УДК 519.2

ББК 22.17

**Обработка данных и управление в сложных системах**: Сборник статей / Под ред. Глуховой Е.В. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. Вып. 4. 112 с.

ISBN 5-7511-1594-5

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов факультета информатики, экономики и математики филиала Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске и факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, посвященные статистической обработке временных рядов, актуарной математике, а также вопросам управления в системах массового обслуживания и в измерительных системах.

Для студентов, аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами временных рядов и управления в измерительных системах.

УДК 519.2

ББК 22.17

ISBN 5-7511-1594-5

# ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ КАНАЛА И ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ

А.А. НАЗАРОВ, С.У. УРАЗБАЕВА

## Введение

За время, прошедшее с появления первых локальных сетей, было разработано несколько сотен самых разных сетевых технологий, однако заметное распространение получили всего несколько сетей, что связано, прежде всего, с поддержкой этих сетей известными фирмами и с высоким уровнем стандартизации принципов их организации. Наибольшее распространение среди стандартных сетей получила сеть Ethernet. Сеть Ethernet стала международным стандартом (IEEE 802.3), и она является наиболее популярной в мире. Стандарт определяет множественный доступ к моноканалу типа «шина» с обнаружением конфликтов и контролем передачи, то есть с методом доступа CSMA/CD [1,2].

Сети, управляемые протоколом случайного множественного доступа с контролем несущей и обнаружением конфликта (сети Ethernet), можно рассматривать как альтернативу сети с протоколом DQDB [3], так как в обеих сетях наблюдается резервирование канала для отправки сообщения. Сети Ethernet можно интерпретировать как сети, управляемые протоколом с резервированием канала и оповещением о конфликте. В последних режим захвата (резервирования) канала эквивалентен так называемому «окну конфликтов» в Ethernet, сигнал оповещения о конфликте совпадает с сигналом «заглушки», а невозможность конфликтов во время передачи сообщений эквивалентна контролю несущей частоты в сети Ethernet.

## Описание работы сети случайного доступа с резервированием канала и оповещением о конфликте

Функционирование сети, управляемой протоколом случайного множественного доступа с резервированием канала и оповещением о конфликте, реализуется следующим образом. Абонентская станция (АС), сформировав сообщение, посылает сигнал резервирования канала. Если канал занят другим запросом на резервирование, АС рассылает сигнал оповещения о конфликте, информируя АС о том, что сигналы запроса требуется повторить после случайной задержки (АС переходит в источник повторных вызовов (ИПВ)). Если канал свободен и запрос на резервирование реализуется успешно, то станция передает сообщение. Запросы на резервирование, поступившие во время распространения сигнала оповещения о конфликте и во время передачи сообщения, переходят в ИПВ, не искажая реализуемых в канале режимов. Повторные передачи реализуются после случайной задержки во избежание конфликтов. В этой работе проведено исследование для $h$ – настойчивых АС: каждая АС, сообщение которой искажено, с вероятностью $(1-h)$ отказывается от дальнейших попыток повторных передач, а с вероятностью $h$ такую попытку повторяет.

## Математическая модель сети случайного доступа с резервированием канала и оповещением о конфликте

Математической моделью рассматриваемой сети связи может служить однолинейная система массового обслуживания, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром $\lambda$ [4,5]. При появлении сообщения АС рассылает сигнал резервирования канала, длительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_1 = 1$, обслуживание экспоненциальное с параметром $\mu_2 = \frac{1}{\nu}$. Длительность интервала оповещения о конфликте имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_c = \frac{1}{a}$. Заявки, поступающие в систему в течение интервала оповещения о конфликте, считаются искаженными. Каждая искаженная заявка с вероятностью $h$ поступает в ИПВ, а с вероятностью $(1-h)$ покидает систему, не завершив обслуживания. Требования из ИПВ обращаются к прибору после случайной задержки, распределенной по показательному закону с одинаковым для всех заявок параметром $\sigma$. Состояние прибора $k(t)$ определим следующим образом: $k(t) = 0$ – прибор свободен, $k(t) = 1$ – происходит резервирование канала, $k(t) = 2$ – идет передача сообщений, $k(t) = c$ – режим оповещения о конфликте.

## Исследование сети случайного доступа с резервированием канала и оповещением о конфликте

Рассмотрим марковскую модель сети, управляемой протоколом с резервированием канала и оповещением о конфликте. Обозначим $i(t)$ - число заявок в источнике повторных вызовов. Состояние системы определим векторов $(k,i)$, изменение во времени которого образует однородный марковский процесс $\{k(t), i(t)\}$. Для исследования построенной математической модели введем $P(k(t) = k, i(t) = i) = P_k(i,t)$ – вероятности того, что прибор в момент $t$ находится в состоянии $k$, а в ИПВ – $i$ требований. При любом наборе параметров $\lambda$, $\sigma$ и $h < 1$ для рассматриваемой системы массового обслуживания существует стационарный режим. Исследуем составленную математическую модель.

Система уравнений для вероятностей состояний $P_k(i,t)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&P_0(i,t+\Delta t) = [1-(\lambda+i\sigma)\Delta t]P_0(i,t) + \mu_2\Delta t P_2(i,t) + \mu_c \Delta t P_c(i,t),\\
&P_1(i,t+\Delta t) = [1-(\lambda+i\sigma+\mu_1)\Delta t]P_1(i,t) + \lambda\Delta t P_0(i,t) + (i+1)\sigma\Delta t P_0(i+1,t),\\
&P_2(i,t+\Delta t) = [1-(\lambda+i\sigma+\mu_2)\Delta t]P_2(i,t) + \lambda\Delta t[hP_2(i-1,t) + (1-h)P_2(i,t)] +\\
&\qquad + \sigma\Delta t[ihP_2(i,t) + (i+1)(1-h)P_2(i+1,t)] + \mu_1\Delta t P_1(i,t),\\
&P_c(i,t+\Delta t) = [1-(\lambda+i\sigma+\mu_c)\Delta t]P_c(i,t) + \lambda\Delta t[hP_c(i-1,t) + (1-h)P_c(i,t)] +\\
&\qquad + \sigma\Delta t[ihP_c(i,t) + (i+1)(1-h)P_c(i+1,t)] +\\
&\qquad + \lambda\Delta t[h^2P_1(i-2,t) + 2h(1-h)P_1(i-1,t) + (1-h)^2P_1(i,t)] +\\
&\qquad + \sigma\Delta t[h^2(i-1)P_1(i-1,t) + 2h(1-h)iP_1(i,t) + (1-h)^2(i+1)P_1(i+1,t)].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Разделим уравнения полученной системы на $\Delta t$ и устремим $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} + (\lambda+i\sigma)P_0(i,t) = \mu_2 P_2(i,t) + \mu_c P_c(i,t),\\
&\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} + (\lambda+i\sigma+\mu_1)P_1(i,t) = \lambda P_0(i,t) + (i+1)\sigma P_0(i+1,t),\\
&\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} + (\lambda+i\sigma+\mu_2)P_2(i,t) = \lambda[hP_2(i-1,t) + (1-h)P_2(i,t)] +
\end{aligned}
$$

$$+\sigma\left[ihP_2(i,t)+(i+1)(1-h)P_2(i+1,t)\right]+\mu_1 P_1(i,t),$$

$$\frac{\partial P_c(i,t)}{\partial t}+(\lambda+i\sigma+\mu_c)P_c(i,t)=\lambda\left[hP_c(i-1,t)+(1-h)P_c(i,t)\right]+$$

$$+\sigma\left[ihP_c(i,t)+(i+1)(1-h)P_c(i+1,t)\right]+\lambda\left[h^2P_1(i-2,t)+2h(1-h)P_1(i-1,t)+(1-h)^2P_1(i,t)\right]+$$

$$+\sigma\left[h^2(i-1)P_1(i-1,t)+2h(1-h)iP_1(i,t)+(1-h)^2(i+1)P_1(i+1,t)\right].$$

В стационарном режиме система имеет вид:

$$(\rho+i\sigma)P_0(i)=\mu_2P_2(i)+\mu_cP_c(i),$$

$$(\rho+i\sigma+\mu_1)P_1(i)=\rho P_0(i)+(i+1)\sigma P_0(i+1),$$

$$(\rho+i\sigma+\mu_2)P_2(i)=\rho\left[hP_2(i-1)+(1-h)P_2(i)\right]+\sigma\left[ihP_2(i)+(i+1)(1-h)P_2(i+1)\right]+\mu_1P_1(i),$$

$$(\rho+i\sigma+\mu_c)P_c(i)=\rho\left[hP_c(i-1)+(1-h)P_c(i)\right]+\sigma\left[ihP_c(i)+(i+1)(1-h)P_c(i+1)\right]+$$

$$+\rho\left[h^2P_1(i-2)+2h(1-h)P_1(i-1)+(1-h)^2P_1(i)\right]+$$

$$+\sigma\left[h^2(i-1)P_1(i-1)+2h(1-h)iP_1(i)+(1-h)^2(i+1)P_1(i+1)\right]$$

Перепишем систему, полагая, что $\mu_1=1, \mu_2=\frac{1}{v}, \mu_c=\frac{1}{a}$. В этом случае

$$(\rho+i\sigma)P_0(i)=\frac{1}{v}P_2(i)+\frac{1}{a}P_c(i),$$

$$(\rho+i\sigma+1)P_1(i)=\rho P_0(i)+(i+1)\sigma P_0(i+1),$$

$$(\rho+i\sigma+\frac{1}{v})P_2(i)=\rho\left[hP_2(i-1)+(1-h)P_2(i)\right]+\sigma\left[ihP_2(i)+(i+1)(1-h)P_2(i+1)\right]+P_1(i), \quad (2)$$

$$(\rho+i\sigma+\frac{1}{a})P_c(i)=\rho\left[hP_c(i-1)+(1-h)P_c(i)\right]+\sigma\left[ihP_c(i)+(i+1)(1-h)P_c(i+1)\right]+$$

$$+\rho\left[h^2P_1(i-2)+2h(1-h)P_1(i-1)+(1-h)^2P_1(i)\right]+$$

$$+\sigma\left[h^2(i-1)P_1(i-1)+2h(1-h)iP_1(i)+(1-h)^2(i+1)P_1(i+1)\right].$$

Для аналитического исследования системы, описывающей поведение сети, воспользуемся методом асимптотического анализа марковизируемых систем при $\sigma\to 0$. Рассмотрим уравнения системы (2), в которых сделаем замену

$$\sigma=\varepsilon^2,\ i\varepsilon^2=x+\varepsilon y,\ \frac{1}{\varepsilon}P_k(i)=\pi_k(y,\varepsilon).$$

Получаем систему уравнений относительно $\pi_k(y,\varepsilon)$

$$(\rho+x+\varepsilon y)\pi_0(y,\varepsilon)=\frac{1}{v}\pi_2(y,\varepsilon)+\frac{1}{a}\pi_c(y,\varepsilon),$$

$$(\rho+x+\varepsilon y+1)\pi_1(y,\varepsilon)=\rho\pi_0(y,\varepsilon)+\left[x+\varepsilon(y+\varepsilon)\right]\pi_0(y+\varepsilon,\varepsilon),$$

$$(\rho+x+\varepsilon y+\frac{1}{v})\pi_2(y,\varepsilon)=\rho\left[h\pi_2(y-\varepsilon,\varepsilon)+(1-h)\pi_2(y,\varepsilon)\right]+h(x+\varepsilon y)\pi_2(y,\varepsilon)+$$

$$+(1-h)\left[x+\varepsilon(y+\varepsilon)\right]\pi_2(y+\varepsilon,\varepsilon)+\pi_1(y,\varepsilon), \quad (3)$$

$$(\rho+x+\varepsilon y+\frac{1}{a})\pi_c(y,\varepsilon)=\rho\left[h\pi_c(y-\varepsilon,\varepsilon)+(1-h)\pi_c(y,\varepsilon)\right]+$$
$$+h(x+\varepsilon y)\pi_c(y,\varepsilon)+(1-h)\left[x+\varepsilon(y+\varepsilon)\right]\pi_c(y+\varepsilon,\varepsilon)+$$
$$+\rho\left[h^2\pi_1(y-2\varepsilon,\varepsilon)+2h(1-h)\pi_1(y-\varepsilon,\varepsilon)+(1-h)^2\pi_1(y,\varepsilon)\right]+h^2\left[x+\varepsilon(y-\varepsilon)\right]\pi_1(y-\varepsilon,\varepsilon)+$$
$$+2h(1-h)(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)+(1-h)^2\left[x+\varepsilon(y+\varepsilon)\right]\pi_1(y+\varepsilon,\varepsilon).$$

Эту систему будем решать в три этапа.

Первый этап. Положим $\varepsilon\to 0$, $\pi_k(y,\varepsilon)\to\pi_k(y)$, обозначим $G=\rho+x$ и, выполнив необходимые преобразования системы (3), получим

$$G\pi_0(y)=\frac{1}{\nu}\pi_2(y)+\frac{1}{a}\pi_c(y),$$
$$(G+1)\pi_1(y)=G\pi_0(y),$$
$$(G+\frac{1}{\nu})\pi_2(y)=G\pi_2(y)+\pi_1(y),$$
$$(G+\frac{1}{a})\pi_c(y)=G\pi_c(y)+G\pi_1(y).$$

Решение этой системы определяется с точностью до мультипликативной составляющей и имеет вид

$$\pi_0(y)=\frac{G+1}{aG^2+(2+\nu)G+1}\pi(y)=R_0\pi(y),\quad \pi_1(y)=\frac{G}{aG^2+(2+\nu)G+1}\pi(y)=R_1\pi(y),$$

$$\pi_2(y)=\frac{\nu G}{aG^2+(2+\nu)G+1}\pi(y)=R_2\pi(y),\quad \pi_c(y)=\frac{aG^2}{aG^2+(2+\nu)G+1}\pi(y)=R_c\pi(y),$$

где $R_0=\dfrac{G+1}{aG^2+(2+\nu)G+1}$, $R_1=\dfrac{G}{aG^2+(2+\nu)G+1}$,

$$R_2=\frac{\nu G}{aG^2+(2+\nu)G+1},\quad R_c=\frac{aG^2}{aG^2+(2+\nu)G+1}.$$

На втором этапе вернемся к системе (3), разложим $\pi_k(y\pm\varepsilon,\varepsilon)$ в ряд по приращениям $\varepsilon$ аргумента $y$ с точностью до $\varepsilon$, систему (3) можно представить следующим образом

$$G\pi_0(y,\varepsilon)-\frac{1}{\nu}\pi_2(y,\varepsilon)-\frac{1}{a}\pi_c(y,\varepsilon)=-\varepsilon y\pi_0(y,\varepsilon),$$

$$(G+1)\pi_1(y,\varepsilon)-G\pi_0(y,\varepsilon)=\varepsilon y(\pi_0(y,\varepsilon)-\pi_1(y,\varepsilon))+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{x\pi_0(y,\varepsilon)\right\},$$

$$\frac{1}{\nu}\pi_2(y,\varepsilon)-\pi_1(y,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\rho h\pi_2(y,\varepsilon)+(1-h)x\pi_2(y,\varepsilon)\right\},$$

$$\frac{1}{a}\pi_c(y,\varepsilon)-G\pi_1(y,\varepsilon)=\varepsilon y\pi_1(y,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\rho h\pi_c(y,\varepsilon)+(1-h)x\pi_c(y,\varepsilon)-2\rho h\pi_1(y,\varepsilon)-h^2x\pi(y,\varepsilon)_1+(1-h)^2x\pi_1(y,\varepsilon)\right\}.$$

Решение системы будем искать в виде

$$\pi_k(y,\varepsilon) = R_k\pi(y) + \varepsilon\varphi_k(y) + o(\varepsilon), \tag{4}$$

тогда относительно $\varphi_k(y)$ получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} G\varphi_0(y) - \frac{1}{\nu}\varphi_2(y) - \frac{1}{a}\varphi_c(y) = -yR_0\pi(y), \\ (G+1)\varphi_1(y) - G\varphi_0(y) = y(R_0 - R_1)\pi(y) + xR_0\pi'(y), \\ \frac{1}{\nu}\varphi_2(y) - \varphi_1(y) = [(1-h)x - \rho h]R_2\pi'(y), \\ \frac{1}{a}\varphi_c(y) - G\varphi_1(y) = yR_1\pi(y) + [((1-h)x - \rho h)R_c - (2\rho h - (1-2h)x)R_1]\pi'(y). \end{gathered} \tag{5}$$

Сложим все уравнения системы (5):

$$(xR_0 + [(1-h)x - \rho h](R_2 + R_c) - [2\rho h - (1-2h)x]R_1)\pi'(y) = 0.$$

Так как $\pi'(y)$ по определению не может тождественно обращаться в нуль, то, следовательно, равно нулю выражение в скобках:

$$xR_0 + [(1-h)x - \rho h](R_2 + R_c) - [2\rho h - (1-2h)x]R_1 = 0,$$

определяющее значение параметра $x$. Преобразуем это равенство для нахождения параметра $x$, получим уравнение

$$\rho = (1-h)G + h\cdot\frac{G}{aG^2 + (2+\nu)G + 1}, \tag{6}$$

где $G = \rho + x$.

Решение $\varphi_k(y)$ системы (5) можно записать в вид

$$\begin{gathered} \varphi_1(y) = R_1\varphi(y) + yAR_1\pi(y) + BR_1\pi'(y), \\ \varphi_0(y) = R_0\varphi(y) + yAR_0\pi(y) + BR_0\pi'(y) - y\frac{R_0 - R_1}{G}\pi(y) - \frac{G-\rho}{G}R_0\pi'(y), \\ \varphi_2(y) = R_2\varphi(y) + yAR_2\pi(y) + BR_{12}\pi'(y) + \nu[(1-h)G - \rho]R_2\pi'(y), \\ \varphi_c(y) = R_c\varphi(y) + yAR_c\pi(y) + BR_c\pi'(y) + ayR_1\pi(y) + a\{[(1-h)G-\rho]R_c + [(1-2h)G-\rho]R_1\}\pi'(y), \end{gathered} \tag{7}$$

где $\varphi(y) = \varphi_0(y) + \varphi_1(y) + \varphi_2(y) + \varphi_c(y)$,

$$A = \frac{R_1 - GR_c}{G^2},\quad B = -a[(1-h)G - \rho]R_c - a[(1-2h)G - \rho]R_1 + \frac{G-\rho}{G}R_0 - \nu[(1-h)G - \rho]R_2.$$

На третьем этапе вернемся к системе уравнений (3), разложим функции $\pi_k(y\pm\varepsilon,\varepsilon)$ в ряд по приращениям $\varepsilon$ аргумента $y$ с точностью до $\varepsilon^2$:

$$(\rho + x + \varepsilon y)\pi_0(y,\varepsilon) = \frac{1}{\nu}\pi_2(y,\varepsilon) + \frac{1}{a}\pi_c(y,\varepsilon),$$

$$(\rho + x + \varepsilon y + 1)\pi_1(y,\varepsilon) = \rho\pi_0(y,\varepsilon) + (x+\varepsilon y)\pi_0(y,\varepsilon) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(x+\varepsilon y)\pi_0(y,\varepsilon)\} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(x+\varepsilon y)\pi_0(y,\varepsilon)\} + o(\varepsilon^2),$$

$$(\rho+x+\varepsilon y+\frac{1}{\nu})\pi_2(y,\varepsilon)=\rho\left[h\pi_2(y,\varepsilon)-\varepsilon h\frac{\partial\pi_2(y,\varepsilon)}{\partial y}+\frac{\varepsilon^2}{2}h\frac{\partial^2\pi_2(y,\varepsilon)}{\partial y^2}+(1-h)\pi_2(y,\varepsilon)\right]+$$
$$+(1-h)\left[(x+\varepsilon y)\pi_2(y,\varepsilon)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(x+\varepsilon y)\pi_2(y,\varepsilon)\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(x+\varepsilon y)\pi_2(y,\varepsilon)\}\right]+$$
$$+h(x+\varepsilon y)\pi_2(y,\varepsilon)+\pi_1(y,\varepsilon)+o(\varepsilon^2),$$
$$(\rho+x+\varepsilon y+\frac{1}{a})\pi_c(y,\varepsilon)=\rho\left[h\pi_c(y,\varepsilon)-\varepsilon h\frac{\partial\pi_c(y,\varepsilon)}{\partial y}+\frac{\varepsilon^2}{2}h\frac{\partial^2\pi_c(y,\varepsilon)}{\partial y^2}+(1-h)\pi_c(y,\varepsilon)\right]+$$
$$+(1-h)\left[(x+\varepsilon y)\pi_c(y,\varepsilon)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(x+\varepsilon y)\pi_c(y,\varepsilon)\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(x+\varepsilon y)\pi_c(y,\varepsilon)\}\right]+$$
$$+\rho\left[h^2\pi_1(y,\varepsilon)-2\varepsilon h^2\frac{\partial\pi_1(y,\varepsilon)}{\partial y}+\frac{4\varepsilon^2}{2}h^2\frac{\partial^2\pi_1(y,\varepsilon)}{\partial y^2}+(1-h)^2\pi_1(y,\varepsilon)\right]+$$
$$+\rho\left[2h(1-h)\pi_1(y,\varepsilon)-2h(1-h)\varepsilon\frac{\partial\pi_1(y,\varepsilon)}{\partial y}+2h(1-h)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\pi_1(y,\varepsilon)}{\partial y^2}\right]+$$
$$+h^2(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)-h^2\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)\}+h^2\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)\}+$$
$$+(1-h)^2(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)+(1-h)^2\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)\}+$$
$$+(1-h)^2\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)\}+2h(1-h)(x+\varepsilon y)\pi_1(y,\varepsilon)+h(x+\varepsilon y)\pi_c(y,\varepsilon)+o(\varepsilon^2).$$

Сложим уравнения полученной системы и, выполнив замену (4), получим

$$\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial y}\{x\varphi_0(y)+[(1-h)x-\rho h](\varphi_2(y)+\varphi_c(y))-[2\rho h-(1-2h)x]\varphi_1(y)\}+\right.$$
$$+\{R_0+(1-h)(R_2+R_c)+(1-2h)R_1\}\frac{\partial(y\pi(y))}{\partial y}+$$
$$\left.+\frac{1}{2}\{xR_0+(\rho h+(1-h)x)(R_2+R_c)+(2\rho h(1+h)+(1-2h+2h^2)x)R_1\}\frac{\partial^2\pi(y)}{\partial y^2}\right]=o(\varepsilon^2).$$

Поделив правую и левую части иа $\varepsilon^2$, устремляем $\varepsilon$ к нулю и, выполнив замену (7), получим уравнение, определяющее функцию $\pi(y)$,

$$\left\{[(1-h)G-\rho]aR_1-(G-\rho)\frac{R_0-R_1}{G}+R_0+(1-h)(R_c+R_2)+(1-2h)R_1\right\}\frac{\partial(y\pi(y))}{\partial y}+$$
$$+\left\{((1-h)G-\rho)[((1-h)G-\rho)(\nu R_2+aR_c)+a((1-2h)G-\rho)R_1]-\frac{(G-\rho)^2}{G}R_0+\right. \tag{8}$$
$$\left.+\frac{1}{2}[(G-\rho)R_0+((1-h)G+(2h-1)\rho)(R_2+R_c)+[2\rho h(1+h)+(1-2h+2h^2)(G-\rho)]R_1]\right\}\frac{\partial^2\pi(y)}{\partial y^2}=0.$$

Введем обозначения:

$$\alpha(G) = [(1-h)G - \rho]aR_1 - (G-\rho)\frac{R_0 - R_1}{G} + R_0 + (1-h)(R_c + R_2) + (1-2h)R_1,$$

$$\beta(G) = ((1-h)G - \rho)[((1-h)G - \rho)(\nu R_2 + aR_c) + a((1-2h)G - \rho)R_1] - \frac{(G-\rho)^2}{G}R_0 +$$

$$+\frac{1}{2}\Big[(G-\rho)R_0 + ((1-h)G + (2h-1)\rho)(R_2 + R_c) + [2\rho h(1+h) + (1-2h+2h^2)(G-\rho)]R_1\Big].$$

Тогда уравнение (8) приобретет вид

$$\alpha(G)(y\pi(y))' + \beta(G)\pi''(y) = 0,$$

его решение $\pi(y)$ можно записать следующим образом:

$$\pi(y) = Ce^{-\frac{\alpha(G)}{\beta(G)}\frac{y^2}{2}}, \tag{9}$$

где $C - const$, определяемая из условия нормировки.

Полученное выражение (9) определяет вид асимптотической плотности распределения вероятностей нормированной величины отклонения исследуемого процесса от асимптотического среднего. То есть получили нормальное распределение с дисперсией $D = \frac{\beta(G)}{\alpha(G)}$.

Рассмотрим частный случай, когда $h = 1$. Уравнение (6), определяющее значение параметра $x$, примет вид

$$\rho = \frac{G}{aG^2 + (2+\nu)G + 1}, \tag{10}$$

а для асимптотической плотности $\pi(y)$ параметры $\alpha(G)$ и $\beta(G)$ можно записать следующим образом:

$$\alpha(G) = -\rho aR_1 - (G-\rho)\frac{R_0 - R_1}{G} + R_0 - R_1,$$

$$\beta(G) = \rho[\rho\nu R_2 + a(\rho R_c + (G+\rho)R_1)] - \frac{(G-\rho)^2}{G}R_0 +$$

$$+\frac{1}{2}[(G-\rho)R_0 + \rho(R_2 + R_c) + [4\rho + (G-\rho)]R_1].$$

Можно показать, что $\beta(G) > 0$, а знак $\alpha(G)$ зависит от знака производной $\rho(G)$:

$$\rho(G) = \frac{G}{aG^2 + (2+\nu)G + 1}.$$

Из полученного выражения следует, что $\rho'(G) > 0$, когда $\rho < \max\limits_{0 \le G \le \infty} \rho(G)$. Следовательно, величина $\frac{\alpha(G)}{\beta(G)}$ положительна при $\rho < \max\limits_{0 \le G \le \infty} \rho(G)$, то есть в точке $G_1$, и отрицательна в точке $G_2$, где $G_1$ и $G_2$ – корни уравнения (10). Таким образом, точка $G_2$ является несущественной. То есть процесс флуктуирует в окрестности точки $G_1$, а величина, характеризующая отклонение процесса $i(t)$ от точки стабилизации, распределена по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $D = \frac{\beta(G)}{\alpha(G)}$.

## Заключение

В работе рассмотрена сеть связи, управляемая протоколом случайного множественного доступа с резервированием канала и оповещением о конфликте (сеть Ethernet). Построена и исследована математическая модель в виде однолинейной системы массового обслуживания, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром $\lambda$. При появлении сообщения АС посылает сигнал резервирования канала. Длительность резервирования канала, интервала оповещения о конфликте и время передачи сообщения распределены по экспоненциальному закону. Исследование проводилось методом асимптотического анализа марковизируемых систем.

Приведенные выше исследования можно использовать для сравнения протокола Ethernet с другими протоколами, в частности с протоколом DQDB, в котором также производится резервирование канала.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Новиков Ю.В., Кондратенко С.В. Локальные сети. М.: Эком, 2000.
2. Флинт Д. Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986.
3. Рубин И. Управление доступом к среде в высокоскоростных локальных и городских сетях связи // ТИИЭР, 1990. №1. С.143-162.
4. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. М.: Мир, 1993.
5. Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания. М.: Радио и связь, 1981.