ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Учебно-методическое пособие

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Федеральное агентство по образованию РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан ФПМК

________***проф. А.М.Горцев***

________***декабря 2009 г.***

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Учебно-методическое пособие

по курсу «Теория управления»

Томск – 2010

Рассмотрено и утверждено методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

ПРОТОКОЛ № от декабря 2009 г.

Председатель комиссии, профессор

С.Э. Воробейчиков

Автор: Ю.И.Параев

В данном учебно-методическом пособии по курсу «Теория управления» приводятся теоретические результаты и задания для лабораторной работы по решению задачи оптимального быстродействия. Целью данной лабораторной работы является практическое применение принципа максимума Л.С.Понтрягина к решению задачи оптимального быстродействия и моделирование полученного решения.

1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{1}$$

где x_1 и x_2 – координаты, u - управляющее воздействие, на которое наложено ограничение

$$|u(t)| \leq u_0, \tag{2}$$

где u_0 – заданное значение ($u_0 > 0$). Пусть также заданы начальные условия для координат

$$x_1(0) = x_{10}, \; x_2(0) = x_{20}. \tag{3}$$

Задача заключается в выборе такого управления $u(t)$, удовлетворяющего условию (2), при котором система переходит из начального состояния (3) в начало координат, то есть в положение

$$x_1(T) = x_2(T) = 0 \tag{4}$$

за минимальное время. Здесь T – момент окончания работы, который заранее не определен и который следует выбрать минимальным. Эта задача эквивалентна требованию минимизации функционала

$$J = \int_0^T 1\, dt. \tag{5}$$

Интерпретацией данной задачи может быть управление тележкой или транспортным роботом (см. рис.1.). Если считать, что x – координата центра масс тележки, то ее движение согласно закону Ньютона описывается уравнением

$$m\ddot{x} = F, \qquad (6)$$

где m – масса тела, F – сила, действующая на тело. Сила считается положительной, если она направлена по оси $0X$.

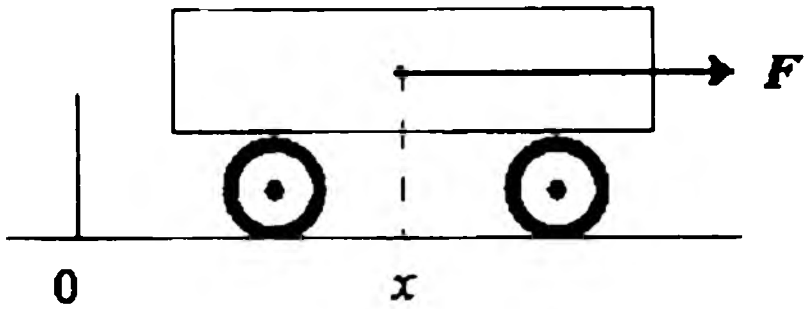


Рис.1

Если ввести новые переменные: $x_1 = x$ – положение тела и $x_2 = \dot{x}$ – скорость тела, и обозначить $u=F/m$, то уравнение (6) можно преобразовать в уравнения (1). Заметим, что скорость считается положительной, если она направлена вправо.

Если ввести новые переменные: $x_1 = x$ – положение тела и $x_2 = \dot{x}$ – скорость тела, и обозначить $u=F/m$, то уравнение (6) можно преобразовать в уравнения (1). Заметим, что скорость считается положительной, если она направлена вправо.

2. Решение задачи с помощью принцип максимума Понтрягина

Составим функцию Гамильтона

$$H = p_1 x_2 + p_2 u - 1,$$

где вспомогательные переменные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1. \tag{7}$$

Так как правый конец траектории $x(T)$ фиксирован (см. условие (4)), то условия трансверсальности для переменных p_1 и p_2 отсутствуют. Из условия

$$H(u) = \max_{|u| \le u_0} H \tag{8}$$

получаем, что оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = u_0 \operatorname{sign} p_2(t) \tag{9}$$

где

$$signx = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, оптимальным управлением является релейное управление, которое принимает значения u_0 или $-u_0$, причем перемена знака происходит в моменты времени, в которых функция $p_2(t)$ пересекает нулевой уровень.

Уравнения (7) легко интегрируются. Их общее решение имеет вид

$$p_1 = c_1, \; p_2 = c_2 + c_1 t, \tag{11}$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Отсюда следует, что функция $p_2(t)$ пересекает нулевой уровень не более одного раза. Это означает, что оптимальное управление $u(t)$ может изменять свой знак не более одного раза. Возможен случай, когда оптимальное управление является постоянным, если функция $p_2(t)$ пересекает нулевой уровень до начального момента t=0.

Окончательное решение задачи заключается в нахождении зависимости между постоянными интегрирования c_1 и c_2 в (11) и начальными условиями (3). Однако получение такой явной зависимости оказывается сложным. Поэтому воспользуемся методом "фазового портрета", широко применяемым при анализе систем второго порядка. Пусть u=*const*. Тогда общее решение системы (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s_1 + s_2 t + u\frac{t^2}{2}, \\ x_2(t) &= s_2 + ut, \end{aligned} \tag{12}$$

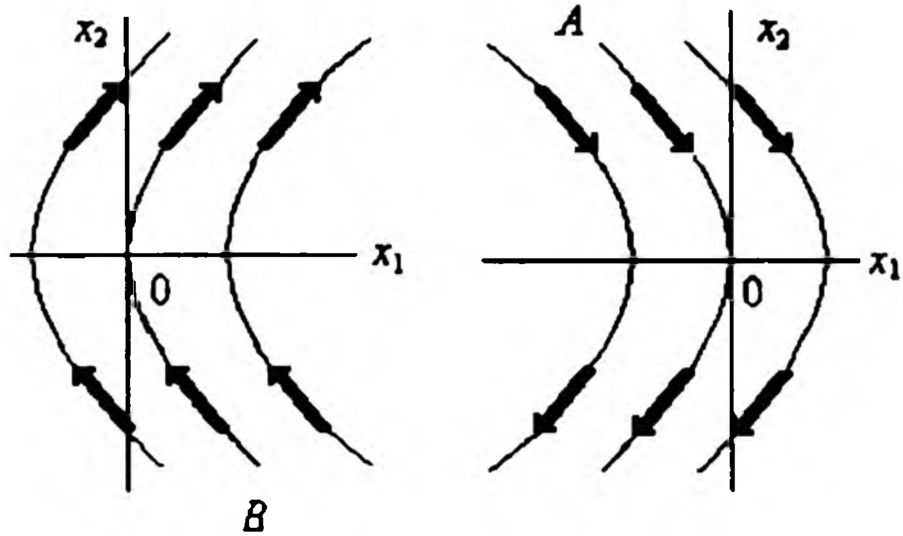
где s_1 и s_2– константы интегрирования. Исключим из этих соотношений параметр t. Из второго уравнения получаем

$$t = \frac{x_2 - s_2}{u}. \tag{13}$$

Подставляя это значение в первое уравнение (12), после небольших преобразований получаем

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2u} + S, \tag{14}$$

где $S = s_1 - \frac{s_2}{2u}$ – некоторая константа. Уравнение (14) в фазовой плоскости $0X_1X_2$ задает семейство парабол, показанных на рис.2. Их расположение зависит от константы S. При S=0 получаем параболу, проходящую через начало координат. Если u=u_0, то движение системы (1) происходит по одной из парабол, причем движение происходит вверх (как указано стрелками). Это следует из (12), так как при u>0 переменная x_2 увеличивается с ростом t. Если u=−u, то движение системы (1) происходит так же по одной из парабол, причем движение происходит вниз (как указано стрелками). Это следует из (12), так как при u<0 переменная x_2 убывает с ростом t.



u=u_0, u= –u_0,

Рис.2

Из рис.2 видно, что в начало координат система попадет при управлении u=u_0, если движение начинается из точек, расположенных на кривой ОВ, или при управлении $u=-u_0$, если движение начинается из точек, расположенных на кривой АО. При движении из других начальных точек система в начало координат при постоянном управлении попасть не может. Это может быть достигнуто только при релейном управлении, имеющем переключение из одного значения в другое.

3. Геометрическое решение задачи

Геометрическое решение приведено на рис.3. Кривая А0В на этом рисунке называется *линией переключения* (ЛП).

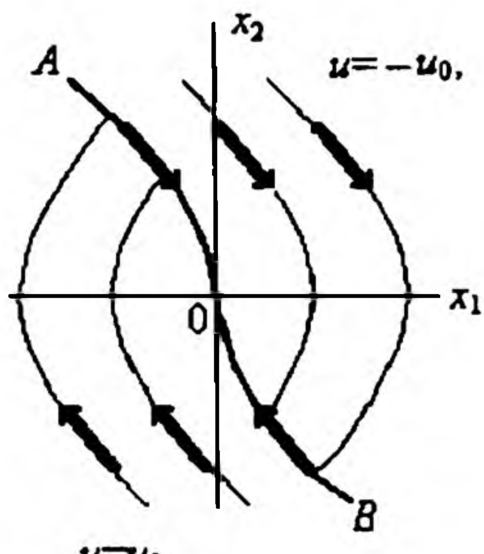


Рис.3

Если начальное состояние системы расположено выше ЛП, то при управлении $u=-u_0$ фазовая точка (x_1, x_2) будет двигаться вниз до достижения ЛП. Затем управление переключается на положительное значение, после чего фазовая точка (x_1, x_2) будет двигаться вверх до достижения начала координат. Если начальное состояние находится ниже ЛП, то при управлении $u=u_0$ система двигается вверх до достижения ЛП. Затем управление переключается на отрицательное значение, после чего система будет двигаться вниз до достижения начала координат. Таким образом, получается общее правило выбора оптимального управления:

$$u(t)=\begin{cases} u_0, & \text{если } (x_1,x_2) \text{ ниже ЛП}, \\ -u_0, & \text{если } (x_1,x_2) \text{ выше ЛП}. \end{cases} \tag{15}$$

Это правило можно представить математически. Пусть

$$x_2=F(x_1) \tag{16}$$

уравнение кривой, соответствующей ЛП в плоскости $0X_1X_2$. Из (14) при $S=0$ видно, что

$$F(x_1)=\begin{cases} -\sqrt{2u_0x_1} & \text{при} \quad x_1>0, \\ \sqrt{-2u_0x_1} & \text{при} \quad x_1<0, \end{cases}$$

или

$$F(x_1)=-\sqrt{2u_0\,|\,x_1\,|}\,sign x_1. \tag{17}$$

В результате выражение (15) принимает вид

$$u(t)=\begin{cases} u_0 & \text{при} \quad x_2<F(x_1), \\ -u_0 & \text{при} \quad x_2>F(x_1). \end{cases} \tag{18}$$

Объединяя последние результаты, получаем, что оптимальное управление равно

$$u(t)=u_0 sign(F(x_1)-x_2). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (1), получим уравнения движения системы при оптимальном управлении

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad (20)$$
$$\dot{x}_2 = u_0 sign(F(x_1) - x_2)$$

с начальными условиями (3).

4. Вычисление момента переключения управления и общего времени работы

Для анализа решения задачи представляет интерес нахождение момента переключения управления t_1 и момента окончания работы системы T.

Рассмотрим сначала случай, когда начальная точка находится выше линии переключения, т.е. $x_{20} > F(x_{10})$. В этом случае на интервале времени [0, t_1] имеем:

$$u(t) = -u_0,$$
$$x_1(t) = x_{10} + x_{20}t - u_0\frac{t^2}{2}, \qquad (21)$$
$$x_2(t) = x_{20} - u_0 t.$$

В момент времени t_1 должны выполняться условия (см.рис.3)

$$x_1(t_1) > 0, x_2(t_1) < 0, \; x_2^2(t_1) = 2u_0 x_1(t_1).$$

Из последнего равенства с учетом (21) получаем квадратное уравнение для t_1

$$2u_0^2 t_1^2 - 4u_0 x_{20} t_1 + x_{20}^2 - 2u_0 x_{10} = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$t_1 = \frac{x_{20}}{u_0} \pm \frac{1}{u_0}\sqrt{\frac{x_{20}^2}{2} + u_0 x_{10}}\,. \qquad (22)$$

Интегрируя уравнения (1) на интервале времени $[t_1,T]$ при $u=u_0$, получаем

$$x_1(t) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1) + u_0 \frac{(t - t_1)^2}{2}, \qquad (23)$$
$$x_2(t) = x_2(t_1) + u_0(t - t_1).$$

В момент времени $t=T$ должно выполняться

$$x_1(T) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(T - t_1) + u_0 \frac{(T - t_1)^2}{2} = 0,$$
$$x_2(T) = x_2(t_1) + u_0(T - t_1) = 0.$$

Вычитая второе уравнение, умноженное на $(T- t_1)$, из первого, получаем

$$x_1(t_1) = u_0 \frac{(T - t_1)^2}{2}.$$

Из последних выражений следует

$$T - t_1 = \sqrt{\frac{2x_1(t_1)}{u_0}} = -\frac{x_2(t_1)}{u_0}.$$

Здесь учтено, что $T- t_1>0$. Подставляя сюда $x_2(t_1) = x_{20} - u_0 t_1$, получаем

$$T = 2t_1 - \frac{x_{20}}{u_0} = \frac{x_{20}}{u_0} \pm \frac{1}{u_0}\sqrt{2x_{20} + 4u_0 x_{10}}.$$

Так как по условию $0 < t_1 < T$, то окончательно получаем

$$t_1 = \frac{x_{20}}{u_0} + \frac{1}{u_0}\sqrt{\frac{x_{20}^2}{2} + u_0 x_{10}} \quad \text{и} \quad T = \frac{x_{20}}{u_0} + \frac{1}{u_0}\sqrt{2x_{20} + 4u_0 x_{10}}. \qquad (24)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда начальная точка находится ниже линии переключения, т.е. $x_{20} < F(x_{10})$. В этом случае на интервале времени $[0, t_1]$ $u = u_0$ а на интервале времени $[t_1, T]$ $u = -u_0$. В результате на интервале времени $[0, t_1]$ имеем

$$x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + u_0 \frac{t^2}{2}, \qquad (25)$$
$$x_2(t) = x_{20} + u_0 t.$$

В момент времени t_1 должны выполняться условия (см. рис.3)

$$x_1(t_1) < 0, x_2(t_1) > 0, \; x_2^2(t_1) = -2u_0 x_1(t_1). .$$

Из последнего равенства получаем с учетом (25) уравнение

$$2u_0^2 t_1^2 + 4u_0 x_{20} t_1 + x_{20}^2 + 2u_0 x_{10} = 0$$

для t_1. Положительный корень этого уравнения равен

$$t_1 = -\frac{x_{20}}{u_0} + \frac{1}{u_0}\sqrt{\frac{x_{20}^2}{2} - u_0 x_{10}}.$$

На интервале времени $[t_1, T]$ при $u = -u_0$получаем

$$x_1(t) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1) - u_0 \frac{(t - t_1)^2}{2}, \qquad (26)$$
$$x_2(t) = x_2(t_1) - u_0(t - t_1).$$

В момент времени $t_1 = T$ должно выполняться

$$x_1(T) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(T - t_1) - u_0 \frac{(T - t_1)^2}{2} = 0,$$
$$x_2(T) = x_2(t_1) - u_0(T - t_1) = 0.$$

Вычитая второе уравнение, умноженное на $T - t_1$, из первого, получаем

$$x_1(t_1) = -u_0 \frac{(T - t_1)^2}{2}.$$

Из последних выражений следует

$$T-t_1=\sqrt{-\frac{2x_1(t_1)}{u_0}}=\frac{x_2(t_1)}{u_0}.$$

Здесь учтено, что $T-t_1>0$. Подставляя сюда $x_2(t_1)=x_{20}+u_0t_1$, получаем

$$T=2t_1+\frac{x_{20}}{u_0}=-\frac{x_{20}}{u_0}+\frac{1}{u_0}\sqrt{2x_{20}-4u_0x_{10}}.$$

Таким образом, если начальная точка находится ниже линии переключения, то

$$t_1=-\frac{x_{20}}{u_0}+\frac{1}{u_0}\sqrt{\frac{x_{20}^2}{2}-u_0x_{10}} \text{ и } T=-\frac{x_{20}}{u_0}+\frac{1}{u_0}\sqrt{2x_{20}^2-4u_0x_{10}}. \quad (27)$$

Все эти результаты можно объединить, введя вспомогательный параметр

$$q=\begin{cases}1, & \text{если } (x_{10},x_{20}) \text{ ниже ЛП или } x_{20}<F(x_{10}),\\ -1, & \text{если } (x_{10},x_{20}) \text{ выше ЛП или } x_{20}>F(x_{10}).\end{cases} \quad (28)$$

Тогда из (24) и (27) окончательно имеем

$$t_1=-\frac{x_{20}}{qu_0}+\frac{1}{u_0}\sqrt{\frac{x_{20}^2}{2}-qu_0x_{10}} \text{ и } T=-\frac{x_{20}}{qu_0}+\frac{1}{u_0}\sqrt{2x_{20}^2-4qu_0x_{10}}. \quad (29)$$

При этом решение задачи на интервале времени $[0, t_1]$ выражается следующим образом

$$u(t) = qu_0,$$

$$x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + qu_0\frac{t^2}{2},, \quad (30)$$

$$x_2(t) = x_{20} + qu_0 t,$$

а на интервале времени $[t_1, T]$:-

$$u(t) = -qu_0,$$

$$x_1(t) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1) - qu_0\frac{(t - t_1)^2}{2}, \quad (31)$$

$$x_2(t) = x_2(t_1) - qu_0(t - t_1).$$

5. Задание к лабораторной работе

Решить задачу оптимального быстродействия.

Провести вычисления. Построить графики.

Выполнить два возможных варианта решения.

1-й вариант. Численное интегрирование уравнений (20) проводится на основании схемы Адамса. Эта схема состоит в следующем. Пусть имеется система дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0.$$

Численное решение строится в виде рекуррентной формулы

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(x(t_i)),\ i = 0,1,\ldots \quad (32)$$

где h – шаг интегрирования, причем $t_{i+1} = t_i + h$. Обычно принимается, что шаг интегрирования равен $0.01 \div 0.1$.

В нашей задаче уравнения (32) принимают вид (ср. с (20))

$$\begin{aligned} x_1(t_{i+1}) &= x_1(t_i) + hx_2(t_i), \\ x_1(t_{i+1}) &= x_1(t_i) + hu(t_i), \end{aligned} \qquad (33)$$

где

$$u(t_i) = u_0 sign\big(F(x_1(t_i)) - x_2(t_i)\big).$$

Процедура (33) продолжается, пока выполняется условие $t_1<T$, где T определяется из (29). Рекуррентную процедуру (33) можно также остановить, когда фазовая точка (x_1, x_2) попадает в ε-окрестность начала координат, например, тогда, когда на каком-то k-ом шаге выполняется $|x_1(t_k)| + |x_2(t_k)| \le \varepsilon$. Однако в этом случае проблема возникает с выбором ε. Если ε взять меньше h, то процедура (33) просто «перешагнет» через ε-окрестность начала координат. Если число ε взять достаточно большим, то процедура (33) остановится далеко от начала координат. Поэтому практически удобным является следующий вариант. Из рис. 3 видно, что в окрестности начала координат переменная $x_1(t)$ меняет знак только после перехода через 0. Поэтому процедуру (33) можно остановить, когда в окрестности начала координат впервые на каком-то k-ом шаге выполняется $x_1(t_{k-1})\, x_1(t_k)<0$.

2-й вариант. Проводится табуляция функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ отдельно на интервалах времени $[0, t_1]$ и $[t_1,T]$ в соответствии с (30) и (31).

На основании полученных численных результатов строится фазовый портрет, на который накладывается линия переключения.

Содержание

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
редакционно-издательского отдела ТГУ

Заказ №42 от «17» 03 2010 г. Тираж 100 экз.