительно согласуются с результатами расчета.

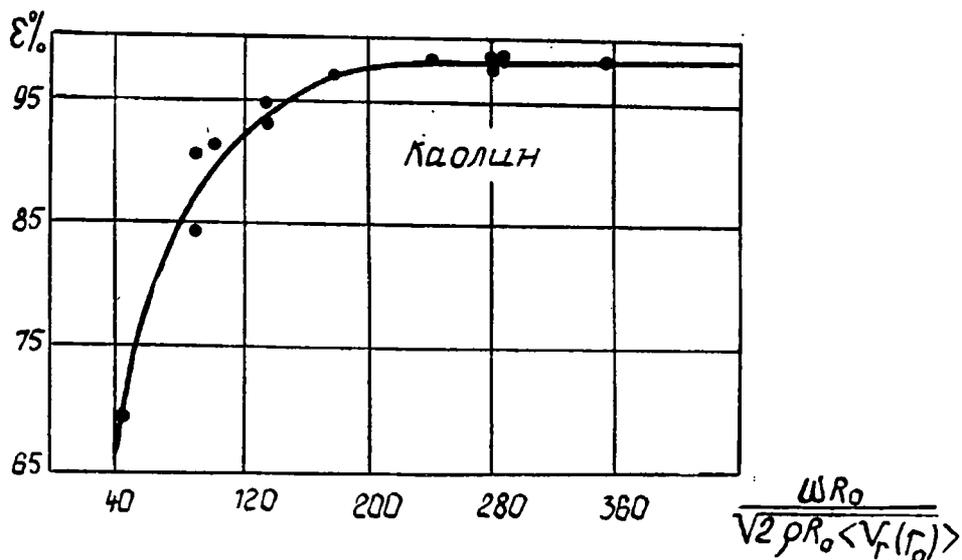


Рис. 3.

Кривая насыщения эффективности (рис. 3), полученная на модельных установках для материала с неизвестным фракционным составом и неизвестной плотностью, может быть использована при расчетах и проектировании промышленных аппаратов с наперед заданной эффективностью. По снятому с графика значению  $X$  могут быть определены геометрические размеры ротора, радиальная скорость входа газа в ротор и скорость его вращения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Демиденко, В. А. Шваб, М. И. Шиляев. Экспериментальное исследование центробежного пылеотделителя с пластинчатым ротором.— Сб. «Вопросы импульсного пневмотранспорта, газоочистки и пневматического перемешивания дисперсных материалов». Томск. Изд. Томского университета, 1972.
2. В. А. Тененев, В. А. Шваб, М. И. Шиляев. Исследование полей скоростей в центробежном пылеотделителе. Там же.
3. А. В. Горин, М. И. Шиляев. Турбулентное течение газа между двумя вращающимися дисками. Материалы четвертой конференции по математике и механике Томского университета. Т. 2. Томск. Изд. Томского университета, 1974.
4. А. В. Горин, М. И. Шиляев. Ламинарное течение несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками. Там же.

Обозначения:  $\rho, \rho_m$  — плотность газа и частиц;  $G_B(\delta)$  — весовая интегральная функция распределения частиц по размерам;  $V_\varphi, V_r$  — размерные окружная и радиальная скорости газа;  $r$  — безразмерный радиус;  $r_1$  — безразмерный внутренний радиус ротора;  $R$  — размерный радиус;  $R_0$  — радиус обода ротора;  $Z$  — размерная осевая координата;  $h$  — расстояние между дисками;  $\omega$  — угловая скорость вращения ротора;  $\eta$  — динамическая вязкость газа;  $q$  — объемный расход газа между дисками;  $\langle \rangle$  — знак осреднения.

# ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В ТРУБАХ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

А. В. ШВАБ

Рассматривается одномерное течение идеальной несжимаемой гетерогенной среды в трубах переменного и постоянного сечения с учетом влияния сопротивления трения на основе экспериментальных данных. Приводится наиболее удобная форма преобразования системы уравнений движения гетерогенной среды, в которой в качестве основной переменной принята обратная величина объемной концентрации несущей среды  $U=1/\epsilon$ . Это преобразование позволило систему уравнений привести всего к двум уравнениям и открыло возможность к точному решению ряда частных случаев течения гетерогенной среды в трубах переменного сечения и в том числе, когда отношение площади начального сечения  $S_0$  к текущему значению площади сечения  $S(\xi)$ , то есть  $f=S_0/S(\xi)$ , меняется по линейному закону, а также в тех случаях, когда это отношение может быть представлено функцией переменной  $U$  или безразмерного статического давления  $P$ . Рассмотрен также на основе численного метода общий случай течения в канале с произвольно заданным изменением сечения и учетом влияния сопротивления трения. На основе проведенного анализа течений в каналах переменного сечения построен метод расчета расходов и расходных концентраций по экспериментально измеренному распределению статического давления по длине канала, что открывает возможность практического применения метода для определения параметров гетерогенной среды и в том числе расходной концентрации по измерениям статического давления. В трубах постоянного сечения рассмотрен характер изменения параметров гетерогенного потока в начальном участке при неустановившемся течении и также установлены основные соотношения между параметрами потока при установившемся течении гетерогенной среды в том случае, когда учитывается сопротивление трения.

Основные предпосылки, принятые в работе, сводятся к следующему.

1. Рассматривается идеальная гетерогенная среда, лишенная вязкости, однако сопротивление частиц примесей учитывается по зависимости для сопротивления сферических частиц.

2. Предполагается равномерное распределение частиц примесей в поперечном сечении потока.

3. Рассматривается течение несжимаемой гетерогенной среды, справедливое для капельных жидкостей с твердыми примесями и пылегазовых сред при ограниченных перепадах давлений.

4. Учитывается влияние сопротивления трения на стенках по экспериментальным данным о коэффициентах сопротивления трения для гетерогенной среды.

5. Рассматривается для упрощения расчетов монодисперсный состав примесей, однако не представляет труда обобщение результатов работы на полидисперсный состав примесей.

Течение несжимаемой идеальной гетерогенной среды, но без учета влияния сил сопротивления трения на стенках рассматривалось Я. З. Клейманом [1], построившим исследование на линеаризированной форме уравнений движения, и К. Ш. Латиповым [2] без предварительной линеаризации уравнений для переменного сечения, но с ограничениями, наложенными на характер изменения профиля сечения, а также в аналогичной постановке эти вопросы рассматриваются в монографии Д. Ф. Файзулаева [3].

Идея применения измерений статического давления в каналах переменного сечения для определения расходной концентрации гетерогенной среды рассматривалась в работах Барта, Нагеля и Ваверена [4], а также в работах [5] и [6].

Система дифференциальных уравнений одномерного несжимаемого гетерогенного потока в более общей постановке с учетом влияния сил сопротивления трения при непосредственном введении объемных концентраций, составляющих смеси, может быть представлена в виде [7]

$$\rho \varepsilon(x) u(x) S(x) = G = \text{const}, \quad (1)$$

$$\rho_m \varepsilon_m(x) w(x) S(x) = G_m = \mu G = \text{const}, \quad (2)$$

$$\varepsilon \rho u \frac{du}{dx} = -\varepsilon \frac{dp}{dx} - \varepsilon \rho g \cos \gamma - \frac{\lambda}{2D} \varepsilon \rho u^2 - \varepsilon_m \rho_m z, \quad (3)$$

$$\varepsilon_m \rho_m w \frac{dw}{dx} = -\varepsilon_m \frac{dp}{dx} - \varepsilon_m \rho_m g \cos \gamma - \frac{\lambda_m}{2D} \varepsilon_m \rho_m w^2 + \varepsilon_m \rho_m z, \quad (4)$$

$$\varepsilon_m + \varepsilon = 1, \quad (5)$$

где  $z = 0,75 \zeta (u-w)^2 / \delta \rho_m$  — массовая сила сопротивления твердых частиц;  $u, w$  — скорости несущей среды и примесей;  $G$  и  $G_m$  — массовые расходы;  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_m$  — соответственно истинные объемные концентрации;  $S$  — переменная площадь сечения трубы;  $\rho, \rho_m$  — истинные плотности несущей среды и примесей;  $\mu$  — расходная концентрация;  $\delta$  — диаметр твердых частиц;  $D$  — характерный диаметр сечения трубопровода;  $\lambda$  и  $\lambda_m$  — коэффициенты сопротивления трения на стенках трубы;  $\zeta$  — коэффициент аэродинамического сопротивления частиц;  $p$  — статическое давление;  $x$  — координата, ориентированная в направлении движения;  $\gamma$  — угол между направлением трубы и вертикалью.

Система уравнений (1)–(5) может быть сведена к двум дифференциальным уравнениям для безразмерного давления  $P = p / \alpha^2 \rho$  и переменной  $U = 1/\varepsilon$  в зависимости от безразмерной координаты  $\xi = x/D_0$ . На основании уравнений (1), (2), (5) имеем

$$u = \alpha f U; \quad w = \alpha_m r f \frac{U}{(U-1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{U}; \quad \varepsilon_m = \frac{(U-1)}{U}.$$

Используя эти соотношения, в результате вычитания и сложения уравнений (3) и (4) получим

$$U[(U-1)^3+r\mu^2]\frac{dU}{d\xi}=-U^2(U-1)[(U-1)^2-r\mu^2]\frac{1}{f}\frac{df}{d\xi}+ \\ +\frac{(1-r)(U-1)^3}{rf^2}\text{Fr}\cos\gamma-\frac{\lambda}{2}\frac{D_0}{D}U^2(U-1)^3+\frac{\lambda_m}{2}\frac{D_0}{D}r\mu^2U^2(U-1)- \\ -\frac{3}{4}\zeta\frac{D_0}{\delta}U^3(U-1-\mu r)^2(U-1). \quad (7)$$

$$-\frac{dP}{d\xi}=f^2\left\{\frac{1}{f}\frac{d}{d\xi}\left[fU+r\mu^2\frac{fU}{(U-1)}\right]+\frac{\text{Fr}}{Ub^2}\left(1+\frac{U-1}{r}\right)\cos\gamma+\right. \\ \left.+\frac{\lambda}{2}\frac{D_0}{D}U+\frac{\lambda_m}{2}\frac{D_0}{D}r\mu^2\frac{U}{(U-1)}\right\}, \quad (8)$$

где  $\alpha=G/\rho S_0$ ;  $\text{Fr}=gD_0/\alpha^2$ ;  $r=\rho/\rho_m$ ;  $f=S_0/S$ .

Индекс 0 относится к начальному сечению трубопровода,  $m$  — к твердым примесям гетерогенной среды. В том случае, когда можно пренебречь влиянием сил сопротивления трения на стенках и гравитационной силой, система уравнений (7) — (8) примет вид

$$U[(U-1)^3+r\mu^2]\frac{dU}{d\xi}=-U^2(U-1)[(U-1)^2-r\mu^2]\frac{1}{f}\frac{df}{d\xi}- \\ -\frac{3}{4}\frac{D_0}{\delta}\zeta U^3(U-1-\mu r)^2(U-1). \quad (9)$$

$$-\frac{dP}{d\xi}=f(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[fU+r\mu^2\frac{fU}{(U-1)}\right], \quad (10)$$

Переменные в дифференциальной системе уравнений (7) — (8) в общем случае не разделяются, однако, если считать площадь сечения трубы функцией безразмерной переменной  $U$ , полагая  $f=S_0/S=f(U)$ , то после подстановки  $f(U)$  в уравнения (7), (8) решение получим в общем случае, без ограничений, в виде квадратур

$$\xi-\xi_0=\int_{U_0}^U \frac{\left\{U[(U-1)^3+r\mu^2]+U^2(U-1)[(U-1)^2-r\mu^2]\frac{1}{f}\frac{df}{dU}\right\}dU}{\frac{(1-r)(U-1)^3}{rf^2}\text{Fr}\cos\gamma-\frac{\lambda D_0}{2D}(U-1)^3U^2+\frac{\lambda_m D_0}{2D}r\mu^2U^2(U-1)-A}, \quad (11)$$

$$\text{где } A=\frac{3D_0}{4\delta}\zeta U^3(U-1)(U-1-\mu r)^2;$$

$$P_0-P=\int_{U_0}^U f^2\left\{\left[1-\frac{\mu^2 r}{(U-1)^2}\right]+\frac{U}{f}\left(1+\frac{\mu^2 r}{U-1}\right)\frac{df}{dU}+\right. \\ \left.+\frac{\text{Fr}}{Uf^2}\left(1+\frac{U-1}{r}\right)\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^{-1}\cos\gamma+\frac{\lambda}{2}\frac{UD_0}{D}\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^{-1}+\right. \\ \left.+\frac{\lambda_m}{2}\frac{D_0}{D}r\mu^2\frac{U}{(U-1)}\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^{-1}\right\}dU. \quad (12)$$

Из качественного анализа движения гетерогенной среды ясно, что объемная концентрация газа пропорциональна площади сечения  $S$  и, следовательно,  $U$  обратно пропорционально  $S$ . В частном случае функция  $f(U)$  может быть задана, например, в виде

$$f = \frac{S_0}{S} = c(r, \mu) \frac{(U-1)}{(U_0-1)}. \quad (13)$$

После подстановки  $f$  в уравнения (11) и (12) и без учета влияния сил сопротивления трения и гравитационных сил, уравнения (11), (12) для этого случая могут быть проинтегрированы

$$\begin{aligned} \xi_0 - \xi &= \frac{c(r, \mu)}{B(U_0-1)} \left\{ 2(U-U_0) + \frac{r\mu^2-1}{r\mu+1} \ln \frac{U}{U_0} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 2r\mu-1 + \frac{1-r\mu^2}{1+r\mu} \right) \ln \frac{U-r\mu-1}{U_0-r\mu-1} \right\}, \\ P_0 - P &= \frac{c^2(r, \mu)}{(U_0-1)^2} \left\{ \frac{1}{3} [U^3 + (U-1)^3 - U_0^3 - (U_0-1)^3] + \right. \\ &\quad \left. + (r\mu^2-1) \frac{U^2 - U_0^2}{2} - r\mu^2(U-U_0) \right\}, \end{aligned}$$

где  $B = 18\beta\eta D_0 |\alpha\rho\delta^2$ ;  $\eta$  — динамическая вязкость несущей среды;  $\xi$  — коэффициент аэродинамического сопротивления частиц, который для сферических частиц подчиняется зависимости

$$\zeta = \frac{24}{\text{Re}} \beta = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0,183 \text{Re}^{0,5} + 0,0175 \text{Re}). \quad (14)$$

Таким образом, задание  $f = S_0/S$  функцией переменной  $U$  приводит к точному решению системы дифференциальных уравнений (7) — (8). Подбирая функцию  $f(U)$ , можно добиться заданного характера изменения площади сечения трубы.

Аналогичным способом может быть найдено решение системы (9) — (10), когда  $f$  является функцией безразмерного давления  $P = p |\alpha\rho$ . Интегрируя уравнение (10) в предпосылке, что  $f = f(P)$ , получим

$$- \int_{P_0}^P \frac{dP}{f(P)} = f(P) \left( U + \mu^2 r \frac{U}{(U-1)} \right) - \left( U_0 + \mu^2 r \frac{U_0}{U_0-1} \right). \quad (15)$$

Полученное уравнение — квадратное относительно переменной  $U$ , его решением будет

$$U = \frac{1}{2} (\sqrt{b^2 - 4c} - b), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{f(P)} \int_{P_0}^P \frac{dP}{f(P)} - \frac{1}{f} \left( U_0 + \mu^2 r \frac{U_0}{U_0-1} \right) + \mu^2 r - 1, \\ c &= \frac{1}{f(P)} \left[ U_0 + r\mu^2 \frac{U_0}{U_0-1} - \int_{P_0}^P \frac{dP}{f(P)} \right]. \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (16) по переменной  $P$  и подставляя значение  $U$  и  $dU/dP$  в уравнение (19), учитывая также, что  $dU/d\xi = (dU/dP) \cdot (dP/d\xi)$ , получим после разделения переменных и интегрирования

$$\xi - \xi_0 = \int_{P_0}^P \frac{\left\{ U[(U-1)^3 + r\mu^2] \frac{dU}{dP} + U^2(U-1)[(U-1)^2 - r\mu^2] \frac{1}{f} \frac{df}{dP} \right\} dP}{-\frac{3}{4} \zeta \frac{D_0}{\delta} U^3 (U-1) (U-1 - \mu r)^2}. \quad (17)$$

Представляет интерес также частный случай прямого задания  $f(\xi)$  относительного изменения площади сечения насадка в виде линейной функции безразмерной координаты  $\xi = x/D_0$

$$f = M\xi + N. \quad (18)$$

При этом будет

$$\frac{df}{d\xi} = M = \text{const}, \quad (19)$$

что обеспечивает разделение переменных в уравнениях (7)–(8) при отсутствии гравитационных сил и сопротивления трения. В зависимости (18) приняты обозначения

$$M = \frac{S_0 - S_k}{S_k(\xi_k - \xi_0)}; \quad N = \frac{S_0}{S_k} - \frac{S_0 - S_k}{S_k(\xi_k - \xi_0)} \xi_k.$$

Индекс 0 — начальное,  $k$  — конечное сечение конфузора или диффузора. Точное решение системы дифференциальных уравнений (9)–(10) в этом случае, используя зависимости (18), (19), получим в виде

$$\frac{1}{M} \ln \frac{M\xi + N}{M\xi_0 + N} = \frac{1 - r\mu^2}{a} \ln \frac{U}{U_0} + \frac{r\mu^2}{(a+b+c)} \ln \frac{U-1}{U_0-1} + d \ln \frac{R}{R_0} + eI. \quad (20)$$

$$P_0 - P = M \int_{U_0}^U \left\{ f \left( U + \mu^2 r \frac{U}{U-1} \right) \left( \frac{dU}{d\xi} \right)^{-1} + f^2 \left[ 1 - \frac{\mu^2 r}{(U-1)^2} \right] \right\} dU, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} a &= (r\mu^2 - 1) \frac{df}{d\xi} - B(1 + r\mu); & b &= 2 \frac{df}{d\xi} + (r\mu + 2) B; \\ c &= -B \frac{df}{d\xi}; & d &= \frac{(a+b+c)(a-c) + c(b+c)r\mu^2}{2ac(a+b+c)}; & B &= \frac{18\beta\eta D_0}{\alpha\rho\delta^2}; \\ e &= \frac{bc(b+c)r\mu^2 - 2ac^2r\mu^2 - (a+b+c)(ab+bc+4ac)}{2ac(a+b+c)}; \\ R &= a + bU + cU^2; & R_0 &= a + bU_0 + cU_0^2; & \Delta &= 4ac - b^2; \end{aligned}$$

$$I = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{(b+2cU-\sqrt{-\Delta})(b+2cU_0+\sqrt{-\Delta})}{(b+2cU+\sqrt{-\Delta})(b+2cU_0-\sqrt{-\Delta})} \Delta < 0 \\ \frac{4c(U-U_0)}{(b+2cU)(b+2cU_0)} & \Delta = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \left[ \arctg \frac{b+2cU}{\sqrt{\Delta}} - \arctg \frac{b+2cU_0}{\sqrt{\Delta}} \right] & \Delta > 0. \end{cases}$$

В общем случае при произвольно заданном изменении площади сечения насадка может быть построен приближенный метод расчета параметров потока, основанный на зависимостях (20), (21). С этой целью насадок переменного сечения разбивается на отрезки, в пределах которых приближенно удовлетворяется требование, лежащее в основе этих зависимостей и заключающееся в том, что изменение площади сечения с определенным приближением подчиняется линейному закону (18) и, следовательно,  $df|d\xi = \text{const}$ . Последовательное применение решений (20) — (21) для выбранных участков, с учетом условий сопряжения между участками, дает возможность найти изменения параметров по длине канала переменного сечения с заданным профилем.

В частном случае течения гетерогенной среды, когда размер транспортируемых частиц мал  $\delta \rightarrow 0$ , из уравнения (7) следует

$$U = 1 + r\mu, \quad (22)$$

что соответствует для объемной концентрации  $\varepsilon = 1 - \varepsilon_m = \text{const}$ , причем суммарная плотность среды  $\rho_\Sigma$  удовлетворяется зависимостью

$$\rho_\Sigma = \varepsilon\rho + \varepsilon_m\rho_m.$$

При этом из зависимости (6) следует условие о равенстве скоростей несущей среды и примесей  $u = w$ . Используя значение  $U$  по соотношению (22) и интегрируя уравнение (10), получим

$$P_0 - P = \frac{1}{2}(1 + \mu)(1 + r\mu)(f^2 - 1). \quad (23)$$

Учитывая, что

$$\alpha = \frac{G}{\rho S_0}; \quad P = \frac{p}{\alpha^2 \rho}; \quad G = \varepsilon u \rho S; \quad Su = S_0 u_0,$$

после несложных преобразований имеем

$$\frac{p}{\rho_\Sigma} + \frac{u^2}{2} = \frac{p_0}{\rho_\Sigma} + \frac{u_0^2}{2} = \text{const}, \quad (24)$$

которое является уравнением для идеальной двухфазной среды плотностью  $\rho_\Sigma$ . При концентрации твердых примесей  $\mu = \varepsilon_m = 0$  имеем уравнение Бернулли для несущей среды.

Расчет параметров потока несжимаемой гетерогенной среды при течении в каналах с произвольным, но гладким характером изменения площади сечения и учетом влияния сопротивления трения на стенках трубы может быть выполнен также численным методом непосредственно по уравнениям (7) — (8). По разработанной для ЭВМ программе

такие расчеты были, в частности, выполнены для насадка с изменением площади сечения по закону

$$S = \pi [b + R - \sqrt{R^2 - (a - x)^2}]^2,$$

и тогда

$$f = \frac{D_0^2}{4 [b + R - \sqrt{R^2 - (a - x)^2}]^2}.$$

На рис. 1 показан характер изменения сечения для частного случая  $b = 0,02$  м;  $a = 0,05$  м;  $D_0 = 0,05$  м; а радиус кривизны сопла  $R$  опреде-

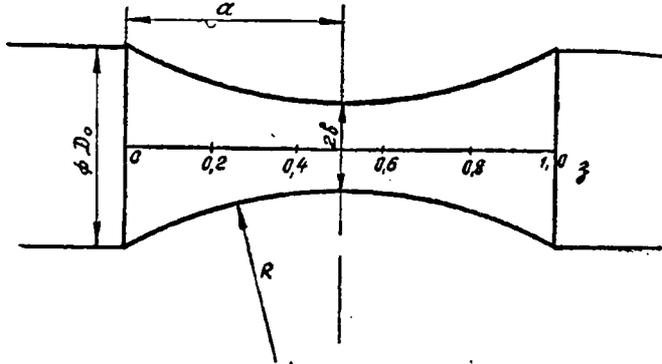


Рис. 1.

ляется по заданным размерам  $a$ ,  $b$  и  $D_0$ . Для данного сопла на рис. 2, 3, 4 приведены результаты численного расчета. На рис. 2 показано распределение параметров гетерогенного потока по длине сопла. Кривые

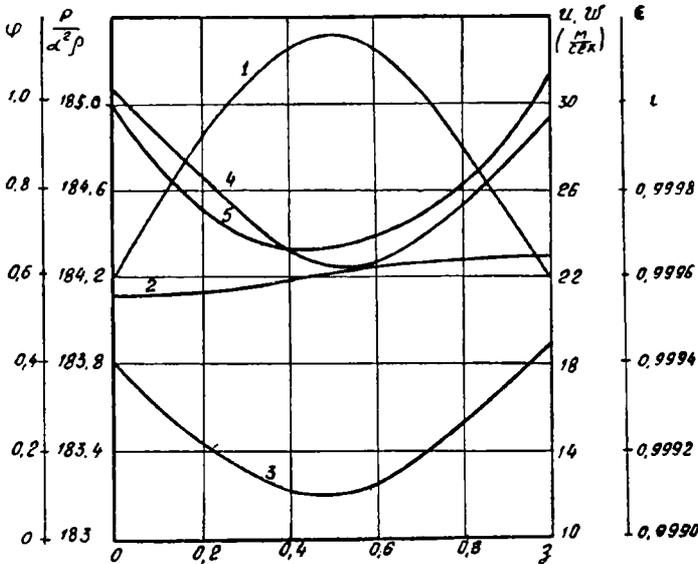


Рис. 2.

1, 2 — соответственно скорости газа и твердых частиц:  $u$ ,  $w$ ; 3 — истинная объемная концентрация газа  $\epsilon$ ; 4 — безразмерное статическое давление  $P = \rho \alpha^2 \rho$ ; 5 — отношение скорости частиц к скорости газа  $w/u$ . Расчет проводился для случая  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_m = 2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 1$ ;

$\lambda_m = 0,005$ ;  $\delta = 100$  мк;  $J = 0,05$  кг/сек;  $\rho_0 = 10^5$  н/м<sup>2</sup>. На рис. 3 приведено распределение безразмерного статического давления по длине канала для твердых частиц примесей разных размеров. Кривой 1 соответствует  $\delta = 50$  мк; 2 —  $\delta = 100$  мк; 3 —  $\delta = 250$  мк; 4 —  $\delta = 500$  мк; причем расчет проводился для случая  $\mu = 4$ ,  $\varepsilon_0 = 0,9975$  и исходных данных, указанных выше. На рис. 4 показано также распределение давлений по длине канала при различных значениях расходной концентрации. Кривой 1 соответствует  $\mu = 0$ ; 2 —  $\mu = 1$ ; 3 —  $\mu = 4$ ; 4 —  $\mu = 10$ . Расчет проводится при  $\delta = 100$  мк,  $\varepsilon = 0,9937$  и исходных данных, указанных выше.

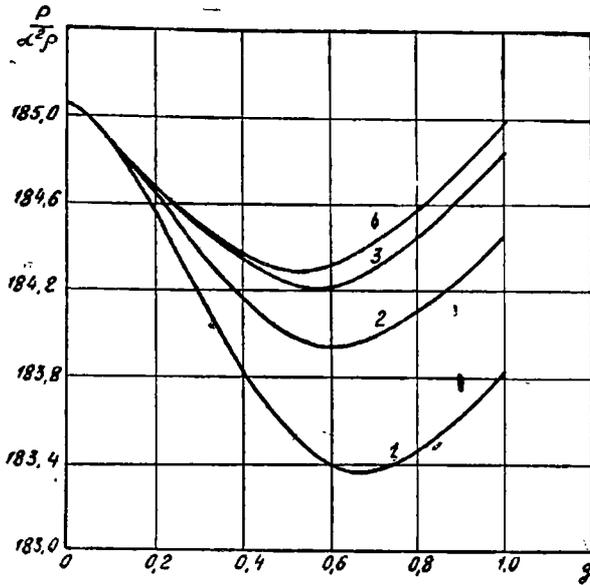


Рис. 3.

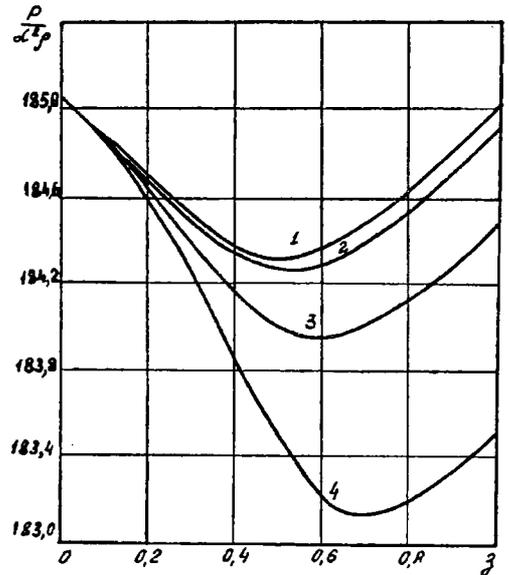


Рис. 4.

Большой практический интерес представляет возможность определения параметров гетерогенной среды при помощи измерений статического давления по длине насадка переменного сечения. Применение этого метода имеет большое практическое значение в связи с трудностями непосредственного измерения, например, такого параметра, как расходная концентрация. Для указанной цели преимущественно используют насадки переменного сечения, обеспечивающие более существенные перепады давления и вызывающие наиболее энергичные перераспределения объемных концентраций за счет инерционных и аэродинамических сил, чем, например, в трубе постоянного сечения. С другой стороны, влияние сопротивления трения в коротких насадках переменного сечения относительно мало, что упрощает построение метода расчета параметров потока по известному из опыта распределению статических давлений. Обобщение метода расчета параметров потока по измерениям статического давления, предложенного в работе [8], сводится к следующему. Воспользуемся аппроксимацией функции безразмерного давления  $P$  в зависимости от безразмерной координаты  $\xi = x/D_0$

$$P = P(\xi)$$

и после разделения переменных и интегрирования уравнения (10) получим

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{f(\xi)} \frac{dP}{d\xi} d\xi + f(\xi) U \left[ 1 + \frac{r \mu^2}{(U-1)} \right] - \frac{r \mu^2 U_0}{(U_0-1)} U_0 = 0. \quad (25)$$

Здесь интеграл в уравнении (25) является известной функцией координаты. Решая уравнение (25) относительно переменной  $V$ , получим

$$U = \Phi(\xi) = \frac{1}{2} (V\sqrt{b^2 - 4c} - b), \quad (26)$$

где

$$b = \frac{1}{f(\xi)} \left[ \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{f} \frac{dP}{d\xi} d\xi - \frac{r\mu^2 U_0}{(U_0 - 1)} - U_0 \right] + r\mu^2 - 1,$$

$$c = \frac{1}{f(\xi)} \left[ - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{f(\xi)} \frac{dP}{d\xi} d\xi + \frac{r\mu^2 U_0}{U_0 - 1} + U_0 \right].$$

Определяя производную  $dU|d\xi$  из соотношения (26) и подставляя значения  $U$  и  $dU|d\xi$  в уравнение (9), получим

$$\Phi[(\Phi - 1)^3 + r\mu^2] \frac{d\Phi}{d\xi} = -\Phi^2[(\Phi - 1) - r\mu^2](\Phi - 1) \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} - B\Phi^2(\Phi - 1)^2(\Phi - r\mu - 1). \quad (27)$$

Это уравнение является алгебраическим относительно постоянных параметров гетерогенной среды. Применяя уравнение (27) для произвольных четырех сечений, получим систему четырех алгебраических уравнений относительно параметров  $\mu$ ,  $U_0$ ,  $\alpha = G|\rho S_0$ ,  $\delta$ , решение которой и определяет эти параметры. На рис. 3, 4 видно, что распределение статического давления вдоль канала переменного сечения существенно зависит от расходной концентрации  $\mu$  и размера твердых примесей  $\delta$ . Этот факт и является основой при построении метода определения постоянных параметров гетерогенной среды, таких, как расходная концентрация, расход воздуха, размер транспортируемых частиц и др. Для полидисперсного материала при определении постоянных параметров двухфазного потока требуется знание функции распределения частиц по размерам. Использование последней в уравнениях движения позволяет путем известных методов обобщить полученные результаты на движение среды с полидисперсными примесями.

Течение несжимаемой гетерогенной среды в трубе постоянного сечения характеризуется наличием начального участка потока, в пределах которого осуществляется стабилизация течения, приводящая к некоторому равновесному соотношению параметров потока на достаточном удалении от входа. Процесс стабилизации одномерного установившегося течения несжимаемой гетерогенной среды, который возникает в начальном участке, является следствием неравновесного силового взаимодействия компонент смеси, которое приводит к относительному ускорению их движения с направленностью, удовлетворяющей тенденции уменьшения неравновесности, причем этот процесс стабилизации носит асимптотический характер. Совершенно очевидно, что степень неустойчивости двухфазного потока при входе в трубу определяется мерой отклонения входных параметров от параметров равновесного течения для данного конкретного случая. Эти отклонения могут быть весьма ограниченными или полностью отсутствовать и тогда процесс стабилизации ускоряется или вообще исчезает. Для одномерного течения гетерогенной среды в трубе постоянного сечения уравнения (7), (8) примут вид

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{U[(U-1)^3 + r\mu^2]} \left\{ \frac{(1-r)}{r} \text{Fr}(U-1)^3 \cos \gamma - \frac{\lambda}{2} U^2 (U-1)^3 + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_m r \mu^2 U^2 (U-1)}{2} - \frac{3}{4} \zeta \frac{D_0}{\delta} U^3 (U-1) (U-1 - \mu r)^2 \right\}. \quad (28)$$

$$-\frac{dP}{d\xi} = \left[ 1 - \frac{r\mu^2}{(U-1)^2} \right] \frac{dU}{d\xi} + \frac{\text{Fr}}{U} \left( 1 + \frac{U-1}{r} \right) \cos \gamma + \frac{\lambda}{2} U + \frac{\lambda_m r \mu^2}{2} \frac{U}{(U-1)}. \quad (29)$$

В предположении постоянства коэффициентов сопротивления трения  $\lambda$ ,  $\lambda_m$  и коэффициента аэродинамического сопротивления  $\xi$ , принятому по закону Стокса при горизонтальном расположении трубопровода ( $\cos \gamma = 0$ ), уравнения (28), (29) могут быть проинтегрированы. Решение получим в виде

$$\xi - \xi_0 = \frac{1-r\mu^2}{a} \ln \frac{U}{U_0} + \frac{r\mu^2}{(a+b+c)} \ln \frac{U-1}{U_0-1} + \\ + \frac{(a+b+c)(a-c) + r\mu^2(c^2+cb)}{2ac(a+b+c)} \ln \frac{R}{R_0} + dI. \quad (30)$$

$$P_0 - P = \left( 1 + \frac{\lambda}{2c} \right) (U - U_0) + \\ + \frac{r\mu^2(U_0 - U)}{(U-1)(U_0-1)} \left[ 1 + \frac{\lambda_m r \mu^2 (U + U_0 - 2)}{4(b+2c)(U-1)(U_0-1)} \right] + \\ + k \ln \frac{U-1}{U_0-1} + \left[ \frac{cr^2 \mu^4 \lambda_m}{4(b+2c)(a+b+c)} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_m r \mu^2}{4c} - \frac{r\mu^2 \lambda}{4(a+b+c)} - \frac{\lambda(b+2c)}{4c^2} \right] \ln \frac{R}{R_0} + eI; \quad (31)$$

где

$$a = r\mu^2 \frac{\lambda_m}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{(1+\mu r)18\beta\eta D}{\alpha\rho\delta^2}; \\ b = \lambda + \frac{18\eta\beta D}{\alpha\rho\delta^2} (2+r\mu); \\ c = - \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{18\beta\eta D}{\alpha\rho\delta^2} \right); \\ d = \frac{bc(b+c)r\mu^2 - 2ac^2r\mu^2 - (a+b+c)(ab+bc+4ac)}{2ac(a+b+c)}; \\ e = \frac{\lambda(b^2-2ac)}{4c^2} + \frac{b\lambda}{2c} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda r\mu^2(b+2c)}{4(a+b+c)} + \\ + \frac{r\mu^2 \lambda_m}{2} \left[ \frac{cr\mu^2}{2(a+b+c)} - \frac{b}{2c} - 1 - \frac{cr\mu^2}{2(a+b+c)} \right]; \\ k = \frac{r\mu^2}{2(a+b+c)} \left[ \lambda - \frac{r\mu^2 c \lambda_m}{b+2c} \right].$$

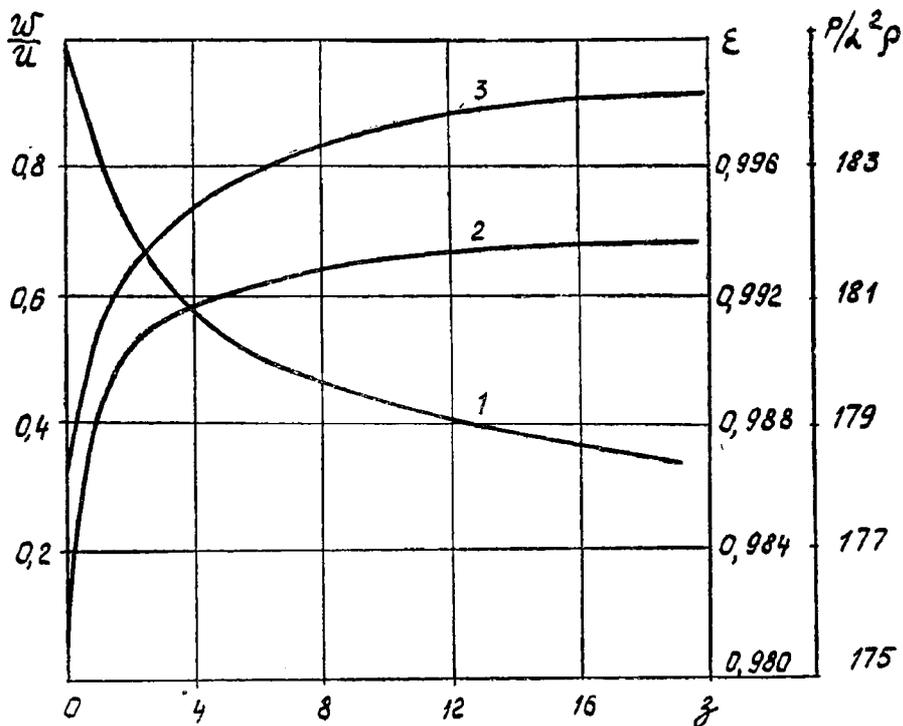


Рис. 5.

На рис 5 показано изменение безразмерного давления  $P = p / \alpha^2 \rho$  — (1), истинной объемной концентрации несущей среды  $\epsilon$  — (2) и отношение скорости твердых примесей к скорости несущей среды  $\omega / u$  — (3) в зависимости от координаты в процессе стабилизации на начальном участке трубы для частного случая  $D = 0,05$  м;  $\rho_m = 2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 10$ ;  $\delta = 100$  мк;  $\lambda_m = 0,005$ ;  $G = 0,05$  кг/сек;  $p_0 = 10^5$  н/м<sup>2</sup>;  $\epsilon_0 = 0,98$ . Как отмечалось выше, в результате процесса стабилизации течения все параметры гетерогенной среды принимают установившиеся значения. В области вполне установившегося течения несжимаемой гетерогенной среды следует положить производные  $du/dx = d\omega/dx = dU/d\xi = 0$  и, принимая во внимание, что при полной стабилизации течения градиент давления остается постоянным, система дифференциальных уравнений (7) — (8) преобразуется в алгебраическую

$$\frac{1-r}{r} Fr (U-1)^3 \cos \gamma - \frac{\lambda}{2} (U-1)^3 U^2 + \frac{\lambda_m}{2} r \mu^2 U^2 (U-1) - \frac{3}{4} \zeta \frac{D}{\delta} U^3 (U-1) (U-1-\mu r)^2. \quad (32)$$

$$\frac{\Delta P}{e} = \frac{Fr}{U} \left( 1 + \frac{U-1}{r} \right) \cos \gamma + \frac{\lambda}{2} U + \frac{\lambda_m}{2} \frac{U}{(U-1)}. \quad (33)$$

При конкретной постановке задачи о вполне установившемся течении двухфазной среды в трубе постоянного сечения система пяти уравнений: (6), (32), (33) устанавливает возможные соотношения между семью величинами  $G$ ,  $G_m$  или  $\mu$ ,  $u$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon_m$ ,  $\Delta P/e$ . Очевидно, что выбор частного, конкретного случая движения определяется заданием любых двух параметров из вышеуказанных. Ниже рассмотрены два наиболее интересных случая, когда считаются известными либо расход газа  $G$

и истинная объемная концентрация газа  $\epsilon$ , либо предполагается известным расход газа и примесей  $G$  и  $G_m$ . В первом случае, разрешая уравнение (32) относительно расходной концентрации  $\mu$ , получим

$$\mu = \frac{B(U-1)}{\lambda_m} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\lambda_m}{rB^2} \left[ B + \frac{\lambda}{2} - \frac{(1-r)}{r} \frac{Fr}{U^2} \cos \gamma \right]} \right\}. \quad (34)$$

Следует отметить, что коэффициент аэродинамического сопротивления  $\zeta$  взят по универсальной зависимости (14). Для частиц, подчиняющихся закону Стокса, то есть  $\beta=1$ , значение  $\mu$  непосредственно определяется из (34); для случая движения частиц, не подчиняющихся закону Стокса, значение  $\mu$  определяется итерацией уравнения (34).

Для горизонтально расположенного трубопровода, в случае отсутствия сил сопротивления трения  $\lambda=\lambda_m=0$ , получим

$$\mu = \frac{\rho_m}{\rho} (U-1) = \frac{\rho_m \epsilon_m}{\rho \epsilon},$$

что может иметь место при равенстве скоростей несущей среды и примесей  $u=w$ .

Во втором случае, когда предполагается известным  $G$  и  $G_m$ , уравнение (31) с учетом (14) примет вид

$$aU^4 + bU^3 + (c+d)U^2 - 2dU + d = 0, \quad (35)$$

где

$$a = -B = -\frac{\lambda}{2}; \quad b = \lambda + (2 + \mu r)B;$$

$$c = \frac{\lambda_m r}{2} \mu^2 - B(1 + \mu r) - \frac{\lambda}{2}; \quad d = \frac{(1-r)}{r} Fr \cos \gamma; \quad B = \frac{18 \eta \beta D}{\alpha \rho \delta^2}.$$

В случае горизонтального трубопровода ( $\cos \gamma=0$ ) получим квадратное уравнение, из которого следует

$$U = \frac{1}{2a} (\sqrt{b^2 - 4ac} - b). \quad (36)$$

Необходимый перепад давления для перемещения диспергированной твердой фазы определяется из соотношения (32). Таким образом, полученный результат позволяет установить равновесные параметры гетерогенного потока и в том числе определить значение отставания частиц по скорости от газа, имеющее место в связи с действием сил сопротивления трения на стенках.

На рис. 6 показана зависимость отношения скорости частиц материала к скорости газа  $w|u$  в зависимости от ди-

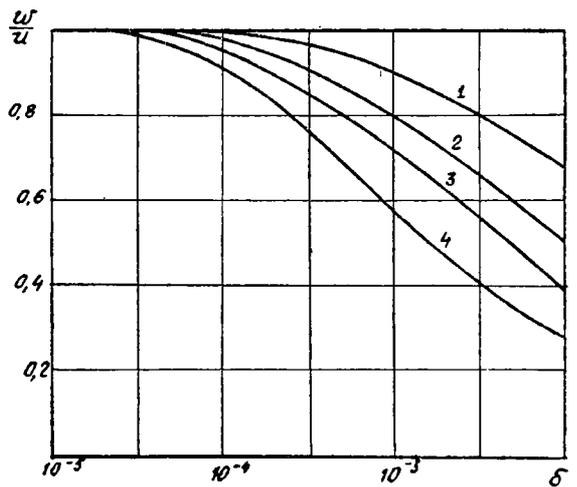


Рис. 6.

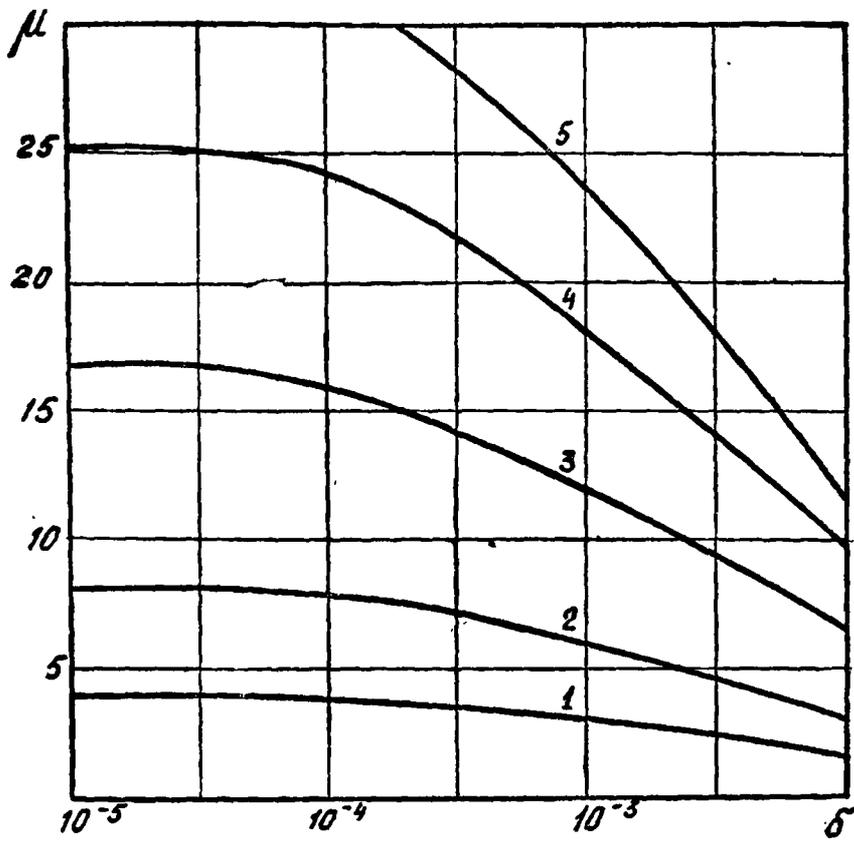


Рис. 7.

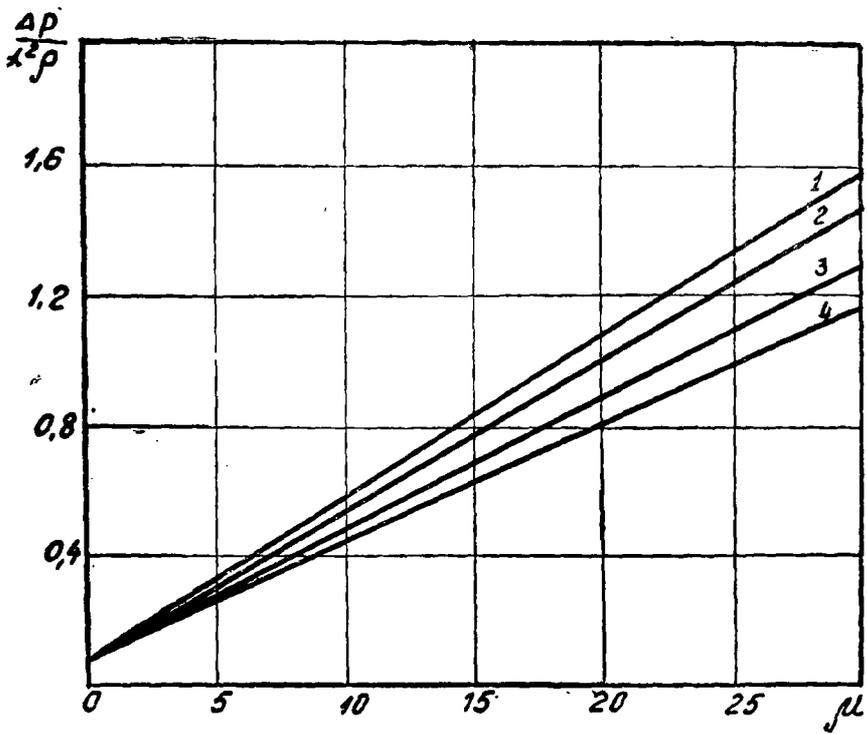


Рис. 8.

аметра транспортируемых частиц  $\delta$  для разных значений коэффициентов сопротивления трения. Кривой 1 соответствует  $\lambda_m = 0,001$ ; 2 —  $\lambda_m = 0,004$ ; 3 —  $\lambda_m = 0,01$ ; 4 —  $\lambda_m = 0,03$ .

На рис. 7 показана зависимость расходной концентрации от размера транспортируемых частиц  $\delta$  при различном значении объемной концентрации материала  $\epsilon_m$ . Кривой 1 — соответствует  $\epsilon_m = 0,0025$ ; 2 —  $\epsilon_m = 0,005$ ; 3 —  $\epsilon_m = 0,01$ ; 4 —  $\epsilon_m = 0,015$ ; 5 —  $\epsilon_m = 0,02$ .

На рис. 8 показан безразмерный перепад давления  $\Delta p / \alpha^2 \rho$  в зависимости от расходной концентрации  $\mu$  при разных значениях крупности транспортируемых частиц  $\delta$ . Кривой 1 — соответствует  $\delta = 50$  мк; 2 —  $\delta = 100$  мк; 3 —  $\delta = 250$  мк; 4 —  $\delta = 500$  мк.

Расчеты проводились для частного случая течения при  $\rho \doteq 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_m = 2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $D = 0,05$  м;  $\lambda_m = 0,005$ ;  $G = 0,05$  кг/сек;  $p_0 = 10^5$  н/м<sup>2</sup>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Клейман. Об установившемся движении смесей в трубах.— Научные доклады высшей школы физ.-мат. науки. № 4. М., Госиздат. «Высшая школа», 1958.
2. К. Ш. Латипов. Установившиеся и неустойчивые движения двухкомпонентной среды в трубах переменного и постоянного сечения. Автореферат канд. дисс. Ташкент, 1964.
3. Д. Ф. Файзулаев. Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах. Ташкент. Изд. «ФАН» Узб. ССР, 1966.
4. W. Barth, R. Nagel, K. Waveren. Neues Verfahren zur Bestimmung der augenblicklich geförderten Gutmengen im Luftstrom bei pneumatischer Förderung. Chemie—Ing. Techn. 29 Jahrg 1957, Nr. 9.
5. L. Farbar, Ind. Engng. Chem. 44, 2947/55, 1952.
6. H. M. Carlson, P. M. Frazier u R. B. Engdahl. Trans. amer. Soc. Mech. Engrs 70, 65. 1948.
7. В. А. Шваб. Некоторые итоги цикла исследований потоков гетерогенных сред применительно к задачам пневматического транспорта. Итоги исследований по математике и механике. Изд. Томского университета, 1967.
8. А. В. Шваб. Двухфазное течение в трубах переменного сечения и определение расходной концентрации и других параметров по измерениям статических давлений. Материалы конференции по математике и механике. Изд. Томского университета, 1973.

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| В. И. Агапов, А. Н. Кудинов, В. Н. Роговский. Экспериментальное исследование устойчивости гладких и подкрепленных оболочек под действием неравномерного внешнего давления и изгиба . . . . . | 3  |
| В. А. Архипов, Е. П. Болтрукевич, Г. С. Ратанов. Экспрессный метод определения функции распределения и средних размеров частиц полидисперсной взвеси . . . . .                               | 7  |
| В. А. Архипов, С. И. Измайлов, Г. С. Ратанов. Измерение концентрации и дисперсности сажевых частиц в светящемся пламени . . . . .  | 10 |
| Л. К. Ахаева, В. И. Тараканов. Кручение вала переменного сечения. . . . .  | 13 |
| П. А. Буков, Г. С. Ратанов. Логарифмический преобразователь отношения токов . . . . .  | 20 |
| М. В. Василевский. О движении аэрозоля в циклонном пылеуловителе . . . . .   | 22 |
| В. А. Гриднева, М. Д. Михайлов. О влиянии искусственной вязкости на характер решения задачи о кратковременных импульсных нагрузках . . . . .   | 29 |
| В. М. Егоров, Б. Б. Квеско. Расчет нестационарного движения двухфазного потока при высоконапорном пневмотранспорте поршневого типа. . . . .  | 37 |
| А. Ф. Вахгельт, В. М. Егоров, В. А. Смоловик. Ступенчатый метод расчета высоконапорного транспорта . . . . .   | 45 |
| В. М. Егоров, Л. Ф. Мельник, А. Т. Севостьянов, В. А. Смоловик, А. В. Шваб. Исследование сопротивления трения при высоконапорном пневмотранспорте поршневого типа. . . . .                   | 51 |
| В. М. Егоров, А. Г. Севостьянов, В. А. Смоловик, В. А. Шваб. Основные результаты экспериментального исследования высоконапорного пневмотранспорта поршневого типа . . . . .                  | 58 |
| В. М. Егоров, В. А. Смоловик. Определение начальной скорости поршня при высоконапорном пневмотранспорте. . . . .   | 63 |
| В. М. Егоров, В. А. Смоловик. Метод прямого измерения сопротивления трения при поршневом пневмотранспорте . . . . .  | 68 |
| В. А. Жданов, В. Ф. Конусов, А. В. Жуков. К теории механической прочности алюминия . . . . .   | 72 |
| В. А. Жданов, В. Ф. Конусов, В. В. Поляков. К расчету уравнений состояния металлов . . . . .   | 82 |
| В. А. Лошкарев, Н. А. Игнатенко. Полуэмпирический метод расчета некоторых характеристик обугливающихся абляционных материалов . . . . .  | 84 |
| А. И. Коноваленко, А. М. Малютин, Г. С. Ратанов, Г. А. Цыба. Датчик давления с туннельным дном в качестве чувствительного элемента . . . . .   | 92 |

|   |     |
|---|-----|
| В. А. Крылов, Г. С. Ратанов, Г. А. Цыба. Электронно-счетный цифровой измеритель времени ИВИ-2 . . . . .   | 94  |
| В. С. Ладысев. Распределение магнитного поля в приближенной модели электромагнитного лотка . . . . .  | 98  |
| В. А. Лошкарев, Г. Г. Тиванов. Экспериментальное исследование проницаемости обугливаемых абляционных экранов в стационарном случае . . . . .      | 102 |
| А. М. Малютин, Г. С. Ратанов, Г. А. Цыба. Импульсный цифровой регистратор . . . . .   | 106 |
| В. Д. Мерзляков, И. Т. Скородинский. О влиянии числа $M$ на форму оптимальной головной части тела вращения . . . . .                              | 108 |
| М. Х. Мухаметов, В. М. Ушаков. Некоторые особенности нестационарного теплообмена в условиях задачи Лагранжа. . . . .                              | 115 |
| С. Л. Павлов. Тепловая задача для одного тела вращения сложной формы . . . . .  | 119 |
| С. Л. Павлов. Кручение пространства с цилиндрической и радиальной полостями . . . . .   | 123 |
| С. Л. Павлов, В. И. Тараканов. Кручение пространства с вырезанной щелевидной полостью . . . . .   | 128 |
| В. Г. Потейко, В. М. Роговский, Б. М. Штерн. К определению оптимальных форм моментных оболочек вращения . . . . .                                 | 132 |
| А. А. Светашков. К описанию вязкоупругого поведения материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. . . . .                                | 137 |
| Н. С. Тахтамышев, Г. С. Ратанов, Г. А. Цыба. Устройство согласования цифровых измерительных приборов со шлейфным осциллографом . . . . .          | 145 |
| В. И. Тараканов. Об удовлетворении граничных условий на бесконечности для осесимметричных задач теории упругости. . . . .                         | 148 |
| В. И. Тараканов. Термонапряжения в полупространстве при произвольном температурном поле с осевой симметрией. . . . .                              | 157 |
| В. А. Тененев, В. А. Шваб, М. И. Шиляев. Исследование поля скоростей газа в зазоре между ротором и кожухом центробежного пылеотделителя . . . . . | 162 |
| В. А. Шваб, М. И. Шиляев. Исследование процессов сепарации в центробежном пылеотделителе с двумя ступенями газоочистки . . . . .                  | 170 |
| А. В. Шваб. Одномерное течение несжимаемой двухфазной среды в трубах постоянного и переменного сечения . . . . .                                  | 176 |

ТРУДЫ НИИ ПММ, т. 6

*Томск, Изд. ТГУ, 1976 г. 192 с.*

Редактор **Л. П. Цыганкова**  
Технический редактор **Р. М. Подгорбунская**  
Корректоры **Л. И. Дюканова, Т. П. Сергеева**

---

К303097. Сдано в набор 19/III—1976 г. Подписано к печати 17/V—1977 г.  
Бум. типографская № 3. Формат 70×108<sup>1/16</sup>; п. л. 12; усл. п. л. 16,8,  
уч.-изд. л. 14,8. Заказ № 12781. Тираж 500.  
Цена 2 руб. 22 коп.

---

Издательство ТГУ, Томск-29, ул. Никитина 17.  
Типография издательства «Омская правда». Омск, пр. Маркса, 39.