ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие по курсу «Теория управления»

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФПМК

проф. А.М. Горцев
15 апреля 2009 г.

Ю.И. Параев, С.А. Цветницкая

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие по курсу «Теория управления»

Томск
2009

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

Протокол № 32 от 15 апреля 2009 г.

Председатель комиссии,
профессор С.Э. Воробейчиков

АВТОРЫ: Ю.И. Параев, С.А. Цветницкая

В данном учебно-методическом пособии по курсу «Теория управления» приводятся теоретические результаты и задания для лабораторных работ по решению задач устойчивости линейных непрерывных и дискретных систем управления.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

1.1. Постановка задачи

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \qquad (1.1)$$

где x – n-мерный вектор состояний $(x \in R_n)$.

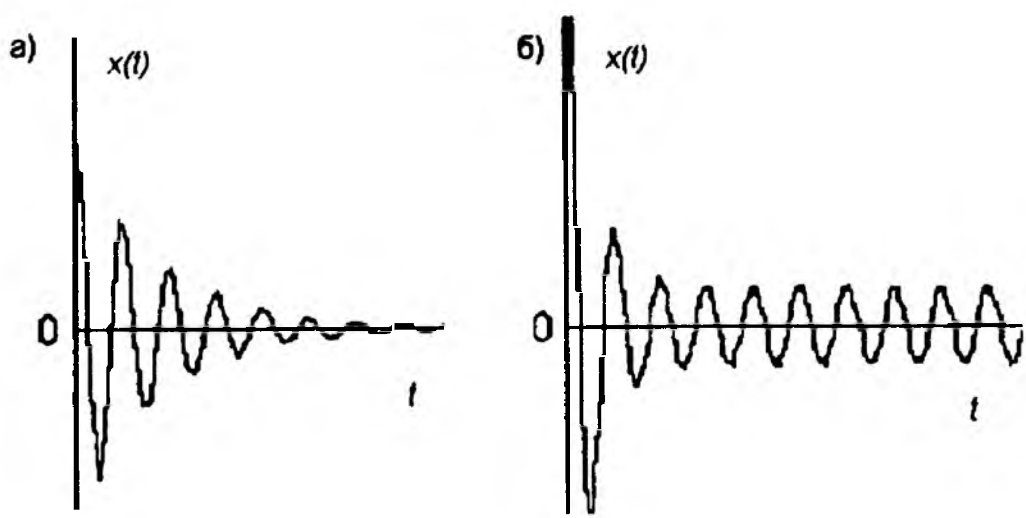
Определение. Процесс $x(t)$ называется:

– устойчивым, если $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$;

– относительно устойчивым, если начиная с некоторого t $\|x(t)\| < C$, где C – некоторая константа;

– неустойчивым, если $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \infty$.

Типичные кривые приведены на рис. 1.1.



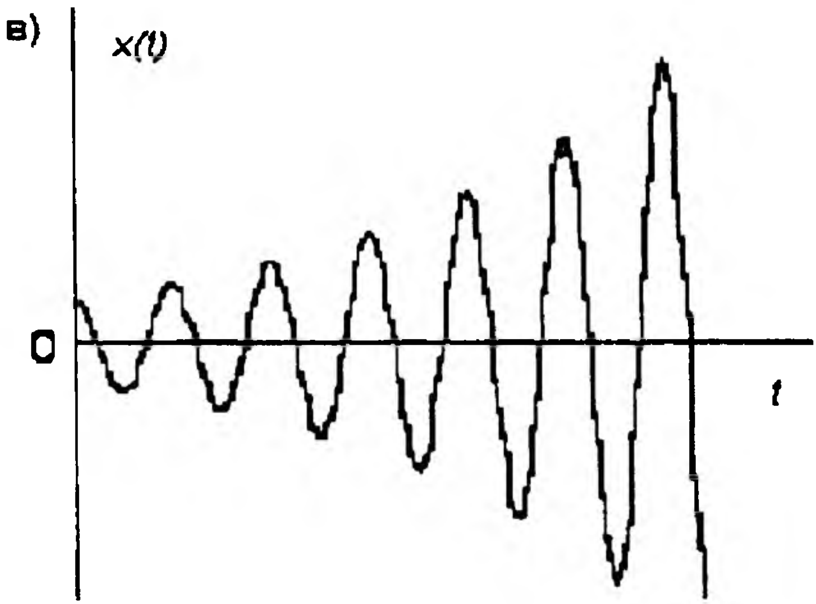


Рис. 1.1. Типичные кривые поведения процесса: а) устойчивый процесс; б) относительно устойчивый процесс; в) неустойчивый процесс

Проблема заключается в том, чтобы, не решая уравнение (1.1), а только на основании свойств матрицы A решить вопрос об устойчивости процесса $x(t)$. Для этого сформулированы и теоретически доказаны критерии устойчивости.

1.2. Спектральный критерий устойчивости

Пусть найдены все собственные числа матрицы A, которые обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Для простоты будем считать, что все они простые. Тогда решение уравнения (1.1) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{\lambda_i t}, \tag{1.2}$$

где d_i – какие-то постоянные векторы. В общем случае собственные числа являются комплексными, т.е.

$$\lambda_k = \alpha_k + j\beta_k,\ k = 1,\ldots,n,$$

где $\alpha_k = \operatorname{Re}\lambda_k$, $\beta_k = \operatorname{Im}\lambda_k$, $j = \sqrt{-1}$. Учитывая формулу

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + j\sin\beta t)$$

и то, что процесс $x(t)$ вещественный, можно после ряда преобразований вместо (1.2) получить

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i' e^{\alpha_i t} \cos\beta_i t, \qquad (1.3)$$

где d_i' – какие-то постоянные векторы. Из (1.3) получается следующий результат (спектральный критерий устойчивости): процесс $x(t)$ будет:

- устойчивым, если все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1,\ldots,n$;
- относительно устойчивым, если все $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$, $i = 1,\ldots,n$;

неустойчивым, если имеется хотя бы одно собственное число с $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$.

На комплексной плоскости области устойчивости и неустойчивости приведены на рис. 1.2.

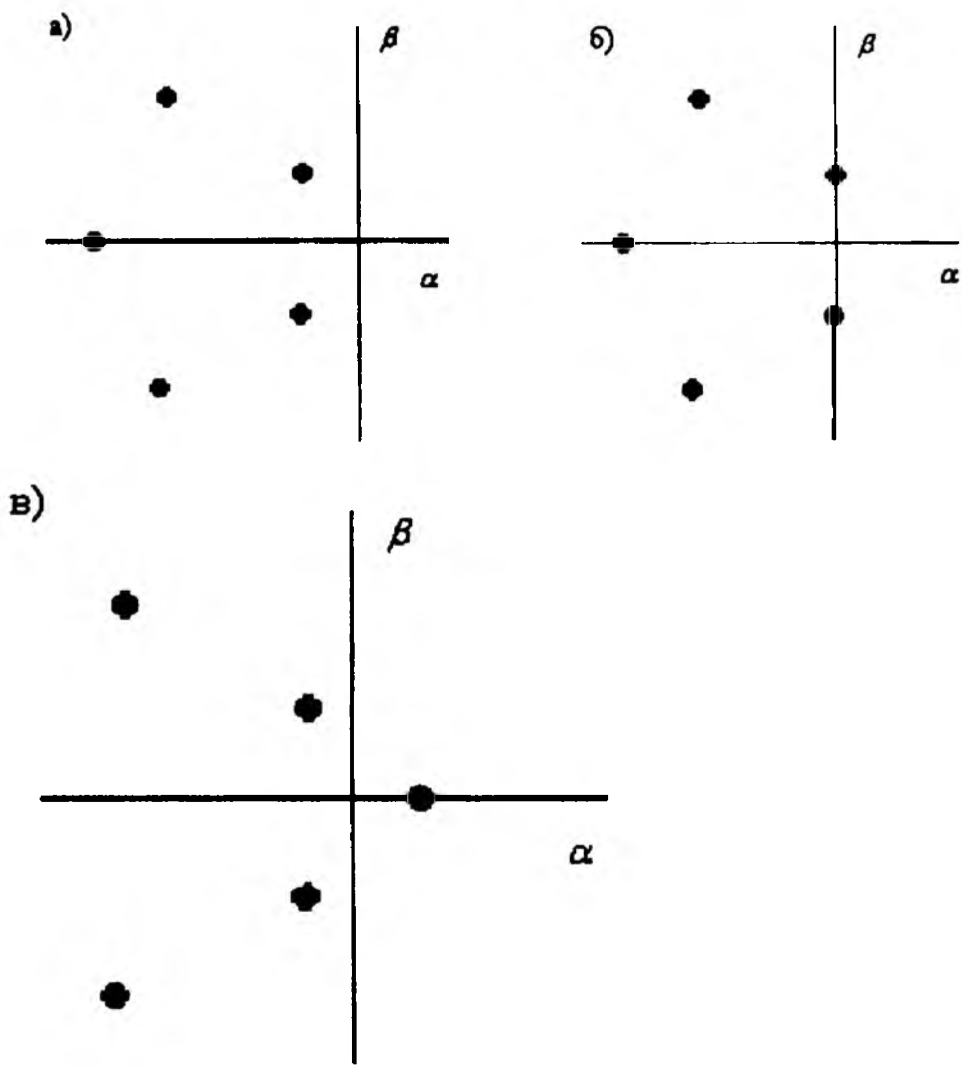


Рис. 1.2. Области устойчивости и неустойчивости: а) устойчивый процесс; б) относительно устойчивый процесс; в) неустойчивый процесс

1.3. Критерии на основе коэффициентов характеристического многочлена матрицы A

Вычисление собственных чисел матрицы A представляет собой достаточно сложную процедуру, часто связанную с предварительным нахождением характеристического многочлена. Поэтому можно сформулировать критерии устойчивости на основе коэффициентов характеристического многочлена матрицы A. По определению характеристическим многочленом матрицы A является многочлен

$$\varphi(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right) = a_1 + a_2\lambda + \ldots + a_n\lambda^{n-1} + \lambda^n \qquad (1.4)$$

Обратите внимание на нумерацию коэффициентов этого многочлена!

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни многочлена $\varphi(\lambda)$. Будем считать, что все они простые. Многочлен $\varphi(\lambda)$ называется:

- устойчивым (или многочленом Гурвица), если все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1,\ldots,n.$;
- относительно устойчивым, если все $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$;
- неустойчивым, если имеется хотя бы один корень с $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$.

1.3.1. Необходимый критерий устойчивости

Теорема 1.1. Чтобы многочлен (1.4) был устойчивым, необходимо (но не достаточно), чтобы все его коэффициенты

$$a_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. Из линейной алгебры известно, что любой многочлен можно представить в виде

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i).$$

В общем случае собственные числа могут быть вещественными или комплексными, причем последние составляют комплексносопряженную пару. Поэтому последнее выражение можно переписать в виде

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i\in I}(\lambda - \alpha_i)\prod_{i\in J}\left((\lambda - \alpha_i)^2 + \beta_i^2\right),$$

где I – множество индексов вещественных собственных чисел, J – множество индексов комплексных чисел. Если все $a_i < 0$, то $\varphi(\lambda)$ есть произведение многочленов 1-го и 2-го порядков с положительными коэффициентами. Нетрудно показать, что и все произведение есть многочлен с положительными коэффициентами.

1.3.2. Критерий Рауса–Гурвица

На основании многочлена (1.4) составляется $n \times n$-матрица Рауса

$$R = \begin{bmatrix} a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 1 & 0 & \cdots \\ a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

причем учитывается, что $a_0 = 1$ и все $a_j = 0$ для $j \le 0$. Главные миноры этой матрицы обозначаются через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ и называются определителями Гурвица.

Например, для многочлена

$$\varphi(\lambda) = a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2 + a_4\lambda^3 + \lambda^4 \quad (n = 4)$$

имеем

$$H = \begin{bmatrix} a_4 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

и

$$\Delta_1 = a_4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_4 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_4 & 1 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_4 = a_1 \Delta_3.$$

Теорема 1.2 (критерий Рауса–Гурвица)

Чтобы многочлен (1.4) был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все

$$\Delta_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Если имеется хотя бы один определитель Гурвица $\Delta_i < 0$, то многочлен неустойчив. Если все $\Delta_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n,$ то требуются дополнительные исследования.

1.4. Критерий Ляпунова

Этот метод не требует нахождения характеристического многочлена матрицы A.

Теорема 1.3 (критерий Ляпунова). Чтобы процесс $x(t)$ был устойчивым, достаточно, чтобы матрица L, являющаяся решением обратного уравнения Ляпунова

$$A^T L + LA + C = 0, \tag{1.6}$$

была положительно определенной. Здесь C – произвольная положительно определенная матрица (например, $C = I$).

Доказательство. Введем функцию Ляпунова $v(x) = x^T Lx$, где L – симметрическая положительно определенная матрица. Если матрица L положительно определена, то

$$v(x) = x^T Lx > c\|x\|, \tag{1.7}$$

где $c = \lambda_{\min}(L) > 0$. Вычислим полную производную функции $v(x) = x^T Lx$ с учетом (1.1). В результате получаем

$$\dot{v}(x) = x^T (A^T L + LA)x. \tag{1.8}$$

Если производная $\dot{v}(x) < 0$, то функция $v(x)$ с ростом t неограниченно убывает до 0. В этом случае в силу (1.7) неограниченно убывает до 0 и норма $\|x(t)\|$, т.е. система (1.1) устойчивая. Если правую часть (1.8) приравнять к $-x^T Cx$, где C – произвольная положительно определенная матрица, то условие $\dot{v}(x) < 0$ всегда выполняется.

Таким образом, применение критерия Ляпунова состоит из двух этапов:

– для заданных матриц A и C решается уравнение (1.6);

– матрица L проверяется на знакоопределенность.

Проверить матрицу L на знакоопределенность можно либо с помощью критерия Сильвестра (матрица положительно определена, если все ее главные миноры строго положительны), либо с помощью вычисления ее собственных чисел (матрица положительно определена, если все ее собственные числа строго положительны). Если среди главных миноров или собственных чисел матрицы L есть отрицательные числа, то процесс $x(t)$ неустойчив.

Отметим, что если матрица A имеет собственные числа с нулевой вещественной частью, то уравнение (1.6) не имеет решения.

1.5. Выбор времени интегрирования

При решении системы уравнений (1.1) необходимо определить интервал интегрирования $[0,t]$ так, чтобы полученное решение достаточно хорошо отображало исследуемый процесс. Этот интервал интегрирования можно подбирать экспериментально, но общие соображения относительно этого выбора следующие.

Пусть $\alpha_0 = \max\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ – наибольшая вещественная часть собственных чисел матрицы A и β_0 – соответствующая мнимая часть. Тогда при достаточно большом t из всех слагаемых в (1.3) доминирующим будет слагаемое

$$x(t) \approx d_l' e^{\alpha_0 t} \cos\beta_0 t.$$

Если $\alpha_0 < 0$, то процесс $x(t)$ убывает, и конечный

момент t можно найти из условия $e^{\alpha_0 t} = \varepsilon$ или $t = \dfrac{\ln\varepsilon}{\alpha_0}$. Здесь ε – какое-то малое число, например $\varepsilon = 0.1$. Если $\alpha_0 > 0$, то процесс $x(t)$ возрастает, и конечный момент t можно найти из условия

$e^{\alpha_0 t} = E$ или $t = \dfrac{\ln E}{\alpha_0}$ Здесь E – какое-то большое число, например, $E = 10$.

Если величина α_0 мала, то интервал интегрирования $[0, t]$ можно взять равным нескольким (например, 3) периодам колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\beta_0}$ Здесь, естественно, предполагается, что $\beta_0 > 0$.

1.6. Задание к лабораторной работе

1. Для заданной матрицы А провести анализ на устойчивость на основе

– спектрального критерия,

– критерия Рауса–Гурвица,

– критерия Ляпунова.

2. Решить уравнение (1.1) и построить графики.

Провести сравнение полученных результатов.

3. Рассмотреть следующие варианты задания матрицы A.

а) матрица A строится в виде формы Фробениуса на основе вектора a, который, как известно, состоит из коэффициентов характеристического многочлена. Рассмотреть следующие варианты задания этого вектора:

многочлен Баттерворда с параметром w=1,

– вектор, состоящий 1,

– вектор, состоящий из гауссовских случайных величин,

– вектор, состоящий из равномерно распределенных случайных величин,

– многочлен, построенный для заданной спектральной матрицы.

б) матрица A строится случайным образом из гауссовских или из равномерно распределенных случайных величин.

4. Рассмотреть размерности $n = 2,3,4$. В качестве начального условия для уравнения (1.1) можно взять вектор, состоящий из 1.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

2.1. Постановка задачи

Рассматривается система линейных разностных уравнений вида

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

где x – n-мерный вектор состояний $(x \in R_n)$.

Определение. Процесс $x(0), x(1), \ldots, x(k), \ldots$ называется:

– устойчивым, если $\lim\limits_{k \to \infty} x(k) = 0$;

– относительно устойчивым, если начиная с некоторого k $\|x(k)\| < c$, где c – некоторая константа;

– неустойчивым, если $\lim\limits_{k \to \infty} x(k) = \infty$.

Типичные кривые приведены на рис. 2.1.

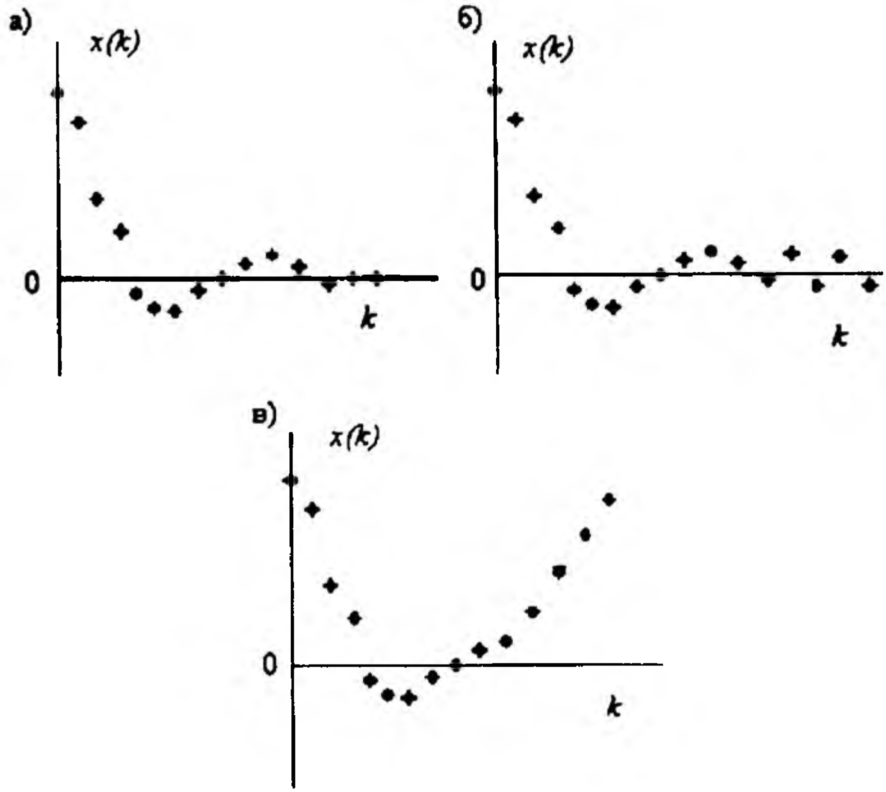


Рис. 2.1. Типичные кривые поведения процесса: а) устойчивый процесс; б) относительно устойчивый процесс; в) неустойчивый процесс

Проблема заключается в том, чтобы, не решая уравнение (2.1), а только на основании свойств матрицы A решить вопрос об устойчивости. Для этого сформулированы и теоретически доказаны критерии устойчивости.

2.2. Спектральный критерий устойчивости

Решение уравнения (2.1) можно записать в виде

$$x(k) = A^k x(0), \ k = 1,2,... \qquad (2.2)$$

Пусть P – матрица преобразования, приводящего матрицу A к жордановой форме J, т.е. $P^{-1}AP = J$ или $A = PJP^{-1}$. Подставляя последнее в (2.2), получаем

$$x(k) = PJ^k P^{-1}x(0),\ k = 1,2,... \tag{2.3}$$

Если предположить, что все собственные числа матрицы A $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$ простые, то $J = diag\{\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n\}$. В результате вместо (2.3) получаем

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} d_i\lambda_i^k,\ k = 1,2,..., \tag{2.4}$$

где d_i – какие-то постоянные векторы. В общем случае собственные числа являются комплексными, т.е.

$$\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i,\quad i = 1,...,n.$$

Каждое комплексное число можно представить в полярной форме

$$\lambda_i = |\lambda_i|e^{j\varphi_i} = |\lambda_i|(\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i), \tag{2.5}$$

где $\lambda_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$ – модуль комплексного числа, $\varphi_i = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$ – его аргумент. Подставляя (2.5) в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} x(k) &= \sum_{i=1}^{n} d_i|\lambda_i|^k e^{jk\varphi_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i|\lambda_i|^k(\cos k\varphi_i + j\sin k\varphi_i),\ k = 1,2,... \end{aligned} \tag{2.6}$$

Поскольку процесс $x(k)$ вещественный, а комплексные числа всегда образуют сопряженную пару, можно после ряда преобразований вместо (2.2) получить окончательно, что

$$x(k)=\sum_{i=1}^{n} d_i' \,|\lambda_i|^k \cos k\varphi_i, \quad k=1,2,... \tag{2.7}$$

где d_i' – какие-то постоянные векторы. Из (2.7) следует, что процесс $x(k)$ будет:

- устойчивым, если все $|\lambda_i| < 1,\ i = 1,...,n$;
- относительно устойчивым, если все $|\lambda_i| \le 1,\ i = 1,...,n$; ;
- неустойчивым, если имеется хотя бы одно собственное число с $|\lambda_i| > 1$.

Области устойчивости и неустойчивости приведены на рис. 2.2.

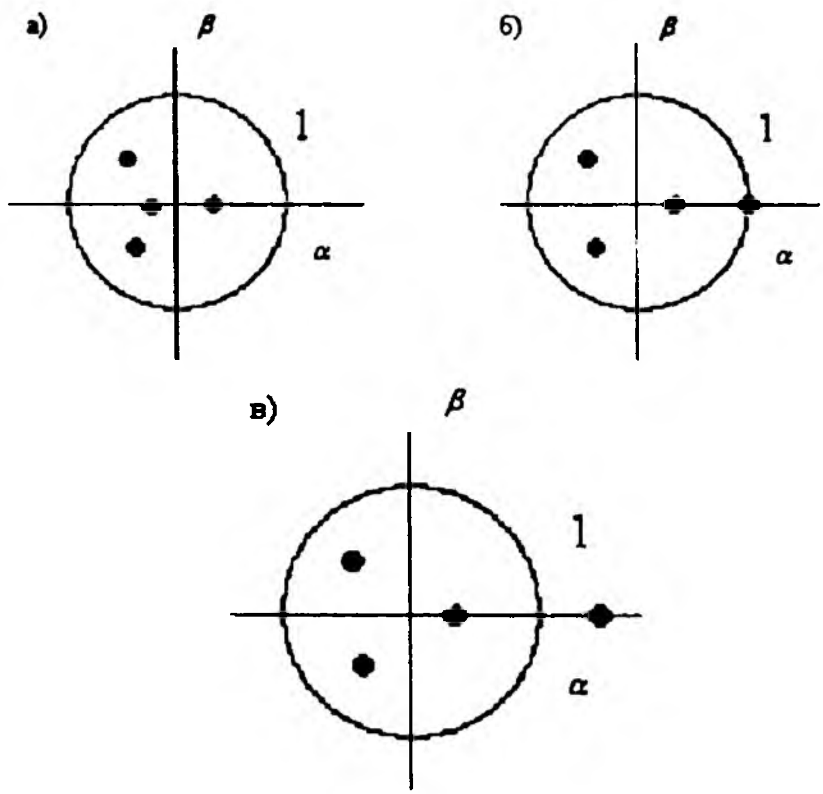


Рис. 2.2. Области устойчивости и неустойчивости: а) устойчивый процесс; б) относительно устойчивый процесс; в) неустойчивый процесс

Для дискретных систем критерии устойчивости на основе коэффициентов характеристического многочлена матрицы A имеют сложный вид и на практике не используются.

2.3. Критерий Ляпунова

Теорема 2.1. (Критерий Ляпунова) Чтобы процесс

$$x(0), x(1), \ldots, x(k), \ldots$$

был устойчивым, достаточно, чтобы матрица L, являющаяся решением обратного уравнения Ляпунова

$$L = A^T LA + C, \tag{2.8}$$

была положительно определенной. Здесь C – произвольная положительно определенная матрица (например, $C = I$).

Доказательство. Введем функцию Ляпунова

$$v(x(k)) = x(k)^T Lx(k),$$

где L – симметрическая положительно определенная матрица. Если матрица L положительно определена, то

$$v(x(k)) = x(k)^T Lx(k) > c\|x(k)\|, \tag{2.9}$$

где $c = \lambda_{\min}(L) > 0$. С учетом (2.1) можно записать равенство

$$\begin{aligned} v(x(k+1)) &= x(k+1)^T Lx(k+1) = \\ &= x(k)^T A^T LAx(k). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если для любого k

$$v(x(k+1)) < v(x(k)), \tag{2.11}$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} v(x(k)) = 0$; и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = 0$; т.е. система (2.1) устойчивая.

Если в правую часть выражения (2.10) подставить

$$A^T LA = L - C,$$

что следует из (2.8), то выражение (2.10) принимает вид

$$v(x(k+1)) = v(x(k)) - x(k)^T Cx(k). \qquad (2.12)$$

Поскольку $C > 0$, то из (2.12) следует (2.11). Таким образом, применение критерия Ляпунова состоит из двух этапов:

– для заданных матрицах A и C решается уравнение (2.8);

– матрица L проверяется на знакоопределенность.

Отметим, что если матрица A имеет хотя бы одно собственное число $|\lambda_i| = 1$, то уравнение (2.8) не имеет решения.

Проверить матрицу L на знакоопределенность можно либо с помощью критерия Сильвестра (матрица положительно определена, если все ее главные миноры строго положительны), либо с помощью вычисления ее собственных чисел (матрица положительно определена, если все ее собственные числа строго положительны). Если среди главных миноров или собственных чисел матрицы L есть отрицательные числа, то процесс $x(0), x(1),..., x(k),...$ неустойчив. Если все главные миноры или собственные числа матрицы L неотрицательны, т.е. среди них есть нулевые, то процесс $x(0), x(1),..., x(k),...$ либо относительно устойчив, либо неустойчив.

2.4. Выбор времени интегрирования

При решении системы уравнений (2.1) необходимо определить число шагов N так, чтобы полученное решение достаточно хорошо отображало исследуемый процесс. Это число шагов можно подбирать экспериментально, но общие соображения относительно этого выбора следующие.

Пусть $\lambda_0 = \max\{|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_n|\}$ – наибольший модуль собственных чисел матрицы A и φ_0 – соответствующий аргумент. Тогда при достаточно большом k из всех слагаемых в (2.7) доминирующим будет слагаемое

$$x(k) \approx d_0'\lambda_0^k \cos\varphi_0 k.$$

Если $\lambda_0 < 1$, то процесс $x(k)$ убывает, и конечное число шагов N можно найти из условия $\lambda_0^N = \varepsilon$ или $N = \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\lambda_0}$. Здесь ε – какое-то малое число, например $\varepsilon = 0.1$. Если $\lambda_0 > 1$, то процесс $x(k)$ возрастает, и конечное число шагов N можно найти из условия $\lambda_0^N = E$ или $N = \dfrac{\ln E}{\ln\lambda_0}$. Здесь E – какое-то большое число, например $E = 10$.

Если величина λ_0 мало отличается от 1, то конечное число шагов N можно взять равным нескольким (например, 3) периодам колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\varphi_0}$. Здесь, естественно, предполагается, что $\varphi_0 > 0$.

2.5. Задание к лабораторной работе

1. Для заданной матрицы A провести анализ на устойчивость на основе:

– спектрального критерия,

– критерия Ляпунова.

2. Решить уравнение (2.1) и построить графики

Провести сравнение полученных результатов.

3. Рассмотреть следующие варианты задания матрицы A.

а) матрица A строится в виде формы Фробениуса на основе вектора a, который, как известно, состоит из коэффициентов характеристического многочлена. Рассмотреть следующие варианты задания этого вектора:

– многочлен Баттерворда с параметрами w=0.5, 1, 1.5,

– вектор, состоящий 1,

– вектор, состоящий из гауссовских случайных величин,

– вектор, состоящий из равномерно распределенных случайных величин,

– многочлен, построенный для заданной спектральной матрицы.

б) матрица A строится случайным образом из гауссовских или из равномерно распределенных случайных величин.

4. Рассмотреть размерности $n = 2,3,4$. В качестве начального условия для уравнения (2.1) взять вектор, состоящий из 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
редакционно-издательского отдела ТГУ

Заказ № 85 от «4» мая 2009 г. Тираж 100 экз.