ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ОПТИМАЛЬНОЕ И АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Учебно-методическое пособие

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан ФПМК

проф А М Горцев

19 апреля 2010 г.

ОПТИМАЛЬНОЕ И АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Учебно-методическое пособие

к лабораторным работам по курсу

«Адаптация в экономических системах»

Томск – 2010

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

ПРОТОКОЛ № 35 от 16 апреля 2010 г

Председатель комиссии, профессор

С.Э Воробейчиков

В учебно-методическом пособии приводятся задания к лабораторным работам, в которых рассмотрены задачи оптимального и адаптивного управления фондами потребления [1] и задачи управления фирмой [2]. Задания и рекомендации по выполнению лабораторных работ составлены по материалам, опубликованным в [3-8] Лабораторные работы выполняются в системе Mathcad [9].

Пособие разработано для студентов факультета прикладной математики и кибернетики дневной формы обучения, используется при изучении курса "Адаптация в экономических системах"

Составитель: ***В.И.Смагин***

Лабораторная работа № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ФОНДА ПРОИЗВОДСТВЕННОГО НАКОПЛЕНИЯ И ПОТРЕБЛЕНИЯ

Рассмотрим модель фонда производственного накопления и потребления предприятия (фирмы, отрасли) Пусть x_1 – фонд производственного накопления, x_2 – фонд потребления (включая непроизводственное накопление), b_1 и b_2 – приростные капиталоемкости (балансные коэффициенты). Тогда справедливо следующее балансное соотношение

$$x_1 = b_1\dot{x}_1 + b_1\dot{x}_2.$$

Пусть L – количество работников на предприятии (фирме, отрасли) в начальный момент времени $t = 0$, γ – темп роста населения (считается постоянным). Тогда $\frac{x_2}{L}e^{-\gamma t}$ – объем фонда потребления на одного работника. Определим величину скорости роста душевого потребления v:

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{L}e^{-\gamma t}\right) = (\dot{x}_2 - \gamma x_2)\frac{e^{-\gamma t}}{L}.$$

Введем переменную (управление) $u = \dot{x}_2 - \gamma x_2$ – скорость роста фонда потребления Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{b_1}x_1 - \frac{\gamma b_2}{b_1}x_2 - \frac{b_2}{b_1}u, \quad x_1(0) = x_{1,0},$$

$$x_2 = \gamma x_2 + u, \quad x_2(0) = x_{2,0} \tag{1}$$

Введем обозначения:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) в векторно-матричной форме будет иметь вид:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(0) = x_0,$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b_1} & -\dfrac{\gamma b_2}{b_1} \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} -\dfrac{b_2}{b_1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ

1. Выполнить моделирование с использованием программы **rkfixed** пакета **Mathcad** Для постоянного значения $u = 10{,}5$, выполнив моделирование,построить графики переходных процессов для фондов и построить фазовый портрет (интервал времени задать от 0 до 15, число разбиений – 150). Исходные данные и варианты приведены в таблице 1.

2 Подобрать критическое значение управления u (такое значение, при котором x_1 с некоторого момента начинает снижаться).

3. Исследовать поведение чувствительностей значений фондов при вариациях b_1 и b_2 (начальные значения чувствительностей принять нулевыми) Построить графики чувствительностей.

4. Составить программу решения дифференциального уравнения по методу Эйлера, преобразовав модель к дискретной форме

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Шаг интегрирования $\Delta t = 0{,}1$.

5. Выполнить моделирование объекта со случайными возмущениями

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + q(k),$$

где $q(k)$ – гауссовская последовательность с характеристиками:

$$M\{q(k)\}=0,\ M\{q(k)q^T(j)\}=Q\delta_{k,j}.$$

Отметим, что аддитивные возмущения $q(k)$ вводятся для учета возможных ошибок в модели

6. В отчете привести результаты моделирования в виде графиков переходных процессов, фазовые портреты и графики изменения чувствительностей. Осуществить анализ чувствительностей. Сделать выводы.

Лабораторная работа № 2

ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФОНДОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

1. Для дискретной модели фонда производственного накопления и потребления

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+q(k),\quad x(0)=x_0, \tag{2}$$

и модели желаемого изменения фонда потребления

$$w(k+1)=(1+r)w(k),\ w(0)=w_0,$$

r – заданный темп роста фонда потребления Все исходные данные и варианты приведены в таблицах 1, 2. Матрица выхода системы равна

$$F=(0\quad 1)$$

Оптимизируемый локальный критерий имеет вид

$$J(k)=M\{(Fx(k+1)-w(k+1))^{\mathrm{T}}C(Fx(k+1)-w(k+1))+ \\ +u^{\mathrm{T}}(k)Du(k)\}, \tag{3}$$

где C, D – весовые коэффициенты критерия (заданы в таблице 2).

Выполнить моделирование системы (2), реализовав локально-оптимальное управление

$$u(k)=-(B^TF^TCFB+D)^{-1}B^TF^TC[FAx(k)-w(k+1)],$$

обеспечиввющее слежение за траекторией $w(k)$. Сначала задать матрицу $Q = 0$. Интервал времени. $k = 0,\ldots,150$.

Повторить моделирование для $Q \neq 0$ (см. таблицу 1). Исследовать влияние весового коэффициента C на качество слежения (задать C=0,1; C=1; C=10).

2. Выполнить моделирование с учетом ограничений на управление:

$$\bar{u}(k) = \begin{cases} 10{,}5 & \text{если} \quad u(k) > 10{,}5; \\ u(k) & \text{если} \quad 2{,}1 \leq u(k) \leq 10{,}5; \\ 2{,}1 & \text{если} \quad u(k) < 2{,}1. \end{cases}$$

3. Выполнить моделирование для переменного коэффициента r (величина r равна величине, приведенной в таблице 1, если $k \leq 105$ и увеличивается на 30%, если $k > 105$).

4 Для всех рассмотренных случаев построить графики переходных процессов и графики управлений. Сделать выводы.

Лабораторная работа № 3

ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФОНДОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНИВАТЕЛЕЙ

Все результаты моделирования выполнить для 2-х случаев:
а) без учета на ограничения,
б) с учетом ограничений.

1 Для дискретной модели фонда производственного накопления и потребления

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

и модели желаемого изменения фонда потребления:

$$w(k+1) = (1+r)w(k), \; w(0) = w_0,$$

где r – заданный темп роста фонда потребления.

Выполнить моделирование системы (4), реализовав локально-оптимальное управление

$$u(k) = -(B^T F^T C F B + D)^{-1} B^T F^T C(FA\hat{x}(k) - w(k+1)),$$

обеспечивающее слежение за траекторией $w(k)$. Здесь $\hat{x}(k)$ – оценка фильтрации или экстраполяции. Диагональные элементы матрицы Q, весовые коэффициенты критерия C, D взять из таблиц 1, 2. Интервал времени: $k = 0,....,150$

Предполагается, что модель системы контроля имеет вид:

$$y(k) = Hx(k) + \eta(k),$$

где $\eta(k)$ – гауссовская случайная последовательность, независимая от $q(k)$, с характеристиками

$$M\{\eta(k)\} = 0, \quad M\{\eta(k)\eta^T(j)\} = V\delta_{k,j}.$$

Матрица системы контроля равна

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Реализовать уравнения фильтра Калмана:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_f(k)[y(k+1) - H(A\hat{x}(k) + Bu(k))],$$

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0), \qquad (5)$$

$$P_f(k+1/k) = AP_f(k)A^T + Q, \qquad (6)$$

$$K_f(k) = P_f(k+1/k)H^T[HP_f(k+1/k)H^T + V]^{-1}, \qquad (7)$$

$$P_f(k+1) = (E_2 - K_f(k)H)P_f(k+1/k), \quad P_f(0) = P_{f0}. \qquad (8)$$

2. Повторить моделирование с использованием экстраполятора Калмана (этот случай позволяет учитывать возможные задержки посту-

щения информации в системе контроля на 1 такт, результат можно обобщить на случай задержек на несколько тактов):

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_e(k)[y(k) - H\hat{x}(k)],\ \hat{x}(0) = \overline{x}(0), \quad (9)$$

$$K_e(k) = AP_e(k)H^T(HP_e(k)H^T + V)^{-1}, \quad (10)$$

$$P_e(k+1) = (A - K_e(k)H)P_e(k)(A - K_e(k)H)^T + \\ +Q + K_e(k)VK_e^T(k),\ P_e(0) = P_{e0}. \quad (11)$$

Начальные условия следующие $\hat{x}(0)$, диагональные элементы матриц $P_e(0) = P_f(0)$ приведены в таблице 3.

3 Повторить моделирование 1-го варианта для матрицы

$$V = \begin{pmatrix} 6,8 & 2,4 \\ 2,4 & 7,9 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В этом случае необходимо дополнительно решить матричное уравнение $XX^T = V$.

4. Исследовать качество оценивания в зависимости от матрицы $P_e(0)$, уменьшая и увеличивая диагональные элементы.

5. Для всех рассмотренных случаев построить графики переходных процессов их оценок и графики управлений. Сделать выводы

Лабораторная работа № 4

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФОНДОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ТРЕХ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ (b_1, b_2 и γ)

1. Для дискретной модели фонда производственного накопления и потребления

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) + q(k),\quad x(0) = x_0, \quad (12)$$

и модели желаемого изменения фонда потребления:

$$w(k+1)=(1+r)w(k),\ w(0)=w_0,$$

В (12) трехмерный вектор неизвестных параметров задается в виде:

$$\theta=\begin{pmatrix}\frac{1}{b_1}\\ \frac{b_2}{b_1}\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

Предполагается, что вектор θ является неизвестной константой. Это означает, что динамическая модель для вектора θ следующая:

$$\theta(k+1)=\theta(k),\quad \theta(0)=\theta_0, \tag{13}$$

где θ_0 – случайный вектор с характеристиками:

$$M\{\theta_0\}=\bar{\theta}_0,\quad M\{(\theta_0-\bar{\theta}_0)(\theta_0-\bar{\theta}_0)^T\}=P_{\theta_0}.$$

Выполнить моделирование системы (12), реализовав адаптивное управление в предположении, что вектор $x(k)$ контролируется точно без ошибок. Тогда адаптивное управление будет иметь вид.

$$\begin{gathered}u(k)=-[B^T(\hat{\theta}(k))F^TCFB(\hat{\theta}(k))+D]^{-1}B^T(\hat{\theta}(k))\times\\ \times F^TC[FA(\hat{\theta}(k))x(k)-w(k+1)],\end{gathered} \tag{14}$$

Определить матрицу $G(k)=G(x(k),u(k))$ и вектор $g(k)=$ $=g(x(k),u(k))$ из соотношения

$$x(k+1)=A(\theta)x(k)+B(\theta)u(k)+q(k)=G(k)\theta+g(k)+q(k). \tag{15}$$

В качестве алгоритма идентификации используется дискретный фильтр Калмана, построенный с использованием модели (13) и представлении объекта (12) в виде (15):

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K_0(k)[x(k+1) - G(k)\hat{\theta}(k) - g(k)], \ \hat{\theta}(0) = \bar{\theta}_0, \quad (16)$$

$$K_0(k) = P_0(k)G(k)^T[G(k)P_0(k)G(k)^T + Q]^{-1}, \quad (17)$$

$$P_0(k+1) = (E_3 - K_0(k)G(k))P_0(k), \ P_0(0) = P_{\theta_0}. \quad (18)$$

Начальные условия для уравнения (16) следующие:

$$\hat{\theta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $P_0(0)$ диагональная (элементы матрицы приведены в таблице 3).

2 Построить графики переходных процессов, графики адаптивного управления и оценок неизвестных параметров. Сделать выводы.

Лабораторная работа № 5

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФОНДОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ (b_1 и b_2)

1. Для дискретной модели фонда производственного накопления и потребления

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) + q(k), \ x(0) = x_0, \quad (19)$$

и модели желаемого изменения фонда потребления:

$$w(k+1) = (1+r)w(k), \ w(0) = w_0,$$

В (19) вектор неизвестных параметров определить следующим соотношением

$$\theta = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b_1} \\ \dfrac{b_2}{b_1} \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что вектор θ является неизвестиой константой.

Выполнить моделирование системы (19), реализовав адаптивное управление в предположении, что вектор $x(k)$ контролируется точно без ошибок. Тогда адаптивное управление будет иметь вид

$$u(k) = -(B^T(\hat{\theta}(k))F^T CFB(\hat{\theta}(k)) + D)^{-1} B^T(\hat{\theta}(k))F^T \times \times C(FA(\hat{\theta}(k))x(k) - w(k+1)). \tag{20}$$

Диагональные элементы матрицы Q, весовые коэффициенты критерия C, D заданы в таблицах. Интервал времени. $k = 0,\ldots,200$

В качестве алгоритма идентификации используется дискретный фильтр Калмана:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K_\theta(k)[x(k+1) - G(k)\hat{\theta} - g(k)], \; \hat{\theta}(0) = \bar{\theta}_0, \tag{21}$$

$$K_\theta(k) = P_\theta(k)G(k)^T(G(k)P_\theta(k)G(k)^T + Q)^{-1}, \tag{22}$$

$$P_\theta(k+1) = (E_2 - K_\theta(k)G(k))P_\theta(k), \; P_\theta(0) = P_{\theta_0} \tag{23}$$

Начальные условия для уравнения (4) следующие

$$\hat{\theta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $P_\theta(0)$ диагональная и задана в таблице 3.

Определить матрицу $G(x(k),u(k))$ и вектор $g(x(k),u(k))$. Учитывая, что 2-ая строка матрицы $G(x(k),u(k))$ нулевая, модифицировать уравиения фильтрации (21–23). Эта модификация позволит вместо полного вектора $x(k+1)$ в (21) использовать только 1-ю компоненту этого вектора

2. Построить графики переходных процессов, графики адаптивного управлений и оценок неизвестных параметров. Результаты моделирования выполнить для 2-х случаев:

а) без учета на ограничения;

б) с учетом ограничений

Сравнить качество оценок неизвестных параметров. Сделать выводы

3. Выполнить моделирование в предположении, что контроль за состоянием объекта осуществляется с ошибками Модель системы контроля имеет вид:

$$y(k) = Hx(k) + \eta(k),$$

где $\eta(k)$ – гауссовская последовательность независимая от $q(k)$ с характеристиками.

$$M\{\eta(k)\} = 0, \quad M\{\eta(k)\eta^T(j)\} = V\delta_{k,j}.$$

Матрица V диагональная, ее элементы заданы в таблице 2. Матрица системы контроля следующая

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лабораторная рвбота № 6

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФОНДОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ДВУХЭТАПНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

1. Для дискретной модели фонда производственного накопления и потребления

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \qquad (24)$$

и модели желаемого изменения фонда потребления:

$$w(k+1) = (1+r)w(k),\ w(0) = w_0.$$

Вектор неизвестных параметров определяется следующим соотношением

$$\theta = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b_1} \\ \dfrac{b_2}{b_1} \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Выполнить моделирование системы (24), реализовав адаптивное управление в предположении, что вектор $x(k)$ контролируется с помощью следующей модели

$$y(k) = Hx(k) + \eta(k),$$

где $\eta(k)$ – гауссовская случайная последовательность, независимая от $q(k)$, с характеристиками:

$$M\{\eta(k)\} = 0, \quad M\{\eta(k)\eta^T(j)\} = V\delta_{k,j}.$$

Матрица системы контроля равна

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для вычисления оценок вектора неизвестных параметров использовать алгоритм двухэтапной идентификации

Адаптивное управление будет иметь вид

$$u(k) = -[B^T(\hat\theta(k))F^TCFB(\hat\theta(k)) + D]^{-1}B^T(\hat\theta(k)) \times \\ \times F^TC[FA(\hat\theta(k))\hat x(k) - w(k+1)], \qquad (25)$$

Интервал времени: $k = 0,\ldots,150$.

Оценки векторов $\hat{x}(k)$ и $\hat{\theta}(k)$ определяются с помощью следующих формул:

$$\hat{x}(k+1) = A(\hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + B(\hat{\theta}(k))u(k) + K_f(k)[y(k+1) -$$
$$-H(A(\hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + B(\hat{\theta}(k))u(k))],\ \hat{x}(0) = \bar{x}(0), \tag{26}$$

$$P_f(k+1/k) = A(\hat{\theta}(k))P_f(k)A(\hat{\theta}(k))^T + Q, \tag{27}$$

$$K_f(k) = P_f(k+1/k)H^T[HP_f(k+1/k)H^T + V]^{-1}, \tag{28}$$

$$P_f(k+1) = (E_2 - K_f(k)H)P_f(k+1/k),\ P_f(0) = P_{f_0}, \tag{29}$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K_\theta(k)[y(k+1) - HG(k)\hat{\theta} - Hg(k)],\ \hat{\theta}(0) = \bar{\theta}_0, \tag{30}$$

$$K_\theta(k) = P_\theta(k)G(k)^T[G(k)P_\theta(k)G(k)^T + HQH^T + V]^{-1}, \tag{31}$$

$$P_\theta(k+1) = (E_3 - K_\theta(k)G(k))P_\theta(k),\ P_\theta(0) = P_{\theta_0}, \tag{32}$$

где

$$G(k) = G(\hat{x}(k), u(k)),\ g(k) = g(\hat{x}(k), u(k)).$$

Начальные условия для уравнения (30) следующие:

$$\hat{\theta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $P_\theta(0)$ диагональная (см. таблицу 3).

2. Построить графики переходных процессов, графики адаптивного управления и оценок неизвестных параметров. Сделать выводы.

Лабораторная работа № 7

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ФИРМОЙ

1. Описание модели производства, сбыта и хранения n видов товаров

Рассмотрим модель производства n видов товаров в условиях рынка. Вектор состояния $x(k)$ представлен компонентами:

$$x(k)=\begin{bmatrix} z_1(k) \\ v_1(k) \\ z_2(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \\ v_n(k) \\ w(k) \end{bmatrix}, \qquad (33)$$

где $z_i(k)$ – количество товаров i-го вида на рынке, $v_i(k)$ – количество товаров i-го вида у потребителя, $i=\overline{1,n}$; $w(k)$ – прибыль.

Математическая модель динамики изменения количества товаров у потребителей и на рынке, а также прибыли может быть записана в следующем виде:

$$z_1(k+1)=(1-k_{11})z_1(k)-s_1(k)+u_1(k),$$

$$v_1(k+1)=(1-k_{21})v_1(k)+s_1(k),$$

$$z_2(k+1)=(1-k_{12})z_2(k)-s_2(k)+u_2(k),$$

$$v_2(k+1)=(1-k_{22})v_2(k)+s_2(k),$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$z_n(k+1)=(1-k_{1n})z_n(k)-s_n(k)+u_n(k),$$

$$v_n(k+1) = (1-k_{2n})v_n(k) + s_n(k)$$

$$w(k+1) = w(k) + c_1 s_1(k) + c_2 s_2(k) + \ldots + c_n s_n(k) - k_{31} z_1(k) - k_{32} z_2(k) - $$

$$\ldots - k_{3n} z_n(k) - c_{01} u_1(k) - c_{02} u_2(k) - \ldots - c_{0n} u_n(k), \qquad (34)$$

где $u_i(k)$ – количество товаров, выпускаемых за один такт, $i = \overline{1,n}$, k_{1i} – коэффициенты потерь; k_{2i} – коэффициенты потребления; k_{3i} – стоимость хранения единицы товаров; c_{0i} – себестоимости; $s_i(k)$ – количество проданных товаров i-го вида в один такт, $i = \overline{1,n}$ Функции продаж определяются по формулам:

$$s_i(k) = n_i \exp(-c_i)(1 - v_i(k) Y_i^{-1}) z_i(k), \qquad (35)$$

n_i – коэффициенты продаж; c_i – цены на товары, $i = \overline{1,n}$; Y_i – потенциальный спрос для i-го вида товара (объем рынка для i-го вида товара).

Модель (34), (35) может быть представлена в следующем векторно-матричном виде

$$x(k+1) = A\varphi(x(k)) + Bu(k) + q(k), \qquad (36)$$

где вектор $\varphi(x(k))$ следующий:

$$\varphi(x(k)) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ v_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \\ v_n(k) \\ w(k) \\ v_1(k) z_1(k) \\ v_2(k) z_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) z_n(k) \end{bmatrix}.$$

В (36) введены дополнительно аддитивные возмущения $q(k)$, которые учитывают возможные ошибки модели. Характеристики процесса $q(k)$ описаны ниже Матрица динамики A для данного объекта имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{1,2n+2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{2,2n+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1,3n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,3n+1} \\ a_{2n+1,1} & 0 & a_{2n+1,3} & \cdots & a_{2n+1,2n-1} & 0 & 1 & a_{2n+1,2n+2} & a_{2n+1,2n+3} & \cdots & a_{2n+1,3n+1} \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы определяются по формулам:

$$a_{11} = 1 - k_{11} - n_1 \exp(-c_1),$$

$$a_{1,2n+2} = \frac{n_1 \exp(-c_1)}{Y_1},$$

$$a_{21} = n_1 \exp(-c_1),$$

$$a_{22} = 1 - k_{21},$$

$$\vdots$$

$$a_{2,2n+2} = -\frac{n_1 \exp(-c_1)}{Y_1},$$

$$a_{2n-1,2n-1} = 1 - k_{1n} - n_n \exp(-c_n),$$

$$a_{2n-1,3n+1} = \frac{n_n \exp(-c_n)}{Y_n},$$

$$a_{2n,2n-1} = n_n \exp(-c_n),$$

$$a_{2n,2n} = 1 - k_{2n},$$

$$a_{2n,3n+1} = -\frac{n_n \exp(-c_n)}{Y_n},$$

$$a_{2n+1,1} = -k_{31} + c_1 n_1 \exp(-c_1),$$

$$a_{2n+1,3} = -k_{32} + c_2 n_2 \exp(-c_2),$$

$$\vdots$$

$$a_{2n+1,2n-1} = -k_{3n} + c_n n_n \exp(-c_n),$$

$$a_{2n+1,j} = -\frac{c_i n_i \exp(-c_i)}{Y_i},\ j = \overline{2n+2, 3n+1},\ i = \overline{1,n}.$$

Матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_{01} & -c_{02} & -c_{03} & -c_{04} & \cdots & -c_{0n} \end{bmatrix}.$$

Начальное значение $x(0)$ и вектор возмущений $q(k)$ по предположению являются гауссовскими случайными величинами, для которых выполняются условия:

$$M\{q(k)\} = 0,\quad M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}. \qquad (37)$$

Здесь δ_{kj} символ Кронекера ($\delta_{kj} = 1$ при $k = j$ и $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$).

Предполагается, что начальное состояние и вектор возмущений взаимно некоррелированы:

$$M\{x(0)q^T(k)\} = 0, \qquad (38)$$

$$M\{x(0)\} = \bar{x}_0.\ M\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0}. \qquad (39)$$

2. Описание модели производства, сбыта и хранения двух видов товаров

Рассмотрим модель производства двух видов товаров в условиях рынка. Вектор состояния $x(k)$ состоит из пяти компонент:

$$x(k)=\begin{bmatrix} z_1(k) \\ v_1(k) \\ z_2(k) \\ v_2(k) \\ w(k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

где $z_1(k)$, $z_2(k)$ – количество товаров 1-го и 2-го вида на рынке, $v_1(k)$, $v_2(k)$ – количество товаров 1-го и 2-го вида у потребителя, $w(k)$ – прибыль.

Математическая модель динамики изменения количества товаров у потребителей и на рынке, а также прибыли может быть записана в следующем виде:

$$z_1(k+1)=(1-k_{11})z_1(k)-s_1(k)+u_1(k),$$

$$v_1(k+1)=(1-k_{21})v_1(k)+s_1(k),$$

$$z_2(k+1)=(1-k_{12})z_2(k)-s_2(k)+u_2(k),$$

$$v_2(k+1)=(1-k_{22})v_2(k)+s_2(k),$$

$$w(k+1)=w(k)+c_1s_1(k)+c_2s_2(k)-k_{31}z_1(k)-k_{32}z_2(k)-$$

$$-c_{01}u_1(k)-c_{02}u_2(k), \quad (41)$$

где $u_1(k)$, $u_2(k)$ – количество товаров, выпускаемых за один такт, k_{11}, k_{12} – коэффициенты потерь; k_{21}, k_{22} – коэффициенты потребления; k_{31}, k_{32} – стоимость хранения единицы товаров, c_{01}, c_{02} – себестоимости; $s_1(k)$, $s_2(k)$ – количество проданных товаров 1-го и 2-го вида в один такт (функции продаж). Формулы для $s_1(k)$, $s_2(k)$ имеют вид:

$$s_1(k)=n_1\exp(-c_1)(1-v_1(k)Y_1^{-1})z_1(k), \quad (42)$$

$$s_2(k) = n_2 \exp(-c_2)(1 - \nu_2(k) Y_2^{-1}) z_2(k), \tag{43}$$

n_1, n_2 – коэффициенты продаж, c_1, c_2 – цены на товары; Y_1, Y_2 – потенциальный спрос на товар 1-го вида и 2-го вида.

В векторно-матричном виде модель следующая:

$$x(k+1) = A\varphi(x(k)) + Bu(k), \; x(0) = x_0, \tag{44}$$

В (44) вектор $\varphi(x(k))$ представляется в виде:

$$\varphi(x(k)) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k)x_4(k) \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Матрица динамики A для данного объекта имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1-k_{11}-n_1\exp(-c_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{n_1\exp(-c_1)}{Y_1} & 0 \\ n_1\exp(-c_1) & 1-k_{21} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{n_1\exp(-c_1)}{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1-k_{12}-n_2\exp(-c_2) & 0 & 0 & 0 & \dfrac{n_2\exp(-c_2)}{Y_2} \\ 0 & 0 & n_2\exp(-c_2) & 1-k_{22} & 0 & 0 & \dfrac{n_2\exp(-c_2)}{Y_2} \\ k_{11}+c_1n_1\exp(-c_1) & 0 & k_{12}+c_2n_2\exp(-c_2) & 0 & 1 & \dfrac{c_1n_1\exp(-c_1)}{Y_1} & \dfrac{c_2n_2\exp(-c_2)}{Y_2} \end{bmatrix}.$$

Матрица B и вектор управления следующие

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ -c_{01} & -c_{02}\end{bmatrix},\ u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\ u_2(k)\end{bmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ

1. Для модели фирмы, производящей два вида товаров (41)–(43) выполнить моделирование для следующих значений параметров.

$u_1=60$, $u_2=65$ – количество товаров, выпускаемых фирмой за один такт; $n_1=1{,}95$, $n_2=1{,}8$ – коэффициенты продаж, $c_1=2{,}5$ у.е., $c_2=1{,}5$ у.е. – цены на товары; $c_{0,1}=1{,}0$ у.е., $c_{0,2}=0{,}9$ у.е. – себестоимости, $Y_1=Y_2=1000$ – потенциальный спрос (объем рынка); $k_{1,1}=0{,}15$, $k_{1,2}=0{,}13$ – коэффициенты потерь; $k_{2,1}=0{,}1$, $k_{2,2}=0{,}055$ – коэффициенты потребления, $k_{3,1}=0{,}002$ у.е., $k_{3,2}=0{,}001$ у.е. – стоимости хранения единицы товара за один день

Моделирование выполнить на интервале времени от 0 до 140 (один такт соответствует 1 дню) для следующих начальных условий.

$z_1(0)=150$, $z_2(0)=300$, $v_1(0)=250$, $v_2(0)=170$, $w(0)=w_0$ у.е.

Полученные графики переходных процессов привести в отчет (величина w_0 приведена в таблице 4). Определить прибыль в последний день. Сделать выводы.

2. Исследовать влияние различных стратегий управления фирмой на полученую прибыль

Стратегия 1. Увеличить цену 2-го вида товара c_2 до величины 2,3у.е. Привести в отчет графики изменения прибыли. Определить прибыль в последний день исследуемого периода (w_{140}). Оценить возможность реальной реализации этой стратегии. Сделать выводы.

Стратегия 2. Увеличить коэффициент продаж n_2 до величины 3,2 (увеличение этого коэффициента можно осуществить, реализовав рекламную компанию) В модели учесть затраты на рекламу в 2у.е. в течении первых 10 дней Затем этот коэффициент должен уменьшаться по линейному закону в течение 60 дней до первоначальной величины $n_2 = 1,8$. Затем опять провести рекламную компанию в течение 10 дней

Привести в отчет графики изменения прибыли. Определить прибыль в последний день исследуемого периода (w_{140}). Сделать выводы.

Стратегия 3. Увеличить потенциальный спрос (объем рынков для 1-го и 2-го вида товаров). В модели учесть затраты на расширение рынка в 8у.е. в течении первых 60 дней. По окончании этого периода значения Y_1 и Y_2 принять равными 2000 (увеличение этих параметров осуществляется посредством расширения рынка в течении первых 60 дней, например, создав новые торговые точки в новом регионе).

Привести в отчет графики изменения прибыли. Определить прибыль в последний рабочий день исследуемого периода (w_{140}). Сделать выводы.

Лабораторная работа № 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПРОИЗВОДСТВА. УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ МОЩНОСТИ

ЗАДАНИЕ

1. Применить метод покоординатного спуска для максимизации терминального критерия $J(u_1, u_2) = w_{140}$ (прибыли фирмы в последний день), применив метод деления шага пополам. Начальное значение шага принять равным 10, оптимизацию осуществить сначала по переменной u_2, затем по переменной u_1.

Промежуточные результаты оформить в виде таблицы. Привести в отчете оптимальные значения объемов производства и оптимальное значение прибыли.

2. Найти оптимальные значения объемов производства и прибыли, используя процедуру **maximize** пакета прикладных программ **Mathcad**.

3. Найти оптимальные значения объемов производства и прибыли с учетом ограничений (величина u_{max} приведена в таблице 4):

$$u_1 + u_2 \le u_{max}$$

4. Построить график поверхности, определяемой критерием $J(u_1, u_2)$. Построить графики сечений поверхности при u_1=40 и u_2=22. Сделать выводы о чувствительности критерия к изменениям объемов производства. Сделать выводы, дать рекомендации.

Лаборвторная работа № 9

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФИРМОЙ

1. Для дискретной модели фирмы, производящей 1 вид товара (предполагается, что потенциальный спрос неограничен)

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + Bu(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \tag{46}$$

и модели желаемого изменения прибыли фирмы:

$$\overline{w}(k+1) = (1+r)\overline{w}(k), \overline{w}(0) = w_0. \tag{47}$$

Компоненты вектора состояния $x(k) = [z(k) \quad v(k) \quad w(k)]^{\mathrm{T}}$, где $z(k)$ – количество товаров на рынке, $v(k)$ – количество товаров у потребителя, $w(k)$ – прибыль Функция продаж в этом случае примет вид

$$s(k) = n_0 \exp(-c) z(k). \tag{48}$$

В (46) вектор неизвестных параметров определен следующим соотношением

$$\theta = \begin{pmatrix} n_0 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

где n_0 – коэффициент продаж, k_2 – коэффициент потребления. Предполагается, что вектор θ является неизвестной константой. В (46) матрицы $A(\theta)$ и B следующие

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 - \theta_1 \exp(-c) - k_1 & 0 & 0 \\ \theta_1 \exp(-c) & 1 - \theta_2 & 0 \\ c\theta_1 \exp(-c) - k_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -c_0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

где c – цена единицы продукции, c_0 – себестоимость, k_1 – коэффициент потерь, k_3 – стоимость хранения единицы продукции в день.

Определить матрицу G и вектор g, необходимые для реализации алгоритма двухэтапной идентификации (см. лабораторную работу № 6). Реализовать адаптивное управление фирмой:

$$u(k) = -(B^T F^T C F B + D)^{-1} B^T F^T C(FA(\hat{\theta}(k))\hat{x}(k) - \bar{w}(k+1)). \quad (50)$$

Исходные данные, необходимые для решения задачи адаптивного управления следующие.

$$F = (0\ \ 0\ \ 1),\ C = 1,\quad D = 0{,}01,\ r = 0{,}0062,\ c = 3{,}5,\ c_0 = 1,$$
$$k_1 = 0{,}0001,\ k_3 = 0{,}05,$$
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}095 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} 2{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 \end{bmatrix}.$$
$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad x(0) = \begin{pmatrix} 200 \\ 110 \\ w_0 \end{pmatrix},\quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 190 \\ 100 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

При моделировании значения n_0 и k_2 принять следующие:

$$n_0 = 0{,}8,\ k_2 = 0{,}02.$$

Дополнительные данные, необходимые для выполнения работы, приведены в таблице 4.

2. Построить графики переходных процессов, графики адаптивного управления и оценок неизвестных параметров. Моделирование выполнить на интервале времени от 0 до 140 (один такт соответствует 1 дню). Сделать выводы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Таблица 1

N	γ	$x_1(0)$	$x_2(0)$	b_1	b_2	Q_{11}	Q_{22}
1	0,0003	300	200	15	22	2,0	0,1
2	0,0004	310	210	14	20	1,0	0,3
3	0,0002	305	195	15	19	1,0	0,2
4	0,0005	310	205	17	22	1,2	0,05
5	0,0004	320	216	19	23	2,0	0,2
6	0,0003	325	198	17	18	1,0	0,12
7	0,0004	300	200	15	22	2,0	0,14
8	0,0004	330	210	14	20	3,0	0,12
9	0,0002	315	195	15	19	2,1	0,22
10	0,0003	310	215	18	24	2,0	0,02
11	0,0004	310	216	19	23	1,1	0,04
12	0,0005	325	198	17	18	1,0	0,1
13	0,0004	300	200	15	22	2,0	0,1
14	0,0004	310	210	14	20	1,5	0,03
15	0,0003	305	195	15	19	1,0	0,16
16	0,0005	315	205	17	22	2,0	0,07
17	0,0004	320	216	19	23	1,3	0,08
18	0,0005	325	198	17	19	1,2	0,04
19	0,0004	300	205	15	22	2,0	0,06
20	0,0004	320	210	14	20	1,5	0,07
21	0,0003	315	195	17	18	1,7	0,05
22	0,0005	330	215	18	24	1,9	0,09
23	0,0003	320	216	19	23	1,3	0,07
24	0,0005	325	198	17	18	1,0	0,04
25	0,0003	315	195	15	19	2,0	0,03
26	0,0005	310	215	18	24	2,2	0,08
27	0,0004	310	216	20	23	1,7	0,05
28	0,0005	325	210	17	18	1,7	0,04
29	0,0003	310	200	15	22	1,2	0,03
30	0,0004	315	210	16	20	1,2	0,03

Таблица 2

N	r	$w(0)$	C	D	V_{11}	V_{22}
1	0,0027	215	1	0,06	3,5	3,4
2	0,0025	220	1,2	0,08	5,5	4,5
3	0,002	225	1,1	0,07	3,9	3,0
4	0,0023	217	1,3	0,05	3,5	3,4
5	0,0024	222	1,2	0,09	4,2	3,5
6	0,0026	220	1,6	0,08	4,9	3,0
7	0,0027	215	1	0,05	3,5	1,4
8	0,0025	220	1,2	0,08	5,5	4,5
9	0,0022	235	1,1	0,07	2,9	3,0
10	0,0025	227	1,4	0,05	4,5	3,8
11	0,0024	228	1,2	0,08	7,5	2,5
12	0,0027	210	1,5	0,07	4,9	3,8
13	0,0028	215	1	0,06	7,5	2,4
14	0,0026	220	1,2	0,08	5,5	4,5
15	0,0022	225	1,1	0,07	5,9	3,6
16	0,0024	217	1,3	0,05	3,5	3,2
17	0,0023	222	1,2	0,09	3,5	3,5
18	0,0026	220	1,6	0,08	4,9	3,0
19	0,0027	218	1,1	0,05	7,5	2,4
20	0,0025	226	1,2	0,09	6,5	4,5
21	0,0021	235	1,1	0,07	6,9	3,0
22	0,0025	207	1,0	0,05	3,5	3,8
23	0,0024	238	1,2	0,08	4,5	4,5
24	0,0026	220	1,5	0,07	4,9	3,8
25	0,0025	222	1,2	0,08	3,3	2,3
26	0,0022	225	1,6	0,09	4,9	3,9
27	0,0028	215	1,5	0,05	6,5	2,1
28	0,0022	225	1,2	0,08	3,5	4,5
29	0,0023	235	1,3	0,09	6,2	3,0
30	0,0025	230	1,4	0,04	2,5	2,9

Таблица 3

N	$\hat{x}_1(0)$	$\hat{x}_1(0)$	$P_{f11}(0)$	$P_{f22}(0)$	$P_{\theta 11}(0)$	$P_{\theta 22}(0)$	$P_{\theta 33}(0)$
1	270	190	15	15	1,5	2,0	1,0
2	280	180	20	20	1,2	2,5	1,5
3	290	185	21	19	1,4	2,7	2,5
4	275	192	15	16	2,5	2,8	2,3
5	285	184	16	24	1,5	4,9	2,5
6	280	180	22	29	1,7	2,7	2,5
7	275	190	15	15	1,6	2,0	1,0
8	280	180	20	20	1,3	2,5	1,5
9	295	170	21	18	1,5	3,7	3,5
10	275	192	15	16	2,5	2,8	2,5
11	295	185	16	25	1,5	2,3	3,5
12	270	180	22	30	1,6	2,7	2,5
13	270	190	15	15	1,5	2,0	1,0
14	280	180	20	20	1,2	2,5	3,5
15	290	185	21	19	1,4	2,7	2,7
16	265	192	15	16	2,5	2,8	2,3
17	285	184	16	24	1,5	4,9	5,1
18	270	180	22	29	1,7	2,7	2,5
19	275	195	15	15	1,6	3,0	2,0
20	280	180	22	20	1,4	2,5	2,5
21	285	170	21	18	1,5	3,7	3,5
22	275	190	15	16	2,7	4,8	5,5
23	285	195	16	25	1,5	2,3	3,3
24	270	180	25	31	1,6	2,7	2,5
25	280	192	15	16	2,5	2,8	2,3
26	285	180	16	24	1,9	5,9	4,5
27	270	185	22	29	1,7	2,7	2,8
28	265	180	16	16	1,8	2,0	3,0
29	285	180	20	20	1,3	2,5	5,5
30	275	170	22	19	1,5	3,7	3,2

Таблица 4

N	w_0	$u_{\max}$	$P_{f11}(0)$	$P_{f22}(0)$	$P_{f12}(0)$	$P_{\theta 11}(0)$	$P_{\theta 22}(0)$
1	100	55	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0
2	110	80	2,0	2,0	1,2	2,5	1,5
3	105	71	21	1,0	1,4	2,1	2,2
4	102	62	1,5	1,5	2,5	2,8	2,3
5	95	64	1,6	2,4	1,5	1,9	2,5
6	88	75	2,2	2,9	1,7	2,7	2,5
7	125	69	1,5	1,5	1,6	2,0	1,0
8	180	70	2,0	2,0	1,3	2,5	1,5
9	130	57	2,6	1,5	1,5	1,6	3,5
10	104	57	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0
11	110	80	2,0	2,0	1,2	2,5	1,5
12	105	71	2,7	1,0	1,4	2,1	2,2
13	100	62	1,5	1,8	2,5	2,8	2,3
14	95	64	1,6	2,4	1,5	1,9	2,5
15	68	75	2,2	2,6	1,7	2,7	2,5
16	105	69	1,5	1,5	1,6	2,0	1,0
17	140	70	2,2	2,0	1,3	2,5	1,5
18	150	57	2,6	1,7	1,5	3,5	3,2
19	105	71	21	1,0	1,4	2,1	2,2
20	102	62	1,5	1,5	2,5	2,8	2,3
21	95	64	1,6	2,4	1,5	1,9	2,5
22	88	75	2,6	2,9	1,7	2,7	2,5
23	125	63	1,5	1,5	1,6	2,0	1,0
24	123	70	2,0	2,0	1,3	2,5	1,5
25	110	57	2,2	1,5	1,5	2,7	3,5
26	104	57	1,5	1,2	1,0	1,3	1,4
27	115	80	1,0	2,0	1,2	2,5	1,5
28	135	71	2,1	1,0	1,4	2,1	2,2
29	102	62	1,5	1,5	2,5	2,3	2,3
30	95	64	1,6	2,4	1,5	1,9	2,5

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления.** М . Наука, 1973 446 с.

2. **Горский А.А., Колпакова Н.Г., Локшин Б.Я. Динамическая модель производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса** // Изв. РАН Теория и системы управления. 1998 № 1. С. 144–149.

3 **Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси.** М.. **Наука,** 1972 200 с.

4. **Смагин В.И. Локально-оптимальные следящие системы управления при косвенных измерениях с ошибками** // Изв. вузов Авиационная техника. 1995 № 1 С. 26–30.

5. **Смагин В.И., Параев Ю.И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям.** Томск: **Изд-во** Том ун-та, 1996. 171 с.

6. **Смагин В.И. Локально-оптимальные следящие системы управления для дискретных объектов со случайными параметрами** // Автоматика и вычислительная техника 1997 № 2. С. 32–40.

7. **Смагин В.И.** Адаптивные локально-оптимальные следящие системы **управления** // Изв. вузов Авиационная техника 1997. № 2 С 41–46.

8. **Смагин В.И. Локально-оптимальное управление запасами.** Учебно-методическое пособие. Томск· Изд-во Том. ун-та, 2001. 32 с.

9 **Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad** Учебное пособие. 3-е изд. СПб.· Лань, 2009. 352с.

СОДЕРЖАНИЕ

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Редакционно-издательского отдела ТГУ

Заказ № 65 от «14» 05 2010 г. Тираж 100 экз.