ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Федеральное агентство по образованию РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФПМК
_________ проф. А.М.Горцев
11 декабря 2009 г.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Численные методы»

Томск – 2009

Рассмотрено и утверждено методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

ПРОТОКОЛ №34 от 11 декабря 2009 г.

Председатель комиссии, профессор

С.Э. Воробейчиков

Автор:

С.А.Цветницкая

В данном учебно-методическом пособии по курсу «Численные методы» приводятся теоретические результаты и задания для лабораторных работ по решению линейных интегральных уравнений.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральным уравнением называют уравнение относительно неизвестной функции, стоящей под знаком интеграла. Общий вид линейного интегрального уравнения следующий

$$\alpha(x)u(x)+\lambda\int\limits_{D}K(x,s)u(s)ds=f(x), \tag{1}$$

где D – область интегрирования, $u(x)$ – неизвестная функция, $K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – известная функция, λ – числовой параметр.

Рассмотрим четыре основных типа уравнений. Если обе границы интегрирования постоянны, то соответствующее уравнение называют уравнением Фредгольма. Если одна из границ интегрирования переменна, то соответствующее уравнение называют уравнением Вольтерра.

$$u(x)+\lambda\int\limits_{a}^{b}K(x,s)u(s)ds=f(x) \tag{2}$$

– уравнение Фредгольма второго рода.

$$u(x)+\lambda\int\limits_{a}^{x}K(x,s)u(s)ds=f(x) \tag{3}$$

– уравнение Вольтера второго рода.

$$\int\limits_{a}^{b}K(x,s)u(s)ds=f(x) \tag{4}$$

– уравнение Фредгольма первого рода.

$$\int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x) \qquad (5)$$

уравнение Вольтера первого рода.

Если правая часть интегрального уравнения равна нулю ($f(x) = 0$), то соответствующее уравнение называется однородным. Для однородного уравнения Фредгольма второго рода те значения параметра λ, при котором существует нетривиальное решение, называют собственными значениями, а соответствующее неоднородное решение – собственными функциями.

2. МЕТОД КВАДРАТУРНЫХ СУММ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основная идея метода конечных сумм состоит в том, что непрерывный отрезок интегрирования заменятся равномерной сеткой с узлами $x_i, x_i = a + ih, h = \dfrac{b-a}{n}, i = 0,1\ldots n$, а интегральное уравнение – системой алгебраических уравнений. Система алгебраических уравнений получается следующим образом. Подставим в интегральное уравнение вместо x узел x_i, а интеграл заменим квадратурной суммой. Будем применять формулы приближенного вычисления интегралов.

$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$ – обобщенная формула левых прямоугольников:

$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_i$ – обобщенная формула правых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + ...2y_{n-1} + y_n\right]$$ – обобщенная формула трапеции

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2...4y_{n-1} + y_n)$$ – обобщенная формула Симпсона.

Уравнение Фредгольма. Применим метод конечных сумм к уравнению Фредгольма второго рода. Подставим в уравнение (2) узел x_i. Уравнение (2) примет вид

$$u_i + \lambda \int_{x_0}^{x_n} K(x_i, s)u(s)ds = f(x_i) \tag{6}$$

Заменим интеграл в (6), применяя обобщенную формулу трапеции

$$u_i + \lambda\frac{h}{2}(K_{i0}u_0 + 2K_{i1}u_1 + \cdots 2K_{i(n-1)}u_{n-1} + K_{in}u_n) = f(x_i),\ i = 0,1...n \tag{7}$$

Система уравнений (7) может быть записана в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{h}{2}K_{00} & hK_{01}\cdots hK_{0(n-1)} & \frac{h}{2}K_{0n} \\ \frac{h}{2}K_{10} & 1+hK_{11}\cdots hK_{1(n-1)} & \frac{h}{2}K_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{h}{2}K_{n0} & hK_{n1}\cdots\cdots hK_{n(n-1)} & 1+\frac{h}{2}K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

Уравнения Вольтера. Подставим в формулу (3) узел x_i и заменим интеграл в (3) по приближенной формуле правых прямоугольников

$$u_i + \lambda \int_{x_0}^{x_i} K(x_i, s)u(s)ds = f(x_i)$$

$$u_i + \lambda h(K_{i0}u_0 + K_{i1}u_1 + \cdots K_{ii}u_i = f(x_i),\ i = 0,1...n \tag{9}$$

Запишем систему уравнений (9) в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+hK_{11} & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & hK_{n1} & \cdots & hK_{n(n-1)} & 1+hK_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение Вольтера первого рода

$$\int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x)$$

При применении квадратурного метода к уравнению Вольтера первого рода уравнение для узла x_0 нельзя записать (в левой части уравнения интеграл от x_0 до x_0), поэтому для (n+1) неизвестных можно можно записать только n уравнений. Поэтому уравнение Вольтера первого рода заменяют эквивалентным уравнением второго рода. Продифференцируем по x уравнение (5)

$$K(x,x)u(x) + \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,s)u(s)ds = \frac{d}{dx}f(x) \tag{11}$$

При условии, что $K(x,s) \neq 0$ на прямой x=s, поделим левую и правую часть уравнения (11) на $K(x,x)$, результатом деления будет следующее уравнение Вольтера второго рода

$$u(x) + \int_{x_0}^x \frac{K_x(x,s)}{K(x,x)}u(s)ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \tag{12}$$

3. ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим проекционные методы на примере уравнения Фредгольма второго рода. Решение в проекционных методах ищут в виде

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{13}$$

В (13) $\varphi_i(x)$ – являются линейно независимыми и непрерывными функциями на отрезке $[a,b]$, а a_i – неизвестными параметрами.

Метод коллокации. Выберем на отрезке $[a,b]$ n узлов, назовем их узлами коллокации и потребуем, чтобы решение (13) удовлетворяло интегральному уравнению (2)

$$f(x_k) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x_k) + \int_a^b K(x_k,s)\left(f(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(s) \right) ds = f(x_k). \tag{14}$$

После преобразования (14) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left[\varphi_i(x_k) + \int_a^b K(x_k,s)\varphi_i(s)ds \right] = -\int_a^b K(x_k,s) f(s)ds, \quad k = 1...n \tag{15}$$

Система уравнений (15) может быть записана в матричной форме

$$\begin{bmatrix} L\varphi_1(x_{1k}) \ldots\ldots\ldots L\varphi_n(x_{1k}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L\varphi_1(x_{nk}) \ldots\ldots\ldots L\varphi_n(x_{nk}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{1k}) - L\varphi_0(x_{1k}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_{nk}) - L\varphi_0(x_{nk}) \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где x_{ik} – узлы коллокации, а $L\varphi_i(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds$.

Решив систему (16), решение интегрального уравнения найдем по формуле (13).

Метод моментов. Подставим в уравнение (2) решение в виде (13). Так как решение (13) является приближенным, поэтому справедливо следующее соотношение

$$L(y_n(x)) = f(x) + r(x), \tag{17}$$

где r(x) будем называть невязкой. Получим выражение для невязки.

$$r(x) = L(y_n(x)) - f(x),$$

$$L(y_n(x)) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) + \int_a^b K(x,s)(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(s) + f(s))ds$$

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(\varphi_i(x)) + \int_a^b K(x,s)f(s)ds .$$

Из (17) видно, что чем ближе невязка r(x) к нулевой функции, тем точнее (13) удовлетворяет уравнению. Для приближения невязки к нулевой функции в методе моментов вводится система замкнутых на отрезке $[a,b]$ функций ψ_i, $i = 1...n$. Система функций ψ_i, $i = 1...n$ называется замкнутой, если подчиняется условиям:

1. $\psi_k(x) \in C[a,b]$, $k = 1,2...$

2. Если $\int_a^b \psi_k(x)g(x)dx = 0$, $k = 1,2..$, то это означает, что $g(x) \equiv 0$.

Потребуем, чтобы невязка была ортогональна первым n функциям замкнутой системы, т.е.

$$\int_a^b r(x)\psi_i(x)dx = 0, \ i = 1,2...n. \qquad (18)$$

Решив систему (18), найдем коэффициенты a_i.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

Ядро называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s), \qquad (19)$$

где $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ – системы линейно независимых функций. Покажем на примере уравнения Фредгольма второго рода, что в случае вырожденного ядра можно найти точное аналитическое решение интегрального уравнения. Подставим в уравнение (2) ядро (19)

$$u(x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\int_a^b\beta_i(s)u(s)ds=f(x). \tag{20}$$

Введем обозначение $\gamma_i=\int_a^b\beta_i(s)u(s)ds$. Перепишем (20) в виде

$$u(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\gamma_i. \tag{21}$$

Из формулы (21) видно, что точное аналитическое решение интегрального уравнения можно найти, если будут известны константы γ_i. Для нахождения констант γ_i подставим (21) в (20)

$$f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\gamma_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\int_a^b\beta_i(s)\left[f(s)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(s)\gamma_j\right]ds=f(x). \tag{22}$$

После преобразований формулу (22) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\left[\gamma_i+\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\gamma_j-\varphi_i\right]=0, \tag{23}$$

где $\delta_{ij}=\int_a^b\beta_i(s)\alpha_j(s)ds$, $\varphi_i=\int_a^b f(s)\beta_i(s)ds$.

С учетом линейной независимости системы функций $\alpha_i(x)$ выражение (23) будет справедливо при одновременном равенстве нулю коэффициентов при $\alpha_i(x)$. Это требование приводит к следующей системе уравнений относительно γ_i

$$A\gamma=\varphi, \tag{24}$$

Где $\gamma=[\gamma_1,\gamma_2,...\gamma_n]^T$, $\varphi=[\varphi_1,\varphi_2,...\varphi_n]^T$, а матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1+\delta_{11} & \delta_{12} \ldots\ldots & \delta_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \ldots & 1+\delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Решив систему (24) и подставив γ_i в (21), получим решение интегрального уравнения.

Так как при вырожденном ядре можно получить точное аналитическое решение интегрального уравнения, то представляет интерес замена ядра на близкое вырожденное ядро. Рассмотрим два способа замены ядра на близкое вырожденное.

Разложение в ряд Тейлора . Разложим ядро в ряд Тейлора по переменной x в окрестности c.

$$K(x,s) = K(c,s) + (x-c)\frac{\partial}{\partial x}K(x,s)\Big|_{x=c} + \cdots \frac{(x-c)^n}{n}\frac{\partial^n}{\partial x^n}K(x,s)\Big|_{x=c}, \quad (25)$$

В качестве функций $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ выберем

$$\alpha_1(x) = 1,\ \beta_1(s) = K(c,s),\ \alpha_2(x) = (x-c),\ \beta_2(s) = \frac{\partial}{\partial x}K(x,s)\Big|_{x=c} \text{ и т.д.}$$

Второй способ замены ядра на вырожденное использует интерполяционный многочлен Лагранжа. Выберем на отрезке $[a,b]$ n узлов x_i, $i = 1..n$. Вычислим значения $K(x_i, s)$, $i = 1..n$. Построим интерполяционный многочлен для ядра $K(x,s)$.

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} K(x_i, s) l_i(x), \text{ где} \quad (26)$$

$l_i = \dfrac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$ – коэффициент Лагранжа. В качестве $\alpha_i(x), \beta_i(s)$ выбираем $l_i(x)$, $K(x_i, s)$. Решив систему (24), по формуле (21) найдем решение интегрального уравнения.

5.ЗАДАНИЕ

Методом квадратурных сумм найти решенис интегрального уравнения в четырех узлах равномерной сетки по формуле трапеций или по формуле правых прямоугольников (формулу задает преподаватель).

1. $u(x) - 2\int_0^1 e^{x-s} u(s)ds = 2\cos(0,5x)$

2. $u(x) - 4\int_0^1 e^{x-s} u(s)ds = 2\cos(0,5x)$

3. $u(x) - \int_0^{0,5} xsu(s)ds = \sin(1 + x^2)$

4. $u(x) - 2\int_0^{0,5} xsu(s)ds = \sin(1 + x^2)$

5. $u(x) - \int_0^{0,5} \sin(xs)u(s)ds = \cos\sqrt{(1 + x^2)}$

6. $u(x) - 3\int_0^{0,5} \sin(xs)u(s)ds = \cos\sqrt{(1 + x^2)}$

7. $u(x) - \int_0^1 \cos(0,5xs)u(s)ds = \sqrt{(1 + x^2)}$

8. $u(x)-4\int_0^1 \cos(0,5xs)u(s)ds=\sqrt{(1+x^2)}$

9. $u(x)-2\int_0^1 ch(x+s)u(s)ds=1+x$

10. $u(x)-\int_0^1 ch(x+s)u(s)ds=1+x$

11. $\int_0^x 0,2e^{x-s}u(s)ds=sh(x),\quad 0\le x\le 1$

12. $\int_0^x 0,2e^{x-s}u(s)ds=sh(x),\quad 0\le x\le 0,5$

13. $\int_0^x (1+x+s)u(s)ds=\ln(1+x),\quad 0\le x\le 1$

14. $\int_0^x (1+x+s)u(s)ds=\ln(1+x),\quad 0\le x\le 0,5$

15. $\int_0^x \cos(x-s)u(s)ds=\sin(0,3x),\quad 0\le x\le 1$

16. $\int_0^x \cos(x-s)u(s)ds=\sin(0,3x),\quad 0\le x\le 0,3$

17/ $\int_0^x ch(x-s)u(s)ds=sh(x),\quad 0\le x\le 1$

18. $\int_0^x ch(x-s)u(s)ds=sh(x),\quad 0\le x\le 0,5$

19. $\int_0^x \cos(x-s)u(s)ds=sh(x),\quad 0\le x\le 1$

20. $\int_0^x \cos(x-s)u(s)ds = sh(x), \quad 0 \le x \le 0,5$

21. $u(x) + \frac{8}{3}\int_0^x sh(3(x-s))u(s)ds = \sin(2x), \quad 0 \le x \le 0,3$

22. $u(x) - 0,1\int_0^x sh(3(x-s))u(s)ds = \sin(2x), \quad 0 \le x \le 0,3$

23. $u(x) - \int_0^x (1 + x - 0,9s)u(s)ds = ch(2x), \quad 0 \le x \le 0,3$

24. $u(x) - 2\int_0^x (1 + x - 0,9s)u(s)ds = ch(2x), \quad 0 \le x \le 0,3$

25. $u(x) - \int_0^x \exp(-x+s)u(s)ds = \cos(3x), \quad 0 \le x \le 0,3$

26. $u(x) - 3\int_0^x \exp(-x+s)u(s)ds = \cos(3x), \quad 0 \le x \le 0,3$

27. $u(x) - \int_0^x \exp(x+s)u(s)ds = 1 + 2\cos(x), \quad 0 \le x \le 0,3$

28/ $u(x) - 2\int_0^x \exp(x+s)u(s)ds = 1 + 2\cos(x), \quad 0 \le x \le 0,3$

29. $u(x) - 2\int_0^x sh(x-s)u(s)ds = \cos(0,2x), \quad 0 \le x \le 0,3$

30. $u(x) - \int_0^x sh(x-s)u(s)ds = \cos(0,2x), \quad 0 \le x \le 0,3$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы высшей математики. Минск: Вышейшая школа, 1975.

2. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.

СОДЕРЖАНИЕ

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
редакционно-издательского отдела ТГУ

Заказ № 14 от «10» 04 2010 г. Тираж 60 экз.